

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Аналітична геометрія

Навчальні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх спеціальностей

Київ – 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Аналітична геометрія

Навчальні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх спеціальностей

Київ – 2012

УДК 514.122+514.123
ББК 22.151
А 84

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.С. Пастухова, старший викладач

Рецензент: Я.М. Якимів, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.К. Чибіряков, доктор техн. наук,
професор

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол
№ 1 від 31 серпня 2012 року.

Видається в авторській редакції

Аналітична геометрія: Навчальні завдання з вищої математики
для студентів 1-го курсу всіх спеціальностей / Уклад.: Н.В. Бондаренко,
В.В. Отрашевська, М.С. Пастухова. – К.: КНУБА, 2012. – 30 ст.

Методична розробка містить тридцять варіантів навчальних
завдань за темою «Аналітична геометрія».

Призначено для студентів всіх спеціальностей

Загальні положення

Методична розробка містить 30 варіантів вправ з аналітичної геометрії на площині та в просторі. Навчальні завдання охоплюють всі основні теми з цього розділу курсу вищої математики: векторна алгебра, пряма на площині та в просторі, площини та криві другого порядку.

Навчальні завдання можуть бути використані як основа типового розрахунку з вищої математики для студентів I курсу всіх спеціальностей. Завдання для конкретних груп студентів викладач підбирає індивідуально з урахуванням програм, часу, який виділяється для відповідного виду робіт, можливостей аудиторії. Наведені завдання можна також використовувати для самостійної роботи студентів, як задачі для контролю рівня засвоєння студентами знань з аналітичної геометрії.

Варіант 1

- Для векторів $\vec{a} = (1; -2; 3)$ і $\vec{b} = (3; 0; -1)$:
 - знайти скалярний та векторний добутки векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{b} - \vec{a}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти $pr_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$, де $\vec{a} = (3; -1; 5)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$.
- Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x - 2y - 8 = 0$ і $3x - 2y - 8 = 0$, а середина третьої співпадає з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони.
- Знайти точку M_C симетричну точці $M(0; 2; -6)$ відносно прямої $x = 27 - t$, $y = 11 - 2t$, $z = -15 - 2t$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-3; 2; 1)$, $B(0; -3; -1)$, $C(2; 0; -2)$, $D(2; -1; 5)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ за умови, що її ексцентриситет $\varepsilon = 1,25$.
- Побудувати криву $r = 4 \sin 3\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 2

- Для векторів $\vec{a} = (6; 12; -1)$ і $\vec{b} = (1; 3; 0)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- В точках $A_1(2; -1)$ та $A_2(3; 4)$ зосереджені маси $m_1 = m_2 = 1$. Знайти точку $M(x; y)$ – центр ваги системи.
- Дві сторони квадрата лежать на прямих $4x - 3y - 24 = 0$ і $4x - 3y + 11 = 0$. Обчисліть площу квадрата.
- Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 4; 3)$ перпендикулярно площинам $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ і $x + 4y - z + 5 = 0$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; 5)$, $C(-1; 3; 4)$, $D(-2; 1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами 30.
- Побудувати криву $r = 2 \cos 2\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 24y = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 3

1. Для векторів $\vec{a} = (1; 0; 1)$ і $\vec{b} = (-2; 3; 5)$:
 - a) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - b) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - c) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - d) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$;
 - e) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
2. Сила $\vec{F} = (1; -8; 7)$ прикладена в точці $A(1; -7; 6)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки O – початку координат.
3. Знайти точку M_1 симетричну точці $M_2(-1; 8)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(-2; 0)$ і $B(4; 3)$.
4. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$ паралельно прямій $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.
5. Дано координати вершин тетраедра: $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(2; 0; 4)$, $D(3; -1; 2)$. Знайти:
 - a) рівняння та довжину ребра AB ;
 - b) рівняння площини ABC ;
 - c) площу грані ABC ;
 - d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - f) об'єм тетраедра $ABCD$;
 - g) відстань від точки A до прямої BD ;
 - h) проекцію E вершини D на площину ABC .
6. Скласти рівняння параболи, знаючи що її вершина знаходиться в початку координат, відстань від фокуса до вершини дорівнює 4, а вісь симетрії є вісь абсцис.
7. Побудувати криву $r = \frac{4}{2 - \cos \varphi}$ в полярній системі координат.
8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $9x^2 + 16y^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 4

