Розділ 1

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 1. Основні поняття математичної статистики

Математична статистика займається встановленням закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, на основі обробки статистичних даних, отриманих у результаті спостережень. Основні задачі математичної статистики:

1) визначення способів збору й групування статистичних даних;

2) розробка методів аналізу отриманих даних в залежності від цілей дослідження.

Цілі дослідження:

1) оцінка невідомої ймовірності події; оцінка невідомої функції розподілу; оцінка параметрів розподілу, вид якого відомий; оцінка залежності від інших випадкових величин тощо;

2) перевірка статистичних гіпотез про вид невідомого розподілу або про значення параметрів відомого розподілу.

Визначення 1.1. Вибірка — сукупність випадково відібраних об'єктів. Генеральна сукупність — уся множина наявних об'єктів, з яких проводиться вибірка.

Під об'ємом вибірки чи генеральної сукупності розуміють кількість об'єктів в цих сукупностях.

Вибірка може бути повторною (кожен відібраний об'єкт перед вибором наступних повертається в генеральну сукупність) і безповторною (відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається). Вибірка має правильно представляти пропорції генеральної сукупності, тобто бути репрезентативною (представницькою).

Визначення 1.2. Нехай з генеральної сукупності взято вибірку і значення x_1 зустрічається в ній n_1 разів, x_2 – n_2 разів, $\ldots$, x_k – n_k разів, причому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_k = n$ де n – об'єм вибірки. Спостережені значення випадкової величини x_1, x_2, $\ldots$, x_k називають варіантами, а n_1, n_2, $\ldots$, n_k – частотами. Якщо розділити кожну частоту на об'єм вибірки, то одержимо відносні частоти $w_i = n_i/n$. Послідовність варіант, записаних у порядку зростання, називають варіаційним рядом, а перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот — статистичним рядом:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k
w_i	w_1	w_2	$\ldots$	w_k

<u>Визначення 1.3.</u> Якщо досліджується деяка неперервна ознака, то варіаційний ряд може складатися з великої кількості чисел. У цьому випадку використовують груповану вибірку. Для її отримання інтервал (a, b), у якому укладені всі спостережені значення ознаки, розбивають на кілька рівних часткових інтервалів $(x_{i-1},\, x_i)$ довжиною h, а потім знаходять для кожного часткового інтервалу суму частот n_i варіант, що потрапили в i-ий інтервал. Складена за цими результатами таблиця називається групованим статистичним рядом.

Номер інтервалу i	1	2	$\ldots$	k
Інтервал $(x_{i-1},\, x_i\,)$	$(a, a+h)$	$(a+h, a+2h)$	$\ldots$	$(b-h, b)$
Кількість варіант, що потрапили в інтервал	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Для визначення кількості часткових k інтервалів можна використати найбільше натуральне число, більше за $\log_2 n + 1$, де $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

<u>Визначення 1.4.</u> Для наочного уявлення про поведінку досліджуваної випадкової величини у вибірці можна побудувати полігон частот — ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами (x_1,n_1), (x_2, n_2), $\ldots$, (x_k, n_k), де x_i відкладаються на осі абсцис, а n_i – на осі ординат. Якщо на осі ординат відкладати не абсолютні (n_i), а відносні (w_i) частоти, то одержимо полігон відносних частот.

<u>Визначення 1.5.</u> Вибірковою (емпіричною) функцією розподілу (комулятою) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$. Таким чином,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших за x, n – об'єм вибірки.

<u>Зауваження.</u> На відміну від емпіричної функції розподілу, знайденої дослідним шляхом, функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. При досить великих x, як випливає з теореми Бернуллі, $F^*(x)$ прямує по ймовірності до F(x).

Властивості комуляти:

- ◇ $0 \leqslant F^*(x) \leqslant 1$;
- ◇ $F^*(x)$ — не спадна функція;
- ◇ Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$; якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Для неперервної ознаки графічною ілюстрацією служить гістограма – східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною $h = x_i - x_{i-1}$, а висотами – відрізки довжиною $g_i = n_i/h$ (гістограма частот) або w_i/h (гістограма відносних частот). У першому випадку площа гістограми дорівнює об'ємові вибірки, у другому – одиниці.

Тема 2. Статистичні оцінки параметрів розподілу

2.1. Точкові оцінки

Нехай необхідно вивчити кількісну ознаку генеральної сукупності. Якщо з теоретичних міркувань встановлено який розподіл має ознака, то виникає задача оцінки параметрів, якими визначається цей розподіл.

В розпорядженні дослідника є лише дані вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що отримані в результаті n незалежних спостережень (спостережені значення ознаки).

Числові характеристики дискретного статистичного розподілу (точкові оцінки параметрів дискретної випадкової величини).

Визначення 2.6. Вибіркова середня — середнє арифметичне значень варіант:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Якщо варіанти $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мають частоти $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), то

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$$

Визначення 2.7. Вибіркова дисперсія — середнє арифметичне квадратів відхилення значень ознаки від їх середнього значення

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2.$$

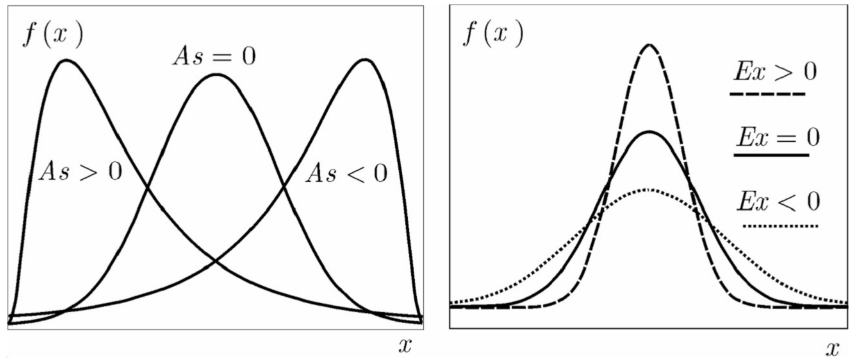
Формула для обчислення дисперсії:

$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$ — дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат середньої.

Визначення 2.8. Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}}$ визначає розсіювання варіант відносно $\overline{x}_{\text{В}}$ в тих самих одиницях, що і сама ознака.

Визначення 2.9. Розмах варіювання — різниця між найбільшою та найменшою варіантами

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{2.1}$$



Визначення 2.10. Коефіцієнт варіації — виражене у процентах відношення вибіркового середнього квадратичного відхилення до вибіркової середньої

$$V = \frac{\sigma_{\text{B}}}{\bar{x}_{\text{B}}} \cdot 100\%.$$

Визначення 2.11. Мода Mo – варіанта, що має найбільшу частоту.

Визначення 2.12. Медіана Me — варіанта, що поділяє варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіант частини.

Визначення 2.13. Початковий емпіричний момент порядку k
$\nu_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^k$ (причому $\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \bar{x}_{\text{B}}$).

Визначення 2.14. Центральний емпіричним момент порядку k
$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{B}})^k$ (причому $\mu_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{B}})^2 = D_{\text{B}}$).
Зауваження. Якщо початкові моменти відомі, то центральні моменти можна знайти з виразів

$$\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2, \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3, \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4. \tag{2.2}$$

Визначення 2.15. Коефіцієнт асиметрії $\text{As} = \frac{\mu_3^*}{\sigma_{\text{B}}^3}$.
$\text{As} = 0$, якщо варіанти розміщені симетрично відносно $\overline{x}_{\text{B}}$,
$\text{As} < 0$, якщо варіанти $x_i < \overline{x}_{\text{B}}$ переважають варіанти $x_i > \overline{x}_{\text{B}}$,
$\text{As} > 0$, якщо варіанти $x_i > \overline{x}_{\text{B}}$ переважають варіанти $x_i < \overline{x}_{\text{B}}$.

Визначення 2.16. Ексцес $\text{Ex} = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$ оцінює крутизну закону розподілу неперервної випадкової величини порівняно з нормальним (для нормального закону $\text{Ex} = 0$). У випадку, коли $\text{Ex} < 0$ варіанти більш розсіяні навколо свого середнього значення, ніж для випадку нормального розподілу, коли $\text{Ex} > 0$ — спостерігається зосередження варіант навколо середньої (дивись рисунок).

2.2. Числові характеристики інтервального статистичного розподілу.

Для визначення $\overline{x}_{\text{В}}$, $D_{\text{В}}$, ν_k^*, μ_k^* переходять до дискретного розподілу, варіантами якого є середини часткових інтервалів $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ і обчислюють характеристики для отриманого статистичного ряду.

Для визначення медіани знаходять медіанний частковий інтервал $[x_{i-1}, x_i]$:

$$F^*(x_{i-1}) < 0{,}5, F^*(x_i) > 0{,}5. \tag{2.3}$$

В медіанному частковому інтервалі функція розподілу досягає значення 0,5 ($F^*(\text{Me}) = 0{,}5$):

$$\text{Me} = x_{i-1} + \frac{0{,}5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h.$$

Для визначення моди знаходять модальний частковий інтервал $[x_{i-1}, x_i]$ — інтервал, якому відповідає найбільша частота появи. Тоді

$$\text{Mo} = x_{i-1} + \frac{n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1}}{2n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1} - n_{\text{Mo}+1}} \cdot h,$$

де n_{Mo} — частота модального інтервалу, $n_{\text{Mo}-1}$ — частота домодального інтервалу, $n_{\text{Mo}+1}$ — частота післямодального інтервалу.

Приклад 2.1. За даними інтервального статистичного розподілу вибірки

i	1	2	3	4	5	6
$[x_{i-1}, x_i]$	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
n_i	5	10	20	25	30	10

1) побудувати гістограму частот;
2) функцію розподілу.

   Визначити

3) вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$ та дисперсію $D_{\text{В}}$;
4) моду Mo та медіану Me;
5) асиметрію As та ексцес Ex.

