МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
до практичних занять
з Модуля І «Лінійна алгебра і векторний аналіз»
для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки
всіх форм навчання

Київ - 2013

УДК

ББК
Ц

Укладачі: О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Ю.А. Коротких, асистент

Рецензент: О.В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.М. Міхайленко, доктор техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол №2 від 16 вересня 2013 року.

Видається в авторській редакції.

Вища математика. Методичні вказівки до практичних знань з Модуля 1 «Лінійна алгебра і векторний аналіз. Уклад.: О.В. Доля, Ю.А. Коротких. – К.: КНУБА, 2013 р. – 32 с.

Містить необхідний теоретичний матеріал та приклади розв’язування завдань з розділів лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії; вправи для самостійної роботи студентів.

Призначено для студентів інженерно-технічних напрямів усіх форм навчання.

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
до практичних занять
з Модуля І «Лінійна алгебра і векторний аналіз»
для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки
всіх форм навчання

Укладачі: Доля Олена Вікторівна,
Коротких Юлія Анатоліївна

Комп'ютерна верстка

Підписано до друку Формат
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. Обл. –вид. арк.
Ум. фарбовідб. Тираж прим. Вид. № Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red_istad@ua.fm

Віддруковано в редакційному відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК №

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
до практичних занять
з Модуля І «Лінійна алгебра і векторний аналіз»
для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки
всіх форм навчання

Всі цитати, цифровий
та фактичний матеріал,
бібліографічні відомості
перевірені. Написання
одиниць вимірювання
відповідає стандартам

Підписи авторів_________________________
«______» _______________________20___р.
Підпис голови методичної комісії факультету
____
«______» _______________________20___р.

Київ - 2013

Загальні положення

Запропоноване видання являє собою методичні вказівки до модуля I «Лінійна алгебра та векторний аналіз» курсу вищої математики для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки всіх форм навчання, особливо дистанційної.

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи, як практичного так і теоретичного характеру.

Рекомендуються для аудиторної та самостійної роботи студентів.

§ 1. Дії над матрицями

1. ***Сумою*** двох матриць $A[mxn] = (a_{ij})$ і $B[mxn] = (b_{ij})$ називається матриця $C[mxn] = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, де $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

2. ***Добутком*** матриці $A[mxn] = (a_{ij})$ на число k називається $B[mxn] = (kb_{ij})$, де $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

3. ***Різницею*** матриць $A - B$ є сума матриць A і матриці $B \cdot (-1)$, тобто $A - B = A + (-1)B$.

4. ***Добутком*** $C = A \cdot B$ матриці $A[mxn] = (a_{ij})$ і $B[mxn] = (b_{ij})$ називається матриця, у якої елемент $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, де $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,k$, тобто $C[mxn] = (c_{ij})$.

1. Виконати дії над матрицями А і В.

$$3A + 2B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Знайти добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

3	-2	5	2
5	-4	7	0
		3	4
		2	5

$$3\cdot 3+(-2)\cdot 2=9-4=5$$
$$5\cdot 3+(-4)\cdot 2=15-8=7$$
$$3\cdot 4+(-2)\cdot 5=12-10=2$$
$$5\cdot 4+(-4)\cdot 5=20-20=0$$

2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4	3	2	-6
7	5	-6	21
		-28	93
		38	-126

$$4\cdot(-28)+3\cdot 38=-112+114=2$$
$$7\cdot(-28)+5\cdot 38=-196+190=-6$$
$$7\cdot 93+3\cdot(-126)=372-378=-6$$
$$7\cdot 93+5\cdot(-126)=651-630=21$$

2	-6	2	0
-6	21	0	3
		7	3
		2	1

$$28\cdot 7+(-6)\cdot 2=14-12=2$$
$$-6\cdot 7+21\cdot 2=18\cdot 3+(-6)\cdot 1=-6\cdot 3+21\cdot 1=$$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=31$

5) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$

$$8)\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56\\ 69\\ 17\end{pmatrix}$$

§ 2. Визначники та їх властивості

Вираз $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

називається визначником (детермінантом) другого порядку.

Вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

називається визначником (детермінантом) третього порядку.

Властивості визначників:

1). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

2). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

3). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{vmatrix}=0$

4). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a & b & c\\ a & b & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a & a_{13}\\ b & b & a_{23}\\ c & c & a_{33}\end{vmatrix}=0$, або $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka & kb & kc\\ a & b & c\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}ka & a & a_{13}\\ kb & b & a_{23}\\ kc & c & a_{33}\end{vmatrix}=0$

5). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

6). $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

7). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного викресленням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} є:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

№1. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (3 \cdot (-3)) = 0 + 9 = 9$

2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha(-\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

3) $\begin{vmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{vmatrix} = (x-y)(x-y) - (x+y)(x+y) = (x-y)^2 - (x+y)^2 =$

$$= x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = -4xy$$

4) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \cdot \log_a b = 1 - \log_b a \cdot \dfrac{1}{\log_b a} = 1 - 1 = 0$