- Для векторів $\vec{a} = (-2; 4; 1)$ і $\vec{b} = (1; -2; 7)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти координати вектора \vec{x} , який перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (1; -1; 2)$ і $\vec{b} = (3; -4; 4)$, утворює з віссю Oz тупий кут та $|\vec{x}| = \sqrt{21}$.
- Дано рівняння сторін трикутника $3x + 2y - 10 = 0$ і $x + 2y - 5 = 0$, висоти якого перетинаються в початку координат. Знайти рівняння третьої сторони.
- Знайти відстань між паралельними прямими $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ та $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-2; 0; 3)$, $B(-1; 5; 2)$, $C(2; 1; 4)$, $D(3; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB;
 - рівняння площини ABC;
 - площу грані ABC;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC;
 - об'єм тетраедра ABCD;
 - відстань від точки A до прямої BD;
 - проекцію E вершини D на площину ABC.
- Записати рівняння кола, яке має центр в фокусі параболи $y^2 = 4x$ та проходить через лівий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 4$.
- Побудувати криву $r = 2(1 + \cos \varphi)$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 5

- Для векторів $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (2; -1; -1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 8\vec{a} - \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- Через точку перетину прямих $4x - y - 10 = 0$ і $x + 3y - 9 = 0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками $A(-3; 1)$ та $B(-1; 4)$ у відношенні $2:3$.
- Знайти відстань між мимобіжними прямими $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ та $x = -2t$, $y = -5 + 3t$, $z = 4$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(0; 3; 2)$, $B(-1; 2; -2)$, $C(1; 2; 4)$, $D(-1; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо дана точка $M(-2\sqrt{5}; 2)$ еліпса і його мала піввісь $b = 3$.
- Побудувати криву $r = \frac{3}{2 - \cos \varphi}$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 6

- Для векторів $\vec{a} = (3; 5; 4)$ і $\vec{b} = (5; 9; 7)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = -2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти роботу, виконану силою $\vec{F} = (1; 4; 8)$, якщо точка її прикладення переміщується прямолінійно з точки $A(-4; 2; -6)$ в точку $B(3; 1; 2)$. Під яким кутом до \vec{AB} напрямлена сила \vec{F} .
- Дано рівняння однієї із сторін ромба $x - 3y + 10 = 0$ і однієї із його діагоналей $x + 4y - 4 = 0$; діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0; 1)$. Знайти рівняння інших сторін ромба.
- Запишіть рівняння площин, віддалених від площини $2x + 6y + 3z - 6 = 0$ на відстань $d = 5$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(2; 2; -1)$, $B(-3; 1; 0)$, $C(1; 2; 1)$, $D(2; 0; -3)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Дано еліпс $x^2 + 3y^2 = 27$ і парабола $x^2 = 4\sqrt{2}y$. Знайти відстань від фокуса параболи до фокусів еліпса.
- Побудувати криву $r^2 = 4 \sin 2\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 - 6xy - 7y^2 + 2x + 26y + 57 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 7

- Для векторів $\vec{a} = (1; 4; -2)$ і $\vec{b} = (1; 1; -1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b}
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a}
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{m} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Який кут утворюють одиничні вектори \vec{p} і \vec{q} , якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?
- Задані рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y - 3 = 0$, $2x + y + 4 = 0$ та одна з його вершин $A(4; -2)$. Записати рівняння інших його сторін та обчислити площу цього прямокутника.
- Знайти рівняння площини, що проходить через прямі $x = t$, $y = -8 - 4t$, $z = -3 - 3t$ та $x = -1 + t$, $y = 4 - 4t$, $z = 3 - 3t$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 0; -2)$, $C(2; 1; 3)$, $D(3; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Скласти рівняння параболи, якщо її фокус знаходиться в точці $F(-7; 0)$ і рівняння директриси $x - 7 = 0$.
- Побудувати криву $r = 3 \sin 3\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 8

