

## Модуль 1. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

### Питання для опрацювання:

1. Проблеми комбінаторного аналізу та методи їх розв'язання. (Задачі перелічення, задачі про існування та побудову, задачі про вибір.) Правила прямої суми та прямого добутку.
2. Розміщення без повторення. Розміщення з повторенням.
3. Перестановки з повторенням і без повторення.
4. Комбінації з повторенням і без повторення.
5. Впорядковані та неупорядковані розбиття множин.
6. Біноміальна і поліноміальна формули.

### Варіанти завдань.

- 1.1. Розв'язати пряму задачу комбінаторики (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

№	Завдання
1.	а) У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова – 15, у вокальному гуртку – 12 і в фотогуртку – 20 чоловік. Скількома способами можна утворити бригаду із чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа? б) Скільки чотирьохзначних чисел, що утворюються із цифр 0,1,2,3,4,5, містять цифру 3 (цифри в числах не повторюються)?
2.	а) Двадцять вісім кісток доміно розподілено між чотирма гравцями. Скільки може бути різних розподілів? б) Із групи в 15 чоловік треба виділити бригадира і 4 члени бригади. Скількома способами це можна зробити?
3.	а) П'ять учнів треба розподілити у п'ять паралельних класів. Скількома способами це можна зробити? б) Скільки тризначних чисел, що діляться на 3, можна утворити з цифр 0,1,2,4,5, якщо в кожному числі жодна із цифр не повторюється?
4.	а) Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Скількома способами можна розподілитися між цими зупинками 8 пасажирів, що знаходяться в кабіні ліфта? б) Із цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 утворюються різні п'ятизначні числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких одночасно є цифри 2,4,5.

5.	<p>а) Скільки різних десятизначних чисел можна написати, використовуючи цифри 1 і 2?</p> <p>б) У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів третього розряду, 6 – другого і 2 першорозрядники. Визначити кількість таких складів учасників першого туру, щоб шахісти однієї категорії зустрічалися між собою.</p>
6.	<p>а) Скільки різних двозначних чисел можна утворити з цифр 1,2,3,4 за умови, що в кожному числі немає однакових цифр?</p> <p>б) Семеро яблук і три апельсини треба покласти в два пакети так, щоб у кожному пакеті був хоча б один апельсин і, щоб кількість фруктів у них була однаковою. Скількома способами це можна зробити?</p>

*Продовження табл. 2.1*

7.	<p>а) З цифр 0,1,2,3 складені різні чотиризначні числа так, що у кожному числі немає однакових цифр. Скільки таких чисел? Скільки серед них парних чисел?</p> <p>б) Вісім авторів повинні написати книгу з шістнадцяти глав. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два автори напишуть по три глави, чотири – по дві і два – по одній главі книги?</p>
8.	<p>а) Скільки існує шестизначних чисел, усі цифри яких непарні (1,3,5,7,9)?</p> <p>б) Знаки азбуки Морзе складаються із символів (крапок і тире). Скільки слів можна зобразити за умови, що кожне слово містить не більше п'яти символів?</p>
9.	<p>а) Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, якщо в кожне число кожна дана цифра входить не більше одного разу?</p> <p>б) Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день?</p>

<b>10.</b>	<p>а) Скільки різних двозначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3, якщо цифри 0,1,2, входять у кожне число не більше одного разу, а цифра 3 – не більше двох разів?</p> <p>б) Із вази, де стоять 10 червоних і 4 рожевих гвоздики, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?</p>
<b>11.</b>	<p>а) Скільки різних п'ятизначних чисел, більших за 20000, можна скласти з цифр 1,2,3,4, якщо цифри 2,3,4 входять у кожне число по одному разу, а цифра 1 – два рази?</p> <p>б) Двадцяти учням видано два варіанти контрольної роботи. Скількома способами можна розсадити учнів в два ряди, щоб у тих, що сидять поруч, не було однакових варіантів, а у тих, о сидять один за одним, був один і той самий варіант?</p>
<b>12.</b>	<p>а) Скільки різних п'ятизначних чисел без повторення цифр можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 так, щоб парні цифри не стояли поруч?</p> <p>б) Кожний з десяти радистів пункту А намагається встановити зв'язок з кожним із двадцяти радистів пункту В. Скільки можливо різних варіантів такого зв'язку?</p>
<b>13.</b>	<p>а) Номер автомобільного причепа складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 букв і 10 цифр ?</p> <p>б) Шість ящиків із різними матеріалами доставляються на вісім поверхів будови. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах?</p>
<b>14.</b>	<p>а) Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд, так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?</p> <p>б) На книжковій полиці книги з математики і логіки – всього 20 книг. Показати, що найбільша кількість варіантів комплекту, що містить 5 книг з математики і 5 книг з логіки, можлива в тому випадку, коли число книг на полиці з кожного предмета дорівнює 10?</p>
<b>15.</b>	<p>а) Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти?</p>