5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-1)(-2) \cdot 3 + 3(-2)(-1) - (-1) \cdot 4 \cdot 3 -$

$$-(-2)(-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 32 + 6 + 6 + 12 - 8 + 12 = 60$$

6 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 + 8 \cdot (-1) \cdot (-5) - (-5) \cdot 7 \cdot 2 -$

$$-3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 8 \cdot 8 \cdot 4 = 168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0$$

7 $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)(-x)(-x) + 1(-1) \cdot x + 0 \cdot 1 \cdot x - x(-x)x - 1(-1) \cdot$

$$\cdot (-x) - 0 \cdot 1(-x) = -x^3 - x + 0 + x^3 - x - 0 = -2x$$

8 $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix} = a \cdot a(-a) + a \cdot (-a)(-a) + a(-a) \cdot a - a \cdot a \cdot a - a \cdot (-a)(-a) -$

$$-a(-a)(-a) = -a^3 + a^3 - a^3 - a^3 - a^3 - a^3 = -4a^3$$

№2. Розв’язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Delta = x^2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 9 - 9 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot x^2 - x \cdot 4 \cdot 1 =$$
$$= 2x^2 + 12 + 9x - 18 - 3x^2 - 4x = -x^2 + 5x - 6$$
$$\Delta = 0; \quad -x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$D = 25 - 6 \cdot 4 = 25 - 24 = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right. .$$

2) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = -2x$

$$\Delta = -x(-x)(-x) + 0 \cdot 1 \cdot x + 1(-1) \cdot x - x(-x) \cdot x - 1(-1)(-x) - 0 \cdot 1(-x) =$$
$$= -x^3 + 0 - x + x^3 - x - 0 = -2x;$$
$$-2x = -2x; \ x = x; \ \ x \in R$$

3) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ x = 0, x = -2$

4) $\begin{vmatrix} 3x & 3^{x+1} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 108; \ x = 3$

№3. Розв’язати нерівність:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

$$\Delta = 3 \cdot x \cdot (-1) + (-2)(-2)(-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot x(-1) - 2(-2) \cdot 3 - 1(-2)(-1) =$$
$$= -3x - 4 + 2 + x + 12 - 2 = -2x + 8$$
$$\Delta < 0 \Rightarrow -2x + 8 < 0$$
$$x - 4 > 0$$
$$x > 4$$

№ 4. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{14}, A_{32} для визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = (-1)^5 M_{14} = -M_{14}$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 6 - 0 + 2 - 3 = -5$$

$$A_{14} = -M_{14} = -(-5) = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{32}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 2 + 4 - 0 - 0 = 2$$

$$A_{32} = -M_{32} = -2$$

Теорема про розклад визначника: Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

№ 5. Обчислити визначники:

1).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 17 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$$= a_{12}A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = 1 \cdot A_{12} = 1 \cdot (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 38$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = 1 \cdot (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 38$$

2). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 22$

Метод зведення до трикутного вигляду. Цей метод полягає в перетворенні визначника до такого вигляду, коли всі елементи, що розміщені по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Отриманий визначник дорівнює добуткові елементів головної діагоналі.

№ 6. Обчислити визначник п'ятого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} \textit{Додамо до кожного рядка, починаючи} \\ \textit{з другого, перший рядок і отримаємо :} \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

§ 3. Обернена матриця. Ранг матриці

Рангом матриці називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг існує для будь-якої матриці $A\left[_{mxn}\right]$, причому: $0 \le rang(A) \le min(m,n)$.

Для квадратної матриці $A_{[nxn]}$ $rang(A) = n$ тоді, і тільки тоді, коли $det\, A \ne 0$.

Якщо матриця A – нульова, то $rang(A) = 0$.

Квадратна матриця А називається ***невиродженою***, якщо її визначник відмінний від нуля, тобто $det\, A \ne 0$.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці A, якщо виконується умова:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,\ A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

де E - одинична матриця того ж порядку;

A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A.

№ 1. Знайти матрицю, обернену до матриці A: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$

$$det\,A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot 5+2\cdot 2\cdot 4+3\cdot(-2)\cdot(-1)-4\cdot 0\cdot(-1)-$$

$$-2\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 2\cdot 5=-4\neq 0$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{det}A^{\tau}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & -9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

2) $\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$det\,A=2-1+2-1-1+4=5$

$A_{11}=1, A_{12}=-3, A_{13}=1, A_{21}=3, A_{22}=1, A_{23}=-2, A_{31}=-2, A_{32}=1, A_{33}=3$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix}$$

Ранг матриці не зміниться, якщо:

1) переставити її рядки (стовпці);
2) помножити всі елементи її рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
3) до одного з її рядків (стовпців) додати інший рядок (стовпець), помножений на деяке число;
4) вилучити з неї рядок (стовпець), що дорівнює нулю;
5) вилучити з неї рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців);
6) транспонувати матрицю.

№ 2. Знайти ранг матриці A:

а) I спосіб:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1\\5&-1&0&2&4\\4&-3&-3&2&5\\7&3&6&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1\\0&-11&-15&2&9\\0&-11&-15&2&9\\0&-11&-15&2&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1\\0&-11&-15&2&9\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Отже, $rang(A)=2$.