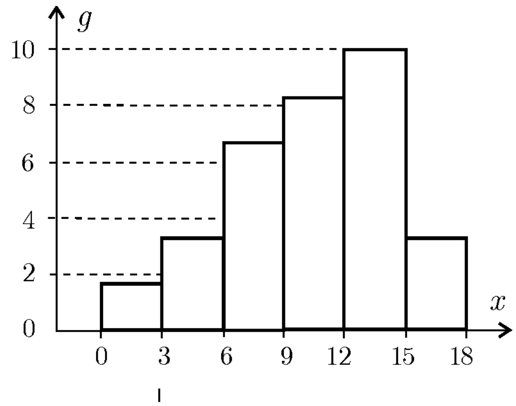
Розв'язання. Переходимо до дискретного розподілу:

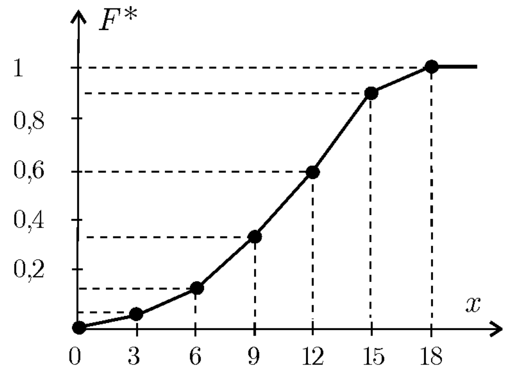
$y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5
n_i	5	10	20	25	30	10

Загальне число спостережень $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 100$.

1) для побудови гістограми обчислимо: ширину прямокутників $h = x_i - x_{i-1} = 3$,

   висоти прямокутників:





$g_i = n_i/h$	5/3	10/3	20/3	25/3	30/3	10/3

2) обчислимо функцію розподілу в точках границь часткових інтервалів:

$$F(x_i) = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_i}{n} = F(x_{i-1}) + \frac{n_i}{n},\ i = 1{,}2, \ldots, k.$$

x_i	3	6	9	12	15	18
$F(x_i)$	0,05	0,05+ 0,1 = 0,15	0,15+ 0,2 = 0,35	0,35 + 0,25 = 0,6	0,6+ 0,3 = 0,9	0,9+ 0,1 1

Гістограма та функція розподілу

3) $$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{5 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 4{,}5 + 20 \cdot 7{,}5 + 25 \cdot 10{,}5 + 30 \cdot 13{,}5 + 10 \cdot 16{,}5}{100} = 10{,}35;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{5 \cdot 1{,}5^2 + 10 \cdot 4{,}5^2 + 20 \cdot 7{,}5^2 + 25 \cdot 10{,}5^2 + 30 \cdot 13{,}5^2 + 10 \cdot 16{,}5^2}{100} - 10{,}4^2 = 15{,}7;$$

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{15{,}7} = 3{,}97;$$

4) медіанний інтервал $[x_{i-1}, x_i] = [9{,}12]$, $\text{Me} = 9 + \frac{0{,}5 - 0{,}35}{0{,}6 - 0{,}35} \cdot 3 = 10{,}8;$

модальний інтервал $[x_{i-1}, x_i] = [12{,}15]$, $\text{Mo} = 12 + \frac{30 - 25}{2 \cdot 30 - 25 - 10} \cdot 3 = 12{,}6.$

5) для знаходження асиметрії і ексцесу знайдемо початкові та теоретичні моменти:

y_i	n_i	n_iy_i	$n_iy_i^2$	$n_iy_i^3$	$n_iy_i^4$
1,5	5	7,50	11,25	16,88	25,31
4,5	10	45,00	202,50	911,25	4100,63
7,5	20	150,00	1125,00	8437,50	63281,25
10,5	25	262,50	2756,25	28940,63	303876,56
13,5	30	405,00	5467,50	73811,25	996451,88
16,5	10	165,00	2722,50	44921,25	741200,63
		$\Sigma n_iy_i =$ 1035,00	$\Sigma n_iy_i^2 =$ 12285,00	$\Sigma n_iy_i^3 =$ 157038,75	$\Sigma n_iy_i^4 =$ 2108936,25

$\nu_1^* = \dfrac{1}{n}\sum n_iy_i = \dfrac{1}{100}1035 \ = 10{,}35$; $\nu_2^* = \dfrac{1}{n}\sum n_iy_i^2 = \dfrac{1}{100}12285 \ = 122{,}85$;

$\nu_3^* = \dfrac{1}{n}\sum n_iy_i^3 = \dfrac{1}{100}157038{,}75 = 1570{,}39$; $\nu_4^* = \dfrac{1}{n}\sum n_iy_i^4 = \dfrac{1}{100}2108936{,}25 \ = 21089{,}36$;

$\mu_2^* = \nu_2 - (\nu_1)^2 = 122{,}85 - (10{,}35)^2 = 15{,}73$;

$\mu_3^* = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3 = 1570{,}39 - 3 \cdot 10{,}35 \cdot 122{,}85 = -26{,}67$;

$\mu_4^* = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4 =$

$= 21089{,}36 - 4 \cdot 10{,}35 \cdot 1570{,}39 + 6 \cdot (10{,}35)^2 \cdot 122{,}85 - 3 \cdot (10{,}4)^4 = 609{,}62$.

Асиметрія $\text{As} = \dfrac{\mu_3^*}{\sigma_\text{В}^3} = \dfrac{-26{,}67}{(3{,}97)^3} = -0{,}43$,

Ексцес $\text{Ex} = \dfrac{\mu_4^*}{\sigma_\text{В}^4} - 3 = \dfrac{609{,}62}{(3{,}97)^3} - 3 = -0{,}54$.

Зауваження. Якщо знайдено моменти ν_1^* і μ_2^*, то $\overline{x}_\text{В} = \nu_1^*$, $D_\text{В} = \mu_2^*$ і обрахунки пункту 3) проводити не потрібно.

Визначення 2.17. Статистична оцінка Θ^* називається незміщеною, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру Θ, що оцінюється: $M(\Theta^*) \ = \Theta$. Зміщеною називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється.

Визначення 2.18. Статистична оцінка називається ефективною, якщо вона при заданому об'ємі вибірки n має найменшу можливу дисперсію.

Визначення 2.19. Статистична оцінка Θ^* називається обґрунтованою, якщо уразі необмеженого збільшення об'єму вибірки Θ^* наближається до параметру, що оцінюється

$$\lim_{n\to\infty} P(\,|\Theta * - \Theta\,| < \delta) = 1$$

Вибіркова середня $\overline{x}_\text{В}$ являє собою незміщену оцінку математичного сподівання: $M(\overline{x}_\text{В}) \ = \ \bar{X}_\text{В}$.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Можна довести, що

$$M(D_\text{В}) = \frac{n-1}{n}D_\text{В}.$$

$s^2 = \dfrac{n}{n-1}D_\text{В} = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_\text{В})^2$ – виправлена дисперсія ($M(s^2) = D_\Gamma$).

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_{\text{В}}}$ – виправлене середнє квадратичне відхилення.

Порівняння емпіричних та теоретичних частот. Нехай є підстава вважати, що неперервна випадкова величина X розподілена за деяким законом і треба перевірити це на підставі даних спостережень. Для цього знаходять теоретичні частоти n'_i у припущенні, що X розподілена за певним законом:

$$n'_i = n \cdot P_i, \tag{2.4}$$

де n — об'єм вибірки, P_i – ймовірність потрапляння випадкової величини X в i-ий частинний інтервал (x_{i-1}, x_i).

Для нормального розподілу

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right),$$

де $\bar{x}_B$ – вибіркова середня, σ_B – вибіркове середнє квадратичне відхилення, Φ – функція Лапласа. Наближена формула для визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X в i-ий частинний інтервал:

$$P_i = \frac{h}{\sigma_{\text{В}}} \varphi\left(\frac{y_i - \bar{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right),$$

де $y_i (x_{i-1} + x_i)/2$ – середина i-го частинного інтервалу.

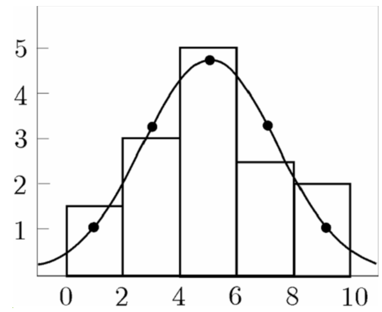
Приклад 2.2. Для наведеного в таблиці інтервального статистичного розподілу побудувати нормальну криву.

Розв'язання. Обчислимо вибіркову середню: $\bar{x}_{\text{В}} = 5{,}07$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення: $\sigma_{\text{В}} = 2{,}36$. Результати подальших обчислень будемо заносити в таблицю:

i	1	2	3	4	5
(x_{i-1}, x_i)	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(8,10)$
n_i	3	6	10	5	4
n_i/h	1,5	3,0	5,0	2,5	2,0
$y_i = (x_i - x_{i-1})/2$	1	3	5	7	9
$y_i - \bar{x}_{\text{В}}$	−4,07	−2,07	−0,07	1,93	3,93
$u_i = \dfrac{y_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$	−1,73	−0,88	−0,03	0,82	1,67
$\varphi(u_i)$	0,09	0,27	0,40	0,29	0,10
n'_i	2,14	6,44	9,46	6,78	2,37
n'_i/h	1,07	3,22	4,73	3,39	1,18

За даними рядка n_i/h будуємо гістограму частот, а за даними рядка n'_i/h — точки нормальної кривої, з'єднуючи які, отримаємо нормальну криву для заданого інтервального розподілу.

Задачі до теми



(1) Знайти математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, моду та медіану дискретного статистичного розподілу, побудувати функцію розподілу та полігон частот

x_i	0	3	5	7
n_i	1	3	4	2

(2) Знайти моду та медіану інтервального статистичного розподілу

(x_{i-1}, x_i)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)
n_i	1	3	4	2

Тема 3. Інтервальна оцінка параметрів розподілу

Нехай Θ^* – точкова статистична оцінка невідомого параметра Θ. Витягнемо з генеральної сукупності кілька вибірок об'єму n і обчислимо для кожної з них оцінку параметра Θ: $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \dots \Theta_n^*$. Тоді Θ^* є випадковою величиною і заміна Θ на Θ^* може призвести до суттєвих похибок, особливо коли об'єм вибірки є малим. В цьому випадку використовують інтервальні оцінки.

Визначення 3.20. Статистична оцінка, що визначається двома числами – кінцями інтервалів – називається інтервальною.

Визначення 3.21. Точністю оцінки називається величина δ ($\delta > 0$), така, що $|\Theta^* - \Theta| < \delta$ ($\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$)

Визначення 3.22. Довірчим називається інтервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, який покриває параметр Θ із заданою ймовірністю γ: $P(|\Theta^* - \Theta| < \delta) = \gamma$. Іншими словами: ймовірність того, що довірчий інтервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ містить в собі параметр Θ, дорівнює γ.

Визначення 3.23. Число γ називається надійністю (довірчою ймовірністю). Її задають наперед числом, близьким до одиниці (0,95; 0,99; 0,999).

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії. Нехай X – нормально розподілена випадкова величина, її середнє квадратичне відхилення відоме і дорівнює σ. Потрібно за значенням вибіркової середньої $\overline{x}_B$ оцінити математичне сподівання $M(X)$.

