

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОШР МАТЕРІАЛІВ

Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів Побудова епюр внутрішніх зусиль

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 „Будівництво”

Київ 2012

УДК 539.3
ББК 30.121
О-61

Укладачі: А. М. Станкевич, кандидат технічних наук, доцент
І. В. Жупаненко, кандидат технічних наук
Д. В. Левківський, асистент

Рецензент Л. Т. Шкельов, кандидат технічних наук, професор

Відповідальний за випуск А. М. Станкевич, кандидат технічних наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 11 від 16 травня 2012 року.

Опір матеріалів. Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів. Побудова епюр внутрішніх зусиль: методичні рекомендації, завдання та приклади до виконання розрахунково-графічних робіт / уклад: А. М. Станкевич, І. В. Жупаненко, Д. В. Левківський. – К.: КНУБА, 2012. – 68 с.

Методичні рекомендації містять варіанти індивідуальних завдань, вказівки та детальні плани виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів», а також приклади розв'язання кожного завдання. Розглянуто розділи: «Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів» та «Побудова епюр внутрішніх зусиль».

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво» для практичного використання під час виконання розрахунково-графічних робіт.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам виконати розрахунково-графічні роботи з курсу „Опір матеріалів” за розділами:

- „Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів”;
- „Побудова епюр внутрішніх зусиль”.

Кожну розрахунково-графічну роботу студент повинен виконати за індивідуальним завданням, умова якого визначається згідно з шифром, виданим викладачем. Вихідні дані (розрахункові схеми та числові значення) студент вибирає з додатків (див. дод. 1, 2) за власним шифром у вигляді тризначного числа.

Оформлюється розрахунково-графічна робота на аркушах формату А4, які скріплюються зліва. Титульний аркуш роботи оформлюється за зразком:

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський національний університет будівництва і архітектури
Кафедра опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота № _____
”_____”
/тема/

Виконав:

студент _____
/спеціальність, курс, група/

/прізвище, ініціали/

Керівник _____
/прізвище, ініціали/

Київ – 20__ р.

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення – олівцем. Дозволяється комп’ютерне виконання креслень.

Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання поетапного розрахунку. Для ілюстрації наведено приклади виконання кожної РГР. Виконуючи кожен етап розрахунків, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (см², см³, см⁴, кН, кНм).

Розрахунково-графічна робота вважається захищеною після її захисту.

1. Геометричні характеристики плоского поперечного перерізу

Постановка задачі

Для заданого поперечного перерізу, який складається з трьох елементів, потрібно визначити головні моменти інерції та моменти опору площі поперечного перерізу.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 1 вибрати номери прокатних елементів, розміри пластини та розрахункову схему перерізу.

План виконання роботи

1. Відповідно до заданої схеми окремо накреслити кожен елемент складеного перерізу та вписати (або обчислити) усі вихідні геометричні характеристики кожного елемента.

2. Обрати допоміжну систему координат та визначити положення центра ваги складеного поперечного перерізу. Виконати перевірки.

3. Обчислити осьові та відцентровий моменти інерції перерізу відносно знайдених центральних осей.

4. Визначити величину та знак кута повороту, на який потрібно повернути центральну систему координат до набуття нею положення головної.

5. Обчислити головні центральні моменти інерції.

6. Обчислити головні радіуси інерції та побудувати еліпс інерції.

7. Користуючись побудованим еліпсом інерції, перевірити значення раніше обчислених моментів інерції відносно центральних осей.

8. Обчислити моменти опору площі складеного перерізу.

Рекомендації до виконання РГР

1. До складу перерізу, що розглядається, можуть входити: пластина (прямокутник), двотавр, швелер, кутик.

Кожен елемент перерізу, відповідно до завдання, потрібно накреслити окремо. На перерізі вказати центр ваги та положення власної центральної системи координат елемента, яка повинна мати напрямок та назву осей, що відповідають прийнятим у лекційному курсі. Для кожного елемента перерізу поруч із кресленням вписати лінійні розміри та необхідні геометричні характеристики. Користуючись таблицями сортаменту прокатної сталі, особливу увагу потрібно звернути на відповідність центральних систем координат елемента у завданні та сортаменті. Також потрібно пам'ятати, що відцентровий момент інерції

для перерізів, які мають хоча б одну вісь симетрії, дорівнює нулю. Для кутиків, крім осьових моментів інерції, потрібно також виписати значення головних I_{\max} та I_{\min} моментів інерції, а величину відцентрового моменту інерції визначити за формулами:

- для рівнобічного кутика:

$$I_{yz} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2};$$

- для нерівнобічного кутика:

$$I_{yz} = \pm \sqrt{(I_{\max} - I_y)(I_{\max} - I_z)} = \pm \sqrt{(I_y - I_{\min})(I_z - I_{\min})}.$$

Знак відцентрового моменту інерції відповідає знаку квадрантів, у яких зосереджена більша частина площі поперечного перерізу. Визначення знака відцентрового моменту інерції кутика проілюстровано на рис. 1.1.

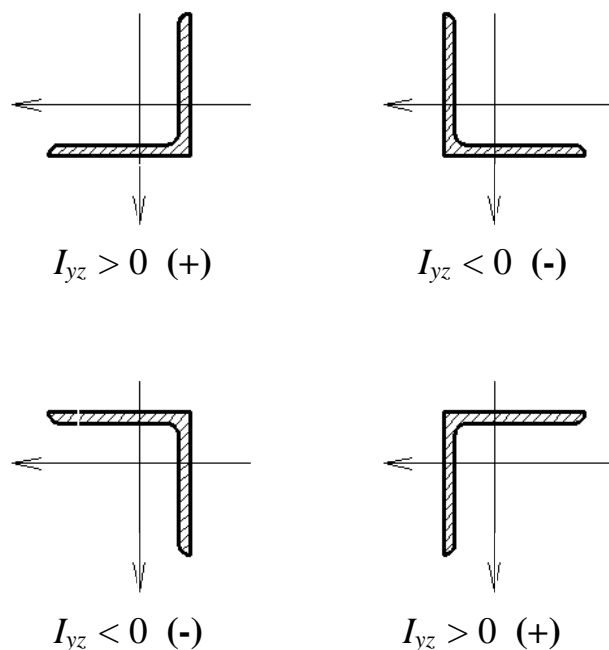


Рис.1.1

2. Положення центра ваги складеного перерізу визначається у допоміжній системі координат y_0Oz_0 . Допоміжна система координат обирається дотичною до контуру перерізу, а сам переріз повинен знаходитись у додатному квадранті. Координати центра ваги визначаються за формулами:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{z_0}}{\sum_{i=1}^3 A_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{y_0}}{\sum_{i=1}^3 A_i},$$

де $\sum_{i=1}^3 S_{z_0} = \sum_{i=1}^3 (A_i \cdot y_i)$ – статичний момент площі перерізу відносно допоміжної осі z_0 ;

$$\sum_{i=1}^3 S_{y_0} = \sum_{i=1}^3 (A_i \cdot z_i) \text{ – статичний момент площі перерізу відносно}$$

допоміжної осі y_0 ;

A_i – площа перерізу окремого елемента;

z_i та y_i – координати центрів ваги елементів у допоміжній системі координат.

Після визначення положення центра ваги складеного поперечного перерізу, його потрібно нанести на загальне креслення та виконати перевірки: візуальну (графічну) та математичну. Завдяки візуальній (графічній) перевірці переконуємось, що центр ваги складеного перерізу знаходиться усередині трикутника, вершинами якого є центри ваги елементів перерізу. Остаточною (математичною) перевіркою буде обчислення статичних моментів площі усього перерізу відносно знайдених центральних осей. Відповідно до визначення вони повинні дорівнювати нулю:

$$S_{y_c} = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot a_i = 0, \quad S_{z_c} = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot b_i = 0,$$

де a_i , b_i – відстані між центральними та власними осями кожного елемента перерізу: a_i – відстань між осями y_c та y_i з урахуванням знака, а b_i – відстань між осями z_c та z_i . Похибка при обчисленні статичних моментів не повинна перебільшувати $\Delta = 0,1\%$. Для забезпечення точності потрібно враховувати три знаки після коми.

3. Визначення осьових та відцентрового моментів інерції складеного перерізу відносно його центральної системи координат виконується за формулами паралельного переносу:

$$I_{y_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i} + a_i^2 \cdot A_i),$$

$$I_{z_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{z_i} + b_i^2 \cdot A_i),$$

$$I_{y_c z_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i z_i} + a_i \cdot b_i \cdot A_i),$$

де I_{y_i} , I_{z_i} , $I_{y_i z_i}$ – значення власних осьових та відцентрового моментів інерції кожного елемента перерізу. Під час аналізу отриманих результатів потрібно пам'ятати, що значення осьових моментів інерції завжди додатні, а знак відцентрового моменту інерції можна перевірити за раніше згаданим правилом (для кутика).

4. Положення головної центральної системи координат визначається кутом повороту центральної системи координат у ту чи іншу сторону залежно від знака кута. Кут повороту та його знак визначаються через тангенс подвійного кута за формулою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}}.$$

У зв'язку з тим, що $\operatorname{tg} 2\alpha$ – функція непарна, значення кута може бути як додатним, так і від'ємним. Залежно від знака кута здійснюється поворот центральної системи координат. При $\alpha < 0$ поворот центральної системи координат здійснюємо за рухом годинникової стрілки, якщо $\alpha > 0$ – проти руху годинникової стрілки. Також потрібно пам'ятати, що $\operatorname{tg}(\pm \frac{\pi}{2}) = \infty$ (не існує), відповідно кут α може змінюватись лише у межах $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Випадок, коли $\alpha = \frac{\pi}{4}$ свідчить про те, що переріз має осі симетрії.

5. Головні центральні моменти інерції обчислюються за формулами:

$$I_u = I_{y_c} \cos^2 \alpha + I_{z_c} \sin^2 \alpha - I_{y_c z_c} \sin 2\alpha;$$

$$I_v = I_{z_c} \cos^2 \alpha + I_{y_c} \sin^2 \alpha + I_{y_c z_c} \sin 2\alpha,$$

а також

$$I_u = I_{y_c} - I_{y_c z_c} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$I_v = I_{z_c} + I_{y_c z_c} \operatorname{tg} \alpha.$$

Потрібно пам'ятати, що головні моменти інерції є максимальним та мінімальним з можливих. Для перевірки їх визначення застосовують формулу, яка не містить тригонометричних функцій:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2}.$$

Також потрібно перевірити інваріантність суми осьових моментів інерції:

$$I_u + I_v = I_{y_c} + I_{z_c}.$$

6. Обчислення головних радіусів інерції виконують за формулами:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}.$$

Радіуси інерції використовуємо як півосі для побудови еліпса інерції, відкладаючи їх перпендикулярно однойменній осі, тобто $i_u \perp U$, $i_v \perp V$. За допомогою еліпса інерції перевіряємо значення осьових моментів інерції I_{y_c} та I_{z_c} . Для цього на осі z_c та y_c опускаємо дотично до еліпса перпендикуляри. Відрізки, які відсікають на осях ці перпендикуляри, будуть, відповідно, радіусами інерції i_y та i_z . Моменти інерції обчислюємо за формулами:

$$I_{y_c} = i_y^2 \cdot A, \quad I_{z_c} = i_z^2 \cdot A.$$

Так, за допомогою еліпса інерції, можна визначити моменти інерції відносно будь-якої центральної системи координат.

7. Для обчислення моментів опору перерізу відносно головної системи координат потрібно визначити найбільш віддалені від кожної осі точки перерізу. Відстані від осей до точок вимірюються графічно на кресленні перерізу у відповідному масштабі. Моменти опору обчислюються за формулами:

$$W_u = \frac{I_u}{h_u}, \quad W_v = \frac{I_v}{h_v}.$$

Тут h_u та h_v – відстані до найбільш віддалених точок від осі U та V відповідно.

ПРИКЛАД 1.1

Визначити головні центральні моменти інерції та моменти опору складеного поперечного перерізу, схема якого показана на рис. 1.2, побудувати еліпс інерції.

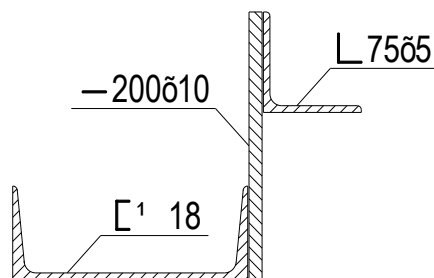
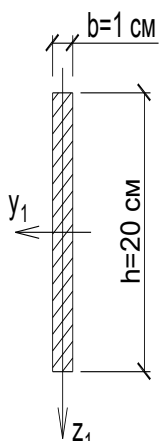


Рис. 1.2

1. Відповідно до заданої схеми окремо викреслюємо кожен елемент перерізу та визначаємо усі вихідні геометричні характеристики кожного елемента.

Для кутика і швелера геометричні характеристики випикуємо з таблиць сортаменту (ГОСТ 8240-72 та ГОСТ 8509-72), для пластини – обчислюємо за формулами прямокутника:



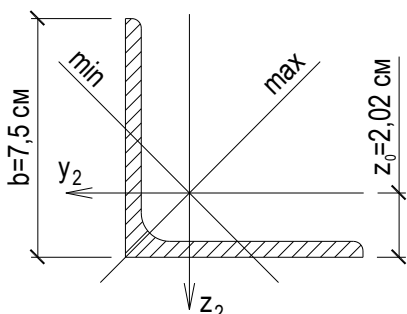
а) прямокутник 200x10 мм:

$$A_1 = b \cdot h = 20 \cdot 1 = 20 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1 \cdot 20^3}{12} = 666,67 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{1^3 \cdot 20}{12} = 1,67 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1 z_1} = 0;$$



б) кутик рівнобічний 75x5:

$$A_2 = 7,39 \text{ см}^2;$$

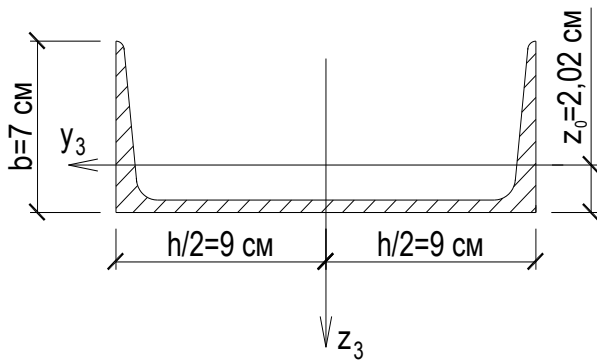
$$I_{y_2} = I_{z_2} = 39,53 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} = 62,65 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = 16,41 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2 z_2} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = -\frac{62,65 - 16,41}{2} = -23,12 \text{ см}^4;$$

в) швеллер № 18 (з нахилом внутрішніх граней полиць) :



$$A_3 = 20,7 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_3} = 86 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_3} = 1090 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_3 z_3} = 0.$$

Загальна площа поперечного перерізу:

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 20 + 7,39 + 20,7 = 48,09 \text{ см}^2.$$

2. Обираємо допоміжну систему координат та визначаємо положення центра ваги складеного поперечного перерізу.

Координати центра ваги визначаємо у допоміжній системі координат $y_0 z_0$, яку обираємо дотичною до контуру перерізу так, щоб переріз знаходився у додатному квадранті.

Викреслюємо в масштабі схему поперечного перерізу, вказуємо положення центрів ваги і центральні осі кожного з елементів (рис. 1.3).