II спосіб. Ранг матриці можна знайти методом обвідних мінорів, який полягає в наступному: шукають ненульовий мінор 1-го порядку. Якщо нема, $rang(A)=0$, якщо є $rang(A)\geq 1$. Далі шукають ненульовий мінор 2-го порядку, що містить в собі вибраний раніше ненульовий мінор 1-го порядку. Так продовжують доти, поки не знайдуть мінор найвищого порядку, що не дорівнює нулю і містить (обводить) вибраний раніше.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1\\5&-1&0&2&4\\4&-3&-3&2&5\\7&3&6&2&2\end{pmatrix}\qquad |1|=1\neq 0\Rightarrow rang(A)\geq 1$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\5&-1\end{vmatrix}=11\neq 0, rang(A)\geq 2$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\5&-1&0\\4&-3&-3\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&2&0\\5&-1&2\\4&-3&2\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&2&-1\\5&-1&4\\4&-3&5\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&2&3\\5&-1&0\\7&3&6\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&2&0\\5&-1&2\\7&3&2\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\5&-1&4\\7&3&2\end{vmatrix}=0.$$

Отже, $rang(A)=2$.

б) $A=\begin{pmatrix}2&3&1&4&5&1\\-1&2&3&0&1&1\\-2&0&0&7&6&-3\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&3&1\\-1&2&3\\-2&0&0\end{vmatrix}=-2A_{31}=-2\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}=-14\neq 0.$

Отже, $rang(A)\geq 3$, але

$$rang(A)\leq min(n,m)=min(3,6)=3; 3\leq rang(A)\leq 3\Rightarrow rang(A)=3.$$

§ 4. Розв'язування систем лінійних неоднорідних рівнянь

1. *За формулами Крамера*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1) Якщо визначник системи (1) $\Delta \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

2). Якщо $\Delta = 0; \Delta_1 \neq 0$, або $\Delta_2 \neq 0$, або $\Delta_3 \neq 0$, тоді система (1) не має розв'язків, тобто є несумісною.

3). Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система (1) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

2. *Матричний запис системи* (1).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot X = B \qquad X = A^{-1} \cdot B$$

Розв'язок системи рівнянь (1) у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця *A* є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$.

3. *Метод послідовного виключення невідомих* (алгоритм Гаусса).

Розширену матрицю системи (1) $\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & |b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & |b_3 \end{pmatrix}$ зводять до трикутного або трапецієподібного вигляду, виконуючи елементарні перетворення над її рядками: $\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} & |\overline{b_1} \\ 0 & \overline{a_{22}} & \overline{a_{23}} & |\overline{b_2} \\ 0 & 0 & \overline{a_{33}} & |\overline{b_3} \end{pmatrix}$.

Звідси маємо розв'язок системи (1):

$$x_3=\frac{\overline{b_3}}{\overline{a_{33}}};\ x_2=\frac{\overline{b_2}-\overline{a_{23}}\cdot x_3}{\overline{a_{22}}};\ x_1=\frac{\overline{b_1}-\overline{a_{12}}\cdot x_2-\overline{a_{13}}\cdot x_3}{\overline{a_{11}}};$$

№ 1. Розв'язати за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}=15$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=5$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{15}{5}=3,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-5}{5}=-1;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1$$

№2. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1 \\ -x_1+2x_2+3x_3=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}$$

№ 3. Розв'язати матричним способом:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3=4 \\ 5x_1-7x_2+8x_3=20 \\ 4x_1+5x_2-7x_3=-8 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \qquad X=A^{-1}B$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix}=440\neq 0$$

Матриця A невироджена і має обернену.

$$A^{-1}=\frac{1}{440}\begin{pmatrix} 9 & 41 & 52 \\ 67 & -37 & -4 \\ 53 & -3 & -36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}=\frac{1}{440}\begin{pmatrix} 440 \\ -440 \\ 440 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; x_1=1, x_2=-1, x_3=1$$

§ 5. Теорема Кронекера-Капеллі (критерій сумісності)

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \qquad rang(A)=rang(\tilde{A}).$$

Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг сумісної системи менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

№ 1. Дослідити систему рівнянь на сумісність.

1) $$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+4x_2-x_3=5 \end{cases} \qquad \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Знайдемо ранги основної і розширеної матриць системи:

$$|1| = 1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $rang(A) = rang(\widetilde{A}) = 2$.

Система сумісна і має два незалежних рівняння, за які беремо перші два, оскільки вони містять базисний мінор.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{11 - x_3}{5}, x_2 = \dfrac{2(x_3 - 1)}{5} \Rightarrow$ система має безліч розв'язків.

Наприклад, $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$ отримали частинний розв'язок.

2). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

Зведемо розширену матрицю системи до канонічного вигляду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right)$$

Поміняємо знаки в трьох останніх стовпцях і переставимо другий і третій стовпці. Отримаємо:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отже, $rang(A) = rang(\widetilde{A}) = 3$. Кількість невідомих дорівнює рангу $\Rightarrow$ система має єдиний розв'язок.