Будемо розглядати $\overline{x}_B$ як випадкову величину $\overline{X}$, а значення варіант вибірки x_1, x_2, ..., x_n як однаково розподілені незалежні випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n.

Математичне сподівання кожної з X_i дорівнює a, а середнє квадратичне відхилення дорівнює σ. Тоді $M(\overline{X}) = a$, $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ (використовуємо властивості математичного сподівання і дисперсії середнього арифметичного незалежних випадкових величин). Ймовірності влучення нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.5}$$

Замінимо X на $\overline{X}$, а σ на $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$. Отримаємо

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \tag{3.6}$$

де $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, і $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Задамо надійність γ і знайдемо довірчий інтервал з рівняння

$$P\left(|\,\bar{x}_{\text{В}} - a\,| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Отже, значення математичного сподівання a з надійністю γ попадає в інтервал

$$\left(\bar{x}_{\text{В}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \bar{x}_{\text{В}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де значення t визначається з рівняння $2\Phi(t) = \gamma$ $(\Phi(t) = \gamma/2)$.

Зауваження.

1) при зростанні об'єму вибірки n точність оцінки δ зменшується, тим самим точність зростає;

2) при зростанні надійності γ параметр t зростає, тим самим точність зменшується.

Приклад 3.3. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини, якщо об'єм вибірки $n = 49$, $\bar{x}_{\text{В}} = 2{,}8$, $\sigma = 1{,}4$, а довірча ймовірність $\gamma = 0{,}9$.

Розв'язання. Визначимо t, при якому $\Phi(t) = 0{,}9 : 2 = 0{,}45$: $t = 1{,}65$. Визначимо точність оцінки $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}65 \cdot 1{,}4}{\sqrt{49}} = 0{,}33$. Тоді довірчий інтервал $2{,}8 - 0{,}33 < a < 2{,}8 + 0{,}33$, тобто $2{,}47 < a < 3{,}13$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина з невідомим середнім квадратичним відхиленням. Потрібно оцінити математичне сподівання $M(X)$ по середній вибірковій $\overline{x}_{\text{В}}$ та виправленому вибірковому середньому квадратичному відхиленню s.

Побудуємо випадкову величину

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}},$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи. $\overline{X}$ — вибіркове середнє, S — виправлене середнє квадратичне відхилення. Оскільки щільність розподілу Стьюдента $S(t, n)$ — парна функція, що не залежить від a і σ,

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int\limits_0^{t_\gamma} S(t,n)\mathrm{d}t = \gamma.$$

Замінюючи $\overline{X}$ на $\bar{x}_\text{В}$, а S на s, одержимо

$$P\left(\bar{x}_\text{В} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_\text{В} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Таким чином, значення математичного сподівання a з надійністю γ попадає в інтервал

$$\left(\bar{x}_\text{В} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}};\ \ \bar{x}_\text{В} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де t_γ можна знайти по таблиці при заданих n і γ.

Приклад 3.4. Нехай об'єм вибірки $n = 25$, $\overline{x}_\text{В} = 3$, $s = 1{,}5$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a при надійності $\gamma = 0{,}99$.

Розв'язання. З таблиці знаходимо, що $t_\gamma(n = 25, \gamma = 0{,}99) = 2{,}8$. Точність оцінки $\delta = \dfrac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}8 \cdot 1{,}5}{\sqrt{25}} = 0{,}84$. Тоді довірчий інтервал $3 - 0{,}84 < a < 3 + 0{,}84$ або $2{,}16 < a < 3{,}84$.

Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення нормального розподілу. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина. Потрібно оцінити середнє квадратичне відхилення σ за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s.

Довірчий інтервал, який покриває σ із заданою ймовірністю γ знаходиться у вигляді

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q), \tag{3.7}$$

де q знаходиться з таблиць по заданим n і γ.

Зауваження. Якщо $q > 1$, то з урахуванням умови $\sigma > 0$ довірчий інтервал для σ буде мати вигляд $0 < \sigma < s(1 + q)$.

Приклад 3.5. За вибіркою об'єму $n = 20$ обчислено вибіркове виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 1{,}3$. Знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності σ при заданій надійності $\gamma = 0{,}95$.

Розв'язання. З відповідної таблиці знаходимо $q(n = 20, \gamma = 0{,}95) = 0{,}37$. Довірчий інтервал $1{,}3 \cdot (1 - 0{,}37) < \sigma < 1{,}3 \cdot (1 + 0{,}37)$. Отже $0{,}82 < \sigma < 1{,}78$.

Задачі до теми

1. З нормально розподіленої генеральної сукупності взято вибірку об'єму $n = 16$ обчислена її середня $\overline{x}_{\text{В}} = 10$. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0{,}95$ невідомого математичного сподівання a генеральної сукупності, якщо відоме генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$.

2. З нормально розподіленої генеральної сукупності взято вибірку об'єму $n = 16$ і обчислена її середня $\overline{x}_{\text{В}} = 10$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 2$. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0{,}95$ невідомого математичного сподівання a генеральної сукупності.

3. За даними вибірки об'єму $n = 16$ з нормально розподіленої генеральної сукупності знайдено виправлене середньоквадратичне відхилення $s = 2$. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середньоквадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Тема 4. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Визначення 4.24. Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.

Визначення 4.25. Нульовою H_0 (основною) називають висунуту гіпотезу. Конкуруючою H_1 (альтернативною) називають гіпотезу, що суперечить нульовій. Наприклад, якщо H_0 полягає в тому, що математичне сподівання генеральної сукупності $a = 3$, то можливими варіантами альтернативної гіпотези H_1 є такі: а) $a \neq 3$; б) $a > 3$; в) $a < 3$.

Визначення 4.26. Простою називають гіпотезу, що містить тільки одне припущення, складною — гіпотезу, що складається з скінченого або нескінченного числа простих гіпотез. Наприклад, для показникового розподілу гіпотеза H_0: $\lambda = 2$ — проста, H_0: $\lambda > 2$ — складна, що складається з нескінченного числа простих (вигляду $\lambda = a$, де a — будь-яке число, більше 2).

Визначення 4.27. У результаті статистичної перевірки правильності висунутої нульової гіпотези можливі помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність α помилки першого роду називається рівнем значущості.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята невірна нульова гіпотеза. Ймовірність похибки другого роду позначається β.

Зауваження. Яка з помилок є на практиці більш небезпечною, залежить від конкретної задачі. Наприклад, якщо перевіряється правильність вибору методу лікування хворого, то помилка першого роду означає відмову від правильної методики, що може сповільнити лікування, а помилка другого роду (застосування неправильної методики) може призвести до погіршенням стану хворого і є більш небезпечною.

Основний прийом перевірки статистичних гіпотез полягає в тому, що по наявній вибірці обчислюється значення деякої випадкової величини, що має відомий закон розподілу.

Визначення 4.28. Статистичним критерієм називається випадкова величина K з відомим законом розподілу, що служить для перевірки нульової гіпотези.

Визначення 4.29. Критичною областю називають область значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють, областю прийняття гіпотези — область значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Види критичних областей:

— правобічна — $K > k_{\text{кр}}$ $(k_{\text{кр}} > 0)$;

— лівобічна — $K < k_{\text{кр}}$ $(k_{\text{кр}} < 0)$;

— двобічна — $K < k_1, K > k_2 (k_2 > k_1)$.

Етапи перевірки гіпотези:

1) вибирається статистичний критерій K;

2) обчислюється його спостережене значення $K_{\text{спост}}$ за наявною вибіркою;

3) оскільки закон розподілу K відомий, за відомим рівнем значущості α визначається критичне значення $k_{\text{кр}}$, що розділяє критичну область і область прийняття гіпотези. $k_{\text{кр}}$ дуже часто знаходиться з відповідних таблиць;

4) якщо обчислене значення $K_{\text{спост}}$ потрапляє до області прийняття гіпотези, то нульова гіпотеза приймається, якщо в критичну область – нульова гіпотеза відхиляється.

Визначення 4.30. Потужністю критерію називають ймовірність потрапляння критерію до критичної області при вірній конкуруючій гіпотезі. Похибка другого роду — прийняти неправильну нульову гіпотезу — влучити в область прийняття гіпотези при вірній конкуруючій гіпотезі. Тому потужність критерію дорівнює $1 - \beta$. Отже, чим більше потужність критерію, тим менше ймовірність зробити помилку другого роду. Тому після вибору рівня значущості варто будувати критичну область так, щоб потужність критерію була максимальною.

Тема 5. Перевірка параметричних статистичних гіпотез

5.1. Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормальної генеральної сукупності

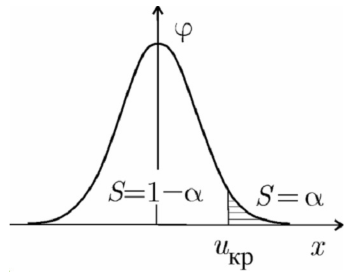
Нехай генеральна сукупність X розподілена нормально, і треба при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що математичне сподівання $M(X)$ дорівнює деякому числу a.

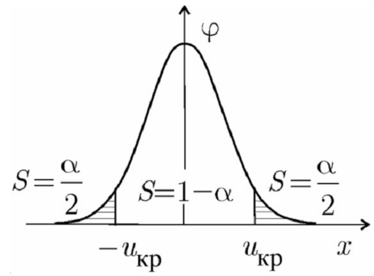
Розглянемо два випадки.

1) Відома дисперсія σ^2 генеральної сукупності. Тоді по вибірці об'єму n знайдемо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{В}}$ і перевіримо нульову гіпотезу H_0: $M(X) = a$.

З огляду на те, що вибіркове середнє $\overline{X}$ є незміщеною оцінкою $M(X)$, тобто $M(\overline{X}) = M(X)$, можна записати нульову гіпотезу так: $M(\overline{X}) = a$. Для її перевірки виберемо нормовану нормально розподілену величину

$$U = \frac{\bar{X} - a}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$$





Спостережене значення критерію $U_{спост} = \dfrac{(\bar{x}_B - a)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Виберемо критичну область в залежності від вигляду конкуруючої гіпотези:

а) якщо $H_1 : M(X) \neq a$, то критична область двобічна і критичну точку знаходимо з рівності $P(-u_{кр} < U < u_{кр}) = 1 - \alpha$ (дивись рисунок).

Одержимо

$$P\left(\,|\,U\,| < u_{кр}\right) = 2\Phi\left(\frac{u_{кр}}{\sigma\,(U)}\right) = 2\Phi\,(u_{кр})\,,$$

оскільки $\sigma(U) = 1$.

