

Таблиця похідних

$$(c)' = 0$$

$$(cu)' = cu'$$

$$x' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$[f(u(x))]' = f_u' \cdot u_x'$$

Деякі випадки:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(sh(x))' = ch(x)$$

$$(ch(x))' = -sh(x)$$

Приклади:

$$(10x^7 - 5x + 2)' = 10 \cdot 7 \cdot x^6 - 5$$

$$((x^2 - 3x)^3)' = 3(x^2 - 3x)^2 \cdot (2x - 3)$$

$$((\cos 3x)^3)' = 3(\cos 3x)^2 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3$$

$$(10^{(\sin x)^2})' = 10^{(\sin x)^2} \cdot \ln 10 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$(\arcsin \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^2 \cdot \sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$(2^{\sqrt{x}})' = 0$$

$$\left(\frac{x^2 + 1}{e^x}\right)' = \frac{2x \cdot e^x - e^x(x^2 + 1)}{(e^x)^2}$$

$$\left(\frac{5}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos x \cdot 5}{(\sin x)^2}$$

Таблиця інтегралів:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

$$7. \int e^x dx = e^x + c$$

$$8. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) + c$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + c$$

$$15. \int tg(x) dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$16. \int ctg(x) dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int (f \pm \varphi) dx = \int f dx \pm \int \varphi dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Приклади:

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + c$$

$$\int \sqrt[4]{5x-6} dx = \frac{1}{5} (5x-6)^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{4}{5} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[10]{1-2x}} = -\frac{1}{2} (1-2x)^{-\frac{1}{10}+1} \cdot \frac{10}{9} + c$$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + c$$

Формули скороченого множення:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3ab(a-b) - b^3 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Виділення повного квадрату:

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Теорема Вієта:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Для $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad x_1 + x_2 = -p$$

Степінь числа, корені:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = x^2$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$$

$$\sqrt{a^5} = a^2\sqrt{a}$$

Модуль числа:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

Арифметична прогресія

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

d-різниця прогресії

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресія:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

q-знаменник прогресії

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Для нескінченно спадної прогресії

$$|q| < 1: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad q=1/2$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Логарифми:

$$\log_a b = x \quad b = a^x,$$

$$b > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

$$\log_{10} x = \lg x \quad \log_e x = \ln x$$

$$a^{\log_a x} = x \quad e^{\ln x} = x$$

Вектори: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Тригонометрія:

Основні формули

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

Універсальні формули:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Формули подвоєного аргументу:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Формули половинного аргументу (пониження степеня):

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

Формули суми кутів:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Сума функцій:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Формули добутку функцій:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

Формули зведення:

$$\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

Парність:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Період:

$$\sin x, \cos x \quad - \quad 2\pi$$

$$\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x \quad - \quad \pi$$

φ	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

1 радіан $\sim 57^\circ$

π радіан = 180°

Нулі функції $\sin x$ ($\sin x = 0$):

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Нулі функції $\cos x$ ($\cos x = 0$):

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$