

Варіант 1

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{(1+2i)(3-i)}{2-i} - i(4+3i); \quad \text{б) } (\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{36}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x + (1+4i)y = 5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{2}z^3 - 3i + 3 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 0; -3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; 2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (3, 12, -2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U всіх многочленів парного степеня.

Варіант 2

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\text{а) } \frac{2i^6 + 7i}{1-i} - (4+3i)(1-i); \quad \text{б) } (2\sqrt{3} - 2i)^{30}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2+3i)x + (1-i)y = 1+9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4 - 3z^2 - 10 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -3)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -4)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; 1; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, що є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь.

Варіант 3

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\text{а) } \frac{1+8i^3}{4-2i} + (4-i)^2; \quad \text{б) } (2-2i)^{84}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x + (2+2i)y = (1+2i)x - yi.$$

3. Знайти корені рівняння $8\sqrt{3} - 8i - z^3 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 7x - 6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 4 & 3 & -6 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 = 2; \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 8x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; -5)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць.

Варіант 4

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\text{а) } (-1+i)(5+3i) + \frac{i(5-4i)}{2+2i}; \quad \text{б) } (\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{33}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x + (1-2i)^2 y = (-1-4i) \cdot i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4 - \sqrt{7}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 16x + 8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 6; \\ -5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 11x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (1; -4; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; -2; 5)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4; 4; -7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 15 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, сума координат яких дорівнює нулю.

Варіант 5

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{5+3i}{1+3i} - i(3+2i); \quad \text{б) } (-1+\sqrt{3}i)^{26}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)x + (-5+2i)y = 1-i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4 + \sqrt{3}i \cdot z = z$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 4$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -16 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8; \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -4; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 5)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4; 7; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 6

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{4-5i^3}{1+i} - 3i(5+2i); \quad \text{б) } (-\sqrt{3}-3i)^{36}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(5+i)x + (4-2i)y = ix - (2+i)y + 4+i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3 + 5 + 5i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 8 & 2 & -10 \\ 2 & -8 & 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 = -2; \\ -5x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-3; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 9; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $f(1) + f(2) + f(3) = 0$.

Варіант 7

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{(1-5i) \cdot (2+i)}{-1+i} - i^7(4-3i); \quad \text{б) } (\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{30}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2+i)x + (4-i)y = y + 5i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^4 - 5i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -8 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -6; \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 5; -1)$, $\vec{a}_2 = (0; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; 0; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U векторів, у яких всі координати рівні між собою.

Варіант 8

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{(1-6i) \cdot i^3}{-2+i} - (1-i)^2; \quad \text{б) } (-2+2i)^{44}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x + (1+4i)y = 5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3 + 3\sqrt{3} - 3i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x + 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & -10 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ -2 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2; \\ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; -1; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -9)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх симетричних матриць.

Варіант 9

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(2-i) \cdot i^3}{2+3i} + 7 - 2i; \quad \text{б) } (2\sqrt{3} - 2i)^{30}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)^2 x - y = (1+i)x + 9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 4x + 3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -1)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; 7; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U всіх векторів, у яких координати з непарними номерами рівні нулю.

Варіант 10

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(3-i) \cdot i^5}{1-2i} - 3 + 2i; \quad \text{б) } (1-i)^{32}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+4i)x + (5-2i)y = (3+i)x - (2+3i)y + 3+7i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{6}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 16x + 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & 5 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4; \\ x_2 + 4x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{b}_2 = (-1; 2; 5)$, $\vec{b}_3 = (4; 0; -3)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 11)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U тих многочленів, що не містить парних степенів змінної x .

Варіант 11

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(1-3i)(2+i)}{3-i} + 2i(2-i); \quad \text{б) } (-2\sqrt{3} + 2i)^{36}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x + (2-i)^2 y = (-1-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3 + \sqrt{5} + \sqrt{5}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 2$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; 10; 6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких координати є непарними цілими числами.