- Для векторів $\vec{a} = (1; -2; 5)$ і $\vec{b} = (3; -1; 0)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти $pr_{\vec{b}-3\vec{a}}(\vec{a})$, де $\vec{a} = (3; 0; 1)$ та $\vec{b} = (2; -2; 6)$.
- Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-3; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$. Знайти рівняння сторони AD, рівняння та довжину висоти BK, опущеної з вершини B на сторону AD, тангенс кута між діагоналями паралелограма.
- Знайти проекцію точки $P(6; -4; 5)$ на площину, що проходить через три точки $A(-1; -2; 2)$, $B(2; -1; -7)$, $C(0; -1; 1)$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-3; -2; 2)$, $B(-1; -3; 1)$, $C(-2; 0; 1)$, $D(1; -1; 4)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB;
 - рівняння площини ABC;
 - площу грані ABC;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC;
 - об'єм тетраедра ABCD;
 - відстань від точки A до прямої BD;
 - проекцію E вершини D на площину ABC.
- Визначити ексцентриситет еліпса, знаючи, що відстань між фокусами рівна відстані між вершинами еліпса, які лежать на кінцях малої і великої півосі.
- Побудувати криву $r = 9 \sin^2 \varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 9

- Для векторів $\vec{a} = (3; 4; -1)$ і $\vec{b} = (2; -1; 1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- В точках $A_1(6; -1)$ та $A_2(1; 3)$ зосереджені маси $m_1 = 1$, $m_2 = 3$. Знайти точку $M(x; y)$ – центр ваги системи.
- Дано дві вершини трикутника $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$ і точка перетину медіан $K(1; 2)$. Обчислити відстань від третьої вершини C до сторони AB .
- Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ паралельно прямій $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(0; 3; -1)$, $B(-1; -2; 5)$, $C(1; 0; -4)$, $D(-3; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = 0,5x$ і $y = -0,5x$ і координати однієї з її точок $M(12; 3\sqrt{3})$, скласти канонічне рівняння гіперболи.
- Побудувати криву $r = 4 + \cos 2\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-2x^2 + 4xy - 5y^2 - 4x + 10y - 5 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 10

1. Для векторів $\vec{a} = (-2; -3; -2)$ і $\vec{b} = (1; 0; 5)$:
 - a) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - b) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - c) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - d) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 3\vec{a} + 9\vec{b}$ і $\vec{m} = -\vec{a} - 3\vec{b}$;
 - e) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
2. Сила $\vec{F} = (4; 0; 3)$ прикладена в точці $A(7; -2; 4)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки O – початку координат.
3. Рівняння двох сторін паралелограма $x + 2y + 2 = 0$ і $x + y - 4 = 0$, а рівняння однієї із його діагоналей $x - 2 = 0$. Знайти координати вершин паралелограма.
4. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -3; 2)$ паралельно площині $4x - 3y - 4z - 7 = 0$ і перетинає пряму $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.
5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-2; 5; 3)$, $B(0; 3; -1)$, $C(2; 2; 4)$, $D(3; 1; -2)$. Знайти:
 - a) рівняння та довжину ребра AB ;
 - b) рівняння площини ABC ;
 - c) площу грані ABC ;
 - d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - f) об'єм тетраедра $ABCD$;
 - g) відстань від точки A до прямої BD ;
 - h) проекцію E вершини D на площину ABC .
6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в фокусах рівносторонньої гіперболи $y^2 - x^2 = 8$, якщо еліпс проходить через точку $A(3; 0)$.
7. Побудувати криву $r = \frac{5}{6 - 2 \sin \varphi}$ в полярній системі координат.
8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 11

1. Для векторів $\vec{a} = (-1; 4; 2)$ і $\vec{b} = (3; -2; 6)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = -6\vec{a} + 3\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Дано два вектори $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (3; 4; -6)$. Знайти координати вектора \vec{x} , якщо він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умови: $(\vec{x}, \vec{a}) = -8$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 10$.

3. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $8x - 7y + 25 = 0$ і вершину прямого кута $B(3; -1)$.

4. Дано вершини трикутника $A(2; 2; 1)$, $B(2; -3; -1)$, $C(0; 1; 2)$. Через сторону AB провести площину перпендикулярну до площини трикутника.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(2; -3; -2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-2; 0; 1)$, $D(4; -1; 3)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB;
- рівняння площини ABC;
- площу грані ABC;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC;
- об'єм тетраедра ABCD;
- відстань від точки A до прямої BD;
- проекцію E вершини D на площину ABC.

6. Обчислити площу прямокутника, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

так, що дві його протилежні сторони проходять через фокуси.