Розглянемо базисну систему, яка складається з перших трьох рівнянь системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, розв'язуємо за правилом Крамера, або матричним способом: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

3). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Знайдемо ранг основної матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |2| = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$ $det\, A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Знайдемо ранг розширеної матриці

$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right);$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, rang(\tilde{A}) = 3$.

Отже, система несумісна, $rang(A) \neq rang(\tilde{A})$

§ 6. Однорідна система лінійних рівнянь

Має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

або в матричній формі $A \cdot X = 0$

Кожна система однорідних рівнянь має **нульовий розв’язок** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$ який називається **тривіальним.**

Для того, щоб система однорідних лінійних рівнянь мала нетривіальний розв’язок, необхідно й достатньо, щоб ранг цієї системи був менший від кількості невідомих.

Для того, щоб система однорідних лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, мала нетривіальний розв’язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю.

Якщо вектор-стовпці $C_i(i = \overline{i,n})$ є розв’язками однорідної системи $A \cdot X = 0,$ то будь-яка їх лінійна комбінація $C = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$ також є розв’язком цієї системи.

Фундаментальною системою розв’язків для системи однорідних рівнянь називається лінійно незалежна система розв’язків, через яку лінійно виражається будь-який розв’язок цієї системи рівнянь.

Якщо ранг r системи дорівнює кількості n – невідомих, то фундаментальна система розв'язків складається з єдиного розв'язку – нульового.

Якщо ранг r системи однорідних лінійних рівнянь менший від кількості невідомих n $(r < n)$, то така система має безліч фундаментальних систем розв'язків, зокрема кожна з них складається з $(n - r)$ розв'язків.

№1. Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}$$

Віднімемо перше рівняння системи від II та IV рівнянь, а також від III , попередньо помноживши на 2. Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

II рівняння додаємо до III, до IV помноженого на (-2).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Вважаємо головними невідомими x_1, x_2, x_4, вільними x_3 і x_5.

З II та III рівняння знаходимо: $x_2 = -2x_3 - 3x_5$.

Підставимо отримане значення x_2 в I рівняння.

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти добуток матриць ABC, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=2x^2+x-4$ і $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати матричне рівняння: $A \cdot X = B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Знайти дійсні кореі рівняння: $\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 2 \\ -2 & 3-k & 1 \\ 4 & 2 & 6-k \end{vmatrix}=0$.

7. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & 12 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

8. Розв'язати систему рівнянь різними способами: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-x_3 \\ 3x_1-x_2-2x_3=8 \end{cases}$

9. Дослідити на сумісність і в разі сумісності знайти загальний розв'язок СЛАР: $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2-9x_3=6 \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=3 \end{cases}$.

10. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь: $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$.

§ 7. Елементи векторної алгебри

1. Обчислити **координати** векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо $A(3;-1;1)$, $B(-1;1;0)$.

$$\overrightarrow{AB}=(-1-3;1-(-1);0-1)=(-4;2;-1)$$
$$\overrightarrow{BA}=(3-(-1);-1-1;1-0)=(4;-2;1)$$

2. Обчислити **модуль вектора** $\vec{a}=\left\{-1;3;\sqrt{6}\right\}$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-1)^2+(3)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{16}=4.$$

3. Обчислити **координати** z вектора $\vec{a}=\{4;-12;z\}$, якщо $\left|\vec{a}\right|=13$.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+(-12)^2+z^2}=\sqrt{16+144+z^2}=\sqrt{160+z^2},$$
$$\sqrt{160+z^2}=13;\ 160+z^2=169;\ z^2=9;\ z=\pm 3.$$
$\vec{a}=\{4;-12;-3\}$ або $\vec{a}=\{4;-12;3\}$.

4. Дані точки $M(2{,}4{,}-2)$ і $K(-2{,}4{,}2)$. На відрізку MK знати точку N, що ділить відрізок MK у **відношенні** $\lambda=3$.

Формула ділення відрізка в заданому відношенні λ:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda};$$
$$x_N=\frac{2+3(-2)}{1+3}=-1;\quad y_N=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4;\quad z_N=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1;$$

Отже, $N(-1;4;1)$

Подання вектора в ортонормованому базисі: $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, де $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$.

Напрям вектора $\bar{a}$ визначається кутами α,β,γ. **Напрямні косинуси** визначаються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|},$$

причому $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

5. Знайти **довжину вектора** $\bar{a}=20\bar{i}+30\bar{j}-60\bar{k}$ і **напрямні косинуси**.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{20^2+30^2+(-60)^2}=70$$
$$\cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7};\ \cos\beta=\frac{30}{70}=\frac{3}{7};\ \cos\gamma=-\frac{60}{70}=-\frac{6}{7}.$$

6. Вектор $\bar{a}$ утворює з осями ОХ і OZ кути $\alpha = 120^0$ і $\gamma = 45^0$. Який кут він утворює з віссю ОУ?

