МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки та завдання
до виконання контрольної роботи № 2
для студентів спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія» і 193 «Геодезія та землеустрій»
заочної форми навчання

Київ 2024

УДК 517.3+517.9
В 95

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.Д. Печук, асистент

Рецензент Ю.П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. ф.-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 25 березня 2024 року.

В авторській редакції.

Вища математика: методичні вказівки та завдання до виконання контрольної роботи № 2 / уклад.: Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І., Печук В.Д.– Київ: КНУБА, 2024. – 48 с.

Містить методичні вказівки та завдання з вищої математики до виконання контрольної роботи № 2 з розділу «Математичний аналіз».

Призначено для студентів заочної форми навчання спеціальностей 192 «Будівництво і цивільна інженерія», 193 «Геометрія та землеустрій» заочної форми навчання.

Загальні положення

Методична розробка містить необхідний матеріал для самостійної роботи студентів заочної форми навчання по виконанню індивідуальної контрольної роботи № 2 з вищої математики. Вона включає методичні вказівки до виконання завдань, приклади розв'язання типових задач та 30 варіантів завдань індивідуальної контрольної роботи. Методична розробка розрахована на другий семестр для студентів першого курсу заочної форми навчання та відповідає навчальній робочій програмі з курсу «Вища математика». Мета навчального видання – забезпечити студентів математичним апаратом, потрібним для успішного засвоєння загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін, що передбачені навчальними програмами різних спеціальностей.

Індивідуальна контрольна робота охоплює такі розділи з курсу вищої математики: невизначені та визначені інтеграли, диференціальні рівняння, функції багатьох змінних, подвійні та потрійні інтеграли, криволінійні інтеграли.

В кінці методичної розробки поданий список літератури, яка буде корисною при вивченні дисципліни та виконанні контрольних завдань. Наведені методичні вказівки в зручній та доступній формі доповнюють навчальний матеріал.

Розв'язання типових задач

Вказівки. Обчислення невизначених інтегралів

Літерою I позначимо один з наступних числових проміжків дійсної прямої $\mathbb{R}$: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на числовому проміжку I, якщо $F(x)$ диференційована на I і $F'(x) = f(x)$, для всіх $x \in I$. Наприклад, $f(x) = \cos x, F(x) = \sin x$.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I, то функція $F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ також буде первісною. І навпаки, кожна первісна функції $f(x)$ на I може бути представлена у вигляді $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ функції $f(x)$ на I називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ і записують так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x),$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx,$
3. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, де $\lambda = const$,
4. $\int dF(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$,
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Зокрема, $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Більша частина формул таблиці основних інтегралів випливає з таблиці похідних, справедливість інших легко перевіряється диференціюванням.

Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0dx = C$, 2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, 3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$, 5) $\int e^x dx = e^x + C$,

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, 9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, 11) $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = arctg\ x + C$,

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, 13) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$,

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$,

15) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, 16) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \dfrac{x}{2}\right| + C$,

17) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right| + C$, 18) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$,

19) $\int ctgx = \ln|\sin x| + C$,

20) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,

21) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

Мистецтво інтегрування полягає в умінні так перетворити підінтегральний вираз, щоб одержати табличні інтеграли. Існують різні методи зведення інтегралів до табличних.

Метод підстановки (заміни змінної)

Суть методу підстановки полягає у введенні нової змінної. При знаходженні інтеграла $\int f(x)dx$ застосовують підстановки таких двох видів:

$$1)\ x=\varphi(t),\ 2)\ \psi(x)=t.$$

Функції $\varphi(t)$ та $\psi(x)$ – неперервно-диференційовні.

У першому випадку $dx=\varphi'(t)dt$ і $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді $f(x)dx=g(\psi(x))\psi'(x)dx$, то використовують другу підстановку:

$$\int f(x)dx=\int g(\psi(x))\psi'(x)dt=\int g(\psi(x))d\psi(x)=\int g(t)dt.$$

В цьому випадку функція $\psi'(x)$ заноситься під знак диференціала $\psi'(x)dx=d(\psi(x))=dt$.

Метод інтегрування частинами

Інтегруванням частинами називають знаходження інтеграла за **формулою інтегрування частинами**:

$$\int udv=uv-\int vdu, \tag{5}$$

де $u(x), v(x)$ диференційовані функції.

Метод інтегрування частинами застосовується, наприклад, для обчислення інтегралів вигляду $\int P_n(x)f(x)dx$, де $P_n(x)$ – многочлен (в деяких випадках x^n), а $f(x)$ – одна з наступних функцій: $e^{ax},\ \sin ax,\ \cos ax,\ \ln x,\ \log_a x,\ \arcsin x,\ arctgx.$

При обчисленні інтеграла за формулою (1) виділяють наступні три випадки:

а) $f(x):\cos ax, \sin ax, e^{ax}, a^x$, тоді позначають $P_n(x)=u$;

б) $f(x): arctgx, \arcsin x, \ln x$. Тоді позначають $f(x)=u$, $P_n(x)dx=dv$;

в) підінтегральна функція має вигляд $\cos ax\cdot e^{bx}$, або $\sin ax\cdot e^{bx}$, тоді треба двічі застосувати формулу (5). При цьому позначити, наприклад, $\cos ax=u,\ e^{bx}dx=dv$.

Завдання 1. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int (x^{12}-\cos 7x+\frac{3}{x^2+4}-\frac{1}{x-2})dx.$$

Розв’язок. Заданий інтеграл є сумою табличних інтегралів.

$$\int (x^{12} - 2\cos 7x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2})dx =$$

$$= \int x^{12}dx - 2\int \cos 7x dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \frac{x^{13}}{13} - 2\cdot\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{2}arctg\frac{x}{2} - \ln(x-2) + C, C \in \square .$$

Завдання 2. Знайдіть невизначений інтеграл $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл знайдемо методом заміни змінної.

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} \arcsin x = t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C.$$

Завдання 3. Знайдіть невизначений інтеграл.

а) $\int (2x+3)\cos 3x dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами.

$$\int (2x+3)\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= (2x+3)\frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{1}{3}\sin 3x\, 2dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

b) $\int arctg\sqrt{2x-1}\, dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами

$$\int arctg\sqrt{2x-1}dx = \left[\begin{matrix} u = arctg\sqrt{2x-1}, & du = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix}\right] =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x\sqrt{2x-1}}dx = xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2} + C.$$

Взазівки. Інтегрування раціональних дробів

Потрібно знайти $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відносно змінної x степенів n і m відповідно.

Якщо $n < m$, то раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний, якщо $n \geq m$, то дріб неправильний. Будь-який неправильний раціональний дріб може бути приведений до правильного шляхом виділення цілої частини та дробової частини. Це робиться діленням многочлена в чисельнику на многочлен в знаменнику. Інтегрування правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування елементарних дробів чотирьох типів:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C$.

3) $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

У заданому інтегралі виділяємо повний квадрат в знаменнику. Крім того, для спрощення обрахунків позначимо $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dx =$$

$$= A\cdot\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)(B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$, $k \geq 2$, $q-\frac{p^2}{4} > 0$.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = A\cdot\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{2}A\cdot\int (t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2) + (B-\frac{Ap}{2})\cdot I_k =$$

$$= A\cdot\frac{1}{2(t^2+a^2)^{k-1}(1-k)} + (B-\frac{Ap}{2})\cdot I_k,$$

де $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$, $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$.

Інтеграл I_k знаходиться за рекурентною формулою:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right),\ k \geq 1.$$

Зауваження. Наведемо правило інтегрування дробу виду $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. В цьому випадку спочатку треба визначити диференціал від знаменника $d(ax^2+bx+c) = (2ax+b)dx$. Далі перетворюють чисельник таким чином, щоб виділити диференціал $Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a}))$.

Таким чином, отримуємо:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\int \frac{(\frac{B}{a}-\frac{Ab}{2a^2})dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Правильний раціональний дріб можна однозначно розкласти на суму простих дробів типу 1), 2), 3), 4).