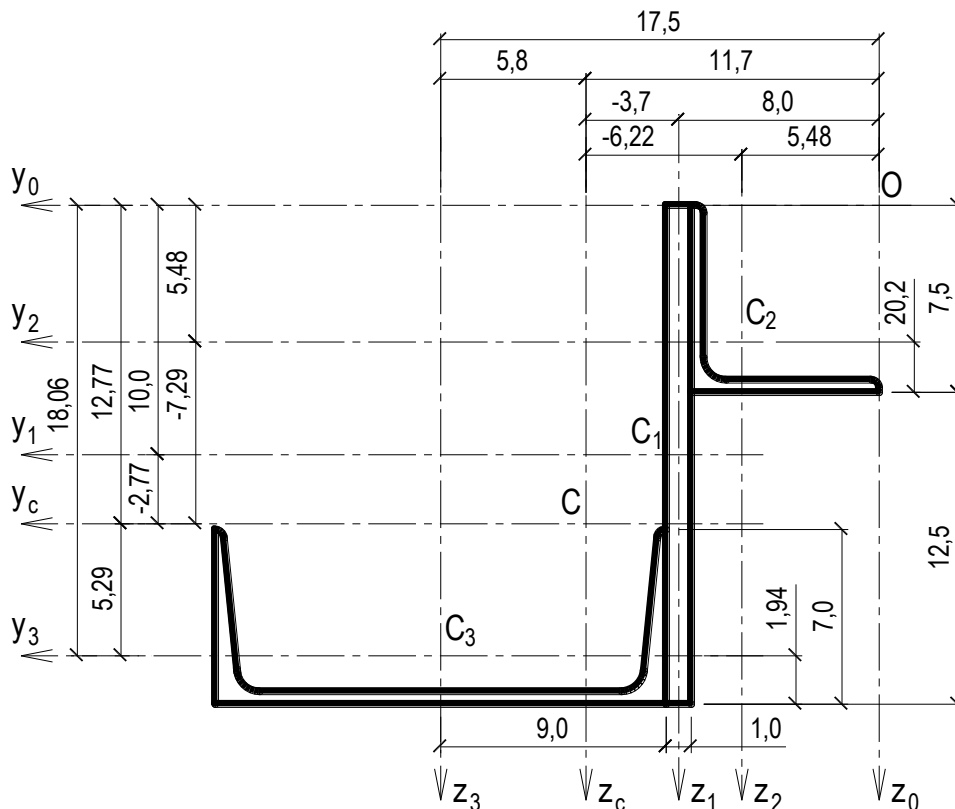


Рис. 1.3. Визначення центра ваги перерізу

Обчислюємо координати центрів ваги елементів у допоміжній системі координат $y_0 z_0$, тобто відстані до центрів ваги кожного з елементів від допоміжних осей:

$$\begin{aligned} y_{01} &= 8,0 \text{ см}; & z_{01} &= 10,0 \text{ см}; \\ y_{02} &= 5,48 \text{ см}; & z_{02} &= 5,48 \text{ см}; \\ y_{03} &= 17,5 \text{ см}; & z_{03} &= 18,06 \text{ см}. \end{aligned}$$

Координати центра ваги перерізу:

$$y_c = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot y_{0i}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{20 \cdot 8 + 7,39 \cdot 5,48 + 20,7 \cdot 17,5}{48,09} = 11,70 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot z_{0i}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{20 \cdot 10 + 7,39 \cdot 5,48 + 20,7 \cdot 18,06}{48,09} = 12,775 \text{ см}.$$

На схемі перерізу (рис. 1.3) від допоміжних осей відкладаємо координати центра ваги y_c та z_c і проводимо центральні осі.

Визначаємо координати центрів ваги кожного елемента перерізу в центральній системі координат $y_c z_c$, тобто відстані між центральними осями перерізу та власними центральними осями кожного елемента:

$$\begin{aligned} b_i &= y_{0i} - y_c & a_i &= z_{0i} - z_c \\ b_1 &= 8,0 - 11,70 = -3,70 \text{ см}; & a_1 &= 10,0 - 12,775 = -2,775 \text{ см}; \\ b_2 &= 5,48 - 11,70 = -6,22 \text{ см}; & a_2 &= 5,48 - 12,775 = -7,295 \text{ см}; \\ b_3 &= 17,50 - 11,70 = 5,80 \text{ см}. & a_3 &= 18,06 - 12,775 = 5,285 \text{ см}. \end{aligned}$$

Для переконання у правильності визначення положення центра ваги складеного перерізу перевіряємо умову рівності нулю статичного моменту площі перерізу відносно центральних осей.

$$\begin{aligned} S_{z_c} &= \sum_{i=1}^3 A_i \cdot b_i = 20 \cdot (-3,70) + 7,39 \cdot (-6,22) + 20,7 \cdot 5,8 = \\ &= 120,06 - 119,966 = 0,054 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Відносна похибка складає:

$$\Delta = \frac{120,06 - 199,966}{120,06} \cdot 100\% = 0,08\% < 0,1\% .$$

$$S_{yc} = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot a_i = 20 \cdot (-2,775) + 7,39 \cdot (-7,295) + 20,7 \cdot 5,285 = \\ = 109,41 - 109,40 = 0,01 \text{ см}^3 .$$

Відносна похибка складає:

$$\Delta = \frac{109,41 - 109,40}{109,41} \cdot 100\% = 0,01\% < 0,1\% .$$

Відносні похибки обчислення не перевищують допустиме значення.

3. *Обчислюємо осьові та відцентровий моменти інерції перерізу відносно знайдених центральних осей.*

Осьові та відцентровий моменти інерції перерізу обчислюємо за формулами паралельного переносу:

$$I_{yc} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i} + A_i \cdot a_i^2) = [666,67 + 20 \cdot (-2,77)^2] + \\ + [39,53 + 7,39 \cdot (-7,29)^2] + [86 + 20,7 \cdot (5,29)^2] = 1917,7 \text{ см}^4 ; \\ I_{zc} = \sum_{i=1}^3 (I_{z_i} + A_i \cdot b_i^2) = [1,67 + 20 \cdot (-3,7)^2] + \\ + [39,53 + 7,39 \cdot (-6,22)^2] + [1090 + 20,7 \cdot (5,8)^2] = 2387,3 \text{ см}^4 ; \\ I_{yczc} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i z_i} + A_i \cdot a_i \cdot b_i) = [0 + 20 \cdot (-2,77) \cdot (-3,7)] + \\ + [(-23,12) + 7,39 \cdot (-7,29) \cdot (-6,22)] + [0 + 20,7 \cdot 5,29 \cdot 5,8] = \\ = 1152,1 \text{ см}^4 .$$

Візуально перевіряємо знак “+” відцентрового моменту інерції перерізу. Як видно з рис. 1.3, більша частина площі перерізу знаходиться в I-й та III-й чвертях, тобто добуток координат центрів ваги цих частин додатній.

4. *Визначаємо величину та знак кута повороту, на який потрібно повернути центральну систему координат до набуття нею положення головної.*

$$\text{tg}(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{yczc}}{I_{zc} - I_{yc}} = \frac{2 \cdot 1152,1}{2387,3 - 1917,7} = 4,9067 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \alpha = \text{arctg} 4,9067 = 78,48^\circ ; \alpha = 39,24^\circ .$$

Проводимо головні осі перерізу u , v , повертаючи відповідно центральні осі y_c та z_c на кут $\alpha = 39,24^\circ$ в додатному напрямку (проти руху годинникової стрілки) (рис. 1.4).

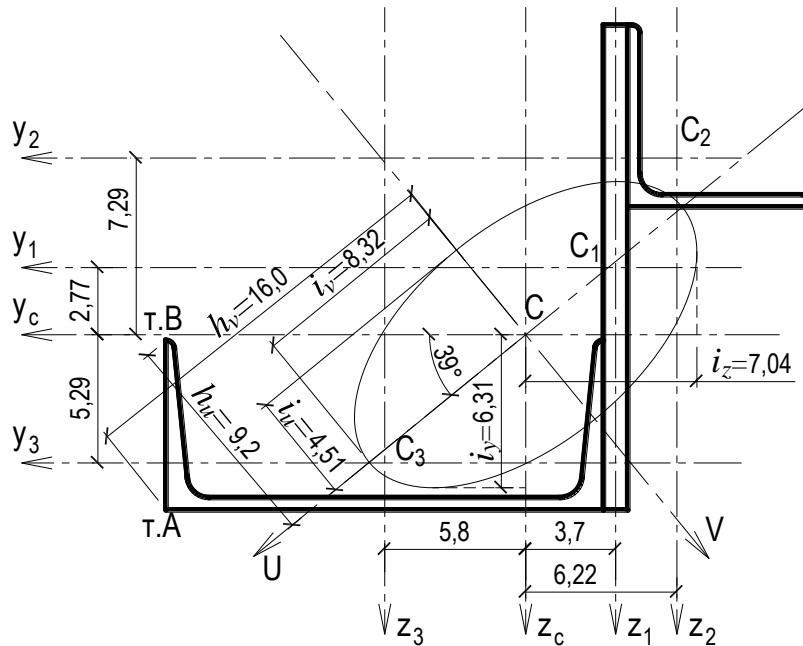


Рис. 1.4

5. Обчислюємо головні центральні моменти інерції перерізу.

$$\sin \alpha = \sin(39,24^\circ) = 0,6326;$$

$$\cos \alpha = \cos(39,24^\circ) = 0,7745;$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(2 \cdot 39,24^\circ) = 0,9799;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(39,24^\circ) = 0,8167.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } I_u &= I_{y_c} \cdot \cos^2 \alpha + I_{z_c} \cdot \sin^2 \alpha - I_{y_c z_c} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= 1917,7 \cdot 0,7745^2 + 2387,3 \cdot 0,6326^2 - 1152,1 \cdot 0,9799 = 976,7 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= I_{y_c} \cdot \sin^2 \alpha + I_{z_c} \cdot \cos^2 \alpha + I_{y_c z_c} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= 1917,7 \cdot 0,6326^2 + 2387,3 \cdot 0,7745^2 + 1152,1 \cdot 0,9799 = 3328,4 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\text{б) } I_u = I_{y_c} - I_{y_c z_c} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1917,7 - 1152,1 \cdot 0,8167 = 976,8 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{z_c} - I_{y_c z_c} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2387,3 + 1152,1 \cdot 0,8167 = 3328,2 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I_{u,v} &= \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} = \\ &= \frac{1917,7 + 2387,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1917,7 - 2387,3}{2}\right)^2 + 1152,1^2} = 2152,5 \pm 1175,8; \end{aligned}$$

$$I_u = 2152,5 - 1175,8 = 976,7 \text{ см}^4;$$

$$I_v = 2152,5 + 1175,8 = 3328,3 \text{ см}^4.$$

Таким чином отримали головні моменти інерції перерізу $I_v = I_{\max}$, $I_u = I_{\min}$. Оскільки $I_{z_c} > I_{y_c}$, повертаючи на кут $\alpha = 39,24^\circ$ від осі z_c , отримуємо вісь \max , а повертаючи від осі y_c – вісь \min .

Перевіряємо умову інваріантності осьових моментів інерції:

$$I_u + I_v = I_{y_c} + I_{z_c};$$

$$976,7 + 3328,3 = 1917,7 + 2387,3;$$

$$4305 = 4305.$$

6. Обчислюємо головні радіуси інерції та будуємо еліпс інерції перерізу.

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{976,7}{48,09}} = 4,51 \text{ см}, \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{3328,3}{48,09}} = 8,32 \text{ см}.$$

На головних центральних осях інерції будуємо еліпс з центром у центрі ваги перерізу і півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції (рис. 1.4). При цьому радіуси інерції відкладаються перпендикулярно відповідній осі ($i_v \perp V$, $i_u \perp U$).

7. Користуючись побудованим еліпсом інерції, перевіряємо значення раніше обчислених моментів інерції відносно центральних осей.

Графічно визначаємо радіуси інерції i_y та i_z , для чого опускаємо на центральні осі дотичні до еліпса перпендикуляри і вимірюємо довжини відрізків, які перпендикуляри відсікають на осях y_c , z_c (рис. 1.4): $i_y = 6,3 \text{ см}$, $i_z = 7,0 \text{ см}$.

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 6,3^2 \cdot 48,09 = 1908,7 \approx 1917,7 \text{ см}^4;$$

$$I_z = i_z^2 \cdot A = 7,0^2 \cdot 48,09 = 2356,4 \approx 2387,3 \text{ см}^4.$$

8. Обчислюємо головні моменти опору складеного перерізу.

За рис. 1.4 визначаємо відстані від найбільш віддалених точок перерізу до осей u та v . Найбільш віддалена від осі v точка А ($h_v = 16 \text{ см}$), а від осі u – точка В ($h_u = 9,2 \text{ см}$).

Обчислюємо головні моменти опору перерізу:

$$W_u = \frac{I_u}{h_u} = \frac{976,7}{9,2} = 106,2 \text{ см}^3; W_v = \frac{I_v}{h_v} = \frac{3328,3}{16,0} = 208 \text{ см}^3.$$

ПРИКЛАД 1.2

Для поперечного перерізу, схема якого показана на рис. 1.5, визначити моменти інерції I_y , I_z та I_{yz} .

1. Переріз розбиваємо на три окремі елементи (прості фігури):

- прямокутник шириною $b = 6 \text{ см}$ і висотою $h = 8 \text{ см}$;
- трикутник шириною $b = 6 \text{ см}$ і висотою $h = 8 \text{ см}$;
- вирізаний півкруг радіусом $R = 3 \text{ см}$.

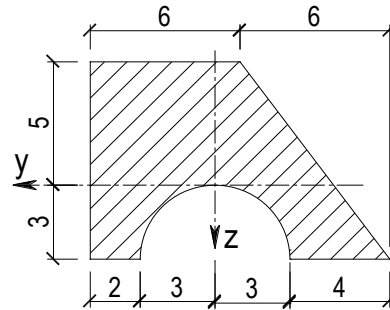
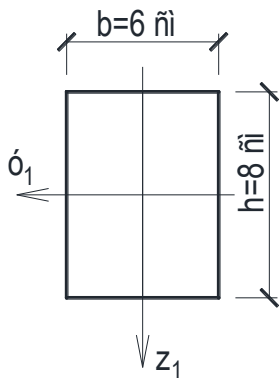


Рис. 1.5

Для елементів перерізу визначаємо геометричні характеристики відносно власних центральних осей.