Таким чином

$$2\Phi\,(u_{кр}) = 1 - \alpha \quad \text{або} \quad \Phi\,(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

і $u_{кр}$ можна знайти з таблиць функції Лапласа.

Якщо $|U_{спост}| < u_{\ кр}$, то нульова гіпотеза приймається; якщо $|U_{спост}| \geqslant u_{кр}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

б) якщо H_1: $M(X) > a_0$, то критична область правобічна і критичну точку знаходимо з рівності

$P(U < u_{кр}) = 1 - \alpha$ (дивись рисунок).

Одержимо

$$P(u_{кр} < 0) + P(0 < U < u_{кр}) = 1 - \alpha, \tag{5.8}$$

або

$$\frac{1}{2} + P(0 < U < u_{кр}) = 1 - \alpha.$$

Таким чином

$$\Phi\left(u_{\text{кр}}\right)=\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1-2\alpha}{2}$$

і $u_{\text{кр}}$ можна знайти з таблиць функції Лапласа.

Якщо $U_{\text{спост}} < u_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається; якщо $U_{\text{спост}} \geqslant u_{\text{кр}}$ – відхиляється.

Аналогічно розглядається H_1: $M(X) < a_0$.

2) Дисперсія генеральної сукупності невідома і за вибіркою об'єму n обчислено виправлене середнє квадратичне відхилення s.

Критерієм для перевірки нульової гіпотези H_0: $M(X)=a$ виберемо випадкову величину

$$T=\frac{(\bar{X}-a)\sqrt{n}}{S},$$

де S — виправлене середнє квадратичне відхилення. Випадкова величина T має розподіл Стьюдента з $k=n-1$ степенями свободи.

Розглянемо ті ж, що й у попередньому випадку, конкуруючі гіпотези і відповідні їм критичні області. Попередньо обчислимо спостережене значення критерію

$$T_{\text{спост}}=\frac{(\overline{x}_{\text{В}}-a)\sqrt{n}}{s}.$$

а) якщо H_1: $M(X)\neq a_0$, то критична область двобічна і критична точка $t_{\text{кр}}$ знаходиться по таблиці критичних точок розподілу Стьюдента за відомими α і k.

При $|T_{\text{спост}}| < t_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|T_{\text{спост}}| \geqslant t_{\text{кр}}$ – відхиляється.

б) якщо H_1: $M(X) > a_0$, то по таблиці знаходять $t_{\text{кр}}(\alpha,k)$ – критичну точку правосторонньої критичної області. Нульова гіпотеза приймається, якщо $T_{\text{спост}} < t_{\text{кр}}$ і відхиляється в протилежному випадку.

Аналогічно розглядається H_1: $M(X) < a_0$.

Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох генеральних сукупностей. Нехай генеральні сукупності X_1 і X_2 розподілені нормально. З цих сукупностей взято незалежні вибірки об'ємом n_1 і n_2, за якими обчислено виправлені вибіркові дисперсії s_1^2 і s_2^2. При заданому рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X_1)=D(X_2)$ про рівність дисперсій розглянутих сукупностей. Враховуючи незміщенність виправлених вибіркових дисперсій перепишемо нульову гіпотезу H_0: $M(s_1^2)=M(s_2^2)$.

В якості критерію приймається випадкова величина

$$F=\frac{S_A^2}{S_B^2}$$

— відношення більшої вибіркової дисперсії до меншої. F має розподіл Фішера-Снедекора зі степенями свободи $k_1=n_1-1$ і $k_2=n_2-1$.

Спостережене значення критерію $F_{\text{спост}}=\dfrac{s_A^2}{s_B^2}$.

а) якщо H_1: $D(X_1)\neq D(X_2)$, то критична точка розподілу Фішера $F_{\text{кр}}=F\left(\dfrac{\alpha}{2},k_1,k_2\right)$ знаходиться з відповідних таблиць.

При $|F_{\text{спост}}| < F_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|F_{\text{спост}}| \geqslant F_{\text{кр}}$ – відхиляється.

б) якщо H_1: $D(X_1) > D(X_2)$, то з таблиць критичних точок розподілу Фішера знаходиться $F_{\text{кр}} = F(\alpha, k_1, k_2)$.

При $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $F_{\text{спост}} \geqslant F_{\text{кр}}$ – відхиляється.

Задачі до теми

1. З нормальної генеральної сукупності з відомим середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 1$ взято вибірку об'єму $n = 16$ і знайдено середнє вибіркове $\overline{x}_{\text{В}} = 5{,}45$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_{\Gamma} = 5$ про рівність генеральної середньої 5-ти

   а) при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x}_{\Gamma} \neq 5$;

   б) при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x}_{\Gamma} > 5$.

2. З нормальної генеральної сукупності взято вибірку об'єму $n = 16$ і знайдено вибіркова середня $\overline{x}_{\Gamma} = 5{,}5$ та виправлене середньоквадратичне відхилення $s = 1$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x}_{\Gamma} = 5$ про рівність генеральної середньої 5-ти

   а) при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x}_{\Gamma} \neq 5$;

   б) при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x}_{\Gamma} > 5$.

3. За даними двох незалежних вибірок об'ємів $n_1 = 12$ і $n_2 = 15$, які взято з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдено виправлені вибіркові середні квадратичні відхилення $s_X = 1{,}5$ і $s_Y = 0{,}9$.

   а) При рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X) \neq D(Y)$;

   б) При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X) > D(Y)$.

Тема 6. Перевірка непараметричних статистичних гіпотез. Критерій Пірсона

Усі перевірки параметричних статистичних гіпотез ґрунтуються на припущенні, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподіл. Якщо закон розподілу є невідомим, але є підстави вважати (наприклад, за формою полігона частот чи гістограми), що він має певний вид (наприклад, нормальний), то перевіряють нульову гіпотезу про вид розподілу генеральної сукупності.

<u>Визначення 6.31.</u> Емпіричні частоти n_i — частоти, які спостерігаються при реалізації вибірки. Теоретичні частоти n_i' — частоти, обраховані у припущенні, що генеральна сукупність розподілена за певним законом. У випадку нормального закону розподілу:

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right),$$

де $\bar{x}_\text{В}$ — вибіркова середня, $\sigma_\text{В}$ — вибіркове середнє квадратичне відхилення, Φ — функція Лапласа.

Визначення 6.32. Критерієм узгодженості називають критерій про передбачуваний закон невідомого розподілу. Критеріями узгодженості є критерії Пірсона, Колмогорова, Смірнова та інші.

Розглянемо критерій Пірсона, перевагою якого є універсальність: з його допомогою можна перевіряти гіпотези про різні види закони розподілу (рівномірний, показниковий, нормальний). В основу критерію покладено порівняння емпіричних та теоретичних частот. З'ясовується, чи є випадковою розбіжність між цими частотами.

Нехай задано інтервальний статистичний розподіл

Номер інтервалу	1	2	...	k
Інтервал (x_{i-1}, x_i)	(x_0, x_1)	(x_1, x_2)	...	(x_{k-1}, x_k)
Кількість варіант, що потрапили в інтервал	n_1	n_2	...	n_k

і обчислено вибіркові середнє $\overline{x}_\text{В}$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_\text{В}$ і теоретичні частоти n_i'.

Зауваження. Об'єм вибірки $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_k$ повинен бути не менше за 50. Кожний частинний інтервал повинен містити не менше 6 варіант $(n_i < 6)$, інакше малі групи треба об'єднувати в одну, сумуючи частоти.

Перевіримо з рівнем значущості α припущення про те, що генеральна сукупність розподілена нормально. Для порівняння емпіричних і теоретичних частот використаємо критерій у вигляді випадкової величини – суми відношень квадратів відхилень емпіричних частот від теоретичних до відповідних теоретичних частот

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Незалежно від закону розподілу генеральної сукупності закон розподілу розглянутої випадкової величини при $n \to \infty$ прямує до закону розподілу χ^2 з числом ступенів свободи

$$k = s - 1 - r, \qquad (6.9)$$

де s – число груп (частинних інтервалів), r — число параметрів передбачуваного розподілу. Нормальний розподіл характеризується двома параметрами, тому $k = s - 3$.

Побудуємо правосторонню критичну область, виходячи з вимоги про те, щоб ймовірність потрапляння критерію в цю область у припущенні справедливості нульової гіпотези дорівнювала прийнятому рівню значущості:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_\text{кр}(\alpha, k)\right) = \alpha$$

Отже, критична область задається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, а область прийняття гіпотези — $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$. Таким чином, для перевірки нульової гіпотези потрібно обчислити за вибіркою спостережене значення критерію

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \quad ,$$

і по таблиці критичних точок розподілу χ^2 знайти критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, використовуючи відомі значення α і $k = s-3$. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу приймають, при $\chi^2_{\text{спост}} \geqslant \chi^2_{\text{кр}}$ – відхиляють.

Приклад 6.6. За даними інтервального статистичного розподілу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальність дослідженої ознаки.

i	1	2	3	4	5
(x_{i-1}, x_i)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
n_i	3	6	10	5	4

Розв'язання. В прикладі теми 13 обчислено вибіркову середню $\bar{x}_{\text{В}} = 5{,}07$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}} = 2{,}36$. Обчислимо теоретичні частоти та спостережене значення критерію. Процес обчислення відображено відповідно в таблицях.

i	x_{i-1}	x_i	$z_{i-1} = \dfrac{x_{i-1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\Phi(z_{i-1})$	$\Phi(z_i)$	$P_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$	$n_i\prime = n \cdot P_i$
1	0	2		−1,301	−0,500	−0,403	0,097	2,7
2	2	4	−1,301	−0,453	−0,403	−0,175	0,228	6,4
3	4	6	−0,453	0,394	−0,175	0,153	0,328	9,2
4	6	8	0,394	1,242	0,153	0,393	0,240	6,7
5	8	10	1,242		0,393	0,500	0,107	3,0
							$\Sigma P_i = 1$	$\Sigma n_i = n = 28$

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	3	2,71	0,29	0,09	0,03
2	6	6,40	−0,40	0,16	0,02
3	10	9,19	0,81	0,66	0,07
4	5	6,71	−1,71	2,92	0,43
5	4	3,00	1,00	1,00	0,33
					$\sum \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 0{,}9$

Таким чином, спостережене значення критерію
$\chi^2_{\text{спост}} = \sum\limits_{i=1}^{5} \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 0{,}9.$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і числу степенів свободи $k = 5 - 3 = 2$ (5 – число інтервалів групування вибірки) знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05, 2) = 6$. $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ $(0{,}9 < 6)$ і, таким чином, нема підстав відхилити нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Зауваження. Критерій Пірсона можна застосовувати при об'ємі вибірки $n > 50$, тому розглянутий приклад надано лише в навчальних цілях.