Завдання 4. Знайдіть інтеграл $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

Розв'язок. Заданий інтеграл є інтегралом від правильного раціонального дробу. Степінь чисельника $n=3$, а степінь знаменника $m=4$. Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми простих дробів з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}.$$

Знайдемо коефіцієнти $A,B,C.D$. Для цього зведемо праву частину рівності до спільного знаменника, а потім прирівняємо чисельники лівої і правої частини рівних дробів

$$\begin{aligned}&x^3-6x^2+13x-6=A(x-2)^3+B(x+2)(x-2)^2+\\&+C(x-2)(x+2)+D(x+2)\end{aligned}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях лівої і правої частини останньої рівності. Отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими.

x^3: $A+B=1,$

x^2 $-6A-2B+C=-6,$

x^1 $12A-4B+D=13,$

x^0 $8A+8B-4C+2D=-6$

Розв'язавши систему лінійних рівнянь відносно невідомих A, B, C, D, отримуємо:

$$A=1,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=1.$$

Звідси

$$\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx=\int \frac{1}{(x+2)}dx+\int \frac{1}{(x-2)^3}dx=\ln|x+2|+$$

$$+\frac{(x-2)^{-3+1}}{-2}+C=\ln|x+2|-\frac{1}{2(x-2)^2}+C,\quad C\in\mathbb{R}\ .$$

Вказівки. Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де R − раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, за допомогою **універсальної тригонометричної підстановки** $tg\frac{x}{2}=t$ зводять до інтегралів від раціональних функцій. При цьому використовують співвідношення:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

За допомогою універсальної тригонометричної підстановки зручно знаходити інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$.

Застосування універсальної тригонометричної підстановки часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках використовують інші підстановки.

Інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x)\cos x dx,\ \int R(\cos x)\sin x dx,\ \int R(tgx)dx$$

інтегрують підстановками $\sin x=t, \cos x=t, tgx=t$ відповідно.

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ залежно від значень цілих чисел m і n знаходять так:

Числа m і n	**Підстановка**
m − ціле додатне непарне число	$\cos x=t$
n − ціле додатне непарне число	$\sin x=t$

m і n – цілі додатні парні числа	Потрібно знизити степені тригонометричних функцій за формулами: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
m і n – цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне; m і n – цілі непарні від'ємні числа.	$tgx = t$.

Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cos nx\, dx, \int \sin mx \sin nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx$$

інтегрують шляхом застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у їх суму:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Часто для перетворень підінтегрального виразу застосовують співвідношення:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для гіперболічних функцій застосовують співвідношення:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \quad 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}, \quad cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}.$$

Завдання 5. Знайдіть інтеграли: **a)** $\int \dfrac{dx}{\sin^6 x}$, **b)** $\int th^4 x dx$.

Розв'язок.

a) $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}(1 + ctg^2 x)^2 dx =$

$= \left[ctgx = t, \quad -\frac{1}{\sin^2 x} dx = dt \right] = \int -(1+t^2)^2 dt = -\int (t^4 + 2t^2 + 1) dt =$

$= -\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + t + C = -\frac{1}{5} ctg^5 x - \frac{2}{3} ctg^3 x + ctgx + C$.

b) $\int th^4 x dx = \left[thx = t \quad dt = \frac{1}{ch^2 x} dx \right] = \int th^2 x (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx =$

$= \int th^2 x dx - \int th^2 x \cdot \frac{1}{ch^2 x} dx = \int (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx - \int t^2 dt = x - thx - \frac{th^3 x}{3} + C.$

Вказівки. Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ і виберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i (рис. 9).

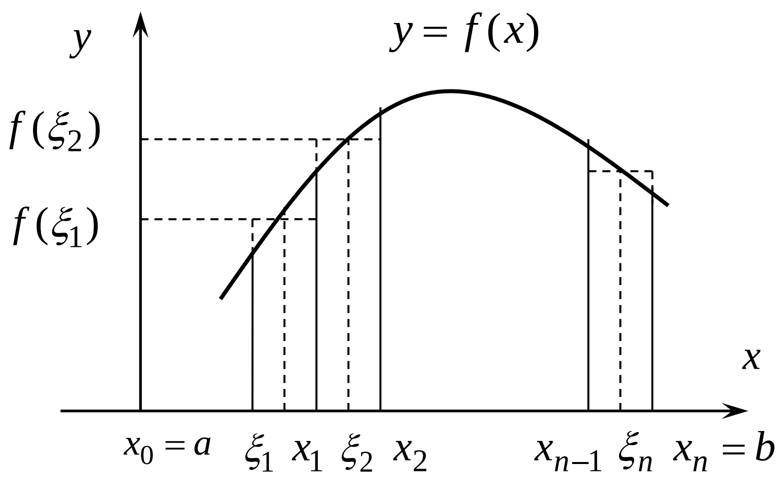

Рис. 9

Складемо суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Цю суму називають **інтегральною сумою** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка Δx_i.

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називають скінченну границю інтегральної суми при $\lambda \to 0$ за умови, що вона не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$, вибору точок ξ_i, і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ − невід'ємна і неперервна функція, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції S, обмеженої вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, віссю Ox і графіком функції $y = f(x)$, тобто

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Функцію $f(x)$ називають **інтегрованою на відрізку** $[a;b]$, якщо існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Визначений інтеграл обчислюють за **формулою Ньютона-Лейбніца.** Нехай функція $y = f(x)$ − інтегрована на $[a;b]$ і $f(x)$ має неперервну первісну $F(x)$ на $[a;b]$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6)$$

При обчисленні визначеного інтегралу спочатку знаходять первісну $F(x)$, а потім підставляють межі інтегрування. Для знаходження первісної використовують всі методи інтегрування, які були розглянуті раніше.

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Якщо функція $f(x)$ − неперервна на $[a,b]$ і функція $x=\varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ − неперервні при $t\in[\alpha;\beta]$;

2) множиною значень функції $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ є відрізок $[a,b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b$.

Тоді справедлива **формула заміни змінної** у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Нижня межа α знаходиться, як розв'язок рівняння $a=\varphi(t)$, а β − як розв'язок рівняння $b=\varphi(t)$.

У визначеному інтегралі роблять також заміну $\psi(x)=t$, тоді $\psi(a)=\alpha$, $\psi(b)=\beta$. В цьому випадку функція $x=x(t)$ − обернена до ψ має задовольняти умови (1)−(3). Найзручніше використовувати заміну монотонно-диференційовними функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої так і оберненої функції.

Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdv. \qquad (7)$$

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл.

а) $\displaystyle\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

Розв'язок.

$$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=(2\sqrt{x}+\ln x)\Big|_1^e=$$

$$= 2\sqrt{e} + 1 - (2 + 0) = 2\sqrt{e} - 1.$$

b) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$.

Розв'язок.

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e \end{array} \right] = \int\limits_1^e \frac{dt}{1 + t^2} = arctgt\Big|_1^e =$$

$$= arctge - arctg1 = arctge - \frac{\pi}{4}.$$

c) $\int\limits_1^e x \ln x dx$.

Розв'язок

$$\int\limits_1^e x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \cdot 1 - 0\right) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Вказівки. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли – це узагальнення визначеного інтеграла на випадок інтеграла від функції з нескінченним проміжком інтегрування або від необмеженої функції.

Невласні інтеграли 1-го роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому скінченному відрізку $[a;A]$, $a < A < +\infty$.

Невласним інтегралом 1-го роду від функції $f(x)$ на множині $[a;+\infty)$ називається скінченна границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ (якщо ця границя існує) і позначається

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (7)$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл **збігається**. Якщо границя (7) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називається **розбіжним**.

Аналогічно визначають невласні інтеграли на проміжках $(-\infty;b]$ та $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^c f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int\limits_c^A f(x)dx,$$ де c − довільне число.

Невласні інтеграли 2-го роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$ і має нескінченний розрив при $x=b$.

Невласним інтегралом 2-го роду від функції $f(x)$ на множині $[a;b)$ називається скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, якщо вона існує, і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (8)$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл 2-го роду **збігається**. Якщо ж вказана границя не існує або нескінченна, то кажуть, що **інтеграл розбігається**.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x=a$, то

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (9)$$

Завдання 7. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Розв'язок.

Заданий інтеграл є невласним інтегралом 1-го роду.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = A \Rightarrow t = \ln A \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^{\ln A} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} arctgt\Big|_0^{\ln A} = \lim_{A\to+\infty} (arctg(\ln A) - arctg0) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

b) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Функція $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ має нескінченний розрив в точці $x=1$. Тому заданий інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду.

$$\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1-\varepsilon \Rightarrow t = (1-\varepsilon)^2 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin t\Big|_0^{(1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)^2 - \arcsin 0) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Вказівки. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x,y,y')=0,$$

де x – аргумент, $y=y(x)$ – невідома функція.

Частіше розглядають рівняння **розв'язані відносно похідної** $y'=f(x,y)$ або у вигляді $N(x,y)dx+M(x,y)dy=0$.

Якщо після перетворень рівняння розв'язані відносно похідної можна представити у вигляді

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{10}$$

або

$$N_1(x)\cdot N_2(y)dx+M_1(x)\cdot M_2(y)dy=0, \tag{11}$$

тоді їх називають **рівняннями з відокремлюваними змінними**.