7. Побудувати криву $r = 3 \sin 2\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 12

- Для векторів $\vec{a} = (5; 0; -1)$ і $\vec{b} = (7; 2; 3)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = -6\vec{a} + 3\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{r}$, $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{r}| = 4$ і кут $(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\pi}{4}$.
- Дано дві вершини $A(-3; 3)$ і $B(5; -1)$ і точка $D(4; 3)$ перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін.
- Знайти рівняння площини, що проходить через прямі $x = -2 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = 4 - t$ та $x = 12 + 6t$, $y = 1 + 2t$, $z = 4 - 2t$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-3; 1; -2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; -3)$, $D(0; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки M гіперболи до директриси рівна 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, однобічного з цією директрисою.
- Побудувати криву $r = \frac{7}{4 - 3 \cos \varphi}$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 13

- Для векторів $\vec{a} = (0; 3; -2)$ і $\vec{b} = (1; -2; 1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти роботу, виконану силою $\vec{F} = (2; 3; 1)$, якщо точка її прикладення переміщується прямолінійно з точки $A(-2; 1; -4)$ в точку $B(1; 3; 2)$. Під яким кутом до \vec{AB} напрямлена сила \vec{F} .
- В трикутнику з вершинами $A(-4; -2)$, $B(8; -11)$, $C(6; 3)$ визначити точку перетину висот (ортоцентр).
- Знайти точку S симетричну точці $P(-46; 2; -12)$ відносно прямої
$$\begin{cases} x - 2y + z + 12 = 0, \\ 2x + 3y - z - 22 = 0. \end{cases}$$
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-1; 3; -1)$, $B(2; 0; 5)$, $C(2; 3; 4)$, $D(5; -1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- З точки $P(15; -3)$ проведено дотичні до еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Скласти рівняння хорди, що сполучає точки дотику.
- Побудувати криву $r^2 = \cos 2\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $4x^2 - 4xy + y^2 + 3y - 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 14

1. Для векторів $\vec{a} = (-2; 7; -1)$ і $\vec{b} = (-3; 5; 2)$:

а) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;

б) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;

в) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;

г) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;

д) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{c} + \alpha \vec{d}$ і $\vec{r} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$

перпендикулярні, якщо $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 4$, $(\vec{c}, \vec{d}) = 120^\circ$?

3. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(-2; 1)$, $B(1; -3)$. Скласти рівняння його сторін. Знайти площу квадрата.

4. Дано точку $A(-2; 3; -3)$. Знайти проекцію Р точки А на площину $10x + 4y + 12z - 21 = 0$ та точку S симетричну точці А відносно даної площини.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(3; -2; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(1; -1; -2)$, $D(3; 2; -5)$. Знайти:

а) рівняння та довжину ребра АВ;

б) рівняння площини АВС;

в) площу грані АВС;

г) кут нахилу ребра AD до площини АВС;

д) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань АВС;

е) об'єм тетраедра ABCD;

ж) відстань від точки А до прямої BD;

з) проекцію Е вершини D на площину АВС.

6. Записати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в фокусах еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$, а фокуси – в вершинах еліпса.

7. Побудувати криву $r = 3 \cos 3\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y - 16 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 15

1. Для векторів $\vec{a} = (3; 7; 0)$ і $\vec{b} = (1; -3; 4)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Вектор \vec{a} утворює з координатними осями Ox і Oy відповідно кути $\alpha = 60^\circ$ і $\beta = 120^\circ$. Обчислити його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$ і кут γ з віссю Oz – тупий.

3. Дано вершини $A(-3; -2)$, $B(4; -1)$, $C(1; 3)$ трапеції $ABCD$ (сторони AD і BC паралельні). Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини D цієї трапеції.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин $5x - y - 2z - 3 = 0$, $13x - 2y - 5z - 7 = 0$ перпендикулярно площині $2x - 3y + z - 11 = 0$. Знайти відстань від точки $M(1; 2; 1)$ до отриманої площини.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(2; 1; -3)$, $B(-1; -3; 2)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(3; 0; -2)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- відстань від точки A до прямої BD ;
- проекцію E вершини D на площину ABC .