Задачі до теми

1 При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні та теоретичні частоти

n_i	4	12	21	10	3
n'_i	5	10	20	10	5

Тема 7. Пряма лінія регресії. Коефіцієнт кореляції та перевірка його значимості

Визначення 7.33. Випадкові величини, можливі значення яких визначаються двома числами, називаються двомірними і позначають (X, Y). Кожну з величин X і Y називають складовою або компонентою. Обидві випадкові величини X і Y, які розглядаються разом, утворюють систему двох випадкових величин. Законом розподілу двомірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини – пар (x_i, y_j) і відповідних їм ймовірностей $p_{ij} = p(x_i, y_j)$.

Визначення 7.34. Випадкова величина Y називається функцією випадкової величини X, якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення Y.

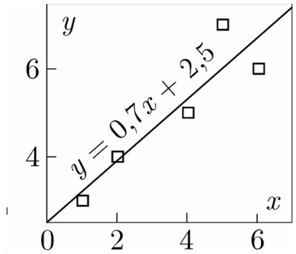
Строга функціональна залежність реалізується рідко, оскільки обидві розглянуті випадкові величини або одна з них знаходяться під впливом інших випадкових факторів.

Визначення 7.35. Статистичною залежністю називають залежність, при якій зміна однієї з випадкових величин призводить до зміни розподілу іншої. Якщо статистична залежність проявляється в тому, що при зміні однієї з випадкових величин змінюється середнє значення другої, то така статистична залежність називається кореляційною.

Визначення 7.36. Умовним середнім $\bar{y}_x$ називається середнє арифметичне спостережених значень Y, що відповідають $X = x$. Наприклад, якщо при $x_1 = 1$ Y прийняла значення $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, то умовне середнє $\bar{y}_{x_1} = (2 + 3 + 4)/3 = 3$.

Визначення 7.37. Вибірковим рівнянням регресії Y на X називається рівняння $\bar{y}_x = f^*(x)$, функція f^* називається вибірковою регресією Y на X, а її графік – вибірковою лінією регресії Y на X.

Далі розглянемо лише випадок, коли $f^*(x) = k \cdot x + b$ – лінійна функція.



Вибіркове рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії за незгрупованими даними.

Нехай вивчається система двох ознак (X,Y) і в результаті n спостережень отримано пари чисел (x_1, y_1), …, (x_n, y_n). Знайдемо вибіркове рівняння лінії регресії Y на X

$$y = \rho_{yx} \cdot x + b. \tag{7.10}$$

Число ρ_{yx} називається вибірковим коефіцієнтом регресії Y на X. Коефіцієнти ρ_{yx} і b вибирають так, щоб точки (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) лежали якомога ближче до прямої $y = \rho_{yx} \cdot x + b$. Застосування методу найменших квадратів дає

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}, \quad b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{x \cdot y}}{\sigma_x^2},$$

де $\overline{x \cdot y} = \dfrac{1}{n} \sum x \cdot y$, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}} = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} \rho_{yx} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) якщо X і Y — незалежні, то $r_{\text{В}} = 0$;

2) якщо $r_{\text{В}} = \pm 1$, то X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю. Таким чином коефіцієнт кореляції вимірює силу лінійного зв'язку між X і Y. При $r_{\text{В}} = -1$ зростання значень однієї з ознак призводить до зменшення значень іншої ознаки – має місце так звана «протилежна залежність».

Приклад 7.7. Знайти 1) вибіркове рівняння прямої лінії регресії та 2) коефіцієнт кореляції для результатів спостереження

X	1	2	4	5	6
Y	3	4	5	7	6

Розв'язання. $\bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum x = \dfrac{1}{5}(1 + 2 + 4 + 5 + 6) = 3{,}6$; $\bar{y} = \dfrac{1}{n} \sum y = \dfrac{1}{5}(3 \ + 4 \ + 5 \ + 7 \ + 6) \ = 5$;

$\overline{x^2} = \dfrac{1}{n} \sum x^2 = \dfrac{1}{5}(1 \ + 4 \ + 16 \ + 25 \ + 36) = 16{,}4$;

$\overline{y^2} = \dfrac{1}{n} \sum y^2 = \dfrac{1}{5}(9 \ + 16 \ + 25 \ + 49 \ + 36) = 27$;

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 16{,}4 - 3{,}62 = 3{,}4$; $\sigma_x = 1{,}9$;

$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 27 - 52 \ = -25$; $\sigma_y = 1{,}4$;

$\overline{x \cdot y} = \dfrac{1}{n} \sum x \cdot y = \dfrac{1}{5}(1 \cdot 3 \ + 2 \cdot 4 \ + 4 \cdot 5 \ + 5 \cdot 7 \ + 6 \cdot 6) \ = 20{,}4$;

1) $\rho_{yx} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2} = \dfrac{20{,}4 - 3{,}6 \cdot 5}{3{,}4} = 0{,}7$; $b = \dfrac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{x \cdot y}}{\sigma_x^2} = \dfrac{16{,}4 \cdot 5 - 3{,}6 \cdot 20{,}4}{1{,}9} = 2{,}5$;

$y = 0{,}7 \cdot x + 2{,}5$ — рівняння прямої лінії регресії (дивись рисунок);
2) $r_{\text{В}} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{20{,}4 - 3{,}6 \cdot 5}{1{,}9 \cdot 1{,}4} = 0{,}91.$

Вибіркове рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії за згрупованими даними. При великій кількості спостережень одне й те саме значення x може зустрітися n_x раз, y — n_y раз, а пара чисел (x, y) — n_{xy} раз. В цьому випадку дані групують і заносять в кореляційну таблицю. Наприклад,

Y	X			
	1	2	3	n_y
0	2	1	1	4
2	0	2	4	6
n_x	2	3	5	$n = 10$

Вибірковий коефіцієнт регресії

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2},$$

де $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum n_x \cdot x$, $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum n_x \cdot x^2$, $\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum n_y \cdot y$, $\overline{x \cdot y} = \dfrac{1}{n}\sum n_{xy} \cdot x \cdot y$.

Коефіцієнт кореляції

$$r_{\text{В}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{yx} = \frac{\frac{1}{n}\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}).$$

$\boxed{\text{Приклад 7.8.}}$ Знайти 1) вибіркове рівняння прямої лінії регресії та 2) коефіцієнт кореляції для спостережень, занесених в кореляційну таблицю.

Розв'язання.
$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum n_x \cdot x = \dfrac{1}{10}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = 2{,}3;$
$\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum n_x \cdot x^2 = \dfrac{1}{10}(2 \cdot 12 + 3 \cdot 22 \ + 5 \cdot 32) = 5{,}9;$
$\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum n_y \cdot y = \dfrac{1}{10}(4 \cdot 0 + 6 \cdot 2) = 1{,}2;$
$\overline{y^2} = \dfrac{1}{n}\sum n_y \cdot y^2 = \dfrac{1}{10}(4 \cdot 0^2 + 6 \cdot 2^2) = 2{,}4;$
$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 5{,}9 - 2{,}32 = 0{,}61$; $\sigma_x = 0{,}78$;
$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 2{,}4 - 1{,}22 = 0{,}96$; $\sigma_y = 0{,}98$;
$\overline{x \cdot y} = \dfrac{1}{n}\sum n_{xy} \cdot x \cdot y = \dfrac{1}{10}(2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2) = 3{,}2;$
1) Вибірковий коефіцієнт регресії $\rho_{yx} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2} = \dfrac{3{,}2 - 2{,}3 \cdot 1{,}2}{0{,}78^2} = 0{,}72.$
Вибіркове рівняння прямої лінії регресії $\bar{y}_x - 1{,}2 = 0{,}72 \cdot (x - 2{,}3)$ або $\bar{y}_x = 0{,}72x - 0{,}46$.

2) Коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{3{,}2 - 2{,}3 \cdot 1{,}2}{0{,}78 \cdot 0{,}98} = 0{,}57$.

Перевірка гіпотези про значимість вибіркового коефіцієнта кореляції. Розглянемо вибірку об'єму n з нормально розподіленої двовимірної генеральної сукупності (X, Y). Нехай обрахований за вибіркою коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю: $r_{\text{В}} \neq 0$. Але це ще не означає, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності $r_{\Gamma} \neq 0$. Тому при рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу H_0: $r_{\Gamma} = 0$.

Для перевірки гіпотези використовується випадкова величина

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n - 2$ степенями свободи.

Спостережене значення критерію $T_{\text{спост}} = \dfrac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$.

Критична область є двосторонньою з границями $\pm T_{\text{кр}}$, які знаходяться з таблиць для двосторонньої критичної області розподілу Стьюдента.

При $|T_{\text{спост}}| < T_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|T_{\text{спост}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ – відхиляється.

Приклад 7.9. За вибіркою $n = 10$ з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y) знайдено $r_{\text{В}} = 0{,}57$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $r_{\Gamma} = 0$, при конкуруючій H_1: $r_{\Gamma} \neq 0$.

Розв'язання. Знайдемо спостережене значення критерію та критичні точки:
$T_{\text{спост}} = \dfrac{r_{\text{В}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{В}}^2}} = \dfrac{0{,}57 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{1-0{,}57^2}} = 2$; $T_{\text{кр}}(0{,}1; 10-2) = 1{,}86$.

$|T_{\text{спост}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ і H_0 відхиляється. Тобто кореляція між X і Y існує.

✎

Задачі до теми

1 Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}}$ та вибіркове рівняння лінії регресії Y на X за даними спостережень.

X	0	1	3	4
Y	1	2	5	4

2 За вибіркою об'єму $n = 18$, яка взята з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y) обчислено вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}} = 0{,}6$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $r_{\Gamma} = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції r_{Γ} при конкуруючій гіпотезі H_1: $r_{\Gamma} \neq 0$.

Тема 8. Рангова кореляція. Коефіцієнти кореляції Спірмена та Кендала, перевірка їх значимості

Визначення 8.38. Якісна ознака — ознака, яку неможливо точно виміряти, але яка дозволяє порівнювати об'єкти і розташовувати їх в порядку погіршення якості.

Правило ранжування. Нехай вибірка об'єму n містить незалежні об'єкти, що мають дві якісні ознаки A і B. Треба з'ясувати степінь зв'язку ознак між собою, тобто встановити наявність або відсутність рангової кореляції.