Спочатку розглянемо рівняння типу (10). Для розв'язання цього рівняння треба спочатку відокремити змінні, тобто представити його у вигляді $\frac{dy}{dx}=f_1(x)\,f_2(y)$. Далі, виключивши точки, в яких $f_2(y)=0$ отримаємо $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. Проінтегруємо обидві частини рівності $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx$. В результаті отримаємо розв'язок у вигляді загального інтегралу $\Psi(x,y,C)=0$.

При розв'язанні рівняння типу (11) треба виключити точки, в яких $M_1(x)=0,\ N_2(y)=0$. Відокремимо змінні, поділивши рівняння (11) на добуток $M_1(x)\cdot N_2(x)\neq 0$, та проінтегруємо праву та ліву частину отриманого рівняння

$$\int\frac{N_1(x)}{M_1(x)}dx+\int\frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy=C.$$

В результаті отримаємо розв'язок у вигляді загального інтегралу $\Psi(x,y,C)=0$, де C − довільна стала.

Завдання 8. Знайдіть загальний інтеграл диференціального рівняння $x^2 y' = 1 + \cos 2y$.

Розв'язок. Задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розпишемо похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = 1 + \cos 2y; \quad \frac{dy}{1+\cos 2y} = \frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{dy}{1+\cos 2y} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Перетворимо підінтегральну функцію за допомогою рівності $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ та обчислимо інтеграли.

$$\int \frac{dy}{2\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{1}{2} tgy = \frac{x^{-1}}{-1} + C; \quad \frac{1}{2} tgy = -\frac{1}{x} + C.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд $tgy = -\dfrac{2}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Вказівки. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння вигляду

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad a_0 \neq 0 \qquad (12)$$

де коефіцієнти a_0, a_1, a_2 − деякі дійсні числа, називають **лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами**. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи y', y'' в рівняння (12) і враховуючи, що $e^{kx} \neq 0$ одержимо рівняння:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \; a_0 \neq 0 \qquad (13).$$

Рівняння (13) називають **характеристичним рівнянням рівняння** (12). Його корні визначають за відомою формулою

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

В залежності від вигляду коренів цього рівняння розглядають три випадки.

1. Корені рівняння (13) дійсні і різні $k_1 \neq k_2$.Тоді загальний розв'язок $y_{зо}$ рівняння (12) має вигляд:

$$y_{3o} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

2. Корені рівняння (13) дійсні і рівні $k_1 = k_2$. Тоді загальний розв'язок $y_{зо}$ (12) має вигляд:

$$y_{3o} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

3. Корені рівняння (13) комплексно-спряжені $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Тоді загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд:

$$y_{3o} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Для знаходження частинного розв'язку, який відповідає заданим початковим умовам (задача Коші), треба підставити їх у відповідний розв'язок та його похідну. Після цього розв'язати систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2 .

Завдання 9. Знайдіть розв'язок задачі Коші.

$$y'' + 4y' - 21y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2 .$$

Розв'язок. Знайдемо відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k - 21 = 0.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}, \quad k_1 = 3, k_2 = -7 .$$

Маємо перший випадок – корені характерисстичного рівняння дійсні і різні.

Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y_{3o} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x}.$$

Щоб знайти частинний розв'язок диференціального рівняння з початковими умовами $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$, обчислимо похідну $y'_{3o} = 3C_1 e^{3x} - 7C_2 e^{-7x}$.

Обчислимо $y_{3o}(0)$ та $y'_{3o}(0)$:

$$y_{3o}(0) = C_1 e^{3 \cdot 0} + C_2 e^{-7 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y'_{3o}(0) = 3C_1e^{3x} - 7C_2e^{-7x} = 3C_1e^{3\cdot 0} - 7C_2e^{-7\cdot 0} = 3C_1 - 7C_2 = -2 .$$

Отримуємо систему лінійних рівнять відносно C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 3C_1 - 7C_2 = -2. \end{cases}$$

Методом виключення знайдемо розв'язок системи $C_1 = \dfrac{6}{5}, C_2 = \dfrac{4}{5}.$

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = \frac{6}{5}e^{3x} + \frac{4}{5}e^{-7x} .$$

Вказівки. Функції кількох змінних

Нехай на деякій множині $D \subset \mathbb{R}^2$ задано функцію $z = f(x, y)$ і точку $M(x, y) \in D$, в околі якої визначена функція. **Частинними похідними** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ за змінними x та y відповідно називають скінченні границі, якщо вони існують:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}, \; z_y{}' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні ще позначають $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \; z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}.$

Щоб знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, потрібно взяти звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x, вважаючи y сталою. Аналогічно, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – це похідна за змінною y функції $z = f(x, y)$ при фіксованому значенні x.

Частинні похідні другого порядку визначаються таким чином:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x, \; z''_{yy} = (z'_y)'_y, \; z''_{xy} = (z'_x)'_y, \; z''_{yx} = (z'_y)'_x .$$

При цьому, якщо в околі точки $M(x; y)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні z''_{xy}, z''_{yx}, то вони рівні між собою $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Диференціал першого порядку функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x; y)$ при умові, що x та y − незалежні змінні, рівний

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Диференціал другого порядку функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x; y)$ при умові, що x та y − незалежні змінні, рівний

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Завдання 10. Знайдіть диференціали першого та другого порядків функції

$$z = x^3 y + \cos(3x - 5y).$$

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні першого і другого порядків:

$$z'_x = 3x^2 y - 3\sin(3x - 5y), \quad z'_y = x^3 + 5\sin(3x - 5y),$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))'_x = 6xy - 9\cos(3x - 5y),$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x^3 + 5\sin(3x - 5y))'_y = -25\cos(3x - 5y),$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = (z'_x)'_y = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))'_y = 3x^2 + 15\cos(3x - 5y).$$

Запишемо диференціал першого та другого порядків:

$$dz = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))dx + (x^3 + 5\sin(3x - 5y))dy.$$

$$d^2z = (6xy - 9\cos(3x - 5y))dx^2 + 2(3x^2 + 15\cos(3x - 5y))dxdy +$$
$$+(-25\cos(3x - 5y))dy^2.$$

Завдання 11. Знайдіть частинні похідні складеної функції

$$z = arctg(x^2 y^2), \ x = \sin u - v, \ y = u \cdot v.$$

Розв'язок. Частинні похідні складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають вигляд:

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u, \quad z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v.$$

Знайдемо частинні похідні заданих функцій:

$$z'_x = \frac{2xy^2}{1+x^4y^4}, \quad z'_y = \frac{2x^2y}{1+x^4y^4}, \; x'_u = \cos u, \; x'_v = -1, \; y'_u = v, \; y'_v = u.$$

Отримуємо: $z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u = \dfrac{2xy^2}{1+x^4y^4}\cos u + \dfrac{2x^2y}{1+x^4y^4} v$,

$$z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v = \frac{2xy^2}{1+x^4y^4}(-1) + \frac{2x^2y}{1+x^4y^4} u.$$

Або

$$z'_u = \frac{2(\sin u - v)u^2v^2}{1+(\sin u - v)^4(uv)^4}\cos u + \frac{2(\sin u - v)uv}{1+(\sin u - v)^4(uv)^4} v,$$

$$z'_v = \frac{2(v - \sin v)u^2v^2}{1+(\sin u - v)^4(uv)^4} + \frac{2(\sin u - v)uv}{1+(\sin u - v)^4(uv)^4} u.$$

Вказівки. Похідна за напрямом. Градієнт функції кількох змінних

Похідною функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямком вектора** $\vec{l}$ називають скінченну границю $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(M_1) - f(M_2)}{\Delta l}$, якщо вона існує, і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Тут точка $M(x; y; z)$ − початок вектора $\vec{l}$, $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z)$ − точка на прямій, яка проходить через точку M у напрямі вектора $\vec{l}$, $\Delta l = |\overline{MM_1}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Похідну функції $u = f(x, y, z)$ у напрямі вектора $\vec{l} = (a; b; c)$ обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha = \dfrac{a}{|\vec{l}|}, \cos\beta = \dfrac{b}{|\vec{l}|}, \; \cos\gamma = \dfrac{c}{|\vec{l}|}$ − напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $|\vec{l}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ − довжина вектора $\vec{l}$, α, β, γ − кути, які утворює вектор $\vec{l}$ з координатними осями Ox, Oy, Oz.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u = f(x, y, z)$, обчислені в точці M, тобто

$$\overrightarrow{grad\ u(M)} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}. \qquad (14)$$

Градієнт вказує напрям найшвидшого зростання функції, найбільша швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ рівна $|\overrightarrow{grad\ u}|$.

Завдання 12. Для функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2 y - 6z + 7$ знайдіть:

a) похідну функції в точці $M_0(1; -5; 2)$ в напрямку від точки M_0 до точки $M(16; 3; 2)$;

b) градієнт функції в точці M_0.