а) прямокутник:



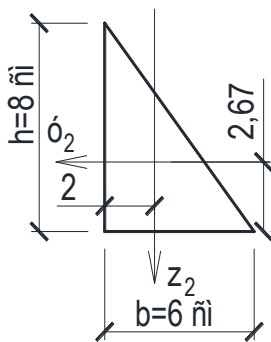
$$A_1 = b \cdot h = 6 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{6 \cdot 8^3}{12} = 256 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{6^3 \cdot 8}{12} = 144 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1 z_1} = 0.$$

б) трикутник:

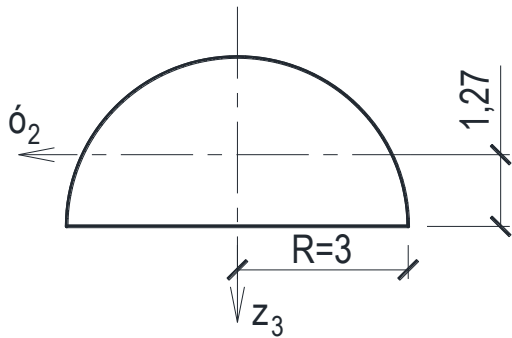


$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_2} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{6 \cdot 8^3}{36} = 85,33 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_2} = \frac{b^3 \cdot h}{36} = \frac{6^3 \cdot 8}{36} = 48 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2 z_2} = \pm \frac{b^2 \cdot h^2}{72} = -\frac{6^2 \cdot 8^2}{72} = -32 \text{ см}^4.$$



в) півкруг :

$$A_3 = \frac{\pi \cdot D^2}{8} = \frac{\pi \cdot 6^2}{8} = 14,14 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_3} = 0,00686 \cdot D^4 = 0,00686 \cdot 6^4 = 8,89 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_3} = \frac{\pi \cdot D^4}{128} = \frac{\pi \cdot 6^4}{128} = 31,81 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_3 z_3} = 0.$$

Оскільки півкруг вирізаний, його площу та моменти інерції в подальшому враховуємо зі знаком «-».

2. Задані осі y та z паралельні власним центральним осям елементів перерізу, тому моменти інерції перерізу відносно осей y та z обчислюємо за формулами паралельного переносу.

Знаходимо відстані між заданими осями та власними центральними осями елементів перерізу (рис. 1.6):

$$a_1 = -1 \text{ см}; a_2 = 0,33 \text{ см}; a_3 = 1,73 \text{ см};$$

$$b_1 = 2 \text{ см}; b_2 = -3 \text{ см}; b_3 = 0.$$

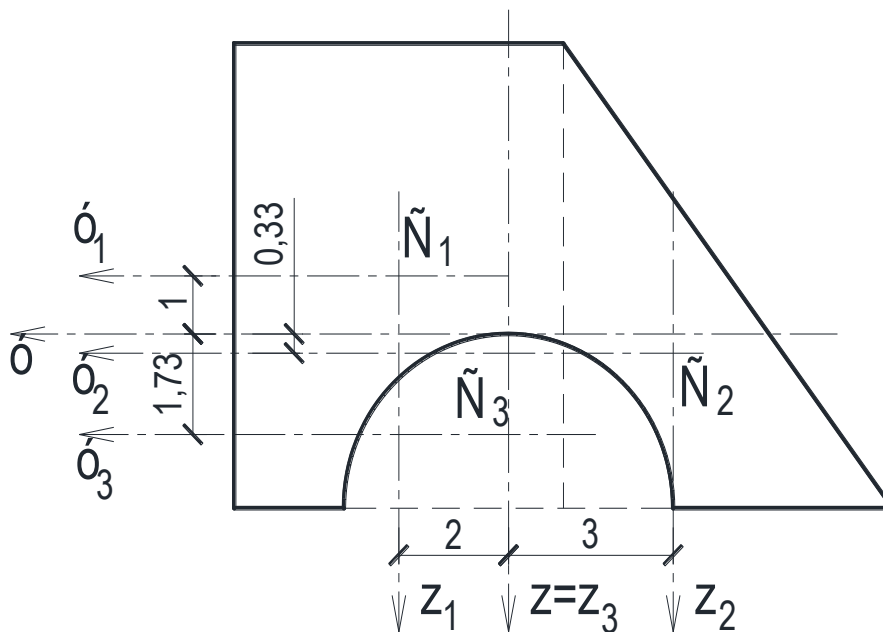


Рис. 1.6

$$I_y = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i} + A_i \cdot a_i^2) = [256 + 48 \cdot (-1)^2] + [85,33 + 24 \cdot 0,33^2] - [8,89 + 14,14 \cdot 1,73^2] = 340,73 \text{ см}^4;$$

$$I_z = \sum_{i=1}^3 (I_{z_i} + A_i \cdot b_i^2) = [144 + 48 \cdot 2^2] + [48 + 24 \cdot (-3)^2] - [31,81 + 14,14 \cdot 0^2] = 568,19 \text{ см}^4;$$

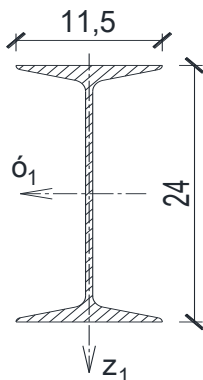
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i z_i} + A_i \cdot a_i \cdot b_i) = [0 + 48 \cdot (-1) \cdot 2] + [-32 + 24 \cdot 0,33 \cdot (-3)] + [0 + 14,14 \cdot 1,73 \cdot 0] = -151,76 \text{ см}^4;$$

ПРИКЛАД 1.3

Для поперечного перерізу, схема якого показана на рис. 1.7, визначити моменти інерції I_K , I_L та I_{KL} .

1. Поперечний переріз складається з двох елементів, для яких визначаємо площу, положення центра ваги і моменти інерції відносно власних центральних осей:

а) двотавр № 24:



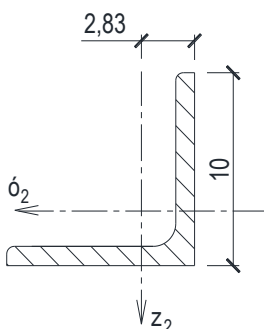
$$A_1 = 34,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_1} = 3460 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = 198 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1 z_1} = 0.$$

б) кутик 100x10:



$$A_2 = 19,24 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_2} = I_{z_2} = 178,95 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} = 283,83 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = 74,08 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2 z_2} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = + \frac{283,83 - 74,08}{2} = +104,88 \text{ см}^4.$$

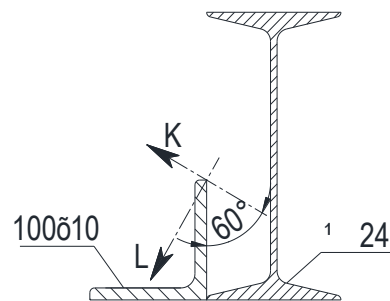


Рис. 1.7

2. Обчислюємо моменти інерції перерізу відносно допоміжних осей yOz . Допоміжні осі (рис. 1.8) приймаємо паралельними власним центральним осям елементів перерізу з початком координат на перетині заданих осей L, K .

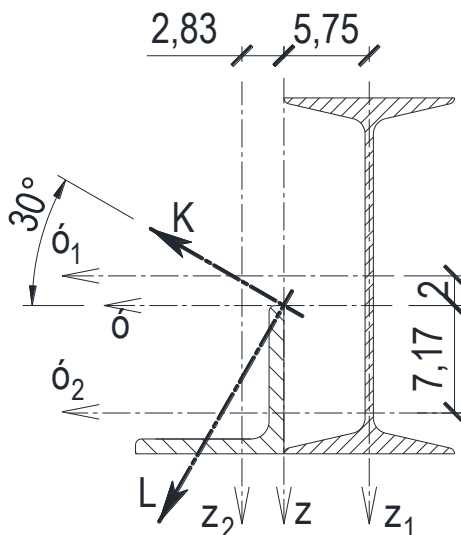


Рис. 1.8

Визначаємо відстані між допоміжними осями та власними центральними осями елементів перерізу (рис. 1.8):

$$a_1 = -2 \text{ сї} ; a_2 = 7,17 \text{ сї} ;$$

$$b_1 = -5,75 \text{ см} ; b_2 = 2,83 \text{ см} .$$

$$I_y = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} + A_i \cdot a_i^2) = [3460 + 34,8 \cdot (-2)^2] +$$

$$+ [178,95 + 19,24 \cdot 7,17^2] = 4767,26 \text{ см}^4 ;$$

$$I_z = \sum_{i=1}^2 (I_{z_i} + A_i \cdot b_i^2) = [198 + 34,8 \cdot (-5,75)^2] +$$

$$+ [178,95 + 19,24 \cdot (2,83)^2] = 1681,62 \text{ см}^4 ;$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i z_i} + A_i \cdot a_i \cdot b_i) = [0 + 34,8 \cdot (-2) \cdot (-5,75)] +$$

$$+ [104,88 + 19,24 \cdot 7,17 \cdot (2,83)] = 895,48 \text{ см}^4 .$$

3. Обчислюємо моменти інерції перерізу відносно заданих осей LOK , повернутих відносно допоміжних осей за годинниковою стрілкою на кут $\alpha = -30^\circ$:

$$\begin{aligned}
I_K &= I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha - I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\
&= 4767,26 \cdot \cos^2(-30^\circ) + 1681,62 \cdot \sin^2(-30^\circ) - 895,48 \cdot \sin(-60^\circ) = \\
&= 4771,36 \text{ см}^4; \\
I_L &= I_y \cdot \sin^2 \alpha + I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\
&= 4767,26 \cdot \sin^2(-30^\circ) + 1681,62 \cdot \cos^2(-30^\circ) + 895,48 \cdot \sin(-60^\circ) = \\
&= 1677,52 \text{ см}^4; \\
I_{KL} &= \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{yz} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = \\
&= \frac{4767,26 - 1681,62}{2} \cdot \sin(-60^\circ) + 895,48 \cdot \cos(-60^\circ) = -888,38 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

2. Побудова епюр внутрішніх зусиль

Загальні зауваження

У перерізах довільно навантаженого стержня виникають внутрішні напруження. Зібрані по площі поперечного перерізу, вони характеризують внутрішні зусилля, що виникають у поперечних перерізах стержня. Для визначення внутрішніх зусиль у перерізі стержня застосовуємо „метод перерізів”. Він полягає у тому, що стержень умовно розрізається площиною на дві частини, кожна з яких знаходиться у рівновазі під дією зовнішнього навантаження та внутрішніх зусиль, які діють у площині поперечного перерізу. У загальному випадку в площині перерізу виникає головний вектор внутрішніх зусиль та головний момент.

У практичних розрахунках завжди використовуються проекції головного вектора та головного моменту на осі головної системи координат (рис. 2.1).

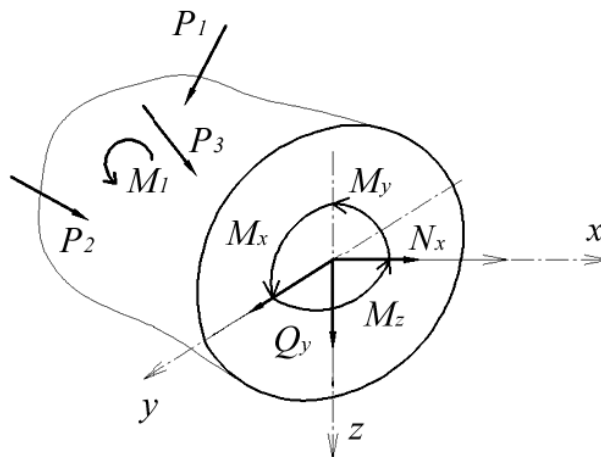


Рис. 2.1

Величини внутрішніх зусиль визначаються з умов рівноваги однієї з відсічених частин стержня.

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \\ \sum M_y &= 0, \quad \sum M_z = 0, \quad \sum M_x = 0.\end{aligned}$$

Для визначення дійсного напрямку внутрішнього зусилля потрібно з'ясувати його знак. Знак внутрішнього зусилля залежить від знаку нормалі до площини перерізу, що розглядається. Вважаємо, що нормаль буде додатною, якщо її напрямок співпадає з додатним напрямком відповідної осі. Тоді знаки внутрішніх зусиль потрібно визначати за таким правилом.

Поздовжнє – N_x та поперечні – Q_y , Q_z внутрішні зусилля вважаються додатними, якщо у перерізі з додатною нормаллю їх напрямок співпадає з додатним напрямком відповідної осі.

Згинальні моменти M_y та M_z вважаються додатними, якщо розтягують волокно стержня з додатного напрямку осі.

Момент кручення M_x вважається додатним, коли з напрямку нормалі його поворот бачимо проти руху годинникової стрілки.

На рис. 2.1 вказані всі додатні напрямки внутрішніх зусиль у поперечному перерізі відсіченої частини стержня.

Постановка задачі

Для кожного стержня, заданого розрахунковою схемою, визначити величини та напрямки внутрішніх зусиль та побудувати їх епюри.

Вихідні дані

За особистим шифром з дод. 2 вибрати лінійні розміри стержня, величини навантажень та номер розрахункової схеми.

План виконання роботи

1. Відповідно до завдання, накреслити у масштабі розрахункову схему стержня. Вказати величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів.
2. Обчислити величини діючих опорних реакцій.
3. Визначити характерні перерізи та вузлові точки вздовж осі стержня.

4. Обчислити величини та визначити знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня.
5. Побудувати епюри внутрішніх зусиль.
6. Перевірити правильність побудованих епюр.

Рекомендації до виконання РГР

1. У наведених в додатку схемах замість реального стержня зображено його вісь у вигляді лінії (прямої, ламаної або кривої), з літерними позначеннями довжин ділянок та прикладених навантажень. При складанні розрахункової схеми на її кресленні потрібно літерні позначення замінити на задані цифрові величини. Для уникнення спотворення характеру епюр, креслення обов'язково потрібно виконувати у масштабі.

У випадках, коли напрямок заданого навантаження не збігається з напрямками осей системи координат, потрібно визначити проєкції цього навантаження на відповідні осі та вказати їх числові значення.

2. У заданих схемах стержнів зустрічаються такі види опор:

а) шарнірно-рухома опора – має одну в'язь, в якій виникає опорна реакція, перпендикулярна до опорної площини (рис. 2.2 а) або спрямована вздовж опорного стержня (рис. 2.2 б);

б) шарнірно-нерухома опора – має дві в'язі, в яких виникають дві лінійні опорні реакції – вздовж та перпендикулярно осі стержня (рис. 2.2 в);

в) жорстке закріплення – обмежує можливість опори рухатись у двох напрямках та обертатись навколо точки опори. У такій опорі виникають дві лінійні реакції та реактивний (згинальний) момент (рис. 2.2.г).

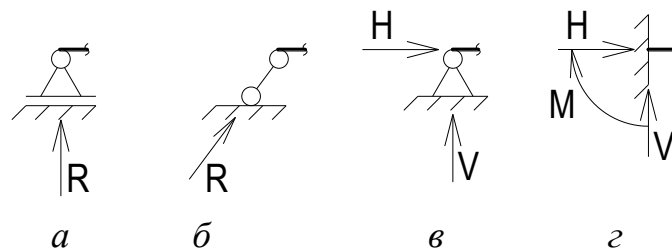


Рис. 2.2

У консольних стержнях (таких, що жорстко закріплені з одного краю) опорні реакції можна не визначати. Внутрішні зусилля у поперечних перерізах таких стержнів визначають, рухаючись з вільного краю (консолі)

до жорсткого закріплення, розглядаючи завжди рівновагу відсіченої консольної частини стержня.

Для всіх інших варіантів закріплення стержнів потрібно визначати опорні реакції з умови статичної рівноваги стержня. Попередній напрямок опорних реакцій при складанні рівнянь рівноваги обирається довільно. Якщо у розрахунках знайдена реакція має від'ємний знак, це свідчить про її протилежний напрямок. На розрахунковій схемі потрібно вказувати тільки дійсні напрямки діючих навантажень та опорних реакцій.

Для балок із наскрізними шарнірами, крім звичайних рівнянь рівноваги потрібно додатково складати рівняння рівності нулю суми моментів усіх сил, що діють ліворуч або праворуч від шарніра:

$$\sum M_{ш}^{лів} = 0 \quad \text{або} \quad \sum M_{ш}^{прав} = 0.$$

Також опорні реакції для балок із наскрізними шарнірами можна визначати, застосовуючи метод „поверхів”. Застосовуючи цей метод, потрібно завжди першою розглядати ту частину балки, яка внаслідок „розрізання” набуває степеня вільності.