Розташуємо спочатку об'єкти в порядку погіршення якості за ознакою A. Припишемо об'єкту, що стоїть на i-му місці ранг, рівний порядковому номеру: $x_i = i$. Далі розташуємо об'єкти в порядку погіршення якості за ознакою B і припишемо кожному з них ранг y_i, де номер i дорівнює порядковому номеру об'єкта за ознакою A, а самѐ значення рангу дорівнює порядковому номеру об'єкта за ознакою B. Одержимо дві послідовності рангів

за ознакою A	$x_1, x_2, \ldots, x_n$
за ознакою B	$y_1, y_2, \ldots, y_n$

Наприклад, якщо $y_1 = 2$, то це означає, що даний об'єкт займає в ряду за ознакою A перше місце, а в ряду за ознакою B – друге.

Для оцінки степені зв'язку між ознаками A і B користуються коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена

$\rho_B = 1 - \dfrac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}$, $d_i = x_i - y_i$.

Властивості коефіцієнта рангової кореляції:

1) $-1 \leqslant \rho_{\text{В}} \leqslant 1$;

2) залежність між A і B тим менша, чим ближче ρ_B до нуля;

3) якщо $\rho_{\text{В}} = \pm 1$, то A і B пов'язані лінійною залежністю. При $\rho_{\text{В}} = -1$ погіршення якості за однією з ознак призводить до покращення якості за іншою (має місце «протилежна залежність»).

Перевірка гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції Спірмена.

Для того, щоб при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\rho_\Gamma = 0$ про рівність нулю коефіцієнта рангової кореляції Спірмена генеральної сукупності ρ_Γ при конкуруючій гіпотезі H_1: $\rho_\Gamma \neq 0$ треба обчислити критичну точку

$$T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(\alpha, k)\sqrt{\frac{1-\rho_B^2}{n-2}},$$

де n – об'єм вибірки, $t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — критична точка двосторонньої критичної області, яку знаходять за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числу степенів свободи $k = n - 2$.

При $|\rho_{\text{В}}| < T_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|\rho_{\text{В}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ — відхиляється.

$\boxed{\text{Приклад 8.10.}}$ Для двох ознак об'єктів знайти коефіцієнт рангової кореляції Спірмена та перевірити його значимість при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

A	1	2	4	5	6
B	3	4	5	7	6

Розв'язання. Складаємо таблицю рангів та обчислюємо їх різниці.

Ранги за ознакою A	x_i	1	2	3	4	5
Ранги за ознакою B	y_i	2	1	3	4	5
Різниця рангів	d_i	-1	1	0	0	0
	d_i^2	1	1	0	0	0

Вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot (1+1)}{5^3 - 5} = 0{,}9.$$

Критична точка розподілу Стьюдента $t_{\text{кр}}(0{,}05, 5-2) = t_{\text{кр}}(0{,}05,\ 3)\ = 3{,}18.$

$$T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0{,}05, 3)\sqrt{\frac{1-0{,}9^2}{5-2}} = 3{,}18 \cdot 0{,}25 = 0{,}8$$

$|\rho_{\text{B}}| > T_{\text{кр}}$ $(0{,}9 > 0{,}8)$. Таким чином H_0 відхиляється. Тобто кореляція між ознаками A і B об'єкта існує.

Припустимо, що праворуч від y_1 є R_1 рангів, більших за y_1, праворуч від y_2 є R_2 рангів, більших за $y_2, \ldots$. Для оцінки степені зв'язку між ознаками A і B також користуються коефіцієнтом рангової кореляції Кендала:

$$\tau_{\text{B}} = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1, \quad R = \sum R_i,$$

який має такі ж самі властивості, як і коефіцієнт кореляції Спірмена.

Перевірка гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції Кендала. Для того, щоб при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\tau\Gamma = 0$ про рівність нулю коефіцієнта рангової кореляції Кендала генеральної сукупності τ_Γ при конкуруючій гіпотезі H_1: $\tau_\Gamma \neq 0$ треба обчислити критичну точку

$$T_{\text{кр}} = z_{\text{кр}}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

де n — об'єм вибірки, $z_{\text{ кр}}$ — критична точка двосторонньої критичної області, яку знаходять за таблицею функції Лапласа з рівняння $\Phi\left(z_{\text{кр}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

При $|\tau_{\text{B}}| < T_{\text{кр}}$. нульова гіпотеза приймається, при $|\tau_{\text{B}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ — відхиляється.

$\boxed{\text{Приклад 8.11.}}$ За даними рангів ознак об'єкту знайти коефіцієнт рангової кореляції Кендала та перевірити його значимість при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	1	3	4	5

Розв'язання.

R_i	3	3	2	1	0

$R = \sum R_i = 3 + 3 + 2 + 1 = 9.$

$$\tau_{\text{В}} = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 4} - 1 = 0{,}8.$$

Критичну точку $z_{\text{кр}}$ знайдемо з рівняння
$\Phi\left(z_{\text{кр}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2} = \dfrac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475$. З таблиці функції Лапласа $z_{\text{кр}} = 1{,}96$.

$$T_{\text{кр}} = 1{,}96\sqrt{\frac{2 \cdot 15}{45 \cdot 4}} = 1{,}96 \cdot 0{,}41 = 0{,}8.$$

$|\tau_{\text{В}}| = T_{\text{кр}}$ $(0{,}8 = 0{,}8)$. Таким чином H_0 відхиляється. Тобто кореляція між ознаками A і B об'єкта існує.

Задачі до теми

1 Знайти вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $\rho_{\text{В}}$ між двома ознаками об'єкта

X	12	11	9	8	7	6	4
Y	11	12	8	7	9	6	5

2 Знайти вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендала $\tau_{\text{В}}$ між двома ознаками об'єкта

X	12	11	9	8	7	6	4
Y	11	12	8	7	9	6	5

3 За вибіркою об'єму $n = 18$, яка взята з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y) обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $\rho_{\text{В}} = 0{,}6$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\rho_{\Gamma} = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Спірмена ρ_{Γ} при конкуруючій гіпотезі H_1: $\rho_{\Gamma} \neq 0$.

4 За вибіркою об'єму $n = 18$, яка взята з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y) обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендала $\tau_{\text{В}} = 0{,}6$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\tau_{\Gamma} = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Кендала τ_{Γ} при конкуруючій гіпотезі H_1: $\tau_{\Gamma} \neq 0$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАДАЧІ З МОДУЛЯ

Задача 1. За даними вибірки, наведеній в таблиці (варіант n вибирається як номер студента за списком групи),

1) знайти розмах вибірки, оптимальне число часткових інтервалів та побудувати групований статистичний ряд;

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти функцію розподілу та побудувати її графік;

4) зайти числові характеристики вибірки: вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, дисперсію $D_{\text{В}}$, моду Mo, медіану Me, теоретичні початкові ν_k^* та центральні μ_k^* моменти, асиметрію As та ексцес Ex.

5) виходячи з припущення про нормальність генеральної сукупності, з якої було взято вибірку, обчислити теоретичні частоти, що відповідають отриманим емпіричним частотам, та побудувати відповідну нормальну криву.

Задача 2. Виходячи з припущення про нормальність генеральної сукупності, з якої було взято вибірку

1) знайти інтервальну оцінку математичного сподівання генеральної сукупності з надійністю $\gamma = 0{,}9$, якщо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності відоме: $\sigma = 2$.

2) знайти виправлену дисперсію та виправлене середньоквадратичне відхилення вибірки; знайти інтервальну оцінку математичного сподівання генеральної сукупності з надійністю $\gamma = 0{,}9$, якщо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності невідоме.

3) знайти інтервальну оцінку дисперсії генеральної сукупності з надійністю $\gamma = 0{,}9$.

Задача 3. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $\overline{x} = n$ про рівність середньої генеральної сукупності числу n (номеру варіанта) при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x}_{\Gamma} \neq n$.

Задача 4. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, з якої було взято вибірку.

Варіант 1						
0,12	1,14	−4,80	2,03	0,96	−1,65	2,58
−0,36	−0,51	−3,31	2,48	1,06	−0,03	1,29
0,05	2,39	1,41	0,97	1,53	1,12	−1,01
−0,90	0,64	−0,23	1,56	1,98	−0,19	−0,85
−2,37	−0,29	−1,40	1,32	1,48	0,34	−0,76
1,09	−0,45	1,20	1,86	−0,37	2,08	1,56
0,76	−0,03	2,54	0,05	−2,23	1,44	0,20
2,11	2,12	1,61	−0,39	3,82	1,81	3,60
5,38	0,51	1,02	7,10	2,94	−1,31	−1,76
2,62	1,18	−0,53	0,43	−1,31	−1,21	1,76
2,97	3,52	0,18	−1,56	1,29	−1,21	
2,72	−0,41	−0,35	2,52	4,39	0,19	

2,83	1,00	0,74	0,21	0,36	−1,63	
2,35	3,22	3,04	−1,41	−3,06	−4,68	
−1,09	2,79	1,36	−1,07	−1,82	3,55	

Варіант 2						
1,79	0,06	6,36	5,29	2,34	−1,26	−1,59
−1,47	1,58	−0,93	0,28	7,42	1,06	2,04
0,88	2,21	2,77	3,05	−1,32	3,42	2,80
2,79	0,95	2,69	1,60	1,88	−3,30	5,72
−0,40	1,87	−3,14	4,33	0,83	4,47	−0,01
1,08	−0,88	2,76	2,64	2,31	1,16	0,96
2,38	1,22	2,74	4,58	−2,59	1,39	1,07
2,65	3,28	0,81	−0,27	1,21	2,62	−0,11
3,54	2,50	2,44	4,19	1,82	2,28	−0,82
0,79	−0,54	3,02	3,44	2,12	4,87	4,17
1,88	3,67	1,81	4,50	2,42	0,98	
4,40	1,91	2,28	6,87	1,28	2,74	
3,46	4,67	2,25	5,83	−0,31	−0,09	
4,97	3,39	1,63	1,46	−1,35	1,56	
2,44	0,69	3,07	1,52	0,57	7,48	

Варіант 3						
3,64	2,52	2,92	2,14	0,93	4,30	3,40
1,62	2,93	0,48	2,99	4,55	−0,06	3,01
1,86	1,94	5,72	2,12	3,75	3,22	3,84
0,67	2,35	1,40	3,44	3,14	6,23	1,80
4,27	3,06	2,99	−2,23	3,77	0,78	6,18
0,56	3,12	3,96	4,71	4,43	5,71	2,27
−1,11	3,93	2,51	5,17	2,08	3,40	0,59
4,13	2,88	4,44	4,69	3,51	2,69	5,11
1,52	3,97	6,25	3,94	2,13	0,96	0,87
3,70	5,63	6,09	1,75	5,66	5,15	3,87
0,81	1,95	4,62	1,53	1,45	0,75	
2,51	3,23	2,31	4,63	2,18	1,89	
2,23	3,96	3,50	1,84	4,65	3,27	
4,24	3,03	0,61	4,77	1,41	2,22	
−1,06	5,23	1,10	1,89	1,08	3,61	