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_0 M} = (15; 8; 0)$.
Тоді напрямні косинуси вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1}$ рівні:

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{15^2 + 8^2}},\ \cos\beta = \frac{8}{\sqrt{15^2 + 8^2}},\ \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{15^2 + 8^2}}.$$

Або

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{289}} = \frac{15}{17},\ \cos\beta = \frac{8}{\sqrt{289}} = \frac{8}{17},\ \cos\gamma = 0.$$

Знайдемо частинні похідні функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2 y - 6z + 7$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 2xy,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 9 + 2\cdot(-5) = -1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + x^2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -3y^2 + x^2 = -3(-5)^2 + 1 = -74;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -6;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -6$$

Запишемо похідну функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2 y - 6z + 7$ за напрямком $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (15; 8; 0)$ в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=(-1)\cdot\frac{15}{17}+(-74)\cdot\frac{8}{17}+(-6)\cdot 0=-\frac{607}{17}.$$

Зазначимо, що функція $u=f(x;y;z)$ у точці M_0 у напрямі вектора $\vec{l}$ спадає, оскільки $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}<0$.

Запишемо градієнт функції $u=3x^3-y^3+x^2y-6z+7$ в точці M_0

$$\overrightarrow{grad\ u(M_0)}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k}=-\vec{i}-74\vec{j}-6\vec{k}\,.$$

Завдання 13. Обчислити площу області D обмеженої кривими: $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$ за допомогою подвійного інтегралу.

Розв'язок. Якщо область D є правильною і описується системою нерівностей вигляду:

$$D=\{(x,y),\,a\le x\le b,\,y_1(x)\le y\le y_2(x)\} \qquad (15)$$

або $D=\{(x,y),\,c\le y\le d,\,x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$, (16)

то подвійний інтеграл зводиться до повторного інтегруванням двох визначених інтегралів відповідно

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,,$$

або $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\,.$

Слід відмітити, коли інтегруємо за змінною x, то $y=const$ вважається сталою і навпаки, коли інтегруємо за змінною y, то $x=const$.

Згідно з визначенням подвійного інтегралу у випадку, коли $f(x;y)\equiv 1$, площа області D обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy.$$

Для знаходження відповідних меж інтегрування, треба спочатку намалювати область (рис. 10), а потім визначити множини (15) або (16), які описують цю область.

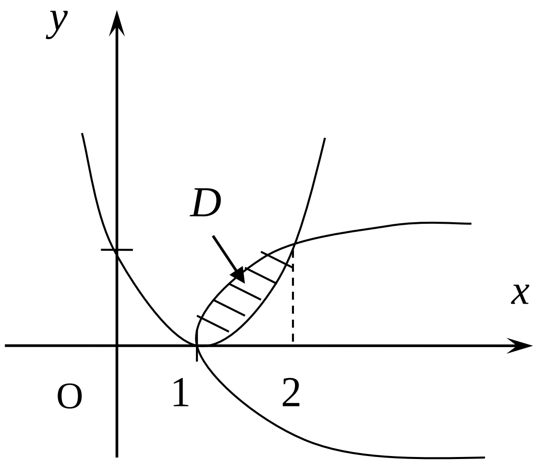

Рис. 10

В завданні область D обмежена кривими:

$$y = (x-1)^2,\ y^2 = x-1.$$

Спочатку знайдемо координати точок перетину кривих, що обмежують цю область. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y^2 = x-1. \end{cases}$$

Методом виключення знаходимо $y - y^4 = 0$ або $y(1-y^3) = 0$. Звідси $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Точки перетину кривих будуть мати вигляд $M_1(1;0), M_2(2;1)$.

В нашому випадку область D можна описати формулою (15) або формулою (16).

Перший випадок $D = \left\{(x,y),\ 1 \le x \le 2,\ (x-1)^2 \le y \le \sqrt{x-1}\right\}$.

Тоді

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{x-1}} dy = \int\limits_1^2 dx \cdot y \Bigg|_{(x-1)^2}^{\sqrt{x-1}} = \int\limits_1^2 (\sqrt{x-1} - (x-1)^2)dx =$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_1^2 - \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,(кв.\,од.).$$

Другий випадок $D=\left\{(x,y),\ 0\le y\le 1,\ y^2+1\le x\le 1+\sqrt{y}\right\}$.

Тоді

$$S_D=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2+1}^{1+\sqrt{y}}dx=\int\limits_0^1 dy\cdot x\Bigg|_{y^2+1}^{1+\sqrt{y}}=\int\limits_0^1(1+\sqrt{y}-y^2-1)dy=$$

$$=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^1-\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\,(кв.\,од.)$$

Завдання 14. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $5x+2y+10z-10=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Розв'язок. Потрійний інтеграл по просторовій правильній області G обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz,$$

де D проекція області G на площину XOY, а $z_1(x,y), z_2(x,y)$ – поверхні, які обмежують область G знизу і зверху.

З визначення потрійного інтегралу випливає, що об'єм області G можна обчислити при $f\equiv 1$ за формулою:

$$V_G=\iiint\limits_G dxdydz.$$

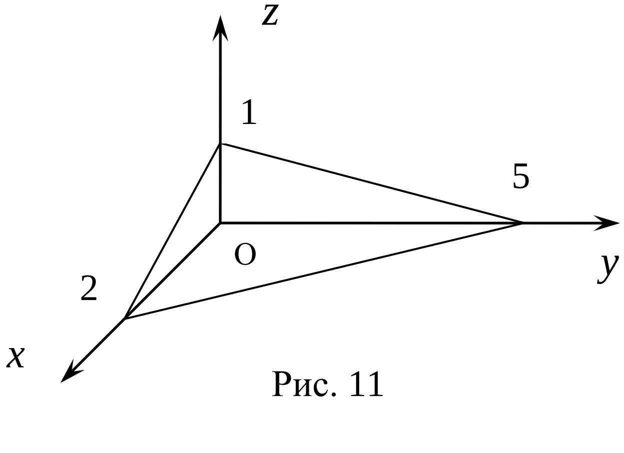

Рис. 11

У запропонованому завданні просторова область є тетраедр. Знизу він обмежений координатною площиною $z=0$, а зверху площиною $5x+2y+10z-10=0$ або

$$z=1-\frac{5x}{10}-\frac{2y}{10}=1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}.$$

З боків координатними площинами $x=0,\ y=0$ (рис. 11).

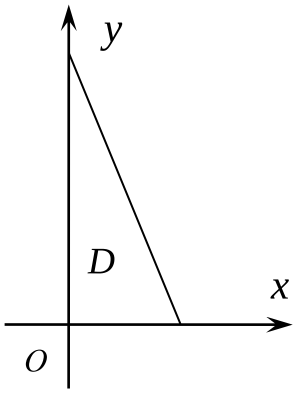

Рис. 12

Проекція D тетраедра на площину XOY є прямокутний трикутник, що відтинається від координатного кута прямою $5x+2y=10$ (Рис. 12).

$$D=\left\{(x,y), 0\le x\le 2, 0\le y\le 5-\frac{5}{2}x\right\},$$

$$G=\left\{(x,y,z), 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 5-\frac{5}{2}x,\ 0\le z\le 1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}\right\}.$$

Таким чином, $V_G=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}}dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{5-\frac{5}{2}x}dy\cdot z\Big|_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}}=$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{5-\frac{5}{2}x}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}\right)dy=\int\limits_0^2 dx\cdot\left(y-\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{10}\right)\Big|_0^{5-\frac{5}{2}x}=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\cdot\left(5-\frac{5}{2}x-\frac{5x-\frac{5}{2}x^2}{2}-\frac{(5-\frac{5}{2}x)^2}{10}\right)=\int\limits_0^2\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x+\frac{5x^2}{8}\right)dx=$$

$$=\frac{5}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2=\frac{5}{3}\,(\textit{куб. од.}).$$

Вказівки. Криволінійний інтеграл 1-го роду (по довжині дуги) має вигляд:

$$\int\limits_L \phi(x,y)dl,$$

де $\phi(x,y)$ − функція неперервна в деякій області на площині. L − крива $y=f(x)$, яка розташована в цій же області, dl − диференціал дуги кривої. З визначення криволінійного інтегралу 1-го роду, коли $\phi(x,y)\equiv 1$, довжина дуги AB кривої L визначається за формулою:

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl\,.$$

Обчислення даного інтегралу зводиться до обчислення визначеного інтегралу.

Якщо крива в площині задана в явному вигляді $y=y(x),\ a\le x\le b$, диференціал дуги $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, кінцеві точки дуги відповідно $A(a,y(a))$, $B(b,y(b))$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx\,. \tag{17}$$

Якщо крива задана в параметричному вигляді $x=x(t),\ y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, відповідно кінцеві точки якої $A(x(t_1),y(t_1))$, $B(x(t_2),\ y(t_2))$, то

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt\,. \tag{18}$$

Завдання 15. Обчисліть довжину дуги кривої за допомогою криволінійного інтегралу 1-го роду:

а) $f(x)=2+chx, 0\le x\le 3,$

б) $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$.