3. Характерними перерізами (або точками) стержня є границі ділянок, у межах яких закон зміни внутрішніх зусиль залишається постійним. Відповідно, такими точками є:

- початок і закінчення стержня;
- точки, в яких прикладені зосереджені навантаження (сили, моменти, опорні реакції);
- точки початку, закінчення або зміни інтенсивності розподіленого навантаження;
- точки диференціальних залежностей.

Вузлом називаємо таку точку, в якій з'єднуються декілька стержнів або вісь стержня зламається, змінюючи напрямок. У вузлі стержня завжди потрібно перевіряти умову рівноваги.

4. Внутрішні зусилля у характерних перерізах можна обчислювати за допомогою складання рівнянь рівноваги відсіченої частини стержня. При складанні рівнянь для кожної ділянки стержня потрібно вказати границі зміни координати x та, відповідно до наведених рекомендацій та правила знаків, скласти рівняння для кожного внутрішнього зусилля як функцію координати x .

Складаючи рівняння, потрібно пам'ятати про існуючі диференціальні залежності між зовнішнім навантаженням та внутрішніми зусиллями:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dx} &= -q_x, \\ \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z, \\ \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, \\ \frac{d^2M_y}{dx^2} &= \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Отже, враховуючи диференціальні та інтегральні залежності між діючим навантаженням та внутрішніми зусиллями, можна впевнено визначити графік функції внутрішніх зусиль на кожній ділянці стержня. Виходячи з цього, більш раціональним є обчислення внутрішніх зусиль у характерних перерізах без складання рівнянь. Отримані результати використовуємо для побудови епюр внутрішніх зусиль.

5. Оскільки еюра внутрішнього зусилля – це графік, який відображає закон зміни величини та напрямку цього зусилля по довжині стержня, до еюри застосовують такі ж вимоги, як і до графіків. Еюри будують кожну окремо у масштабі на осьових лініях, які паралельні осі стержня (базах еюри). Обчислені у характерних перерізах значення N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_k є ординатами епюр відповідних внутрішніх зусиль. Ординати епюр відкладають перпендикулярно базі еюри у площині діючого навантаження. Обов'язковою є вимога будувати еюри згинальних моментів з боку розтягнутого волокна.

6. Перевірку правильності побудованих епюр виконуємо на основі диференціальних залежностей:

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.$$

Характер діючого навантаження обумовлює вигляд епюр Q_z та M_y :
- значення поперечної сили є тангенсом кута нахилу еюри згинальних моментів;

- знак епюри Q вказує на зростання або зменшення значень епюри згинальних моментів;

- нульові значення епюри Q вказують на наявність екстремумів в епюрі M .

Також потрібно пам'ятати, що у перерізах, де прикладені зосереджені сили, в епюрі Q відбуваються стрибки на величину та у напрямку діючої сили, а в епюрі M – злами у напрямку діючої сили. Стрибки в епюрі M відбуваються у точках прикладання зосереджених моментів.

Для перевірки епюр у стержнях, що мають вузлові точки, обов'язково потрібно розглядати умову рівноваги вузла.

ПРИКЛАД 2.1

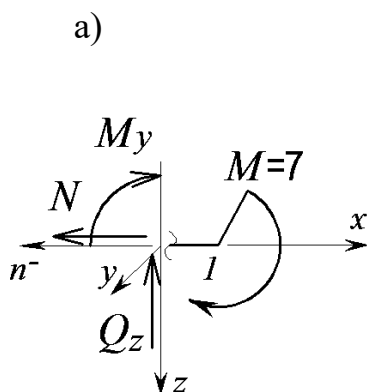
Горизонтальний консольний стержень

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.3).

2. Опорні реакції в защемленні не визначаємо, оскільки внутрішні зусилля можна визначити з умов рівноваги частини стержня з боку вільного краю.

3. Позначаємо характерні перерізи (1 – 4) вздовж осі стержня (рис. 2.3).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня:



$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \quad Q_1 = 0;$$

$$\sum M_y = 0 \quad M + M_1 = 0;$$

$$M_1 = -M = -7 \text{ кНм}.$$

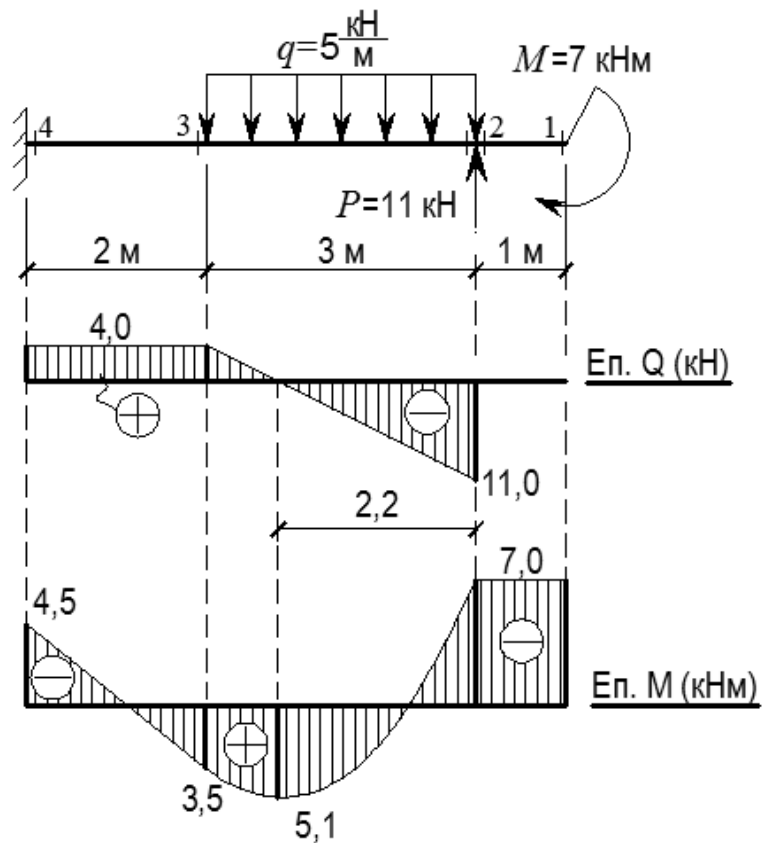
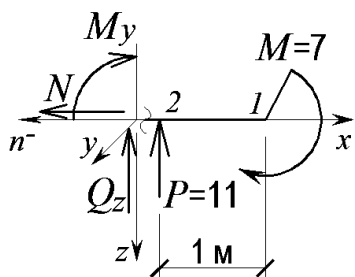


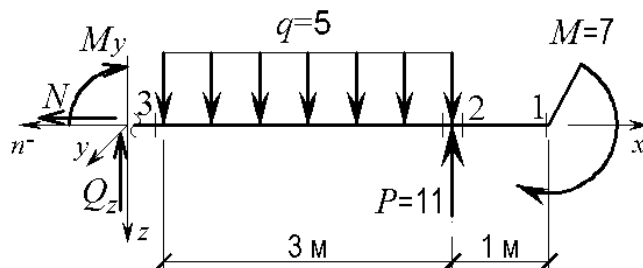
Рис. 2.3

б)



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad N_2 = 0; \\ \sum F_z &= 0 \quad -P - Q_2 = 0; \\ Q_2^{либ} &= -P = -11 \text{ кН}; \\ \sum M_y &= 0 \quad M + M_1 = 0; \\ M_1 &= -M = -7 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

в)



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad N = 0; \\ \sum F_z &= 0 \quad -Q - P + q \cdot 3 = 0; \quad Q_3 = -11 + 5 \cdot 3 = 4 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum M_y = 0 \quad -P \cdot 3 + q \cdot 3 \frac{3}{2} + M + M_3 = 0;$$

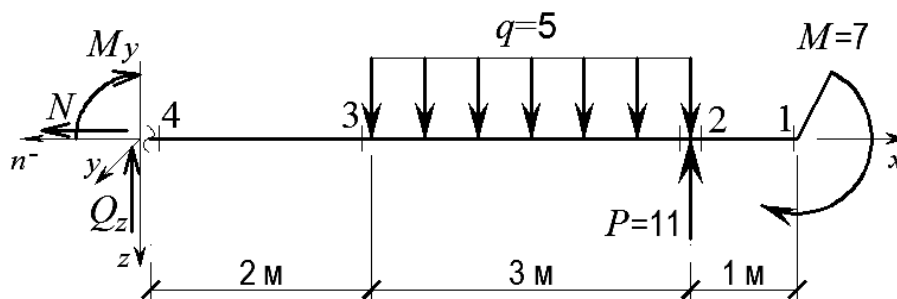
$$M_3 = 11 \cdot 3 - 5 \cdot \frac{3^2}{2} - 7 = 3,5 \text{ кНм.}$$

Оскільки поперечна сила в межах ділянки 2 – 3 змінює знак, необхідно визначити координату перерізу, в якому $Q(x) = 0$, а згинальний момент набуває екстремального значення:

$$Q(x_{ext}) = -11 + 5 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{ext} = \frac{11}{5} = 2,2 \text{ м;}$$

$$M_{ext} = 11 \cdot 2,2 - 2,5 \cdot 2,2^2 - 7 = 5,1 \text{ кНм.}$$

г)



$$\sum F_x = 0 \quad N_4 = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \quad -Q - P + q \cdot 3 = 0; \quad Q_4 = -11 + 5 \cdot 3 = 4 \text{ кН;}$$

$$\sum M_y = 0; \quad -P \cdot (6-1) + q \cdot 3 \cdot \left(6-1-\frac{3}{2}\right) + M + M_4 = 0;$$

$$M_4 = -7 - 5 \cdot 3 \cdot 3,5 + 11 \cdot 5 = -4,5 \text{ кНм.}$$

5. За визначеними ординатами будуюмо епюри (рис. 2.3). Ординати на епюрах відкладаємо в масштабі від бази епюри (паралельна осі балки лінія, що відповідає нульовим значенням зусиль). При цьому додатні значення поперечної сили відкладаємо вгору від бази, а від'ємні – вниз. Епюру згинальних моментів будуюмо з боку розтягнутого волокна, тобто додатні ординати відкладаємо вниз, а від'ємні – вгору. Епюри штрихуємо лініями, перпендикулярними базі.

6. Для контролю правильності побудови епюр використовуємо диференціальну залежність між інтенсивністю розподіленого навантаження та поперечною силою і між згинальним моментом та поперечною силою (2.1). У геометричній інтерпретації ці залежності можна представити так:

1) інтенсивність розподіленого навантаження $q_z(x)$ є тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q в даному перерізі. Тобто, на ділянках 1 – 2 та 3 – 4, де $q = 0$, тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0, отже, епюра Q на цих ділянках обмежена відрізком прямої, паралельної базі ($Q = const$). На ділянці 2 – 3 $q = const$, отже, тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q теж постійний, а сама епюра обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази;

2) поперечна сила є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M у даному перерізі. Тобто, на ділянках 1 – 2, де $Q = 0$, тангенс кута нахилу дотичної до епюри M також рівний 0, отже, епюра M обмежена відрізком прямої, паралельної базі ($M = const$). На ділянці 2 – 3 Q змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M , тому епюра в межах цієї ділянки обмежена кривою на порядок вище (квадратна парабола). На ділянці 3 – 4, де $Q = const$, епюра M обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази.

Додатково перевіряємо перерізи в точках прикладення зосередженого навантаження. У цих точках епюри мають стрибок, абсолютна величина якого дорівнює величині зосередженого навантаження:

$$Q_2^{np} - Q_2^{лів} = 0 - (-11) = 11 = P,$$

$$M_1^{np} - M_1^{лів} = 0 - (-7) = 7 = M.$$

ПРИКЛАД 2.2

Стержень на двох шарнірних опорах

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.4).

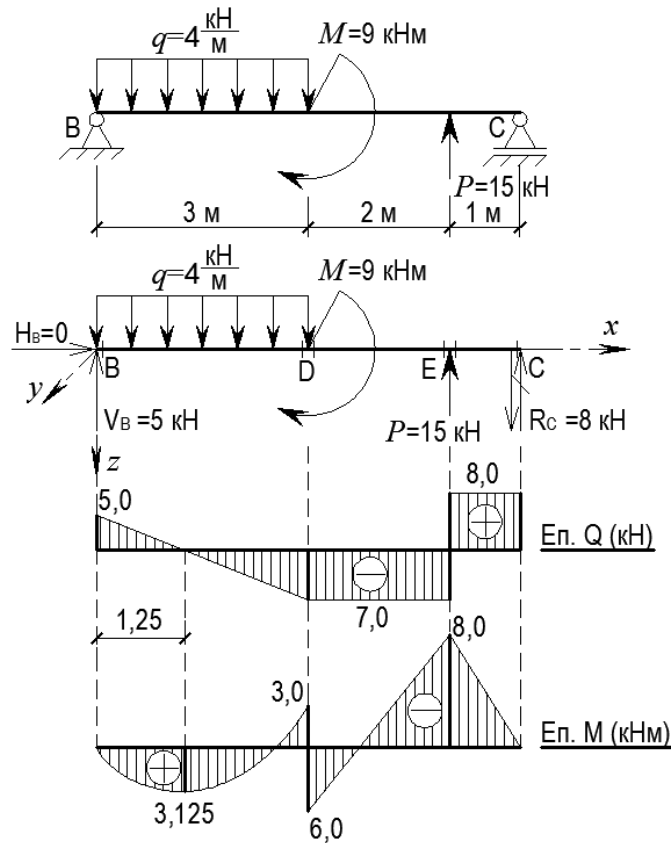


Рис. 2.4

2. Опори умовно відкидаємо і замінюємо їх дію опорними реакціями. У перерізі В, закріпленому шарнірно-нерухомою опорою, реакцію замінюємо вертикальною і горизонтальною складовими. У перерізі С, закріпленому шарнірно-рухомою опорою, реакція направлена перпендикулярно опорній площині (рис. 2.4).

Реакції опор визначаємо з рівнянь рівноваги стержня. При цьому доцільно складати рівняння, в які входить лише одна невідома реакція. У даному випадку це має такий вигляд:

$$\sum F_x = 0; \quad H_B = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 + 1 \right) = M + P \cdot 1 + R_B \cdot 6 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4,5 - 9 - 15}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + M = P \cdot 5 + R_C \cdot 6 \Rightarrow$$

$$R_C = \frac{4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 9 - 15 \cdot 5}{6} = \frac{-48}{6} = -8 \text{ кН}.$$

Знак " - " вказує на те, що в дійсності напрямок реакції R_C є протилежним до попередньо обраного. На рис. 2.4 напрямок реакції R_C змінюємо на протилежний і в подальшому вважаємо її додатною.