Варіант 4						
4,88	5,41	4,71	6,59	4,75	3,25	6,32

0,52	2,07	6,88	2,14	4,57	4,48	10,07
3,24	1,48	4,59	0,94	6,75	8,08	3,57
2,84	2,71	3,83	3,23	1,67	−0,63	5,43
3,36	3,15	2,11	5,37	6,17	4,54	3,25
3,83	5,87	6,67	6,41	5,67	4,25	4,38
3,61	4,44	4,29	6,18	0,86	8,58	3,16
4,85	6,55	6,29	5,29	2,20	5,81	4,45
2,88	3,65	−0,38	8,43	1,66	7,58	2,07
6,99	2,45	1,16	10,23	4,58	1,50	4,02
3,64	4,65	6,40	1,81	4,99	3,11	
2,86	0,44	2,36	1,90	3,84	4,81	
2,16	4,37	5,08	2,83	2,60	3,43	
4,52	6,43	4,71	6,85	2,86	5,20	
3,02	3,75	6,08	2,56	1,94	2,61	

Варіант 5						
5,94	1,72	6,52	0,93	2,02	8,16	7,61
3,59	6,71	6,84	6,04	4,02	4,20	4,88
3,79	5,51	2,25	5,64	6,51	3,78	2,56
3,41	7,25	5,72	5,78	1,26	7,68	6,93
5,14	6,08	6,82	4,68	8,53	4,86	7,11
4,27	5,40	2,26	0,87	8,68	5,08	8,05
6,31	4,32	6,00	6,99	6,84	8,44	5,50
2,03	6,34	5,65	5,46	4,89	3,96	2,75
6,73	5,39	4,58	10,87	5,87	4,00	5,95
4,22	4,87	4,54	1,89	6,62	6,81	5,79
4,56	5,97	4,98	0,04	7,41	3,51	
6,43	4,85	1,94	5,18	3,23	1,52	
4,65	6,50	7,90	6,45	2,81	6,84	
3,09	9,10	9,98	3,08	4,39	4,56	
5,74	5,70	5,17	5,21	4,89	8,43	

Варіант 6						
2,51	2,71	5,91	3,52	7,79	4,40	7,21
4,63	5,78	2,64	3,92	6,09	5,22	6,56
5,58	5,43	4,04	6,42	6,50	6,48	7,01
10,10	5,16	1,89	7,04	5,83	6,44	6,31
9,37	4,78	5,40	6,87	6,16	5,73	4,21
7,56	5,43	6,28	9,45	4,51	5,54	5,13
5,67	4,91	7,32	7,01	6,47	7,25	3,03
9,38	8,27	4,94	1,35	6,51	3,85	4,31

8,80	5,64	6,34	6,52	6,34	3,06	6,89
6,89	4,90	7,63	4,92	4,20	8,25	6,97
8,02	6,96	1,73	10,25	4,53	5,61	
7,91	7,46	8,39	4,78	4,61	8,38	
5,84	3,85	5,18	6,79	9,96	5,63	
6,54	7,82	3,46	10,75	7,92	7,09	
8,50	11,36	5,83	6,23	7,70	1,99	

Варіант 7						
10,04	9,92	7,36	7,80	10,17	8,28	4,50
5,57	6,22	2,58	6,40	6,67	8,90	9,06
6,41	10,65	4,18	4,83	11,14	5,13	7,83
6,67	5,70	4,89	5,59	8,43	7,77	6,28
8,72	5,88	8,04	7,69	5,83	6,90	7,19
3,96	7,79	8,85	6,18	4,66	1,25	8,08
7,11	8,47	7,23	5,78	7,98	5,28	6,79
4,67	7,08	6,72	7,10	6,68	7,60	4,20
8,48	6,05	5,37	9,47	7,73	10,41	8,84
6,74	7,60	3,49	8,44	6,35	5,65	9,65
8,83	6,36	6,69	9,51	4,10	6,97	
6,12	12,52	6,90	9,01	9,44	2,89	
6,44	12,22	7,30	6,66	9,46	6,70	
9,07	8,31	8,39	6,54	6,44	9,44	
7,17	9,92	5,57	8,68	6,92	4,30	

Варіант 8						
4,50	5,84	4,73	7,57	9,46	5,87	8,35
4,45	8,74	7,53	9,84	7,89	6,63	7,03
8,16	9,14	7,74	8,13	3,18	7,35	9,68
6,61	9,75	11,60	9,89	9,63	8,91	8,87
9,43	8,89	9,49	9,81	7,81	9,28	9,57
10,77	11,32	8,85	4,56	7,09	12,21	9,91
7,97	9,71	4,48	8,38	8,01	9,13	10,32
8,58	8,02	11,06	12,12	9,10	5,03	5,35
5,50	4,36	7,02	12,15	7,16	9,01	4,98
9,32	5,49	6,56	7,80	6,32	8,74	6,08
9,78	6,72	6,69	8,53	9,56	10,11	
6,08	7,55	5,48	7,01	5,38	7,99	
10,00	5,24	10,40	7,74	8,36	5,62	
9,28	9,71	9,42	4,64	9,26	5,80	
8,74	9,96	9,19	5,95	10,52	7,73	

Варіант 9						
7,55	10,16	9,92	9,82	7,44	10,83	9,26
9,51	10,94	9,22	12,49	6,55	11,49	5,87
10,26	10,26	6,33	11,35	8,82	8,14	7,29
10,40	12,80	10,34	9,70	7,36	13,14	11,17
8,54	6,30	12,05	7,15	9,83	6,16	9,51
10,66	12,67	6,87	10,72	6,75	7,97	9,92
10,08	12,14	10,13	7,25	8,09	10,07	7,65
9,17	9,08	7,03	7,02	9,82	8,09	11,28
9,07	6,48	9,29	8,24	8,83	8,97	6,54
9,18	6,22	8,95	8,22	7,05	7,11	7,63
10,15	5,65	11,57	10,39	7,13	7,10	
11,45	4,99	7,08	7,86	9,38	10,29	
14,48	9,94	9,12	7,84	6,48	9,06	
7,70	7,59	7,90	8,21	11,98	12,90	
9,83	8,62	8,53	9,65	7,24	14,01	

Варіант 10						
7,58	11,28	7,42	11,53	10,68	8,79	10,30
6,49	10,25	9,17	11,76	11,16	9,27	9,58
9,56	11,59	11,57	10,83	9,78	9,14	11,45
11,13	9,66	10,68	11,36	5,56	8,55	10,57
12,74	11,36	9,58	8,08	11,17	9,84	10,62
11,63	11,49	12,26	9,23	7,64	9,91	12,66
8,88	10,98	6,78	11,06	9,81	10,08	9,29
11,28	11,10	9,30	12,14	11,66	11,71	9,04
9,52	5,64	9,79	13,04	12,94	9,03	9,89
13,24	7,45	7,39	11,05	12,60	9,32	10,46
9,38	9,48	7,24	11,73	11,93	10,21	
10,04	11,10	7,64	10,06	7,73	9,64	
8,45	10,61	12,02	11,66	13,78	9,71	
10,06	11,99	13,49	11,50	8,89	9,78	
6,69	11,18	11,36	6,26	10,09	12,14	

Варіант 11						
10,06	11,76	11,39	7,26	11,02	10,92	10,47
9,52	12,86	14,49	12,08	13,54	10,01	12,65
7,89	11,09	8,56	10,74	12,97	9,54	10,78
13,56	8,90	13,26	11,70	11,23	11,52	11,98
12,46	10,85	11,79	15,57	8,85	7,21	10,25
7,57	15,79	9,49	8,21	11,11	10,30	12,39

8,80	10,64	14,83	9,33	12,24	13,02	13,41
10,84	14,90	11,75	10,23	10,54	9,65	11,82
14,49	7,63	11,66	11,71	14,62	12,53	9,63
13,21	12,27	11,96	10,08	10,36	9,50	10,31
9,30	15,67	9,71	12,31	9,85	8,47	
5,96	10,92	11,12	10,91	9,96	8,89	
7,58	12,01	12,77	11,28	13,68	15,26	
11,62	10,25	9,98	10,59	12,55	14,91	
8,61	11,06	10,12	13,77	12,16	11,55	

Варіант 12						
8,48	10,23	12,58	10,86	8,58	10,90	11,63
10,58	10,48	12,10	12,76	8,82	14,15	9,63
12,70	12,30	10,81	14,17	12,85	14,50	13,70
8,79	10,74	10,94	11,16	10,01	14,62	12,17
14,85	5,45	11,37	11,26	10,31	11,48	8,50
11,78	11,25	12,94	11,61	14,33	11,24	17,63
13,26	14,65	9,38	9,75	7,75	11,14	11,86
10,57	9,45	12,97	11,87	10,10	10,91	13,61
10,53	16,86	11,91	10,59	12,75	14,12	13,23
8,46	14,46	12,26	14,49	9,86	10,70	11,65
16,20	13,01	12,95	10,65	13,86	11,06	
10,45	11,42	8,87	13,69	11,99	11,91	
14,04	11,48	10,59	10,76	13,16	11,81	
13,64	12,91	11,28	8,17	13,32	8,02	
10,96	10,61	10,20	10,69	14,25	12,46	

Варіант 13						
12,91	11,62	12,73	11,45	13,61	14,41	10,47
12,71	10,57	13,27	15,01	15,18	16,66	14,06
14,19	13,69	13,58	16,02	12,94	10,60	13,27
15,39	7,72	12,38	15,94	10,15	11,85	12,02
11,41	12,92	12,73	15,73	11,53	17,46	15,26
9,92	12,49	11,35	15,70	13,70	11,04	14,78
13,31	14,01	13,92	10,92	12,44	12,38	13,63
11,06	13,40	13,76	12,59	17,99	10,81	12,84
10,55	11,79	14,69	15,85	11,25	13,80	10,58
13,27	12,99	13,86	15,03	15,39	11,75	12,98
11,75	14,30	12,61	14,10	11,71	15,81	
14,93	10,93	13,11	11,26	13,75	11,92	
16,23	17,96	16,03	11,07	12,01	15,33	