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

$$cos^2\beta = 1 - \left(cos^2\alpha + cos^2\gamma\right) = 1 - \left(cos^2 120^0 + cos^2 45^0\right) = 1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

$$cos^2\beta = \frac{1}{4};\ \text{тоді}\ \cos\beta = \frac{1}{2}; \beta = \frac{\pi}{3} = 60^0, \text{або}\ \cos\beta = -\frac{1}{2}; \beta = \frac{2\pi}{3} = 120^0.$$

Скалярний добуток двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторний добуток двох векторів:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha.$$

Мішаний добуток трьох векторів:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Необхідна і достатня умова **перпендикулярності** двох векторів: $\left(\vec{a} : \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$.

Необхідна і достатня умова **колінеарності** двох векторів: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Необхідна і достатня умова **компланарності трьох** векторів: $\left[\vec{a}; \vec{b}\right]; \vec{c} = 0$.

7. Знайти **скалярний** добуток векторів $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0$, так як $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

8. Задані вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 4m + 3m - 28$; але $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, тому $7m = 28 \Rightarrow m = 4$.

9. Знайти **кут між векторами** $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$.

Так як $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, то $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=1\cdot 6+2\cdot 4+3(-2)=8$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\,;\ |\vec{b}|=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}\,,$$

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\frac{2}{7};\quad \varphi=\arccos\frac{2}{7}\,.$$

10. Знайти **векторний** добуток векторів: $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix},$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=-7\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}\,.$$

11. Обчислити **площу паралелограма**, побудованого на векторах: $\bar{a}=6\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}$.

Знайдемо векторний добуток

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=14\bar{i}-42\bar{j}-21\bar{k}\,.$$

$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49.$$

12. Обчислити **площу трикутника** з вершинами A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2).

Знайдемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(2-1)\bar{i}+(3-1)\bar{j}+(4-1)\bar{k}=\bar{i}+2\bar{j}+3\underline{k}$$

$$\overline{AC}=(4-1)\bar{i}+(3-1)\bar{j}+(2-1)\bar{k}=3\bar{i}+2\bar{j}+\underline{k}$$

Площа ΔABC дорівнює половинні площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Тому знаходимо векторний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4\bar{i}+8\bar{j}-4\bar{k}\,.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\,.$$

13. Знайти **мішаний** добуток векторів: $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$.

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=26+5+2=33.$$

14. Показати, що вектори $\bar{a}=2\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\overline{2j}+2\bar{k}$ компланарні.

Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Отже, вектори компланарні.

15. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами А(2, 2, 2), В(4, 3, 3), С(4, 5, 4), Д(5, 5, 6).

Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ - вони співпадають з ребрами піраміди, які сходяться в вершині А:

$$\overline{AB}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \overline{AC}=2\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k},\ \overline{AD}=3\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}.$$

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7.$$

Так як $V_{піраміди}=\frac{1}{6}\cdot V_{паралелепіпеда}$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, то $V=\frac{7}{6}$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо $\vec{x}\cdot\left(\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}\right)=17;\ \vec{x}\cdot\left(\vec{i}-4\vec{j}+11\vec{k}\right)=17;\ \vec{x}\cdot\left(\vec{i}-7\vec{j}+14\vec{k}\right)=2$.

2. Знайти кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{g}$, якщо: $\vec{p}=\vec{a}-4\vec{b};\ \vec{q}=2\vec{a}-3\vec{b}$; $\vec{a}=(-4;3;2)$; $\vec{b}=(-2;4;5)$.

3. Обчислити площу грані АВС і об'єм піраміди АВСД, якщо вершини містяться в точках: $A(2;1;7);B(-1;3;5);C(5;-4;1);D(2;5;1)$.

4. Довести, що вектори $\bar{a}=(2;1;3)$, $\bar{b}=(2;-3;1)$, $\bar{c}=(1;2;1)$ утворюють базис, і розкласти вектор $\bar{p}=(0;11;3)$ за цим базисом.

5. Відомо, що точки А(1;2;-1), В(0;3;1), С(3;2;-4) та Д(a;4;0) належать одній площині. Знайти *a*.

§ 8. Пряма на площині

1. Пряма задана рівнянням $5x+3y-3=0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямих:

1) паралельних до даної прямої

для того, щоб визначити кутовий коефіцієнт треба виразити y : $(y=kx+b)$.

$$5x+3y-3=0$$

$$3y=3-5x; y=\frac{3-5x}{3}=-\frac{5}{3}x+1; k=-\frac{5}{3}.$$

2) перпендикулярних до даної прямої;

$k_1 \times k_2=-1$, отже, $k=\frac{3}{5}$.