	<p>б) «Рано-вранці на рибалку усміхнений Мефодій мчав босоніж». Скільки різних осмислених речей можна скласти, використовуючи частину слів цього речення, але не змінюючи порядку їхнього слідування?</p>
<b>16.</b>	<p>а) У шаховій зустрічі беруть участь дві команди, по 8 чоловік у кожній. Кожний з учасників і колір його фігур визначається жеребкуванням. Яке число різних результатів жеребкування?</p> <p>б) На п'ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо: а) усі путівки різні, б) усі путівки однакові?</p>
<b>17.</b>	<p>а) Скількома способами можна розташувати в ряд 5 білих і 4 чорних кулі так, щоб чорні кулі не лежали поруч? Розглянути два випадки: а) кулі одного кольору не відрізняються одна від одної, б) усі кулі різні.</p> <p>б) На першій із двох паралельних прямих лежить 10 точок, на другій – 20. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?</p>
<b>18.</b>	<p>а) Чотири автори повинні написати книгу із 17 глав, причому перший і третій повинні написати по 5 глав, другий – 4, а четвертий 3 глави книги. Скількома способами можна розподілити глави між авторами?</p> <p>б) Скількома способами <math>2n</math> елементів можна розбити на пари, якщо розбиття, що відрізняються тільки порядком елементів усередині пар і порядком розташування пар, вважаються однаковими?</p>
<b>19.</b>	<p>а) У класі 30 учнів. Скількома способами можна виділити двох чоловік для чергування, якщо: а) один з них повинний бути старшим; б) старшого бути не повинно?</p> <p>б) У розіграші першості по футболу були зіграні 15 матчів. Кожні дві команди зустрічалися між собою один раз. Скільки команд брало участь у розіграші першості?</p>
<b>20.</b>	<p>а) У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити одного сержанта і трьох солдатів для патрулювання?</p> <p>б) Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день має бути 5 занять: по алгебрі, геометрії, історії, географії і літературі, при чому алгебра і геометрія не повинні слідувати безпосередньо одна за одною?</p>

21.	<p>а) Скільки різних перестановок можна утворити з букв наступних слів: а) зебра; б) баран; в) водограй; г) абракадабра?</p> <p>б) Хокейна команда складається з 2 воротарів, 7 захисників і 10 нападаючих. Скількома способами тренер може утворити стартову шістку, що складається з воротаря, двох захисників і трьох нападаючих?</p>
22.	<p>а) На конференції повинні виступити доповідачі А, В, С та D, причому В може виступати раніше за А. Скількома способами можна установити черговість виступів?</p> <p>б) Скільки дільників має число 462?</p>
23.	<p>а) На полиці розташовано <math>m</math> книг чорних палітурках та <math>n</math> книг у синіх палітурках, причому всі книги різні. Скількома способами можна розставити книги так, щоб книги в чорних палітурках стояли поруч?</p> <p>б) Скількома способами можна упакувати 9 різних книг у 5 бандеролей, якщо 4 бандеролі повинні містити по 2 книги?</p>
24.	<p>а) Скількома способами 12 однакових монет можна розкласти по п'ятьох різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не залишився порожнім?</p> <p>б) Збори, на яких присутні 30 чоловік, у тому числі дві жінки, вибирають чотирьох чоловік для роботи на виборчій дільниці. Скільки може бути випадків, коли в число обраних ввійдуть обидві жінки?</p>
25.	<p>а) Потрібно розподілити викладання в шістьох класах між трьома викладачами. Скількома способами можна зробити цей розподіл, якщо кожний повинний одержати два класи?</p> <p>б) У лотереї розігрується 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, дістає з неї п'ять квитків. Скількома способами він може їх дістати, щоб 3 з них виявилися виграшними? Усього в урні 100 квитків.</p>
26.	<p>а) Туристи розділилися на дві рівні групи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4 чоловік, знайомих з місцевістю. Скількома способами вони можуть розділитися так, щоб у кожену групу ввійшло 2 чоловік, знайомих з місцевістю, якщо всього їх 16 чоловік?</p> <p>б) На ремонт дитячого будинку будівельна організація виділила бригаду з 5 чоловік. У складі будівельної організації 25 чоловік, у</p>