14,31	13,50	13,18	14,10	13,16	14,72	
10,55	14,68	11,84	14,08	13,84	12,09	

Варіант 14						
14,43	14,61	15,58	16,12	13,08	13,74	14,30
10,47	16,95	14,42	16,34	13,44	12,69	11,96
11,28	13,68	14,39	15,12	16,17	12,92	18,90
15,75	19,09	14,85	12,50	13,54	12,19	16,00
11,19	14,34	13,32	13,94	10,91	13,89	13,98
13,13	14,46	11,18	11,48	14,48	16,97	12,99
13,06	17,88	16,30	16,02	15,73	14,37	14,06
12,03	13,48	14,68	13,20	10,98	13,32	14,30
15,38	13,91	11,33	14,82	13,48	12,49	15,60
16,09	13,37	13,97	14,47	10,85	13,48	13,44
12,12	11,97	13,19	16,26	14,10	15,16	
13,48	13,55	14,89	12,93	15,47	13,68	
14,45	11,08	11,51	15,99	12,58	12,30	
12,14	10,87	14,27	12,41	14,83	11,53	
15,93	12,49	14,66	15,84	16,65	16,27	

Варіант 15						
17,68	16,63	13,13	16,01	16,66	16,45	14,93
15,14	11,99	14,01	16,50	16,31	13,49	14,25
16,88	14,47	15,82	16,11	17,33	14,50	12,82
14,80	16,05	17,17	11,31	17,35	13,07	15,78
16,13	17,25	16,19	14,17	15,35	16,16	13,19
14,88	11,90	14,36	13,93	11,61	12,71	16,31
13,55	16,37	15,13	15,19	17,49	14,67	15,33
16,24	11,09	15,21	14,83	16,10	13,34	12,61
14,68	16,84	16,63	14,30	12,63	14,99	12,00
16,23	14,63	16,01	16,11	17,29	15,33	16,40
15,50	15,13	17,89	12,95	13,16	13,92	0,00
17,77	14,93	16,75	13,19	15,04	14,08	0,00
15,94	15,85	17,44	15,47	13,20	19,51	0,00
15,33	16,17	12,68	14,17	11,36	16,06	0,00
16,71	12,66	13,50	19,30	13,06	15,99	0,00

Варіант 16						
19,08	17,54	14,20	14,81	15,24	12,27	18,61

12,46	16,44	14,62	17,61	13,40	19,79	14,33
15,85	15,10	15,93	12,39	15,62	13,20	16,96
14,94	16,42	16,57	19,29	18,71	14,12	15,40
16,78	14,92	19,49	14,07	17,05	18,08	18,61
14,65	15,19	17,82	17,63	17,63	17,28	14,52
16,55	14,58	16,83	16,01	13,13	13,42	17,67
15,14	15,32	17,08	18,46	14,30	21,59	16,62
17,26	17,41	16,29	17,65	15,87	16,47	17,96
15,30	16,33	18,41	16,08	12,89	15,29	13,46
16,03	14,43	17,39	16,66	17,46	15,68	
12,61	14,75	16,73	15,26	18,56	15,76	
18,31	14,50	18,81	13,96	19,49	16,73	
15,46	14,81	12,84	15,99	19,16	17,68	
19,07	18,06	17,28	16,24	17,98	13,98	

Варіант 17						
19,04	15,36	17,14	16,14	18,69	13,34	15,01
14,63	18,21	17,26	20,24	13,97	14,20	17,73
16,70	13,06	18,02	17,56	11,12	18,04	19,13
17,94	15,29	16,86	21,15	15,87	18,76	15,48
19,91	11,81	15,60	17,17	14,16	18,22	17,22
18,11	12,40	19,65	15,38	14,19	16,57	17,20
16,78	20,37	17,17	12,32	20,57	15,93	12,84
18,82	16,64	20,07	16,19	18,29	20,67	16,94
17,10	15,84	16,69	16,36	18,10	14,92	15,38
16,95	16,86	16,49	16,70	16,73	16,20	16,95
14,58	18,33	13,34	16,12	18,68	14,51	0,00
16,21	16,73	13,77	15,78	17,94	17,36	0,00
18,82	15,15	16,09	21,66	16,02	15,90	0,00
15,10	15,37	15,77	14,93	15,17	16,52	0,00
17,45	15,26	17,24	18,02	18,01	17,65	0,00

Варіант 18						
14,45	18,98	19,04	16,07	17,16	19,30	14,88
18,51	16,66	16,68	14,69	18,42	18,90	15,38
18,97	13,20	15,66	20,51	16,96	20,15	17,97
16,76	14,17	17,55	16,31	17,53	18,30	19,56
19,60	16,56	16,78	18,04	17,10	17,71	14,40
18,49	17,57	17,37	15,75	17,35	20,46	19,57
15,52	14,92	15,84	17,34	14,89	21,54	16,61
17,12	16,81	17,65	21,41	15,47	18,91	21,10

21,58	15,09	15,66	15,32	14,46	17,59	20,72
14,70	15,44	19,16	17,86	17,93	18,38	14,80
17,41	17,28	16,97	19,52	16,94	18,76	
19,33	20,54	19,57	18,55	20,46	15,82	
17,66	17,29	14,81	17,59	16,93	17,42	
17,67	17,94	17,38	20,67	17,33	17,92	
13,65	18,48	17,43	20,37	14,05	18,10	

Варіант 19						
18,98	19,37	17,40	17,29	19,07	17,58	20,48
17,55	18,61	19,77	19,30	17,20	19,04	19,34
17,24	21,27	20,65	18,13	19,02	17,77	19,16
20,30	18,89	17,33	19,90	18,06	14,25	19,93
20,92	15,92	16,45	19,31	18,49	18,71	17,64
14,06	17,35	19,10	20,02	19,87	14,76	17,29
21,18	23,72	20,91	17,22	18,03	20,98	17,29
20,33	18,97	15,68	21,73	19,28	18,05	18,84
15,15	17,58	19,03	21,29	13,45	17,46	21,58
18,58	16,45	18,16	16,15	21,41	17,74	19,39
18,26	19,10	19,45	20,42	16,78	18,42	
19,37	18,51	18,30	18,28	16,88	20,72	
22,13	19,24	22,50	19,22	19,53	20,33	
19,16	19,29	18,41	18,84	17,65	17,31	
16,82	18,07	19,33	16,58	18,05	19,53	

Варіант 20						
17,91	20,52	21,20	20,18	21,18	20,08	20,18
16,44	17,87	19,26	18,24	18,49	17,16	21,22
17,94	23,80	18,56	16,90	16,93	15,65	21,32
18,44	18,95	19,88	20,56	20,41	21,66	21,52
21,84	19,71	21,95	17,54	20,06	20,15	19,36
22,79	19,14	19,91	21,25	18,49	20,16	19,76
23,52	20,78	21,73	16,98	18,62	22,25	17,95
18,95	18,57	20,01	15,37	20,96	19,89	20,34
22,20	18,06	19,85	18,92	21,36	23,95	18,29
17,50	22,42	17,96	17,45	21,44	19,12	21,18
18,66	22,01	17,47	20,72	21,68	22,68	
18,27	22,63	17,52	19,51	16,15	19,01	
19,04	22,58	22,15	20,65	17,30	19,99	
22,13	16,52	18,34	21,15	20,87	17,82	
19,48	22,48	25,82	19,30	22,35	18,97	

Варіант 21						
20,03	20,54	20,69	20,57	23,35	20,33	18,39
19,24	19,99	23,36	21,00	20,59	20,00	21,32
20,22	20,78	22,07	23,05	24,72	23,06	18,61
21,14	17,29	22,82	21,48	20,72	20,05	24,61
24,23	19,41	22,44	19,78	22,34	22,16	18,75
22,54	21,40	20,64	23,03	20,18	23,16	19,69
24,57	20,85	21,72	22,77	24,47	16,70	23,50
23,48	20,29	18,35	24,75	19,42	20,54	21,66
18,94	21,00	20,38	21,72	23,86	20,29	21,13
18,63	20,18	19,10	22,28	22,15	22,59	20,53
20,89	20,33	22,52	20,08	21,42	21,17	
24,96	20,69	19,64	15,70	24,43	19,90	
18,33	20,74	22,09	24,20	22,36	18,54	
21,95	23,81	22,67	19,70	23,73	23,86	
24,19	19,71	21,69	23,96	24,76	20,76	

Варіант 22						
19,28	22,29	20,94	23,99	22,76	21,94	20,22
18,43	19,66	24,41	23,93	19,84	22,28	22,11
22,10	23,84	22,43	21,39	16,90	22,57	22,33
19,79	20,13	24,97	24,76	20,72	20,74	23,24
24,72	18,25	22,31	21,42	20,29	23,28	20,31
19,08	20,41	22,83	17,71	21,57	22,23	25,59
21,27	22,03	20,13	19,89	23,09	20,23	20,23
20,45	23,75	22,74	18,54	19,23	21,60	22,66
21,11	23,60	20,67	23,65	25,32	23,08	20,15
27,03	26,55	22,14	21,95	21,04	21,12	22,80
21,70	25,60	24,74	24,89	22,19	24,82	
20,93	24,58	23,46	22,51	21,00	19,69	
22,42	21,90	20,82	23,44	20,21	20,45	
26,09	21,44	24,49	24,58	24,65	24,15	
22,66	23,67	19,69	22,97	20,80	23,52	

Варіант 23						
22,60	25,76	19,78	26,38	26,90	21,56	19,94
21,23	21,20	22,41	22,50	21,58	20,83	24,42
18,61	22,62	21,12	24,94	24,50	26,33	21,86
21,42	23,32	22,96	25,61	25,73	23,82	19,94
24,43	18,39	21,54	25,64	24,28	23,89	20,17
19,48	21,35	20,58	20,23	23,47	21,61	24,31

24,98	21,78	18,47	20,98	20,26	22,63	22,24
21,72	24,25	20,85	18,66	22,57	24,69	23,13
24,43	22,51	24,39	22,43	23,83	23,07	24,80
23,96	21,64	27,17	23,67	25,01	20,84	23,16
24,05	22,38	22,16	22,89	19,66	21,77	
22,98	24,79	23,08	26,38	22,98	25,82	
20,45	24,48	25,03	26,72	22,50	24,63	
24,35	22,23	24,27	22,59	24,59	23,01	
24,19	21,46	25,65	23,28	22,62	24,10	

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107

2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} \mathrm{d}z$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830

0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ				n	γ		
	0,95	0,99	0,999			0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61		20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86		25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96		30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41		35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04		40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78		45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59		50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44		60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32		70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22		80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14		90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07		100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02		120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92					

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,37
Число степенів свободи k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора (k_1 – число степенів свободи більшої дисперсії, k_2 – число степенів свободи меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106

2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Покажчик