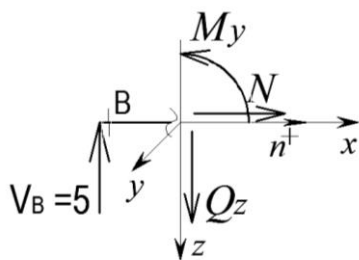
Перевірка:

$$\sum F_z = 0 \quad q \cdot 3 - P - R_B - R_C = 4 \cdot 3 - 15 - 5 - (-8) = 20 - 20 = 0.$$

3. Позначаємо характерні перерізи ($B - E$) вздовж осі стержня (рис. 2.4).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня:

а)



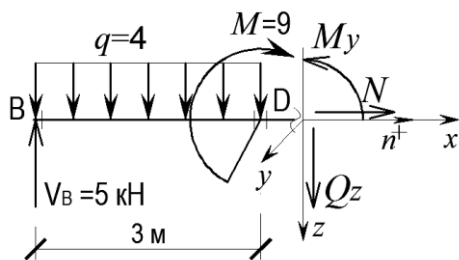
$$\sum F_x = 0 \quad N_B = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \quad -V_B + Q_B = 0;$$

$$Q_1 = V_B = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_y = 0 \quad M_B = 0.$$

б)



$$\sum F_x = 0 \quad N_D = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \quad -V_B + q \cdot 3 + Q_D = 0;$$

$$Q_D = V_B - q \cdot 3 = 5 - 4 \cdot 3 = -7 \text{ кН};$$

$$\sum M_y = 0 \quad V_B \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - M_D = 0;$$

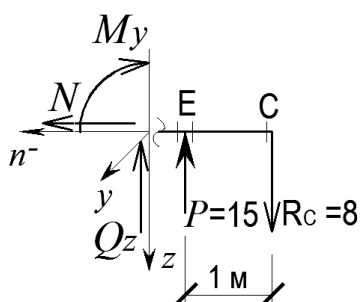
$$M_D = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = -3 \text{ кНм}.$$

Оскільки поперечна сила в межах ділянки $B - D$ змінює знак, необхідно визначити координату перерізу, в якому $Q(x) = 0$, а згинальний момент набуває екстремального значення:

$$Q(x_{ext}) = 5 - 4 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{ext} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ м};$$

$$M_{ext} = 5 \cdot 1,25 - 2 \cdot 1,25^2 = 3,125 \text{ кНм}.$$

в)



$$\sum F_x = 0 \quad N_E = 0;$$

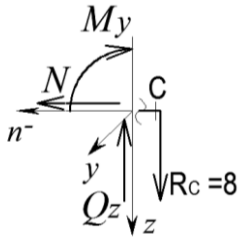
$$\sum F_z = 0 \quad R_C - P - Q_E^{ліб} = 0;$$

$$Q_E^{ліб} = R_C - P = 8 - 15 = -7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_y = 0; \quad -R_C \cdot 1 - M_E = 0;$$

$$M_E = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кНм}.$$

г)



$$\sum F_x = 0 \quad N_C = 0;$$

$$\sum F_z = 0 \quad R_C - Q_C = 0;$$

$$Q_C = R_C = 8 \text{ кН.}$$

$$\sum M_y = 0 \quad M_C = 0.$$

5. За визначеними ординатами будуюмо епюри (див. рис. 2.4).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) на ділянці $B - D$ $q = const$, отже, тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q постійний і дорівнює q , тобто еюра обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази; оскільки Q змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M , то еюра M у межах цієї ділянки обмежена квадратною параболою;

2) на ділянках $D - E$ та $E - C$ $q = 0$, тому тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0 і еюра Q на цих ділянках обмежена відрізками прямих, паралельних бази ($Q = const$); оскільки $Q = const$, еюра M у межах цих ділянок обмежена відрізками прямих, нахилених до бази;

3) перевіряємо перерізи в точках прикладення зосередженого навантаження. У цих точках епюри мають стрибок, абсолютна величина якого дорівнює величині зосередженого навантаження:

$$Q_E^{np} - Q_E^{ліє} = 8 - (-7) = 15 = P;$$

$$M_D^{np} - M_D^{ліє} = 6 - (-3) = 9 = M.$$

ПРИКЛАД 2.3

Шарнірно-консольний стержень

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.5).

2. Опори умовно відкидаємо і заміняємо їх дію опорними реакціями. У перерізі „В”, закріпленому шарнірно-рухомою опорою, реакція направлена перпендикулярно опорній площині, а в перерізі „С”, закріпленому шарнірно-нерухомою опорою, реакцію заміняємо вертикальною і горизонтальною складовими (рис. 2.5).

Реакції опор визначаємо з рівнянь рівноваги стержня:

$$\sum F_x = 0; \quad H_C = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad q \cdot (2+4) \cdot \frac{(2+4)}{2} = M + P \cdot (2+2+4) + R_B \cdot (2+4) \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3 - 15 - 10 \cdot 8}{6} = \frac{49}{6} = 8,17 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot (2+4) \cdot \frac{(2+4)}{2} + M + P \cdot 2 = V_C \cdot 6 \Rightarrow$$

$$V_C = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3 + 15 + 10 \cdot 2}{6} = \frac{179}{6} = 29,83 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_z = 0; \quad q \cdot (2+4) - P - R_B - V_C = 0;$$

$$8 \cdot 6 - 10 - 8,17 - 29,83 = 48 - 48 = 0.$$

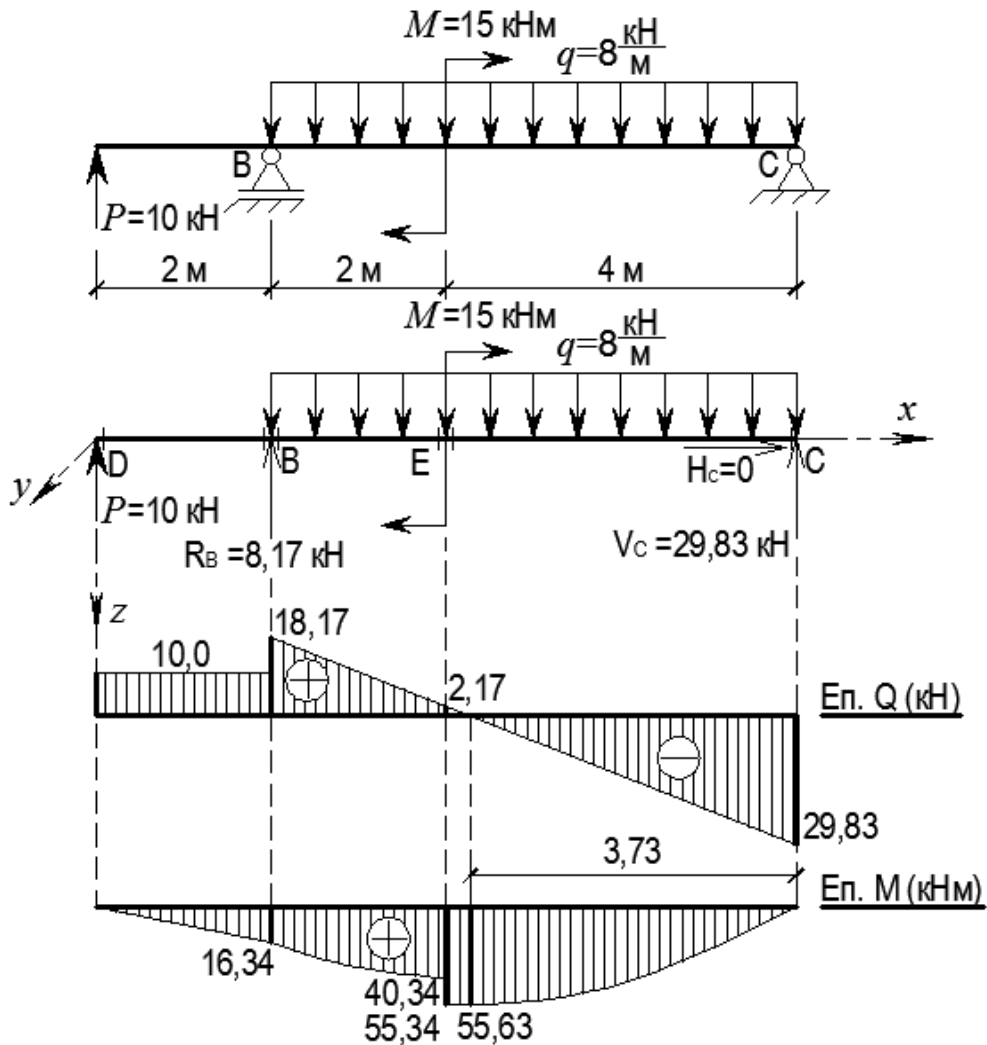


Рис. 2.5

3. Позначаємо характерні перерізи (В – Е) вздовж осі стержня (рис. 2.5).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених перерізах стержня:

а) поперечна сила:

$$Q_D = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_B^{лів} = Q_D = 10 \text{ кН};$$

$$Q_B^{пра} = Q_B^{лів} + R_B = 10 + 8,17 = 18,17 \text{ кН};$$

$$Q_E = Q_B^{пра} - q \cdot 2 = 18,17 - 8 \cdot 2 = 2,17 \text{ кН};$$

$$Q_C = -V_C = -29,83 \text{ кН}.$$

б) згинальний момент:

$$M_D = 0;$$

$$M_B = P \cdot 2 = 16,34 \text{ кНм};$$

$$M_E^{лів} = P \cdot (2 + 2) - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 10 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = 40,34;$$

$$M_E^{пра} = M_E^{лів} + M = 40,34 + 15 = 55,34 \text{ кНм};$$

$$M_C = 0.$$

Оскільки поперечна сила в межах ділянки $E - C$ змінює знак, необхідно визначити координату перерізу, в якому $Q(x) = 0$, а згинальний момент набуває екстремального значення:

$$Q(x_{ext}) = -V_C + q \cdot x = -29,83 + 8 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{ext} = \frac{29,83}{8} = 3,73 \text{ м};$$

$$M_{ext} = V_C \cdot 3,73 - q \cdot 3,73 \cdot \frac{3,73}{2} = 55,63 \text{ кНм}.$$

5. За визначеними ординатами будуємо епюри (рис. 2.5).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) на ділянці $D - B$ розподілене навантаження відсутнє ($q = 0$), тому тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0 і епюра Q обмежена відрізком прямої, паралельної базі ($Q = const$); оскільки $Q = const$, епюра M у межах цієї ділянки обмежена відрізком прямої;

2) на ділянках $B - E$ та $E - C$ $q = const$, отже тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q постійний і дорівнює q , тобто епюра обмежена відрізками прямих, нахилених до бази; оскільки Q змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M , то епюра M у межах цих ділянок обмежена квадратною параболою;

3) перевіряємо перерізи в точках прикладення зосередженого навантаження. У цих точках епюри мають стрибок, абсолютна величина якого дорівнює величині зосередженого навантаження:

$$Q_D^{np} - Q_D^{лів} = 10 - 0 = 10 = P;$$

$$Q_B^{np} - Q_B^{лів} = 18,75 - 10 = 8,75 = R_B;$$

$$Q_D^{np} - Q_D^{лів} = 0 - (-29,83) = 29,83 = V_D;$$

$$M_D^{np} - M_D^{лів} = 55,34 - 40,34 = 15 = M.$$

ПРИКЛАД 2.4

Горизонтальний консольний стержень

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.6).

2. Опорні реакції в защемленні не визначаємо, а внутрішні зусилля визначаємо з умов рівноваги частини стержня з боку вільного краю.

Прикладені під кутом до осі стержня зосереджені сили розкладаємо на складові, проєктуючи їх на вісь стержня (вісь x) та на перпендикуляр до осі (вісь z):

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 30^\circ = 15 \cdot \cos 30^\circ = 13 \text{ кН};$$

$$P_{1z} = P_1 \cdot \sin 30^\circ = 15 \cdot \sin 30^\circ = 7,5 \text{ кН};$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ кН};$$

$$P_{2z} = P_2 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \cos 30^\circ = 17,3 \text{ кН}.$$

3. Позначаємо характерні перерізи (1 – 4) вздовж осі стержня (рис. 2.6).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня:

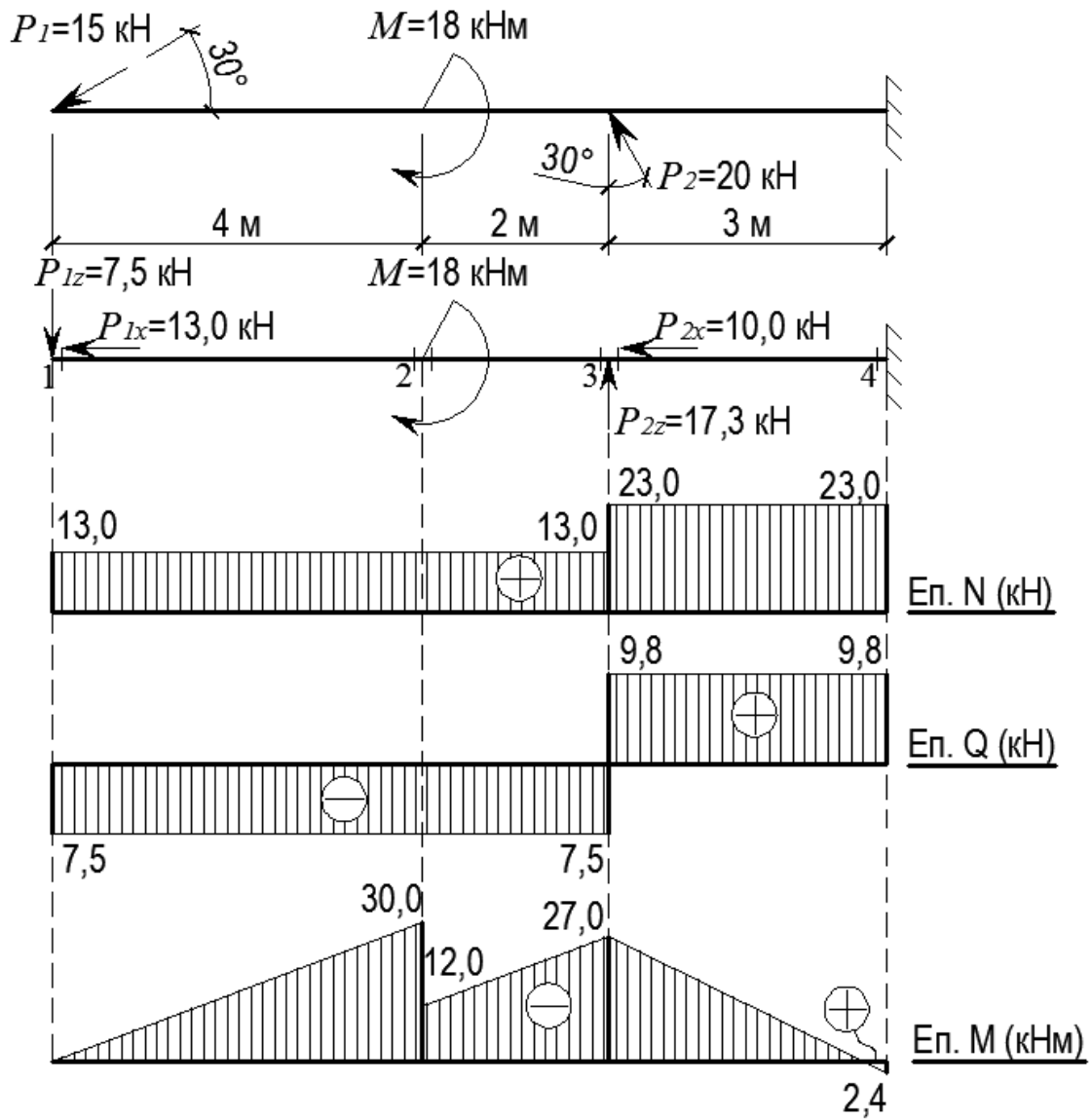


Рис. 2.6

а) поздовжня сила:

$$N_1 = P_{1x} = 13 \text{ кН};$$

$$N_2 = N_1 = 13 \text{ кН};$$

$$N_3^{лив} = N_1 = 13 \text{ кН};$$

$$N_3^{np} = N_3^{лив} + P_{2x} = 13 + 10 = 23 \text{ кН};$$

$$N_4 = N_3^{np} = 23 \text{ кН};$$

б) поперечна сила:

$$Q_1 = -P_{1z} = -7,5 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_1 = -7,5 \text{ кН};$$

$$Q_3^{лів} = Q_2 = -7,5 \text{ кН};$$

$$Q_3^{np} = Q_3^{лів} + P_2 = -7,5 + 17,3 = 9,8 \text{ кН};$$

$$Q_3^{np} = Q_4 = 9,8 \text{ кН};$$

в) згинальний момент:

$$M_1 = 0;$$

$$M_2^{лів} = -P_{1z} \cdot 4 = -7,5 \cdot 4 = -30 \text{ кНм};$$

$$M_2^{np} = M_2^{лів} + M = -30 + 18 = -12 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -P_{1z} \cdot 6 + M = -7,5 \cdot 6 + 18 = -27 \text{ кНм};$$

$$M_4 = -P_{1z} \cdot 9 + M + P_{2z} \cdot 3 = -7,5 \cdot 9 + 18 + 17,3 \cdot 3 = 2,4 \text{ кНм}.$$