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

7. Побудувати криву $r = 3(1 - \sin \varphi)$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 20 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 16

- Для векторів $\vec{a} = (-1; 2; -1)$ і $\vec{b} = (2; -7; 1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -3\vec{a} + \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти $pr_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{c})$, де $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (3; 2; 4)$, $\vec{c} = (1; -2; 5)$.
- Промінь світла напрямлений по прямій $4x + 5y - 3 = 0$. Дійшовши до прямої $x - 3y - 5 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.
- Знайти відстань від прямої $x = -2t$, $y = 9t - 7$, $z = 2t + 2$ до прямої, що проходить через точку $M(9; -2; 0)$ паралельно площинам $x + y - z + 3 = 0$ та $7x + 5y + 2z - 1 = 0$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(0; -3; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(1; -2; 4)$, $D(1; 1; -2)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Записати рівняння кола, що має центр у фокусі параболи $y^2 = 6x$ і проходить через лівий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 8$.
- Побудувати криву $r = \frac{3}{\sin \varphi}$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 2y + 9 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 17

- Для векторів $\vec{a} = (7; 9; -2)$ і $\vec{b} = (5; 4; 3)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 4\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = -\vec{a} + 4\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Дано, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Визначити, при якому значенні λ вектори $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.
- Визначити координати точки, симетричної точці $A(-5; -1)$ відносно прямої $7x + 4y - 26 = 0$.
- Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ і площиною $2x + 4y - z - 5 = 0$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(-2; 2; 1)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(1; -2; -3)$, $D(2; 0; 3)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Записати рівняння рівнобічної гіперболи, вершини якої лежать в фокусах еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$.
- Побудувати криву $r = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 18

1. Для векторів $\vec{a} = (5; 0; -2)$ і $\vec{b} = (6; 4; 3)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = -10\vec{a} + 6\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Сила $\vec{F} = (3; 1; -1)$ прикладена в точці $A(-2; 0; 4)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $M(-3; -2; 1)$.

3. Дано дві вершини $A(2; -2)$ і $B(3; -1)$ і точка $P(1; 0)$ перетину медіан трикутника ABC. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину C.

4. Переконавшись, що прямі $x = -3 + 2t$, $y = 3 + 6t$, $z = -4 - 4t$ і $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{2}$ паралельні, знайти відстань між ними.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-2; 2; 5)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(-3; 3; 1)$, $D(-1; 4; 3)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB;
- рівняння площини ABC;
- площу грані ABC;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC;
- об'єм тетраедра ABCD;
- відстань від точки A до прямої BD;
- проекцію E вершини D на площину ABC.

6. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

7. Побудувати криву $r = 4 \sin 3\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 19

1. Для векторів $\vec{a} = (8; 3; -1)$ і $\vec{b} = (4; 1; 3)$:
 - a) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - b) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - c) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - d) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - e) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
2. Знайти координати вектор \vec{x} , який колінеарний до вектора $\vec{a} = (2; 3; -1)$ і задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{a}) = 7$.
3. Із точки $M(2;3)$ під кутом α до осі Ox напрямлений промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Дійшовши до осі Ox , промінь світла від неї відбився. Скласти рівняння прямих, на яких лежать падаючий та відбитий промені.
4. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 17 = 0$ і перетинає пряму $x = 3t + 2$, $y = -2t - 4$, $z = 3t + 1$.
5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-3; 1; 3)$, $B(-4; 2; -1)$, $C(-2; 1; -1)$, $D(-2; 3; 1)$. Знайти:
 - a) рівняння та довжину ребра AB ;
 - b) рівняння площини ABC ;
 - c) площу грані ABC ;
 - d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - f) об'єм тетраедра $ABCD$;
 - g) відстань від точки A до прямої BD ;
 - h) проекцію E вершини D на площину ABC .
6. Записати рівняння директриси параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус співпадає з правою вершиною еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$.
7. Побудувати криву $r = \frac{6}{1 - 2 \cos \varphi}$ в полярній системі координат.
8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 - 9y^2 + 8x + 18y + 7 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 20

1. Для векторів $\vec{a} = (3; 1; -6)$ і $\vec{b} = (5; 7; 10)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 5\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ і кут $(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$.

3. Дано дві вершини рівностороннього трикутника $A(2; 1)$ і $B(6; 1)$. Визначити координати третьої вершини C .

4. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x + 2y + z = 8; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$ паралельно прямій $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(2; 1; 4)$, $B(0; 0; 2)$, $C(1; -1; 6)$, $D(2; -1; 2)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- відстань від точки A до прямої BD ;
- проекцію E вершини D на площину ABC .