Варіант 12

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{3i + 2i^6}{1-i} - 5 + 2i; \quad \text{б) } (-5 + 5i)^{24}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)^2 x + (3-2i)y = -2i$.

3. Знайти корені рівняння $3z^3 - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 2x - 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 9 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -7; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\bar{a}_1 = (1; -3; -1)$, $\bar{a}_2 = (-5; 2; 4)$, $\bar{a}_3 = (2; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $b = (-5; -3; 5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, визначник яких дорівнює нулю.

Варіант 13

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } (2-i)^2 + \frac{3+2i}{1-2i}; \quad \text{б) } (3\sqrt{3}-3i)^{30}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(2+i)x + (3-2i)y = (1-i)x + (4+i)y.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3 + \sqrt{5} + \sqrt{15}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -8; \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; -7; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; -2; 5)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; -4; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць.

Варіант 14

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{2-i}{-1+3i} - 2 + 5i^5; \quad \text{б) } (\sqrt{5} - \sqrt{15}i)^{45}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)x - (1+i)y = -7 - 3i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4 + 2 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 16x - 15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -4 & 7 & 10 & -1 \\ 2 & -8 & 3 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5; \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -2; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 0; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U всіх многочленів непарного степеня.

Варіант 15

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{i^5(6-i)}{-2+i} - 4 + 5i; \quad \text{б) } (2\sqrt{3} - 2i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-2i)x - (4+2i)y = 3+4i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 10. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 1)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (9; 0; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $2 \cdot f(1) + 3 \cdot f(2) = 0$.

Варіант 16

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(1+2i)^2}{3-i} - 2 + i; \quad \text{б) } (3 - \sqrt{3}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x + (3-2i)y = -7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 - 1$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 8 & 2 & -4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -3; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -9; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 4)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-3; 3; -7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх діагональних матриць.

Варіант 17

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } 5 - 3i + \frac{i^3(2-i)}{2+i}; \quad \text{б) } (-\sqrt{21} + \sqrt{7}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x + (1+4i)y = 7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^5 + 2 + 2i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (4; 5; 6)$, $\vec{a}_3 = (-1; -3; -2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-8; 7; -5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U тих многочленів, для яких дане число $a \in \mathbf{R}$ буде коренем.

Варіант 18

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } (2-3i)^2 + \frac{(5-6i)}{4+2i} - i^5; \quad \text{б) } (-6+6i)^{96}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(7-i)x + (-2+4i)y = 11+x$.

3. Знайти корені рівняння $2x^6 + 3i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 4 & 1 & -9 \\ -3 & -2 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (5; -1; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -4)$, $\vec{a}_3 = (-3; 2; -2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; 1; 4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розміру n множина U тих векторів, координати яких є парними цілими числами.

Варіант 19

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(1-3i)^2}{2+i} - 1 - i^5; \quad \text{б) } (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{28}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $x + (-1 + 3i)y = 1 - 6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3 + \sqrt{15}i - \sqrt{5} = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 8 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 3 & -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4; \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (3; -8; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -9 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких співпадає перша і остання координата.

Варіант 20

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } (2-i)^2 + \frac{4+i}{1-2i}; \quad \text{б) } (-\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x + (1+4i)y = 5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^6 - 3 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ -7 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -6 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 2 & -4 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 4; 2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; -8; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина всіх тих матриць, в яких сума елементів по діагоналі дорівнює 0.

Варіант 21

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{6+i}{-1-2i} + \frac{4+5i}{i}; \quad \text{б) } (-\sqrt{15} + \sqrt{5}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(6-i)x + (3+2i)y = x - 13i + 13.$$

3. Знайти корені рівняння $7x^3 + \sqrt{18}i - \sqrt{6} = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 20x - 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8; \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -2; -1)$, $\vec{a}_2 = (3; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -4; 2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (11; 3; 9)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U тих многочленів, що задовольняють рівність $f(4) + f(5) = 0$.