5. За визначеними ординатами будуємо епюри (рис. 2.6).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) розподілене навантаження на стержень відсутнє ($q = 0$), тому тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0 і епюра Q по всій довжині стержня обмежена відрізками прямих, паралельних базі ($Q = const$); оскільки $Q = const$, епюра M обмежена відрізками прямих;

2) перевіряємо перерізи в точках прикладення зосередженого навантаження. В цих точках епюри мають стрибок, абсолютна величина якого дорівнює величині зосередженого навантаження:

$$\left| Q_1^{np} - Q_1^{лів} \right| = \left| -7,5 - 0 \right| = 7,5 = P_{1z};$$

$$\left| Q_3^{np} - Q_3^{лів} \right| = \left| 9,8 - (-7,5) \right| = 17,3 = P_{2z};$$

$$\left| M_2^{np} - M_2^{лів} \right| = \left| -12 - (-30) \right| = 18 = M.$$

ПРИКЛАД 2.5

Стержень на трьох шарнірних опорах

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.7).

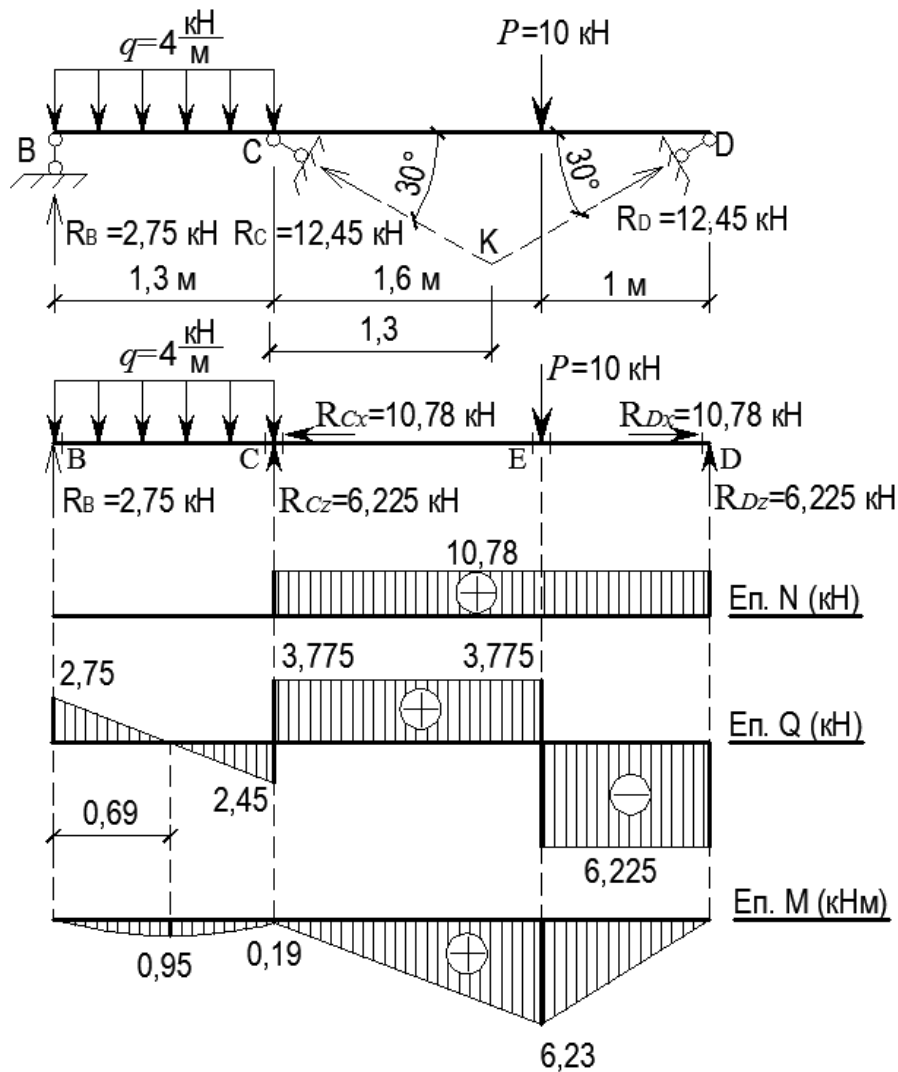


Рис. 2.7

2. Опори умовно відкидаємо і заміняємо їх дію опорними реакціями. Перерізи B , C , D закріплені шарнірно-рухомими опорами, реакції в яких направлені перпендикулярно опорним площинам (рис. 2.7).

Реакції опор визначаємо з рівнянь рівноваги стержня. У даному випадку рівняння мають такий вигляд:

$$\sum F_x = 0 \quad R_C \cdot \cos 30^\circ = R_D \cdot \cos 30^\circ;$$

$$\sum M_K = 0 \quad R_B \cdot (1,3 + 1,3) + P \cdot (1,6 - 1,3) = q \cdot 1,3 \cdot \left(1,3 + \frac{1,3}{2}\right);$$

$$R_B = 2,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$R_B \cdot (1,3 + 1,6 + 1) + R_C \cdot \sin 30^\circ \cdot (1,6 + 1) = q \cdot 1,3 \cdot \left(\frac{1,3}{2} + 1,6 + 1\right) + P \cdot 1;$$

$$R_C = 12,45 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum F_z = 0; \quad R_B + R_C \cdot \sin 30^\circ + R_D \cdot \sin 30^\circ = q \cdot 1,3 + P$$

$$2,75 + 12,45 \cdot \sin 30^\circ + 12,45 \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot 1,3 + 10 \Rightarrow 15,2 - 15,2 = 0.$$

Прикладені під кутом до осі стержня опорні реакції розкладаємо на складові, проектуючи їх на вісь стержня (вісь x) та на перпендикуляр до осі (вісь z):

$$R_{Cx} = R_{Dx} = R_C \cdot \cos 30^\circ = 12,45 \cdot \cos 30^\circ = 10,78 \text{ кН};$$

$$R_{Cz} = R_{Dz} = R_C \cdot \sin 30^\circ = 12,45 \cdot \sin 30^\circ = 6,225 \text{ кН.}$$

3. Позначаємо характерні перерізи (В – Е) вздовж осі стержня (рис. 2.7).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених перерізах стержня:

а) поздовжня сила:

$$N_B = 0;$$

$$N_C^{лів} = N_B = 0;$$

$$N_C^{np} = R_{Cx} = 10,78 \text{ кН};$$

$$N_E = N_C^{np} = 10,78 \text{ кН};$$

$$N_D^{лів} = N_E = 10,78 \text{ кН};$$

$$N_D^{np} = N_D^{лів} - R_{Dx} = 10,78 - 10,78 = 0.$$

б) поперечна сила:

$$Q_B = R_B = 2,75 \text{ кН};$$

$$Q_C^{лів} = Q_B - q \cdot 1,3 = 2,75 - 4 \cdot 1,3 = -2,45 \text{ кН};$$

$$Q_C^{np} = Q_C^{лів} + R_{Cz} = -2,45 + 6,225 = 3,775 \text{ кН};$$

$$Q_E^{лів} = Q_C^{np} = 3,775 \text{ кН};$$

$$Q_E^{np} = Q_E^{лів} - P = 3,775 - 10 = 6,225 \text{ кН};$$

$$Q_D^{лів} = N_E^{np} = 6,225 \text{ кН};$$

$$Q_D^{np} = Q_D^{лів} - R_{Dz} = 6,225 - 6,225 = 0.$$

в) згинальний момент:

Оскільки поперечна сила в межах ділянки $B - C$ змінює знак, необхідно визначити координату перерізу, в якому $Q(x) = 0$, а згинальний момент набуває екстремального значення:

$$Q(x_{ext}) = 2,75 - 4 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{ext} = \frac{2,75}{4} = 0,69 \text{ м};$$

$$M_{ext} = 2,75 \cdot 0,69 - 4 \cdot 0,69 \cdot \frac{0,69}{2} = 0,95 \text{ кНм};$$

$$M_B = 0;$$

$$M_C = R_B \cdot 1,3 - q \cdot 1,3 \cdot \frac{1,3}{2} = 2,75 \cdot 1,3 - 4 \cdot \frac{1,3^2}{2} = 0,19 \text{ кНм};$$

$$M_D = 0;$$

$$M_E = R_{Dz} \cdot 1 = 6,225 \text{ кНм}.$$

5. За визначеними ординатами будуюмо епюри (див. рис. 2.7).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) на ділянці $B - C$ $q = const$, отже тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q постійний і дорівнює q , тобто епюра обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази; оскільки Q змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M , то епюра M у межах цієї ділянки обмежена квадратною параболою;

2) на ділянці $C - D$ $q = 0$, тому тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0 і епюра Q обмежена відрізками прямих, паралельних базі ($Q = const$); оскільки $Q = const$, епюра M у межах цих ділянок обмежена відрізками прямих;

3) перевіряємо перерізи в точках прикладення зосередженого навантаження. У цих точках епюри мають стрибок, абсолютна величина якого дорівнює величині зосередженого навантаження:

$$|Q_B^{np} - Q_B^{ліє}| = |2,75 - 0| = 2,75 = R_B;$$

$$|Q_C^{np} - Q_C^{ліє}| = |3,775 - (-2,45)| = 6,225 = R_{Cz};$$

$$|Q_E^{np} - Q_E^{ліє}| = |-6,225 - 3,775| = 10 = P;$$

$$|Q_D^{np} - Q_D^{ліє}| = |0 - (-6,225)| = 6,225 = R_{Dz}.$$

ПРИКЛАД 2.6

Шарнірно-консольний стержень з проміжним шарніром

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.8).

2. Оскільки шарнірне з'єднання дозволяє частинам стержня вільно повертатись одна відносно одної, момент у шарнірі (переріз С) рівний нулю. З цієї умови можна визначити опорну реакцію в шарнірно-рухомій опорі D, склавши суму моментів відносно точки С усіх сил з правого боку від С:

$$\sum M_C^{i\delta} = 0; \quad R_D \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = P \cdot 5 \Rightarrow$$

$$R_D = \frac{13 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 2,5}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ кН}.$$

Реакції в защемленні можна не визначати, а внутрішні зусилля визначати з умов рівноваги правої відсіченої частини стержня.

3. Позначаємо характерні перерізи (B – F) вздовж осі стержня (рис. 2.8).

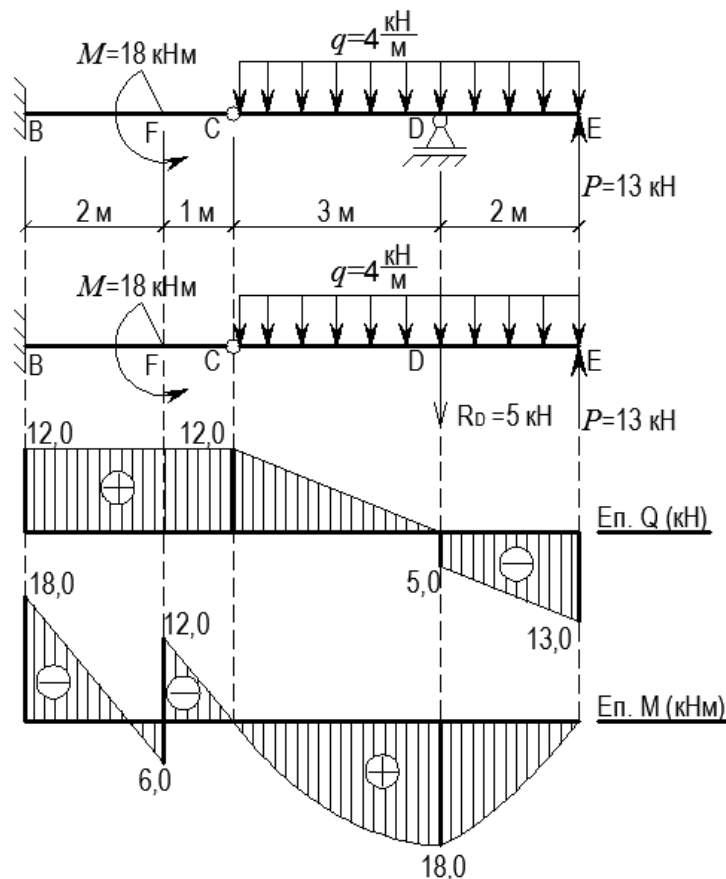


Рис. 2.8

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня:

а) поперечна сила:

$$Q_E = -P = -13 \text{ кН};$$

$$Q_D^{np} = -P + q \cdot 2 = -13 + 4 \cdot 2 = -5 \text{ кН},$$

$$Q_D^{лів} = Q_D^{np} + R_D = -5 + 5 = 0;$$

$$Q_C = Q_D^{лів} + q \cdot 3 = 0 + 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН};$$

$$Q_F = Q_B = Q_C = 12 \text{ кН}.$$

б) згинальний момент:

$$M_E = 0;$$

$$M_D = P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 13 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кНм};$$

$$M_C = P \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} - R_D \cdot 3 = 13 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 5 \cdot 3 = 0;$$

$$M_F^{np} = P \cdot 6 - q \cdot 5 \cdot \left(\frac{5}{2} + 1 \right) - R_D \cdot 4 = 13 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \cdot 3,5 - 5 \cdot 4 = -12 \text{ кНм};$$

$$M_F^{лів} = M_F^{np} + M = -12 + 18 = 6 \text{ кНм};$$

$$M_B = P \cdot 8 - q \cdot 5 \cdot \left(\frac{5}{2} + 3 \right) - R_D \cdot 6 + M = 13 \cdot 8 - 4 \cdot 5 \cdot 5,5 - 5 \cdot 6 + 18 = -18.$$

5. За визначеними ординатами будуємо епюри (рис. 2.8).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) на ділянці $C - E$ $q = const$, отже постійний тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q і епюра обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази. У точках D та E прикладені зосереджені сили, яким відповідає стрибок на епюрі Q :

$$\left| Q_E^{np} - Q_E^{лів} \right| = |0 - (-13)| = 13 = P;$$

$$\left| Q_D^{np} - Q_D^{лів} \right| = |-5 - 0| = 5 = R_D.$$

На ділянці $B - C$ $q = 0$, тобто епюра Q обмежена відрізком прямої, паралельної бази ($Q = const$);

2) на ділянці $C - E$ Q змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M . Епюра M у межах цієї ділянки обмежена квадратною параболою. На ділянці $B - C$ $Q = const$ і епюра M обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази. У точці F на балку діє зосереджений момент, якому відповідає стрибок на епюрі M :

$$\left| M_F^{np} - M_F^{лів} \right| = |-12 - 6| = 18 = M.$$

ПРИКЛАД 2.7

Горизонтальний стержень з проміжним шарніром

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.9).