2. Пряма задана рівнянням $2x+3y+4=0.$ Скласти рівняння прямої, яка проходить через т. $M_0(2;1)$ і:

1) паралельна до даної прямої;

рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0;y_0)$

$$y-y_0=k(x-x_0); \quad M_0(2;1)$$

$$y-1=k(x-2)$$

$$2x+3y+4=0$$

$$3y=-4-2x$$

$$y=\frac{-4-2x}{3}=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}, \quad k=-\frac{2}{3}$$

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-2)$$

$$y-1=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}; y-1+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$$

$$\frac{2}{3}x+y-\frac{7}{3}=0; \quad 2x+3y-7=0$$

2) перпендикулярна до даної прямої;

$$y-1=k(x-2); \quad k=\frac{3}{2}$$

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2); \quad y-1-\frac{3}{2}x+3=0$$

$$y-\frac{3}{2}x+2=0; \quad -3x+2y+4=0$$

3. Знайти проекцію т. $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$

Знайдемо k : $4x-5y+3=0;-5y=-3-4x; y=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}; k=\frac{4}{5}$.

$$y-y_0=k(x-x_0); y-4=k(x+6); y-4+\frac{5}{4}x+\frac{30}{4}=0.$$

$$5x+4y-16+30=0; 5x+4y+14=0$$

$$\begin{cases} 4x-5y+3=0 \\ 5x+4y+14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 5x+4y=-14 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16+25=41$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -14 & 4 \end{vmatrix} = -12-70=-82$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -14 \end{vmatrix} = -56+15=-41$$

$$x=-\frac{82}{41}=-2;\, y=-\frac{41}{41}=-1, \text{ т. } P_0(-2;-1)$$

4. Задані вершини трикутника $M_1(2;1), M_2(-1;-1), M_3(3;2)$.

Скласти рівняння медіани на сторону M_1M_2.

Знайдемо середину відрізка M_1M_2, нехай це буде т. A:

$$x_A=\frac{x_1+x_2}{2};\, x_A=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y_A=\frac{y_1+y_2}{2};\, y_A=\frac{1-1}{2}=0, \text{ т. } A\left(\frac{1}{2};0\right)$$

Рівняння прямої через 2 точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}; \text{ т. } A(x_1,y_1), M_3(x_0,y_0).$$

Будуємо пряму:

$$\frac{x-3}{\frac{1}{2}-3}=\frac{y-2}{0-2};\; \left(\frac{1}{2}-3\right)(y-2)=(x-3)(0-2)$$

$$\frac{1}{2}y-3y-1+6=-2x+6$$

$$2x+\frac{1}{2}y-3y-1=0$$

$$2x-2.5y-1=0$$

$$4x-5y-2=0$$

5. Визначити кут, утворений двома прямими $3x-y+5=0;\, 2x+y-7=0$.

$$\overrightarrow{N_1}=\{3;-1\}, \quad \overrightarrow{N_2}=\{2;1\}$$

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}=45^0.$$

§ 9. Площина в просторі

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$, де *A, B, C* – координати вектора $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$ $\perp$ площині.

Частинні випадки розташування площини:
B=0, площина // *OУ*
C=0, площина // *OZ*
D=0, площина проходить через початок координат
A=B=0, площина $\perp OZ$ (// площині *XOУ*)
A=C=0, площина $\perp OY$ (// площині *XOZ*)
B=C=0, площина $\perp OX$ (// площині УOZ)
A=D=0, площина проходить через вісь *OX*
B=D=0, площина проходить через вісь *OУ*
C=D=0, площина проходить через высь *OZ*
A=B=D=0, площина співпадає з *XOZ (z=0)*
A=C=D=0, площина співпадає з *XOZ (y=0)*
B=C=D=0, площина співпадає з У*OZ (x=0)*

1. Визначити **відстань від точки** $M_0(3;5;-8)$ **до площини** $6x-3y+2z-28=0$.

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$$d=\left|\frac{6\cdot 3-3\cdot 5+2\cdot(-8)-28}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}\right|=\frac{41}{7}$$

2. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$.

Рівняння площини через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

$15x+10y-6z-60=0$ - рівняння площини.

3. Задані дві точки: $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через т. M_1 $\perp$ вектору $\overline{M_1M_2}$.

Рівняння площини яка проходить через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = (A,B,C):$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$\overline{M_1M_2} = (1;-1;-3)$$
$$-(x-3) + (-1)(y+1) - 3(z-2) = 0$$
$$x - 3 - y - 1 - 3z + 6 = 0$$
$$x - y - 3z + 2 = 0$$

4. Чи паралельні площини: $x + 2y + 3z + 5 = 0$ і $2x + 4y + 6z + 11 = 0$?

$\overrightarrow{N_1} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{N_2} = (2;4;6)$. $\overrightarrow{N_1} \,//\, \overrightarrow{N_2}$, якщо координати пропорційні, тобто

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$ - площини паралельні.

5. Дано площину $5x + 2y + 3z - 15 = 0$.

Знайти відрізки, що відсікаються площиною на осях координат.

Для відрізка на осі OX: $y = 0, z = 0 \Rightarrow 5x + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 15 = 0, 5x - 15 = 0, x = 3$; $OY: x = 0, z = 0, y = 7\frac{1}{2}$; $OZ: x = 0, y = 0, z = 5$.

6. Перевірити, чи мають спільну точку площини: $2x + 2y - 3z - 9 = 0$, $5x - y + 8z - 7 = 0$, $x + 3y + 2z - 1 = 0$, $3x + 5y - z - 10 = 0$.