	тому числі 5 малярів, 4 теслі і 2 штукатури. Скількома способами можна набрати бригаду, щоб у неї ввійшли робітники всіх цих спеціальностей по одному?
<b>27.</b>	<p>а) Для культпоходу придбано <math>2n</math> квитків у театр на місця, що знаходяться у одному ряді партеру (у ряді <math>2n</math> місць). Скількома способами можна розподілити ці квитки між <math>n</math> хлопчиками та <math>n</math> дівчатами, щоб не сиділи поруч двоє хлопчиків чи двоє дівчаток?</p> <p>б) Дев'ять з десяти карт, серед яких є чирвовий туз, роздаються трьом гравцям так, що перший одержує 3, другий 4, а третій 2 карти. Скільки існує способів роздачі карт, при яких чирвовий туз попадає до третього гравця?</p>
<b>28.</b>	<p>а) Скільки різних слів, які складаються з <math>n</math> літер, можна скласти з <math>m</math> літер (<math>n \neq m</math>)?</p> <p>б) В англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен, а загальна кількість імен дорівнює 300(два способи, які відрізняються лише порядком імен, вважаються різними)?</p>
<b>29.</b>	<p>а) Скількома способами можна розставити <math>n</math> нулів та <math>m</math> одиниць таким чином, щоб ніякі дві одиниці не стояли поруч?</p> <p>б) В сьомому класі вивчається 14 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на суботу, якщо в цей день тижня повинно бути 5 уроків?</p>
<b>30.</b>	<p>а) Є четверо чоловіків і шість жінок. Кожен чоловік одружився з однією з жінок. Скількома способами можливо це зробити?</p> <p>б) В коробці лежить три синіх кульки, три червоних і чотири зелених. Вісім кулек забрали, по одній за один раз. Скількома способами можливо це зробити?</p>

## 1.2. Виконати завдання (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

№	Завдання
1.	Розв'язати рівняння: $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42.$
2.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3}. \end{cases}$
3.	Розв'язати рівняння: $\frac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90.$
4.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1,6. \end{cases}$
5.	Розв'язати рівняння: $\frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132.$
6.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2,5x, \\ C_{x-1}^y = 10. \end{cases}$
7.	Розв'язати рівняння: $\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110.$
8.	Розв'язати рівняння: $\frac{P_x + 3P_{x-1}}{2P_{x+2} + 14P_{x+1}} = \frac{2A_x^5}{5A_{x+2}^7}.$
9.	Розв'язати рівняння: $30C_{x-3}^{x-9} = 19A_{x-4}^4.$
10.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_{2n}^{3x} : A_{2n}^{3x-1} = 8, \\ C_{2n}^{3x} : C_{2n}^{3x-1} = \frac{8}{9}. \end{cases}$
11.	Розв'язати рівняння: $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2.$
12.	Розв'язати рівняння: $C_{15}^{14} \cdot C_{x+3}^3 = C_5^1 \cdot C_{x+2}^2 \cdot C_{x+1}^x + (C_5^3)^2.$
13.	Розв'язати рівняння: $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}A_{x+1}^3.$

14.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8, \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} = 2\frac{2}{3}. \end{cases}$
15.	Розв'язати рівняння: $C_{4x+9}^{4x+4} = 5A_{4x+7}^3$ .
16.	Розв'язати рівняння: $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$ .
17.	Розв'язати рівняння: $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$ .
18.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_{5x}^{n-3} : A_{5x}^{n-2} = 1:7, \\ C_{5x}^{n-2} : C_{5x}^{n-3} = 7:4. \end{cases}$
19.	Знайти $x$ і $y$ : $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1:3:24$ .
20.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_{m-2}^n : A_{m-2}^{n-1} = 8, \\ C_{m-2}^n : C_{m-2}^{n-1} = 1,6. \end{cases}$
21.	Знайти $x$ і $y$ : $C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y-1} = 3:5:5$ .
22.	Розв'язати рівняння: $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$ .
23.	Знайти $x$ і $y$ : $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10:2:1$ .
24.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_m^n : A_m^{n-1} = 9, \\ C_m^n : C_m^{n-1} = 3:2. \end{cases}$
25.	Знайти $x$ і $y$ : $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) = 21:60:10$ .
26.	Розв'язати рівняння: $C_{2n}^{n+1} : C_{2n+1}^{n-1} = \frac{7}{13}$ .
27.	Знайти $x$ і $y$ : $C_{x+2}^y : C_{x+2}^{y+1} : C_{x+2}^{y+2} = 0,6:1:1$ .
28.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153. \end{cases}$
29.	Знайти $x$ і $y$ : $C_{x+2}^y : C_{x+2}^{y+1} : C_{x+2}^{y+2} = 0,6:1:2$ .
30.	Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_x^{n-3} : A_x^{n-2} = 1:8, \\ C_x^{n-3} : C_x^{n-2} = 5:8. \end{cases}$