Варіант 22

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } (1+3i)(3-2i) + \frac{2i(4+3i)}{1+2i}; \quad \text{б) } (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{40}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x + (1-2i)y = (3-4i) \cdot i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^4 + 6 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & -6 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = -9; \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (0; 5; -2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (10; -1; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких перша і остання координата дорівнюють нулю.

Варіант 23

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(2-i)(1+i)}{-3+i} - i^3(1-i); \quad \text{б) } (-2\sqrt{3} + 2i)^{40}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x + (1+4i)y = 7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 9 & -6 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 0 & 9 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ -5x_1 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 0; 3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; -6; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U тих матриць, діагональні елементи яких дорівнюють нулю.

Варіант 24

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } i^3(1+2i) - \frac{2+3i}{1-2i}; \quad \text{б) } (3-\sqrt{3})^{60}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x + (2-2i)^2 y = (-1-4i).$$

3. Знайти корені рівняння $3x^3 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 15x - 9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 & -5 & -7 \\ -8 & -4 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = -10; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 13x_3 - 8x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; -3; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; -2; 7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U тих многочленів, що не містять парних степенів змінної x .

Варіант 25

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } 3i^3(5+2i) - \frac{4-5i}{1-i}; \quad \text{б) } (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{60}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x + (3-2i)y = -7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{5}z^5 - 2 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 12x + 16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -2; 3)$, $\vec{a}_2 = (0; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; -2)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; -7; -5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, координати яких є парними натуральними числами.

Варіант 26

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{5+2i}{3-i} - i^3(2-3i); \quad \text{б) } (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i)^{60}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x + (1-2i)y = (3-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3 + \sqrt{3}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 11 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7; \\ -4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4; -1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_3 = (-2; -1; -5)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (2; 8; -7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 1 & -8 & 7 \\ 0 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору \mathbf{R}^n всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю.

Варіант 27

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(1+3i)(2-i)}{3+i} - i^6(5+6i); \quad \text{б) } (3\sqrt{3}-3i)^{72}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+i)^2 x + (1-4i)y = 15+16i.$$

3. Знайти корені рівняння $5x^3 + \sqrt{7} - \sqrt{7}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 & -2 \\ 7 & 6 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & -10 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -14; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (-6; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -15 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U діагональних матриць, сума елементів яких дорівнює числу 10.

Варіант 28

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } (3-i)^2 + \frac{1-7i^3}{4+2i}; \quad \text{б) } (-\sqrt{21}-\sqrt{7}i)^{48}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-i)x + (3+4i)y = -3-11i$.

3. Знайти корені рівняння $7z^4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 14x + 15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & 11 & -5 \\ 3 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -7 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -7; \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ -4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -2; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; -8; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 29

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{3-i}{4+5i} - (3+2i) \cdot i^7; \quad \text{б) } (-\sqrt{7} + \sqrt{21i})^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x - (1+2i)y = (9i-4)i.$$

3. Знайти корені рівняння $5z^3 + \sqrt{3}i = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 7$ від

матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 6 \\ -7 & 1 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 9 & 1 & -3 \\ -2 & 10 & -11 & 12 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 6 & 2 & -7 \\ 3 & -8 & 6 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -7 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 1x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-3; 4; -6)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; 1)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (2; 6; -6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем \mathbf{R} множина U тих многочленів, що не містять непарних степенів змінної x .

Варіант 30

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{3-2i^3}{4-3i} - i(3+2i); \quad \text{б) } (2\sqrt{3}+2i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-i)x + (2+i)y = -1+3i$.

3. Знайти корені рівняння $2x^5 - \sqrt{5} = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - x^3 + 4x - 16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці
$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -2 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8; \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -5)$, $\vec{a}_3 = (-3; 1; -1)$ утворюють базис векторного простору \mathbf{R}^3 , і знайти координати вектора $\vec{b} = (-7; 8; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ -9 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.