6. Скласти рівняння гіперболи, координати фокусів якої $(\pm 5; 0)$, а рівняння її асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$.

7. Побудувати криву $r = -4 \sin 2\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 21

- Для векторів $\vec{a} = (1; 2; -4)$ і $\vec{b} = (7; 3; 5)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Знайти роботу, виконану силою $\vec{F} = (1; 5; 2)$, якщо точка її прикладення переміщується прямолінійно з точки $A(0; -1; -1)$ в точку $B(2; 5; -3)$. Під яким кутом до \vec{AB} напрямлена сила \vec{F} .
- Задано трикутник з вершинами $A(5; 7)$, $B(-3; 1)$, $C(0; -3)$. Знайти центр описаного кола.
- Знайти відстань від точки $P(1; -2; -1)$ до площини, що проходить через точку $M_0(1; 2; 1)$ і пряму
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$
- Дано координати вершин тетраедра: $A(1; 3; 4)$, $B(1; 1; 2)$, $C(-1; 2; 2)$, $D(0; 1; 6)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Записати рівняння директриси параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус співпадає з правою вершиною еліпса $x^2 + 2y^2 = 32$.
- Побудувати криву $r = 2 \cos 3\varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 22

- Для векторів $\vec{a} = (3; 7; 0)$ і $\vec{b} = (4; 6; -1)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{m} = 5\vec{a} - 7\vec{b}$.
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- В точці $A(1; 2; -4)$ прикладена сила \vec{F} така, що $|\vec{F}| = 7$. Знаючи, що дві координати цієї сили $x = -3$, $y = 6$, а третя $z > 0$, знайти кінець вектора, що зображує силу.
- Дано рівняння двох висот трикутника $x + y = 4$ і $y = 2x$ і одна із його вершин $A(0; 2)$. Скласти рівняння сторін трикутника.
- Знайти відстань від точки $A(2; -5; 3)$ до площини, що проходить через дві прямі $\frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ і $\frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(2; 0; 3)$, $B(1; 1; 7)$, $C(0; 1; 3)$, $D(2; -2; 5)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Знайти відстань від фокусів еліпса $x^2 + 2y^2 = 8$ до асимптот гіперболи $2x^2 - y^2 = 18$.
- Побудувати криву $r = \frac{3}{1 - 2 \cos \varphi}$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 23

1. Для векторів $\vec{a} = (2; -1; 4)$ і $\vec{b} = (3; -7; -6)$:
 - a) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - b) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - c) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - d) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$;
 - e) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
2. Знайти $pr_{\vec{c}}(\vec{a} + 2\vec{b})$, де $\vec{a} = (-1; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; 1; -4)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$.
3. Кінцями однієї діагоналі квадрата є точки $A(3; 2)$ і $C(8; 7)$. Знайти рівняння діагоналей і сторін квадрата.
4. Записати рівняння множини точок рівновіддалених від паралельних прямих $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ і $\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$.
5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-1; -2; -1)$, $B(-3; -2; 1)$, $C(-1; 0; 3)$, $D(-3; 1; 5)$. Знайти:
 - a) рівняння та довжину ребра AB ;
 - b) рівняння площини ABC ;
 - c) площу грані ABC ;
 - d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - f) об'єм тетраедра $ABCD$;
 - g) відстань від точки A до прямої BD ;
 - h) проекцію E вершини D на площину ABC .
6. Коло з центром в початку координат проходить через фокуси гіперболи $x^2 - y^2 = 32$. Знайти точки перетину цього кола з директрисою параболи $y^2 - 8\sqrt{2}x = 0$.
7. Побудувати криву $r = 4(\cos \varphi - 1)$ в полярній системі координат.
8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $5x^2 + 5y^2 - 10xy + 6x - 4y + 9 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 24

1. Для векторів $\vec{a} = (5; -1; -2)$ і $\vec{b} = (6; 0; 7)$:

а) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;

б) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;

в) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;

г) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = 4\vec{a} - 6\vec{b}$.

е) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. В точках $A_1(-9; 5)$ та $A_2(4; 1)$ зосереджені маси $m_1 = 5$, $m_2 = 1$. Знайти точку $M(x; y)$ – центр ваги системи.

3. Сторони АВ і АС трикутника АВС задані рівняннями $2x + y = 0$ і $x - 2y - 5 = 0$ відповідно. Знайти координати всіх вершин трикутника, знаючи, що основа висоти, опущеної з вершини А, має координати $(2; 1)$.