Розв'язок.

а) Обчислимо довжину дуги кривої $f(x)=2+chx,\ 0\le x\le 3$ за формулою (17):

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_0^3\sqrt{1+(2+chx)'^2}dx=\int\limits_0^3\sqrt{1+sh^2x}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^3 chxdx=shx\Big|_0^3=sh3 \text{ (од.)}$$

Зауваження. В цьому завданні ми застосували формули:

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad ch^2 x - sh^2 x = 1.$$

б) $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$. Запропонована крива задана в параметричному вигляді. Це – астроїда (рис. 13). Вона симетрична відносно обох координатних осей. Тому достатньо обчислити довжину її четвертої частини, яка розташована в першому квадранті. За формулою (18) маємо:

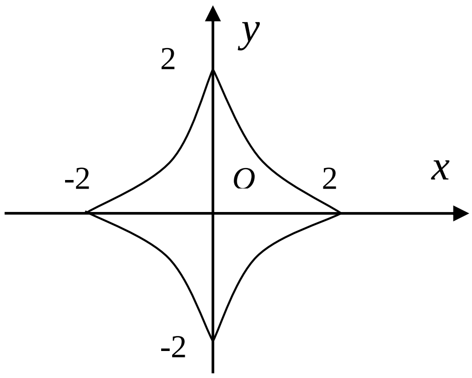

Рис. 13

$$\frac{l}{4} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left((2\cos^3 t)'\right)^2 + \left((2\sin^3 t)'\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t}\ dt = \int_0^{\pi/2} 6\cos t \sin t\ dt =$$

$$= 6 \cdot \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 3.$$ Звідки отримуємо $l = 12$.

Завдання до варіантів
контрольної роботи № 2

1. – 5. Обчисліть невизначені інтеграли.
6. Обчисліть визначений інтеграл.
7. Обчисліть невласний інтеграл або доведіть його розбіжність.
8. Знайдіть загальний інтеграл диференціального рівняння.
9. Знайдіть розв’язок задачі Коші.
10. Знайдіть диференціали першого та другого порядків функції $z = f(x, y)$.
11. Знайдіть похідну складної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$.
12. Для функції $F(x; y; z) = 0$ знайдіть:
   a) похідну функції в точці M_0 в напрямку від точки M_0 до точки M;
   b) градієнт функції в точці M_0.
13. Обчисліть площу області D (за допомогою формули $S = \iint\limits_D ds$).
14. Обчисліть об’єм тіла V, обмеженого поверхнями, вказаними в таблиці (за допомогою формули $V = \iiint\limits_V dv$).
15. Обчисліть довжину l дуги кривої L, де L − плоска крива (за допомогою формули $l = \int\limits_L dl$).

Варіант № 1

1. $\int(\sqrt[3]{x}+\sin 3x+3x^{19}-\frac{1}{x-2})dx$; **2.** $\int x^2\cdot\sqrt{1+x^3}dx$; **3.** $\int(x-x^2)\ln x dx$; **4.** $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$; **5.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.		
6. $\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+\sin x}\cdot\cos x\,dx$	**7.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^3}$	
8. $\sqrt{1-y^2}dx-ydy=0$.	**9.** $y''-2y'+3y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$	
10. $z=xy^5-3\sin(6x-y)$	**11.** $z=x^2-y^2$, де $x=u\cos v,\ y=u\sin v$.	
12. $u=2x^3+4x^2y-xy^2-z^2-5,\ M_0(4;8;-1),\ M(7;12;2)$.		
13. $D:\ y=4x-x^2,\ y=x$.		
14. $V: 2x+5y+z-10=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$		
15. $L:\ y=\ln 7-\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.		

Варіант № 2

1. $\int(\frac{2}{x+8}+2^x-4x^{11}+\cos 2x)dx$, **2.** $\int\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$; **3.** $\int(3x+1)\sin 2x dx$; **4.** $\int\frac{3x+2}{x(x^2-1)}dx$; **5.** $\int(1+2\cos 2x)^2dx$.		
6. $\int\limits_{\ln 3}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$	**7.** $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.	
8. $(x+xy)dy-(x^2+1)ydx=0$	**9.** $y''+2y'-8y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$	
10. $z=x^2y^4+\cos(3y-5)$	**11.** $z=x\cdot\sin y+y\cdot\cos x$, де $x=\frac{u}{v},\ y=uv$	
12. $u=x^3-3x^2y+3xy^2-zx+1,\ M_0(3;1;-2),\ M(6;5;3)$.		
13. $D:\ y=4-x^2,\ y=x^2-2x$.		
14. $V: 4x+6y+3z-12=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$		
15. $L:\ x=8\sin t+6\cos t,\ y=6\sin t-8\cos t,\ 0\le t\le\pi/2$.		

Варіант № 3

1. $\int (x^9 - \frac{3}{x-3} + \sin 7x - \frac{2}{x^2+9})dx$, **2.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$; **3.** $\int (2x-1)\ln(x-1)dx$; **4.** $\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx$; **5.** $\int \sin x \cos 5x dx$.		
6. $\int_1^e \frac{\ln^3 x + \sqrt[3]{\ln x} + 1}{x} dx$	**7.** $\int_5^{13} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-25}}$	
8. $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$.	**9.** $y'' + 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.	
10. $z = y^3\sqrt{x} + \ln(3x-4y)$	**11.** $z = e^{xy}\sqrt{1-y}$, де $x = u \cdot \sin v$, $y = u^2$	
12. $u = 4x^2 - \frac{2}{y} - 3x^2 - yz^2 - 2$, $M_0(4;2;1)$, $M(2;7;3)$.		
13. D: $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$		
14. $V: x + 5y + 4z - 20 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L: y = \ln\cos x + 2, 0 \le x \le \pi/6$		

Варіант № 4

1. $\int (x^{12} - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos 8x - \frac{2}{x+8})dx$, **2.** $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$; **3.** $\int \frac{arctgx}{x^2}dx$; **4.** $\int \frac{x+5}{x^2-1}dx$; **5.** $\int (1+2\sin x)^2 dx$.		
6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$	**7.** $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$	
8. $y' = y^2 \cos x$.	**9.** $y'' + 4y' + 20y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1$.	
10. $z = x^4y^2 + \ln(7x+2y)$	**11.** $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, де $x = \sin(uv)$, $y = \frac{u}{v}$.	
12. $u = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2y^2 - 4x - zy^2 + 4$, $M_0(1;2;-1)$, $M(4;3;-2)$.		
13. D: $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$.		
14. $V: 7x + 7y + z - 14 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15.. $L: x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ 0 \le t \le \pi/2$.		

Варіант № 5

1. $\int (x^7 - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2+16} + \sin 6x - \frac{1}{x-6})dx$, **2.** $\int e^{1/x}\frac{dx}{x^2}$; **3.** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$; **4.** $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$; **5.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.	
6. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$	**7.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$
8. $(x^2-1)y' = 2xy^2$.	**9.** $y''-4y'+13y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
10. $z = xy^3 + x\sin 2y$	**11.** $z = e^{xy} - \ln^2 x$, де $x=\cos(uv)$, $y=u^5-7v$.
12. $u = 4x^3 - 2y^2x + yx - z^3 - 2$, $M_0(-3;-6;2)$, $M(11;1;4)$.	
13. D: $y=(x+1)^2$, $y^2 = x+1$.	
14. $V: x+5y+3z-15=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$	
15. $L: y = e^x + 26,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$	

Варіант № 6

1. $\int (x^9 - \frac{6}{x+5} + \cos 8x - \frac{2}{x^2+4})dx$, **2.** $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **3.** $\int \arcsin 2x\,dx$; **4.** $\int \frac{(x+2)dx}{(x+3)(x^2+1)}$; **5.** $\int \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x}dx$.	
6. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$	**7.** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
8. $x^2y' = 1+\cos 2y$.	**9.** $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=1.$
10. $z = x^2y^3 - 5\sin(5x-3y)$	
11. $z = y\cdot\arcsin^2 x$, де $x=\ln(u^2-v^3),\ y=\frac{v}{u}$	
12. $u = x^3y + y^2x - 5y + 2z + 1$, $M_0(5;-7;1)$, $M(4;5;-2)$.	
13. D: $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.	
14. $V: 6x+3y+2z-12=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$	
15. $x=5(t-\sin t),\ y=5(1-\cos t),\ 0\le t\le \pi$.	