1.3. Виконати завдання з використанням бінома Ньютона (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

№	Завдання
1.	Знайти середній член розкладу $(x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{1}{3}})^{10}$ .
2.	При яких значеннях $x$ п'ятий член розкладу $(2x + 3)^9$ буде більше сусідніх з ним членів?
3.	Знайти члени розкладу $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ , які є цілими числами.
4.	Знайти члени розкладу $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^8$ , які є цілими числами.
5.	Знайти член розкладу $(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{-1}{2}})^{15}$ , який не залежить від $a$ .
6.	Знайти член розкладу $(\sqrt{x} + \sqrt{2})^{18}$ , який містить $x^8$ .
7.	Знайти член розкладу $(x^5 + 1)^{1980}$ , який містить $x^{1980}$ .
8.	Сума біноміальних коефіцієнтів з непарними номерами в розкладі $(x + x^{\frac{-1}{4}})^7$ дорівнює 512. Знайти доданок, що не містить $x$ .
9.	При яких значеннях $x$ четвертий доданок розкладу $(5 + 2x)^{16}$ більший за два суміжних з ним доданки?
10.	У розкладі $\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + 10\sqrt{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ є член, що містить $ab$ . Знайти цей член.
11.	Сума третього від початку і третього з кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься в цьому розкладі?
12.	Третій доданок розкладу $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^m$ не містить $x$ . При яких значеннях $x$ цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $(1 + x^3)^{30}$ .
13.	При яких значеннях $x$ найбільшим доданком розкладу $(5 + 3x)^{10}$ є четвертий?
14.	Знайти член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ , який не залежить від $a$ .

15.	Знайти член розкладу $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ , який не залежить від $a$ .
16.	Знайти член розкладу $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{z}} + \sqrt[3]{z^2}\right)^7$ , який не залежить від $z$ .
17.	Знайти степінь бінома Ньютона, якщо шостий член розкладу $\left(-\sqrt[30]{a} + \sqrt[5]{a}\right)^n$ не містить $a$ .
18.	Знайти член розкладу $\left(\frac{2x}{y} - \frac{\sqrt{y}}{2x}\right)^{12}$ , який не залежить від $x$ .
19.	Знайти степінь бінома Ньютона, якщо шостий член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} - \sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не містить $a$ .
20.	Визначити $x$ за умови, що п'ятий член розкладу бінома $(\sqrt{x} + x^{-1})^6$ дорівнює $\frac{5}{9}$ .
21.	В розкладі $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього, як 7:2. Визначити член, який містить $x$ в першому степені.
22.	В розкладі $\left(\frac{1}{z} + \sqrt{z}\right)^n$ коефіцієнт четвертого члена відноситься до коефіцієнта шостого, як 5:18. Визначити член, який не містить $z$ .
23.	Знайти показник степені бінома, якщо третій член розкладу $(\sqrt[3]{a^2} + a^{-1})^n$ містить $a^0$ .
24.	Знайти показник степені бінома, якщо біноміальні коефіцієнти четвертого і шостого членів розкладу $(1+x)^{n+1}$ рівні між собою.
25.	Знайти член розкладу $\left(\frac{\sqrt{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ , який містить $x^4$ .
26.	Знайти показник степені бінома, якщо біноміальні коефіцієнти четвертого і шостого членів розкладу відповідно дорівнюють 120 та 252.

<b>27.</b>	Визначити $z$ за умови, що різниця п'ятого і третього членів розкладу бінома $(z + \sqrt{5})^6$ дорівнює 300.
<b>28.</b>	Знайти член розкладу $\left(-\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[5]{c^3}\right)^{20}$ , який не залежить від $c$ .
<b>29.</b>	Знайти член розкладу бінома $\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$ , який після спрощення містить $z^5$ , якщо сума біноміальних коефіцієнтів розкладу дорівнює 128.
<b>30.</b>	Знайти член розкладу $\left(z\sqrt[3]{z^{-1}} + \frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}\right)^{10}$ , який не залежить від $z$ .