4. Знайти відстань від точки $B(-1; 3; 6)$ до площини, що проходить через дві прямі $\frac{x-6}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-1}{5} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-2; 5; -3)$, $B(2; -3; 1)$, $C(2; -2; -4)$, $D(-3; 1; 2)$. Знайти:

а) рівняння та довжину ребра АВ;

б) рівняння площини АВС;

в) площу грані АВС;

г) кут нахилу ребра AD до площини АВС;

д) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань АВС;

е) об'єм тетраедра ABCD;

ж) відстань від точки А до прямої BD;

з) проекцію E вершини D на площину АВС.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ох, якщо сума її дійсної і уявної півосей дорівнює 7, а відстань між фокусами дорівнює 10.

7. Побудувати криву $r = \frac{5}{3 - 2 \cos \varphi}$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 25

- Для векторів $\vec{a} = (-9; 5; 3)$ і $\vec{b} = (7; 1; -2)$:
 - знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
 - знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
 - перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$;
 - обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .
- Сила $\vec{F} = (2; 3; 4)$ прикладена в точці $A(1; -2; 0)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки O – початку координат.
- Знайти координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $3x - y + 5 = 0$ і $3x - y + 13 = 0$ і рівняння однієї з її діагоналей $x + y + 3 = 0$.
- Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{2}$ паралельно прямій $\frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-2}$.
- Дано координати вершин тетраедра: $A(1; 3; 0)$, $B(-2; 1; 4)$, $C(2; 0; 1)$, $D(4; -1; 5)$. Знайти:
 - рівняння та довжину ребра AB ;
 - рівняння площини ABC ;
 - площу грані ABC ;
 - кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - об'єм тетраедра $ABCD$;
 - відстань від точки A до прямої BD ;
 - проекцію E вершини D на площину ABC .
- Скласти рівняння еліпса, відстань між фокусами якого дорівнює 8, відстань між директрисами дорівнює 24. Знайти ексцентриситет еліпса.
- Побудувати криву $r = \varphi$ в полярній системі координат.
- Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 26

1. Для векторів $\vec{a} = (4; 2; 9)$ і $\vec{b} = (0; -1; 3)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\vec{m} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (5; -3; 1)$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути.

3. Дано дві вершини трикутника $A(2; -3)$, $B(4; 3)$ і точка $H(3; -2)$ перетину його висот. Написати рівняння сторін цього трикутника.

4. Задана точка $A(-3; -5; 4)$ та пряма $l: x = 8 + 10t, y = 4 - t; z = -3 + 10t$. Знайти проекцію Р точки А на пряму l , точку S, симетричну точці А відносно прямої l , відстань від точки А до прямої l .

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-1; 5; -2)$, $B(1; 2; 2)$, $C(2; 4; -3)$, $D(0; 1; -2)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра АВ;
- рівняння площини АВС;
- площу грані АВС;
- кут нахилу ребра AD до площини АВС;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань АВС;
- об'єм тетраедра ABCD;
- відстань від точки А до прямої BD;
- проекцію E вершини D на площину АВС.

6. Записати рівняння гіперболи, що проходить через точку $A(9; -4)$, якщо її дійсна піввісь $a = 3$. Записати рівняння директрис та асимптот гіперболи.

7. Побудувати криву $r^2 = 9 \cos 2\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 27

1. Для векторів $\vec{a} = (2; -1; 6)$ і $\vec{b} = (-1; 3; 8)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Знайти роботу, виконану силою $\vec{F} = (3; 3; -1)$, якщо точка її прикладення переміщується прямолінійно з точки $A(2; -1; 2)$ в точку

$B(5; 2; 1)$. Під яким кутом до \vec{AB} напрямлена сила \vec{F} .

3. Дано дві точки: $A(-1; 5)$ і $B(4; 0)$. Знайти відношення, в якому пряма $4x - y - 11 = 0$ ділить відрізок AB .

4. Знайти точку перетину площини $\pi: 2x - 3y - z + 2 = 0$ та прямої $l: x = 9 + 5t, y = 9 + 6t, z = -t$. Скласти параметричне рівняння ортогональної проєкції m прямої l на площину π .