Варіант № 7

1. $\int (x^4 - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin 9x - \frac{3}{x-9})dx$, **2.** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; **3.** $\int \arcsin 4x\, dx$; **4.** $\int \frac{xdx}{(x-2)(x^2+2)}$; **5.** $\int \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$.		
6. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{tg^3 x - \sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x} dx$	**7.** $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$	
8. $(x+2)dy - (y+1)dx = 0$.	**9.** $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 3$.	
10. $z = x^3 y^2 - \cos(8x - 3y)$,		
11. $z = x^2 \sin(1 - xy^3)$, де $x = v\sqrt{u}$, $y = v \cdot \cos u$.		
12. $u = 2x^3 + 3x^2 - 2y^2 - z^2 y - 3$, $M_0(-2;4;3)$, $M(2;7;1)$.		
13. $D:\ xy = 8,\ y = 9 - x$.		
14. $V: 4x + 2y + 3z - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$		
15. $L:\ y = e^x + 2e, \ln\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.		

Варіант № 8

1. $\int (x^4 - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin 9x - \frac{3}{x-9})dx$, **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$; **3.** $\int (x-5)\cos 4x\, dx$; **4.** $\int \frac{x-3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; **5.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.		
6. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4} dx$	**7.** $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	**8.** $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.
9. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$.		
10. $z = x^2 y^6 + e^{2x-3y}$		
11. $z = \cos(x^2\sqrt{y} - y^3)$, де $x = \frac{\sin u}{v}$, $y = u^4$.		
12. $u = 3y^3 - x^3 + 2xy - 5z - 3$, $M_0(-4;2;-1)$, $M(2;9;-1)$.		
13. $D:\ y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$		
14. $V: 2x + 9y + 2z - 18 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$		
15. $L:\ x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t,\ \ \pi/6 \le t \le \pi/4$.		

Варіант № 9

1. $\int (x^{15} - \frac{1}{x+7} + \cos 5x - \sqrt[4]{x}) dx$, **2.** $\int \frac{(2\ln x + 3)^2}{x} dx$; **3.** $\int arctg 5x\, dx$; **4.** $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2} dx$; **5.** $\int \cos^3 x\, dx$.		
6. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$	**7.** $\int\limits_3^8 \frac{dx}{(x-3)^2}$	
8. $y \sin x dx + \cos^6 x dy = 0$.	**9.** $y'' + 4y' - 21y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -2$.	
10. $z = x^4 \sqrt{y} + tg(3x - y)$	**11.** $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = \sqrt[3]{u} + v^3$.	
12. $u = 5x^3 + 3y^2 - \frac{x^2}{y} + 2z + 4$, $M_0(3;1;2)$, $M(3;2;-2)$.		
13. D: $y = x^2 - 4x + 2$, $y = 8x - x^2 - 8$.		
14. $V: 2x + y + 4z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. L: $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$.		

Варіант № 10

1. $\int (3x^{10} - \frac{1}{x-10} + 3\cos 5x + e^{-3x}) dx$, **2.** $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$; **3.** $\int x^2 \ln\sqrt{x-1}\, dx$; **4.** $\int \frac{x^2+1}{x^3 - x^2} dx$; **5.** $\int \sin^4 3x\, dx$.		
6. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$	**7.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$	**8.** $y' = \frac{2xy}{x^2+3}$.
9. $y'' + y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$		
10. $z = x^3 y + \ln(9x - 5y)$		
11. $z = \ln(x^2 - y^2)$, де $x = \sqrt{u+v}$, $y = u^2 + v^2$.		
12. $u = y^3 + x^2 y^3 - 3x^2\sqrt{y} + 5z + 6$, $M_0(-2;-3;1)$, $M(1;1;2)$.		
13. D: $y = x^2 - 4$, $x - y + 8 = 0$.		
14. $V: 3x + y + 3z - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. L: $x = e^t(\cos t + \sin t),\ y = e^t(\cos t - \sin t), \pi/6 \le t \le \pi/4$.		

Варіант № 11

1. $\int (2x^{11} - \frac{1}{x+7} + 3\sin 6x + \frac{7}{x^2+64})dx$, **2.** $\int \frac{e^{arctgx} + x}{1+x^2} dx$; **3.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$; **4.** $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} dx$; **5.** $\int ctg^3 x\, dx$.		
6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{9+\sin^2 x} dx$	**7.** $\int\limits_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	
8. $(x^2+1)y' = \sin y$.	**9.** $y''+8y'+16=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=3.$	
10. $z = x^5\sqrt{y} + \sin(4x-5y)$,		
11. $z = arctg(x^2y^2)$, де $x = \sin u - v,\ y = uv$.		
12. $u = x^3 - 6x^2 - 4y^3x^2 + z^2 - 3,\ M_0(-4;-7;2),\ M(1;5;-1)$.		
13. $D:\quad y = x^2 - 9x + 10,\ y = 9x - 2x^2 - 14$.		
14. $V: x+3y+z-6=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$		
15. $L:\ y = chx + 2,\ 0 \le x \le 1.$		

Варіант № 12

1. $\int (2x^{15} - \frac{1}{x+4} + 3\cos 5x + \frac{3}{x^2+9})dx$, **2.** $\int \frac{x^2}{x^6+5} dx$; **3.** $\int e^{-3x}(2-9x)\, dx$; **4.** $\int \frac{x-4}{(x-3)(x^2+2)} dx$; **5.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.		
6. $\int\limits_0^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	**7.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$	
8. $y' = x^2 e^{-x^3}$	**9.** $y''-14y''+49y=0,\ y(0)=-2,\ y'(0)=1.$	
10. $z = \sqrt[3]{y}\cdot x^4 + \sin(7x-2y)$		
11. $z = x\cdot \arcsin(xy)$, де $x = u+5v,\ y = uv^2$.		
12. $u = 3x^3 - y^3 + x^2y - 9z + 7,\ M_0(1;-4;2),\ M(5;4;1)$		
13. $D:\ y = \frac{1}{2}\sqrt{x},\ y = \frac{1}{2x},\ x = 16.$		
14. $V: 3x+6y+z-18=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$		
15. $L:\ x = 2(2\cos t - \cos 2t),\ y = 2(2\sin t - \sin 2t),\ 0 \le t \le \pi/3.$		

Варіант № 13

1. $\int (x^{14} - \frac{1}{x-8} + \sin 8x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}})dx$, **2.** $\int \frac{tgx\, dx}{\cos^2 x}$; **3.** $\int \arccos 2x\, dx$; **4.** $\int \frac{x+3}{x^2-4} dx$; **5.** $\int \sin 3x \cos x\, dx$.		
6. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	**7.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$	
8. $xy' = y^2 + 1$.	**9.** $y'' - 7y' + 10y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.	
10. $z = y^3 x^4 + e^{9x-2y}$.		
11. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, де $x = u - \sqrt{v},\ y = 2u + v^2$.		
12. $u = \frac{1}{3} y^3 + x^2 y^3 - x + 2z^2 + 2$, $M_0(-2;3;1)$, $M(2;5;1)$.		
13. $D:\ \ xy = 1,\ \ x + y = 4$		
14. $V: 2x + y + 5z - 10 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L:\ y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le \frac{9}{16}$.		

Варіант № 14

1. $\int (x^{11} - \frac{1}{x+5} - \cos 9x + 5^{-4x})dx$, **2.** $\int x \cdot \sqrt[5]{3x^2 - 2}dx$; **3.** $\int (3+2x)\ln x\, dx$; **4.** $\int \frac{2x-1}{x(x-1)^2} dx$; **5.** $\int \frac{(\sin^2 x + 1)dx}{\cos^2 x}$.		
6. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	**7.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8 + 4}$	
8. $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$.	**9.** $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 2$.	
10. $z = x^3 y^2 + 2\sin(7x - 2y)$		
11. $z = x \cdot tg(x^2 + 3y)$, де $x = 2u + 7v,\ y = uv^{-2}$.		
12. $u = 0.25x^4 - 2y^2 + 3xz^2 - 7$, $M_0(6;-6;-1)$, $M(2;1;-1)$.		
13. $D:\ y = (x-1)^2,\ y^2 = x - 1.$		
14. $V: 4x + y + 2z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L:\ x = 3t^2,\ \ y = 3t - t^3,\ \ 0 \le t \le 2$.		

Варіант №15

1. $\int (x^{13} - \frac{5}{x+9} + \sin 3x + \frac{2}{x^2+25})dx$, **2.** $\int \frac{\cos x\, dx}{3 - 2\sin x}$; **3.** $\int (5x-1)e^{2x}dx$; **4.** $\int \frac{2x-3}{x^3+x}dx$; **5.** $\int \sin^5 2x\, dx$.		
6. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$	**7.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+6)^2}$	
8. $(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0$.	**9.** $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.	
10. $z = y^2x^5 - 3\ln(2x-3y)$		
11. $z = 3x^2 + \cos x \cdot \cos y$, де $x = 3^u + 3^v$, $y = u^2 + v$.		
12. $u = 4x^3 + 4xy^2 - 3/y^2 - 3z + 7$, $M_0(-4;1;2)$, $M(2;1;3)$.		
13. $D:\ 3x + 2y - 6 = 0,\ \ 3x^2 - 2y = 0,\ y = 0$.		
14. $V: 2x + 4y + z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L:\ y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ \ 3 \le x \le 4$.		