Обчислимо визначник системи:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 9 \\ 5x - y + 8z = 7 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-26) - 2\cdot 2 - 3\cdot 16 = 104 \neq 0$$

Площини мають спільну точку. Для її знаходження розв'яжемо систему;

отримаємо: $x = -\frac{312}{104} = 3, y = 0, z = -1; \Rightarrow M_1 = (3;0;-1)$.

Перевіримо, чи лежить т. M в четвертій площині. $3x + 5y - z - 10 = 0$, $3\cdot 3 + 5\cdot 0 - (-1) - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$. Всі чотири площини мають спільну точку $M(3;0;-1)$.

7. Знайти кут між площинами: $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

Маємо: $cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0$.

8. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M(2;-1;4)$ і $N(3;2;-1)$ перпендикулярно до площини $x + y + z - 3 = 0$.

Маємо: $\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0; \\ A+3B-5C=0; \\ A+B+C=0, \end{cases}$

отримаємо шукане рівняння: $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, або $4x-3y-z-7=0$.

9. Знайти рівняння площини, що проходить через основи перпендикулярів, проведених з точки $P(2;3;-5)$ на координатні площини.

Маємо точки – основи перпендикулярів: $M_1(2;3;0); M_2(2;0;-5); M_3(0;3;-5)$.

Отже, рівняння площини: $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0$, або $15x+10y-6z-60=0.$

10. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2;3;5)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$.

Маємо: $4(x-2)+3(y-3)+(z-5)=0$, або $4x+3y+2z-27=0$.

§ 10. Криві другого порядку

Рівняння прямої в просторі:

- загальне $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$;

- через дві точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

- канонічне $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$;

- параметричне $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt, \text{ де } \vec{S}=\{l;m;n\} - \text{напрямний вектор прямої.} \end{cases}$

Кут між двома прямими: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}|\cdot|\overrightarrow{S_2}|}$, де $\overrightarrow{S_1}=\{l_1,m_1,n_1\}$; $\overrightarrow{S_2}=\{l_2,m_2,n_2\}$.

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

де $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$ - напрямні вектори прямих.

1. Привести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

Напрямний вектор заданої прямої $\vec{S} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ перпендикулярний до $\overrightarrow{N_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\overrightarrow{N_2} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, отже,

$$\vec{S} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}$$, тобто $l = -11; m = 17; n = 13$.

Далі знайдемо точку, через яку проходить шукана пряма: $\begin{cases} x = 0 \\ -y + 3z - 1 = 0 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$

Отже, $\dfrac{x}{-11} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z-1}{13}$.

2. Опустити перпендикуляр з початку координат на пряму $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{1}$.

Утворимо площину, що проходить через точку (0,0,0) перпендикулярно до заданої прямої: $2x + 3y + z = 0$.

Знайдемо точку M перетину цієї площини і даної прямої: $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases},$

$$2(2t+2) + 3(3t+1) + t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{7}.$$

Тоді $M\left(\dfrac{4}{7}; -\dfrac{8}{7}; \dfrac{16}{7}\right)$; $\dfrac{x}{\frac{4}{7}} = \dfrac{y}{-\frac{8}{7}} = \dfrac{z}{\frac{16}{7}}$, або $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{4}$.

3. При якому значенні параметра *n* прямі $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{n}$ і $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z}{1}$ перетинаються? Знайти їх точку перетину.

Умова перетину двох прямих: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$, отже,

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0$, або $2n + 10 + 3 - 15n = 0$, $n = 1$.

З рівняння $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$ виразимо $x=2z; y=-3z$ і підставимо в рівність: $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2};$ маємо $\frac{2z+1}{3}=\frac{-3z+5}{2}\Rightarrow z=1$.

Отже, $x=2$ і $y=-3$, тому $M(2;-3;1)$.

4. Знати точку N, симетричну точці М відносно заданої прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$, якщо точка $M(1;1;1)$ не належить цій прямій.

Рівняння площини проекцій: $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$; умова перпендикулярності цієї площини і даної прямої: $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}$.

Отже, $2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0,\ 2x+3y-z-4=0.$

Знайдемо проекцію точки М на пряму: $\begin{cases}2x+3y-z-4=0\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+11}{-1}\end{cases}$, або

$\begin{cases}2x+3y-z-4=0\\ x=2t+1\\ y=3t\\ z=-t-1\end{cases}$ звідси $t=\frac{1}{14}; x=\frac{8}{7}; y=\frac{3}{14}; z=-\frac{15}{14}$.

Тоді

$x=\frac{x_M+x_N}{2}; y=\frac{y_M+y_N}{2}; z=\frac{z_M+z_N}{2}; \frac{8}{7}=\frac{1+x_N}{2}; \frac{3}{14}=\frac{1+y_N}{2}; -\frac{15}{14}=\frac{1+z_N}{2}$,

тому $N\left(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-\frac{22}{7}\right)$.

5. Знайти рівняння проекцій прямої $\begin{cases}x+2y+3z-26=0\\ 3x+y+4z-14=0\end{cases}$ на координатні площини.