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-1; 2; 0)$, $B(2; 1; 5)$, $C(3; 3; -4)$, $D(3; -1; -2)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- відстань від точки A до прямої BD ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC .

6. На параболі $y^2 = 24x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 12.

7. Побудувати криву $r = -3\cos\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 28

1. Для векторів $\vec{a} = (5; 0; 8)$ і $\vec{b} = (-3; 1; 7)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ і $\vec{m} = -9\vec{a} + 12\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Дано вектор $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Знайти координати вектора \vec{d} , паралельного вектору \vec{a} і протилежного з ним напрямку за умови, що $|\vec{d}| = 9$.

3. Дано трикутник з вершинами $A(1; -3)$, $B(5; 7)$, $C(9; -1)$. Знайти центр описаного кола.

4. Площина проходить через пряму $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ паралельно

вектору $\vec{AB} = (8; 4; 7)$. Записати рівняння площини та знайти довжину відрізка, який вона відтинає від осі ординат.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(-3; 0; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(-1; 1; -2)$, $D(3; 2; -4)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- відстань від точки A до прямої BD ;
- проекцію E вершини D на площину ABC .

6. Дано еліпс $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Записати рівняння рівнобічної гіперболи, фокуси якої знаходяться в фокусах еліпса.

7. Побудувати криву $r = 4 + \cos \varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 29

1. Для векторів $\vec{a} = (-1; 3; 4)$ і $\vec{b} = (2; -1; 0)$:

- a) знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- b) знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- c) знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- d) перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -3\vec{a} + \vec{b}$;
- e) обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Сила $\vec{F} = (3; -3; -1)$ прикладена в точці $A(2; -1; -2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки O – початку координат.

3. Рівняння однієї із сторін квадрата $x + 3y - 5 = 0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1; 0)$ – точка перетину його діагоналей.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 2; 1)$ і пряму
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(2; 1; 0)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(2; -3; 1)$, $D(-3; 0; -2)$. Знайти:

- a) рівняння та довжину ребра AB ;
- b) рівняння площини ABC ;
- c) площу грані ABC ;
- d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- f) об'єм тетраедра $ABCD$;
- g) відстань від точки A до прямої BD ;
- h) проекцію E вершини D на площину ABC .

6. Скласти рівняння еліпса, знаючи що відстань між фокусами рівна 12, а велика піввісь рівна 7. Знайти ексцентриситет еліпса, рівняння директрис та відстань від правого фокуса до найближчої директриси.

7. Побудувати криву $r = 2 \varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Варіант 30

1. Для векторів $\vec{a} = (4; 2; -7)$ і $\vec{b} = (5; 0; -3)$:

- знайти скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора \vec{a} ;
- перевірити на колінеарність вектори $\vec{k} = \vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = -2\vec{a} + 6\vec{b}$;
- обчислити площу трикутника, побудованого на векторах \vec{k} і \vec{m} .

2. Перевірити, що вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}$ можуть бути ребрами куба; знайти третє ребро.

3. Точка $A(-3; -2)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $3x + 2y - 3 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі квадрата.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(4; -1; 3)$ паралельно осі Ox і перпендикулярна до площини $x - 3y + 4z - 5 = 0$.

5. Дано координати вершин тетраедра: $A(5; -3; 2)$, $B(3; 2; -1)$, $C(4; -2; 1)$, $D(3; 1; 0)$. Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- відстань від точки A до прямої BD ;
- проекцію E вершини D на площину ABC .

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, що відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

7. Побудувати криву $r^2 = 9 \cos 2\varphi$ в полярній системі координат.

8. Використовуючи теорію квадратичних форм, привести рівняння кривої 2-го порядку $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$ до канонічного виду та побудувати криву.

Список літератури

1. Бугров Я. С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М.: Наука, 1988. – 240 с.
2. Дудовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К. , 2001. – 648 с.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1 Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. – Харьков.: ХГУ, 1973. – 204 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 222 с.
5. Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.

Навчально-методичне видання

Аналітична геометрія

Навчальні завдання
з вищої математики
для студентів 1-го курсу
всіх спеціальностей

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.С. Пастухова, старший викладач

Комп'ютерна верстка О.В. Яворської

Підписано до друку 2012. Формат $60 \times 80_{1/16}$
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.
Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. акр. 2,25. Ум. фарбовідб. 19.
Тираж 100 прим. Вид. № . Зам. № .

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.