Варіант № 16

1. $\int (x^{15} - \sqrt{x+1} - \cos 4x + \frac{1}{x-3})dx$, **2.** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; **3.** $\int \arccos 4x\, dx$; **4.** $\int \frac{x-2}{x^3+x}dx$; **5.** $\int \sin^3 3x\, dx$.		
6. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\, dx$	**7.** $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$	
8. $(y^2+1)dx - (x-2)dy = 0$.	**9.** $y'' + 6y' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.	
10. $z = x^7y^2 - 5\sin(7x - 4y)$		
11. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $x = u^3 + v^3$, $y = 2u + 5v$.		
12. $u = 2x^3 - 3y^2x - 4xy + 5z + 2$, $M_0(2;-1;3)$, $M(3;4;1)$.		
13. $D:\ y = (x-2)^3,\ y = 4x - 8$.		
14. $V: 6x + 4y + 3z - 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L:\ x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.		

Варіант № 17

1. $\int (x^{12} - \frac{2}{\cos^2 8x} - \sin 9x + \frac{1}{x+16})dx$, **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; **3.** $\int e^{-2x}(1-x)\,dx$; **4.** $\int \frac{x+4}{(x+3)(x^2+1)}dx$; **5.** $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.		
6. $\int\limits_0^1 x\,e^{-x}\,dx$	**7.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx$	
8. $3x^2ydx + 2\sqrt{9-x^3}dy = 0$.	**9.** $y'' - 13y' + 36y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.	
10. $z = x^5y^3 + 4\ln(6x-5y)$,		
11. $z = y\ln^2(x+y^2)$, де $x = \sin(uv),\ y = 4u+5v$.		
12. $z = x^3y^2 - 5x^2 + y + 3z^2,\ M_0(3;1;-2),\ M(2;5;1)$.		
13. $D:\ y = x^2,\ xy = 8,\ x = 6$.		
14. $V: 4x + y + 2z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L:\ y = 1 - \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.		

Варіант № 18

1. $\int (2x^8 - \cos 7x + \frac{1}{x+3} - 3e^{3x})dx$, **2.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{9-\cos^2 x}}$; **3.** $\int (2x-1)e^{2x}\,dx$; **4.** $\int \frac{x+4}{(x+1)(x^2-9)}dx$; **5.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.		
6. $\int\limits_{1/e}^{2} \frac{dx}{x\ln^4 x}$	**7.** $\int\limits_4^{+\infty} \frac{xdx}{(x-3)^3}$	
8. $e^{x+y}dx + ydy = 0$.	**9.** $y'' + 12y' + 35y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$.	
10. $z = x^3y^6 + 5\ln(8x-2y)$		
11. $z = (x+y)arctg\sqrt{xy}$, де $x = \sqrt{u} - v^2,\ y = \cos(uv)$.		
12. $z = 5x^5 + y^2x - 4y^3 - 3z + 3,\ M_0(-1;-3;2),\ M(1;5;-1)$.		
13. $D:\ y = 3\sqrt{x},\ y = \frac{3}{x},\ x = 9$.		
14. $V: 5x + y + 10z - 10 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L:\ x = 5\cos^3 t,\ \ y = 5\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$.		

Варіант № 19

1. $\int (x^{17} - \sqrt{x-5} - 4\sin 5x + \frac{2}{x^2+49})dx$, **2.** $\int \frac{\sqrt{3+ctgx}dx}{\sin^2 x}$; **3.** $\int \ln\sqrt{1-x}\, dx$; **4.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$; **5.** $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.	
6. $\int\limits_0^{\pi/6} x\cdot\cos 3x\, dx$	**7.** $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$
8. $xydy + \ln^2 xdx = 0$.	**9.** $y'' - 12y' + 11y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$.
10. $z = x^2y^5 - \ln(2x+6y)$,	
11. $z = \ln(x\cdot ctgy)$, де $x = uv^3,\ y = u^2 + v^2$.	
12. $z = 2x^3 - 3y^2x - 4xy + 2z + 3,\ M_0(2;-1;1), M(3;-2;2)$.	
13. $D:\ \ y = 1 - x^2,\ y = -1 - x$.	
14. $V: 5x + 3y + 3z - 15 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$	
15. $L:\ y = 2 - \ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.	

Варіант № 20

1. $\int (x^{16} + 3\cos 11x + \frac{2}{x+4} - \sqrt{x+4})dx$, **2.** $\int \frac{dx}{x(2\ln x - 1)}$; **3.** $\int (4x-3)e^{4x}dx$; **4.** $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+12}dx$; **5.** $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.		
6. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$	**7.** $\int\limits_{-\infty}^{4} \frac{dx}{(5-x)^2}$	**8.** $(x+1)^3dy - (y-2)^2dx = 0$.
9. $16y'' + 8y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$		
10. $z = x^2y^8 + 4\sin(4x+3y)$,		
11. $z = \sqrt{x^3 + tg(xy)}$, де $x = tg(uv),\ y = u + 3v^2$.		
12. $u = 2x^3y^3 + x^2y^2 + x - z^2 + 2,\ M_0(-3;-1;2), M(2;3;1)$.		
13. $D:\ y = 2x^2 + 6x - 3,\ y = -x^2 + x + 5$.		
14. $V: x + 3y + z - 9 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L:\ x = e^t(\cos t + \sin t),\ y = e^t(\cos t - \sin t),\ 0 \le t \le \pi$ **.**		

Варіант № 21

1. $\int (x^{20} - \frac{3}{x+4} + 3\sin 20x + 7^{2x})dx$, **2.** $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** $\int (x+5)\cos 2x dx$; **4.** $\int \frac{x+2}{x^2-9x+18}dx$; **5.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.		
6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}dx$	**7.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$	
8. $y' = (2y+1)ctgx$.	**9.** $y'' + 9y' + 8y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.	
10. $z = x^3 y^6 + \sin(5x - 6y)$		
11. $z = \frac{\ln(x-2y)}{\ln(y+2x)}$, де $x = u^2 - \sqrt{v},\ y = 3uv$.		
12. $u = 2x^3 y + xy^2 - y^2 + 5z^2 - 1,\ M_0(2;3;-1),\ M(2;-3;2)$.		
13. $D:\ x + y = 2,\ y = x^3,\ y = 0$.		
14. $V: 2x + y + 2z - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L:\ y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3.$		

Варіант № 22

1. $\int (2x^{12} - \sqrt{x+5} + 3\cos 3x + \frac{2}{x-1})dx$, **2.** $\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; **3.** $\int x^2 e^{-x} dx$; **4.** $\int \frac{x+4}{x(x^2+1)}dx$; **5.** $\int \sin 3x \cos 2x\ dx$.		
6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(x+1)}$	**7.** $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+3)(x-2)}$	
8. $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2$.	**9.** $y'' - 16y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$	
10. $z = x^5 y^3 + 2^{4x-7y}$.		
11. $z = e^{2x}\cos y + e^{\sin y}$, де $x = u^2 - v^3,\ y = \sqrt{uv}$.		
12. $u = x^2 - 5y^2 x - \frac{2}{y^3} - 4z^2 + 3,\ M_0(2;3;-1),\ M(1;4;2)$.		
13. $D:\ y = x^2 - 8x + 18,\quad y = -2x + 18.$		
14. $V: x + 4y + 2z - 4 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L: x = t^3/3 - t,\ \ y = t^2 + 1,\ 0 \le t \le \sqrt{3}$.		

Варіант № 23

1. $\int (x^{22} - 3\cos 7x + \frac{2}{x+9} - 4^{3x})dx$, **2.** $\int \frac{arctg^5 x}{x^2+1}dx$; **3.** $\int \ln^2 x\, dx$; **4.** $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)}$; **5.** $\int tg^3 2x\, dx$.		
6. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln^3 x}$	**7.** $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 - x}$	**8.** $x\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$.
9. $25y'' - 10y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$.		
10. $z = x^5 y^3 + \sin(3x - 5y)$,		
11. $z = tg^2 x \cdot arctg(xy)$, де $x = u^3 v,\ y = 2u + v^2$.		
12. $u = 0,5x^2 - 8xy^2 + y^3 + 2xz - 5,\ M_0(2;2;1), M(2;1;-1)$.		
13. $D: xy = 6,\ x + y - 7 = 0$		
14. $V: 3x + 2y + 6z - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L:\ y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le \frac{7}{9}$.		