На площину $YOZ: x=0,\quad 5y+5z-64=0$,

на площину $XOZ: y=0,\quad 5x+5z-2=0$,

на площину $XOY: z=0,\quad 5x-5y+62=0$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x-3y+5=0$ та $3x-y-2=0$.
2. Знайти відстань від точки $M(1;3;-2)$ до площини $2x-3y-4z+12=0$.
3. Знайти рівняння площини, точки якої рівновіддалені від точок $M(1;-4;2)$ і $N(7;1;-5)$.

4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $N(5;-1;-3)$ паралельно до прямої $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$.

5. Знайти кут між прямою $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z+2}{-2}$ і площиною $6x-9y-6z+10=0$.

§ 11. Криві другого порядку

Приклад 1.

Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-23=0.$

Розв’язання.

$$\left(x^2+4x\right)+\left(y^2-6y-23\right)=0,$$

або

$$\left(x^2+4x+4\right)-4+\left(y^2-6y+9\right)-9-23=0,\ \ (x+2)^2+(y-3)^2=36.$$

За формулою (6.33) точка $(-2;3)$ - центр кола, а $R=6$ - радіус кола.

Відповідь: $(-2;3)$; $R=6$.

Приклад 2.

Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої відношення відстані від точки $F(5;0)$ до відстані до прямої $x=\dfrac{15}{2}$ дорівнює $\dfrac{2}{3}$.

Розв’язання.

Нехай точка $M(x,y)$ належить шуканій кривій. Тоді відстань $FM=d_1=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$, а відстань від точки M до прямої $x=\dfrac{15}{2}$: $d_2=\left|x-\dfrac{15}{2}\right|$.

За умовою, $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{2}{3}$. Отже, $\dfrac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{15}{2}\right|}=\dfrac{2}{3}$. Звідси

$$(x-5)^2+y^2=\frac{4}{9}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2;\ 9(x-5)^2+9y^2=4\left(x-\frac{15}{2}\right)^2;\ 5x^2+9y^2-30x=0$$

рівняння шуканої лінії.

$$5\left(x^2-6x\right)+9y^2=0;\ 5\left(x^2-6x+9\right)-45+9y^2=0;\ \ 5(x-3)^2+9y^2=45.$$

За формулою: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ - це рівняння еліпса з центром в точці $C(3;0)$ та півосями $a=3;b=\sqrt{5}$.

Відповідь: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1.$

Приклад 3.

Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2 - 8y^2 = 8$ від її асимптоти.

Розв'язання.

За формулою канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1$, звідки $a = \sqrt{8}\ ; b = 1$ - півосі. Тому рівняння асимптоти має вигляд: $x - y\sqrt{8} = 0.$ Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, маємо $c = 3$, тому $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ - фокуси гіперболи. Тоді відстань d від фокуса F_1 до знайденої асимптоти: $d = 1.$

Відповідь: $d = 1.$

Приклад 4.

Записати рівняння кривої $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ в полярних координатах і побудувати її.

Розв'язання

Перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi,\ \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Звідси $\rho = \pm a\sqrt{2\cos\varphi}$, де $a > 0.$

Очевидно, що крива симетрична відносно осей Ox і Oy. Для I чверті $\rho \ge 0$, $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$, тобто $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Складемо таблицю:

φ	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$\pi/4$
ρ	$1{,}41a$	$1{,}37a$	$1{,}24a$	a	$0{,}59a$	0

і побудуємо криву, враховуючи симетрію:

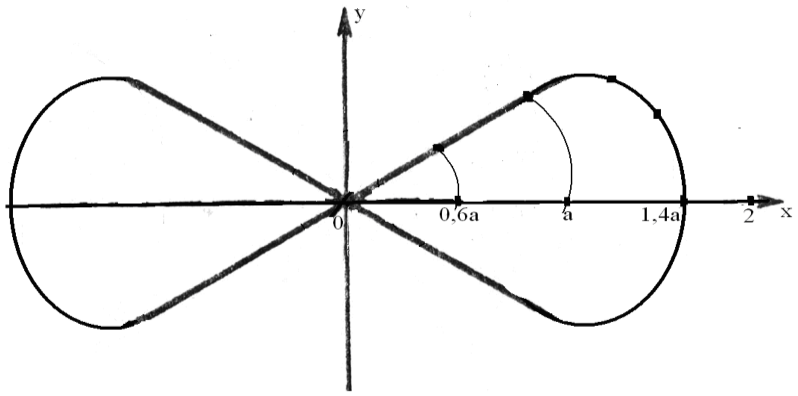

Рис. 1

Ця крива є лемніскатою Бернуллі.

Приклад 5.

Яка лінія визначається параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$?

Розв'язання.

Оскільки $x = \cos t$, то $y = x^2$.

З умови слідує, що $|x| \le 1, 0 \le y \le 1.$ Таким чином, маємо дугу *AOB* параболи $y = x^2$, де *A(-1;1), B(1;1).*

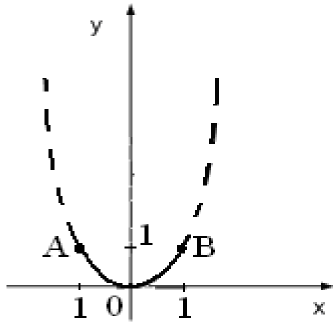

Рис. 2