2. Дві частини стержня з'єднані між собою за допомогою шарніра, оперті на три шарнірні опори (рис. 2.9). Шарнірне з'єднання в прольоті стержня дозволяє розділити його в шарнірі на дві частини, кожна з яких потрібно розглядати окремо. При цьому необхідно враховувати, що шарнір забезпечує відсутність взаємного поступального переміщення з'єднаних частин, внаслідок чого в шарнірі виникає реактивна сила, яку розкладаємо на горизонтальну і вертикальну складові (рис. 2.9).

Невідомі опорні реакції визначаємо для кожної з частин окремо. При цьому починати варто з частини $B - C$, для якої невідомими є три реакції, що відповідає кількості рівнянь рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \quad H_C = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_B \cdot 4 = P \cdot 1 \Rightarrow R_B = \frac{10 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad V_C \cdot 4 = P \cdot 3 \Rightarrow V_C = \frac{10 \cdot 3}{4} = 7,5 \text{ кН}.$$

Оскільки реакції в шарнірі C однакові для обох частин балки, знайдені H_C та V_C переносимо на ділянку $C - E$ як відомі, змінюючи їх напрямок на протилежний. Для визначення невідомих H_D , V_D та R_E складаємо рівняння рівноваги для ділянки $C - E$:

$$\sum F_x = 0; \quad H_D = 0;$$

$$\sum M_E = 0; \quad V_D \cdot 2 + V_C \cdot 5 = M + q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{1} + 1 + 2 \right) \Rightarrow$$

$$V_D = \frac{8 + 6 \cdot 2 \cdot 4 - 7,5 \cdot 5}{2} = 9,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_E \cdot 2 + V_C \cdot 3 = M + q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \Rightarrow$$

$$R_E = \frac{8 + 6 \cdot 2 \cdot 2 - 7,5 \cdot 3}{2} = 4,75 \text{ кН}.$$

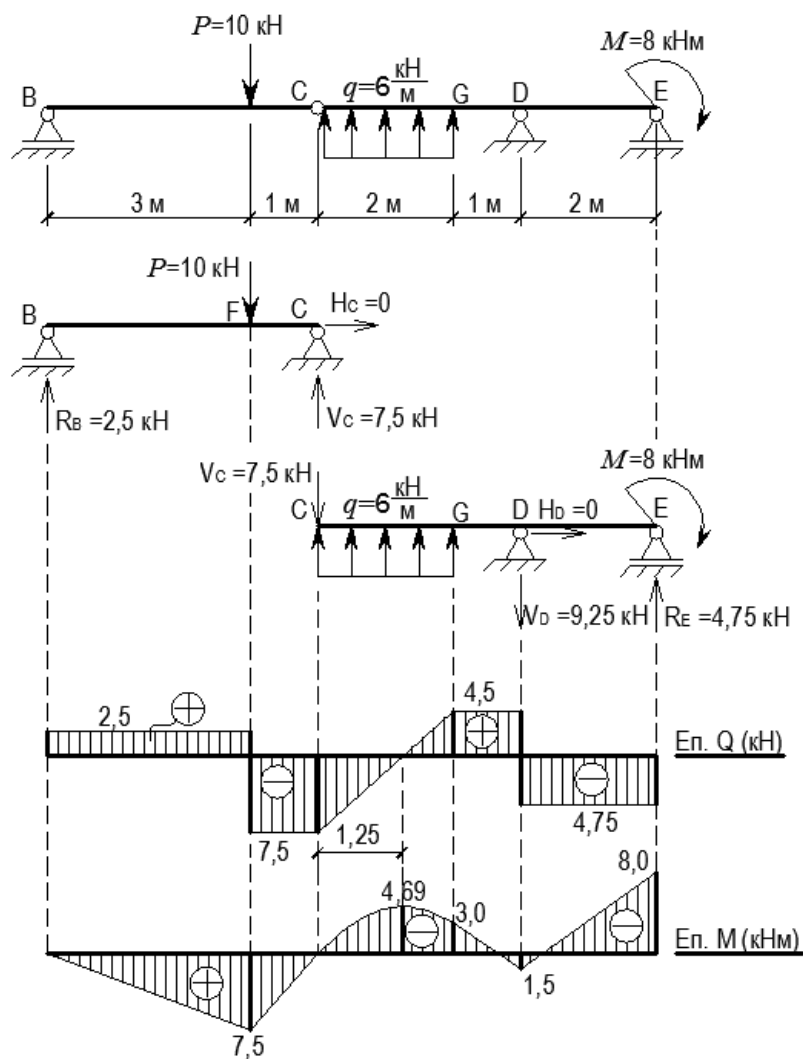


Рис. 2.9

3. Позначаємо характерні перерізи ($B - G$) вздовж осі стержня (рис. 2.9).

4. Обчислюємо величини та визначаємо знаки внутрішніх зусиль у зазначених точках стержня:

а) поперечна сила:

- стержень $B - C$:

$$Q_B = R_B = 2,5 \text{ кН};$$

$$Q_C = -V_C = -7,5 \text{ кН};$$

- стержень $C - E$:

$$Q_C = -V_C = -7,5 \text{ кН};$$

$$Q_G = -V_C + q \cdot 2 = -7,5 + 6 \cdot 2 = 4,5 \text{ кН};$$

$$Q_E = -R_E = -4,75 \text{ кН}.$$

У межах ділянки $C - G$ поперечна сила змінює знак, тому визначаємо координату перерізу, де $Q = 0$. З умови подібності трикутників:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{[Q_C] + [Q_G]}{2} = \frac{Q_C}{x_{ext}} \Rightarrow x_{ext} = \frac{Q_C \cdot 2}{[Q_C] + [Q_G]} = \frac{7,5 \cdot 2}{7,5 + 4,5} = \frac{7,5}{6} = 1,25 \text{ м}$$

б) згинальний момент:

- стержень $B - C$:

$$M_B = M_C = 0;$$

$$M_F = R_B \cdot 3 = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ кНм};$$

- стержень $C - E$:

$$M_C = 0;$$

$$M_{ext} = -V_C \cdot 1,25 + q \cdot 1,25 \cdot \frac{1,25}{2} = -7,5 \cdot 1,25 + 6 \cdot \frac{1,25^2}{2} = -4,69 \text{ кНм};$$

$$M_G = -V_C \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -7,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = -3 \text{ кНм};$$

$$M_D = R_E \cdot 2 - M = 4,75 \cdot 2 - 8 = 1,5 \text{ кНм};$$

$$M_E = -M = -8 \text{ кНм}.$$

5. За визначеними ординатами на основі диференціальних залежностей будуюмо епюри Q та M (рис. 2.9).

6. Правильність побудови епюр перевіряємо за диференціальними залежностями між $q_z(x)$, Q та M :

1) на всіх ділянках, за винятком ділянки $C - G$, рівномірно розподілене навантаження відсутнє ($q = 0$) і, відповідно, тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q також рівний 0. На цих ділянках епюра Q обмежена відрізками прямих, паралельних базі ($Q = const$). Ділянка $C - E$

завантажена рівномірно розподіленим навантаженням ($q = const$), тобто тангенс кута нахилу дотичної до епюри Q теж постійний, а сама епюра обмежена відрізком прямої, нахиленої до бази;

2) у точках прикладення зосереджених сил (R_E, V_D, P, R_B) епюра Q має стрибки, що за абсолютним значенням рівні величині сили:

$$|Q_B^{np} - Q_B^{лів}| = |2,5 - 0| = 2,5 = R_B;$$

$$|Q_F^{np} - Q_F^{лів}| = |-7,5 - 2,5| = 10 = P;$$

$$|Q_D^{np} - Q_D^{лів}| = |-4,75 - 4,5| = 9,25 = V_D;$$

$$|Q_E^{np} - Q_E^{лів}| = |0 - (-4,75)| = 4,75 = R_E.$$

3) на всіх ділянках, за винятком ділянки $C - G$, $Q = const$, відповідно постійним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M (епюра обмежена відрізками прямих). На ділянці $C - G$ поперечна сила змінюється за лінійним законом, тобто змінним є тангенс кута нахилу дотичної до епюри M , тому епюра в межах цієї ділянки обмежена кривою на порядок вище (квадратна парабола).

У точці прикладення зосередженого моменту епюра M має стрибок, що за абсолютним значенням рівний величині моменту:

$$|M_E^{np} - M_E^{лів}| = |0 - (-8)| = 8 = M.$$

ПРИКЛАД 2.8

Плоский консольний ламаний стержень

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.10).

2. Оскільки стержень консольний, опорні реакції в защемленні не визначаємо.

3. Визначаємо характерні перерізи та вузлові точки вздовж осі стержня.

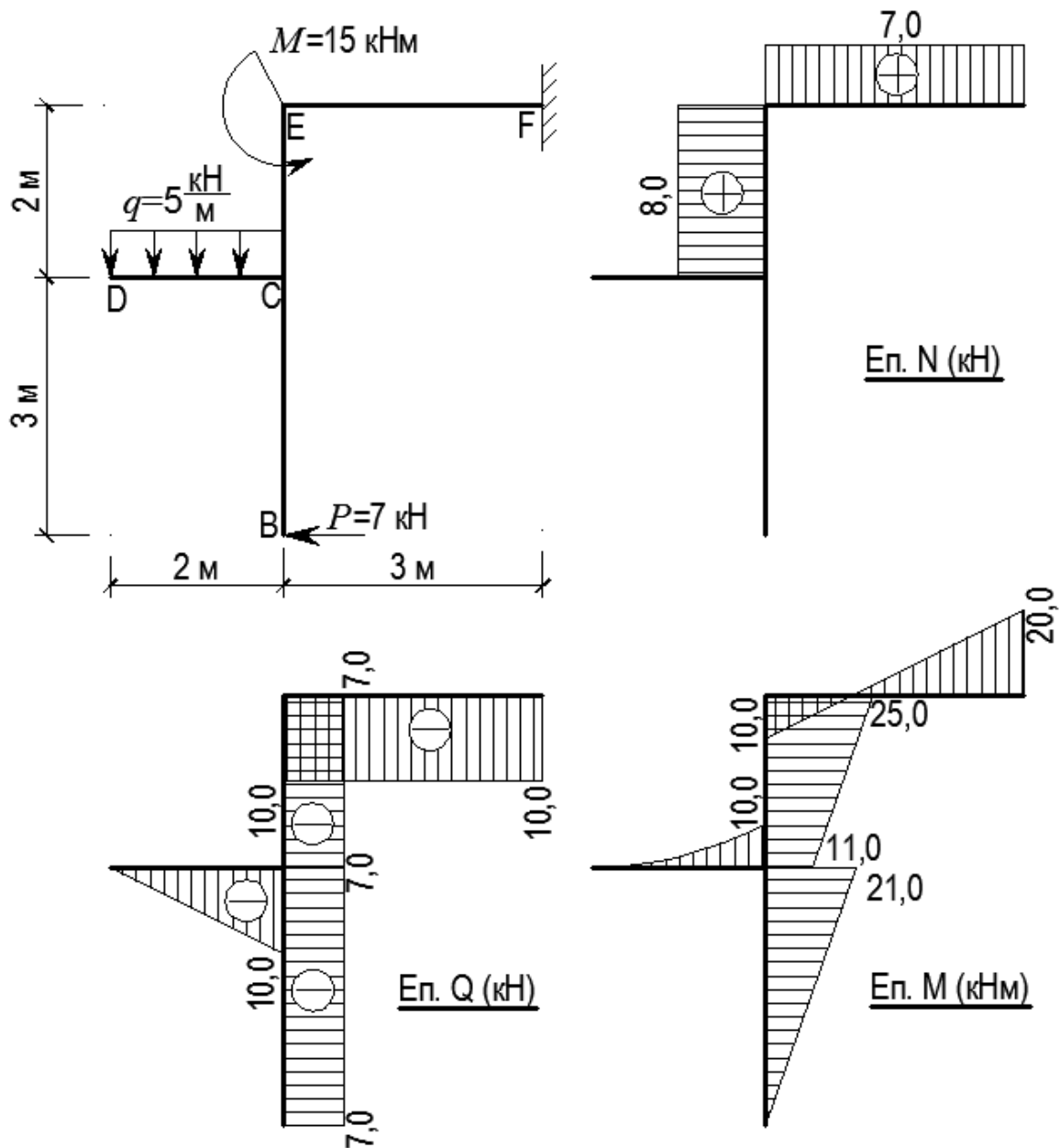


Рис. 2.10

4. Внутрішні зусилля в характерних перерізах визначаємо з умов рівноваги відокремленої частини, розглядаючи частину стержня з боку вільного краю (рис. 2.11).