Варіант № 24

1. $\int (x^{23} + \frac{4}{x-4} - 3\cos 2x + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}})dx$, **2.** $\int \frac{(\arccos 3x)^2 dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; **3.** $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; **4.** $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+4)}dx$; **5.** $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$.		
6. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$	**7.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln^3 x}$	
8. $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$	**9.** $y'' + y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.	
10. $z = x^3 y^7 + \cos(8x - 9y)$		
11. $z = tgx + \frac{1}{y}$, де $x = u^v,\ y = u^2 v$.		
12. $u = 2y^3 - x^3 + x^4 y^2 + 4z - 6,\ M_0(-2;3;1), M(2;1;2)$.		
13. $D: y = -x^2 - 3x + 2,\ y = -6 - x$		
14. $V: 3x + 4y + z - 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.		
15. $L: x = 4(t - \sin t),\ y = 4(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$.		

Варіант № 25

1. $\int (x^{14}-\sqrt{x+2}-14\sin 2x+\frac{3}{x^2+100})dx$, **2.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; **3.** $\int (3x-4)\sin 5x\,dx$; **4.** $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; **5.** $\int \cos^5 5x\,dx$.		
6. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$	**7.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$	
8. $(xy+x^3y)y'=1+y^2$	**9.** $y''+y'+3y=0,\ y(0)=2, y'(0)=0$.	
10. $z=y^2\sqrt{x}+\ln(9x+3y)$.		
11. $z=\ln(x^3+2y^3)+\cos(xy)$, де $x=u\sin v,\ y=3u-2v$.		
12. $u=x^2y-y^3+4x^2y^2+2z+9,\ M_0(3;2;-1), M(1;2;1)$.		
13. $D: y=e^x,\ y=e^{2x},\ x=1$.		
14. $V: 8x+2y+2z-3=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.		
15. $L:\ y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}$.		

Варіант № 26

1. $\int (x^{15}+4\cos 10x-\frac{2}{x^2+25}-\frac{1}{x-5})dx$, **2.** $\int \frac{\ln^2 x+1}{x}dx$; **3.** $\int (5x+3)e^{3x}dx$; **4.** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x+2)}$; **5.** $\int \sin^2 \frac{5x}{2}\,dx$.		
6. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$	**7.** $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{(x-4)^2}$	
8. $(x+1)dy-xydx=0$.	**9.** $y''-10y'+9y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2$.	
10. $z=x^2y^3-5\sin(3x-7y)$,		
11. $z=\sqrt{x-y}+\ln(\cos xy)$, де $x=4u-7v,\ y=\frac{u^2}{v^3}$.		
12. $u=y^3+x^2y-5y^2-3z+1,\ M_0(-3;2;1), M(2;1;-2)$.		
13. $D: y=-x^2+8x+3,\ y=5x+3$.		
14. $V: 4x+2y+z-4=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.		
15. $L: x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ \ 0\le t\le \pi/2$.		

Варіант № 27

1. $\int(2x^{16}+4\sin 10x-\frac{3}{x-3}+e^{-x})dx$, **2.** $\int\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **3.** $\int\arcsin 2x\,dx$; **4.** $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; **5.** $\int\frac{\sin^2 x+1}{\cos^2 x}dx$.		
6. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$	**7.** $\int\limits_2^6\frac{dx}{(x-4)^2}$	
8. $y'=(2x-1)ctgy$.	**9.** $y''-5y'+4y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=-1$.	
10. $z=x^3y^5+\cos(9x-2y)$,		
11. $z=e^x\sin(2x+y^2)$, де $x=\sqrt{u}\cdot v,\ y=4u+5v$.		
12. $u=5x^3-y^2x+3xy-4z+6,\ M_0(-2;-3;1),\ M(1;1;2)$.		
13. $D: y=3x^2-x,\ \ y=-2x^2+4x$.		
14. $V: 5x+3y+15z-15=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.		
15. $L:\ \ y=-\ln\cos x,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{6}$.		

Варіант № 28

1. $\int(2x^{27}-\frac{1}{x^2+4}-3\cos 7x-\frac{4}{x+5})dx$, **2.** $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; **3.** $\int(2x+1)e^{-7x}\,dx$; **4.** $\int\frac{3x+2}{x(x^2+3)}dx$; **5.** $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$.		
6. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4}$.	**7.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$	
8. $(1+e^x)ydy-e^ydx=0$.	**9.** $5y''-6y'+5y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-1$.	
10. $z=x^3y^7+\ln(3x-4y)$,		
11. $z=tgx\cdot\ln(x^2+y)$, де $x=tg(uv),\ y=2u-5v$.		
12. $u=4x^3-5y^2x^2+3y-5z+7,\ M_0(3;-2;2),\ M(1;4;-1)$.		
13. $D: y=3x^2-x,\ \ y=-2x^2+4x$.		
14. $V: 6x+2y+z-8=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.		
15. $L: x=1-e^t,\ y=1+e^t,\ \ 0\le t\le 1$.		

Варіант № 29

1. $\int (x^{18} - \frac{1}{x-28} - 2\sin 8x - \frac{4}{\cos^2 3x})dx$, **2.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$; **3.** $\int (x + \frac{1}{2}) \ln(x+1)\, dx$; **4.** $\int \frac{(x-3)}{x^3 - x^2} dx$; **5.** $\int \sin^4 3x\, dx$.		
6. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{4 + \ln x}}$	**7.** $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	**8.** $(1+y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.
9. $y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 3, y'(0) = 0$.		
10. $z = x^4 y - 7\ln(7x - 6y)$,		
11. $z = 3^{x-y} \sin(x^2 - y^2)$, де $x = \frac{\sqrt{v}}{u}$, $y = \cos(u+v)$.		
12. $u = 2y^4 - 3x^2 y + x^3 - 3z + 6$, $M_0(3;0;1), M(2;3;-1)$.		
13. $D: y = x^2 - 4x + 8,\quad y = -2x^2 - 3x = 10$.		
14. $V: 2x + 3y + z - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L:\ y = chx + 1,\ 0 \le x \le 2.$		

Варіант № 30

1. $\int (x^{19} + \frac{4}{x-2} - 2\cos 12x - \sqrt{x-19})dx$, **2.** $\int \frac{x^2}{x^6+5} dx$; **3.** $\int e^{-3x}(2 - 9x)\, dx$; **4.** $\int \frac{x-4}{(x-3)(x^2+5)} dx$; **5.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.		
6. $\int\limits_9^{16} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + 1}$.	**7.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3 - 7}}$	
8. $y' = (3y + 2)tgx$.	**9.** $y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -1$.	
10. $z = x^4 y^3 + \sin(7x - 6y)$,		
11. $z = tg(x\cos y) - \sqrt{y}$, де $x = \ln\frac{u}{v}$, $y = u + 6v$.		
12. $u = 5x^2 - 6y^3 x + y^2 - 2z + 8$, $M_0(0;3;-1), M(3;2;1)$.		
13. $D: y = -x^2 + 2x + 3,\ y = 7x - 3.$		
14. $V: 3x + 7y + 21z - 21 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$		
15. $L: x = \cos t - t\sin t,\ y = \sin t + t\cos t,\ 0 \le t \le \pi$.		

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В.* Інтеграли та їх застосування: практичний посібник з вищої математики / Бондаренко Н.В., Забарило О.В., Отрашевська В.В., Пастухова М.С., Соколова Л. В. – КНУБА, 2009. – 64 с.

2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 432 с.

3. *Денисюк В.*П. Вища математика: навч. посібн. – У 4-х част. -
ч.1 / Денисюк В.П., Репета В.К. – К: НАУ, 2006. – 295 с.
ч.2. / Денисюк В.П., В.М. Бобков, Т.А. Погребецька, В.К. Репета. – К: НАУ, 2006. – 255 с.
ч.3 / Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. – К: НАУ, 2005. – 444 с.

4. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Вища школа,1993. – 648 с.

5. *Дубовик В.П.* Вища математика, зб. задач/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

6. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 91 с.

7. *Овчинников П.П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. / Пер. з рос. П.М. Юрченка, 3-тє вид., випр.:
ч.1. / Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
ч.2. / Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.

Навчально-методичне видання

Вища математика

Методичні вказівки та завдання
до виконання контрольної роботи № 2
для студентів спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія», заочної форми навчання

Укладачі: **Бондаренко** Наталія В'ячеславівна
Наголкіна Зоя Іванівна
Печук Василь Дмитрович

Комп'ютерне верстання *Р.В. Шушпанової*

Підписано до друку . Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 4,51. Обл.-вид. акр. 5.
Електронний документ. Вид. № .

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.