Ділянка $C - B$ (рис. 2.11 а):

$$N_{C-B} = 0;$$

$$Q_{C-B} = -P = -7 \text{ кН};$$

$$M_{C-B} = P \cdot h_1 = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кНм}.$$

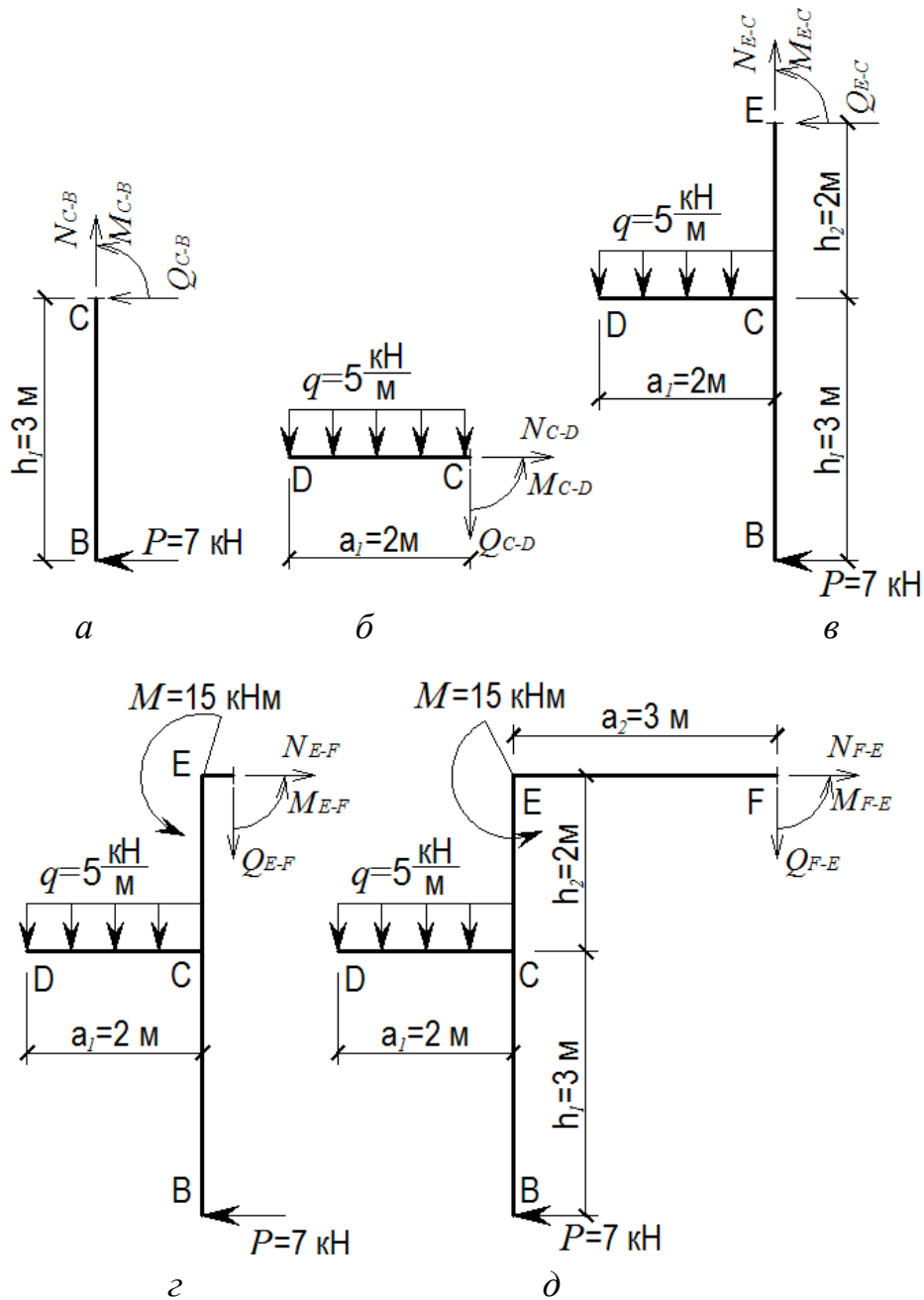


Рис. 2.11

Ділянка $C - D$ (рис. 2.11 б):

$$N_{C-D} = 0;$$

$$Q_{C-D} = -q \cdot a_1 = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{C-D} = -q \cdot a_1 \cdot \frac{a_1}{2} = -5 \cdot \frac{2^2}{2} = -10 \text{ кНм.}$$

Ділянка $E - C$ (рис. 2.11 в):

$$N_{E-C} = q \cdot a_1 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{E-C} = -P = -7 \text{ кН};$$

$$M_{C-E} = P \cdot h_1 - q \cdot a_1 \cdot \frac{a_1}{2} = 21 - 10 = 11 \text{ кНм};$$

$$M_{E-C} = P \cdot (h_1 + h_2) - q \cdot a_1 \cdot \frac{a_1}{2} = 7 \cdot (3 + 2) - 10 = 25 \text{ кНм}.$$

Ділянка $E-F$ (рис. 2.11 з, д):

$$N_{E-F} = P = 7 \text{ кН};$$

$$Q_{E-F} = -q \cdot a_1 = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{E-F} = M_{E-C} - M = 25 - 15 = 10 \text{ кНм};$$

$$M_{F-E} = P \cdot (h_1 + h_2) - q \cdot a_1 \cdot \left(\frac{a_1}{2} + a_2 \right) - M =$$

$$= 7 \cdot (3 + 2) - 5 \cdot 2 \cdot (1 + 3) - 15 = -20 \text{ кНм}.$$

5. За підрахованими значеннями будуємо епюри внутрішніх зусиль. При цьому враховуємо, що ординати епюри згинальних моментів відкладаються з боку розтягнутих волокон (додатні значення моментів відкладаємо вправо та вниз).

6. Для перевірки правильності побудови епюр перевіряємо рівновагу вузлів рами. Для прикладу на рис. 2.12 показано вузол E .

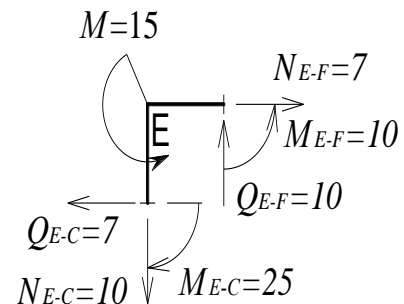


Рис. 2.12

ПРИКЛАД 2.9

Плоский ламаний стержень на двух шарнирных опорах

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.13).

2. Опори умовно відкидаємо і заміняємо їх дію опорними реакціями. У перерізі B , закріпленому шарнірно-нерухомою опорою, реакцію заміняємо вертикальною і горизонтальною складовими, а в перерізі C , закріпленому шарнірно-рухомою опорою, реакція направлена перпендикулярно опорній площині (рис. 2.13).

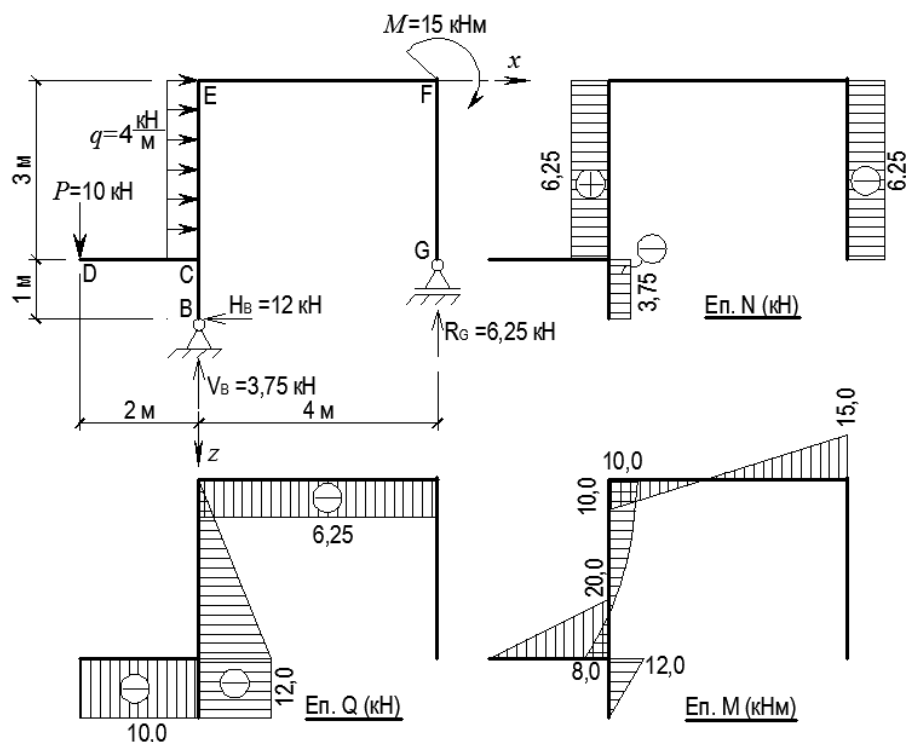


Рис. 2.13

Реакції опор визначаємо з рівнянь рівноваги балки:

$$\sum F_x = 0; \quad H_B = q \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1 \right) + M = P \cdot 2 + R_G \cdot 4 \Rightarrow$$

$$R_G = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2,5 + 15 - 10 \cdot 2}{4} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_G = 0; \quad q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + V_B \cdot 4 + H_B \cdot 1 + M = P \cdot (2 + 4) \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{10 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 - 15}{4} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_z = 0; \quad P = V_B + R_G; \quad 10 = 3,75 + 6,25 \Rightarrow 10 - 10 = 0.$$

3. Визначаємо характерні перерізи та вузлові точки вздовж осі стержня.

4. Внутрішні зусилля в характерних перерізах визначаємо з умов рівноваги відокремленої частини стержня (рис. 2.14):

Ділянка C – B (рис. 2.14 а):

$$N_{C-B} = -V_B = -3,75;$$

$$Q_{C-B} = -H_B = -12 \text{ кН};$$

$$M_{C-B} = H_B \cdot 1 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ кНм}.$$

Ділянка $C-D$ (рис. 2.14 б):

$$N_{C-D} = 0;$$

$$Q_{C-D} = -P = -10 \text{ кН};$$

$$M_{C-D} = -P \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кНм}.$$

Ділянка $E-C$ (рис. 2.14 в):

$$N_{E-C} = -V_B + P = -3,75 + 10 = 6,25 \text{ кН};$$

$$Q_{C-E} = -H_B = -12 \text{ кН}; \quad Q_{E-F} = -R_G = -6,25;$$

$$M_{C-E} = -P \cdot 2 + H_B \cdot 1 = -10 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = -8 \text{ кНм};$$

$$M_{E-C} = -P \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + H_B \cdot (3+1) = -10 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 \cdot 4 = 10.$$

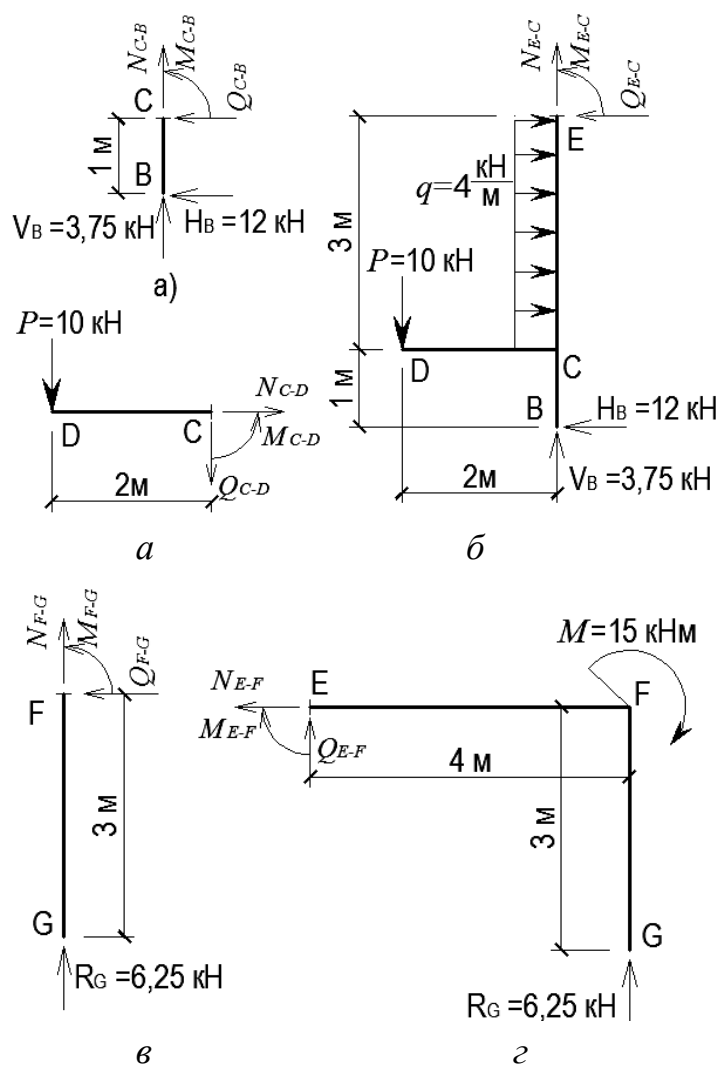


Рис. 2.14

Ділянка $E - F$ (рис. 2.14 з):

$$N_{F-G} = -R_G = -6,25 \text{ кН};$$

$$Q_{F-G} = 0;$$

$$M_{F-G} = 0.$$

Ділянка $E - F$ (рис. 2.14 д):

$$N_{E-F} = 0;$$

$$Q_{E-F} = -R_G = -6,25 \text{ кН};$$

$$M_{E-F} = R_G \cdot 4 - M = 6,25 \cdot 4 - 15 = 10 \text{ кНм};$$

$$M_{F-E} = -M = -15 \text{ кНм}.$$

5. За підрахованими значеннями будуємо епюри внутрішніх зусиль. При цьому враховуємо, що ординати епюри згинальних моментів відкладаються з боку розтягнутих волокон (додатні значення моментів відкладаємо вправо та вниз).

6. Для перевірки правильності побудови епюр перевіряємо рівновагу вузлів рами (рис. 2.15).

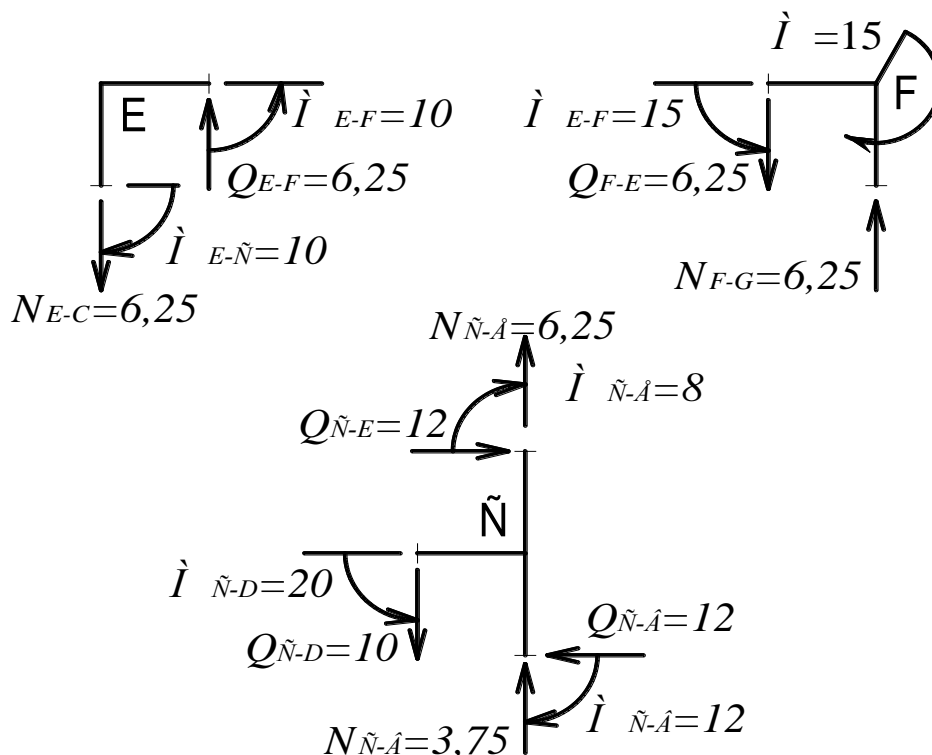


Рис. 2.15

ПРИКЛАД 2.10

Просторовий ламаний стержень

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.16).

2. Оскільки стержень консольний, опорні реакції в защемленні не визначаємо.

3. Визначаємо характерні перерізи та вузлові точки вздовж осі стержня.

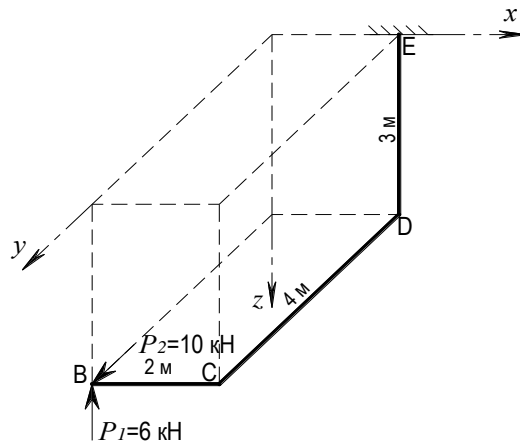


Рис. 2.16

4. Внутрішні зусилля в характерних перерізах визначаємо з умов рівноваги відокремленої частини, розглядаючи частину стержня з боку вільного краю (рис. 2.17).

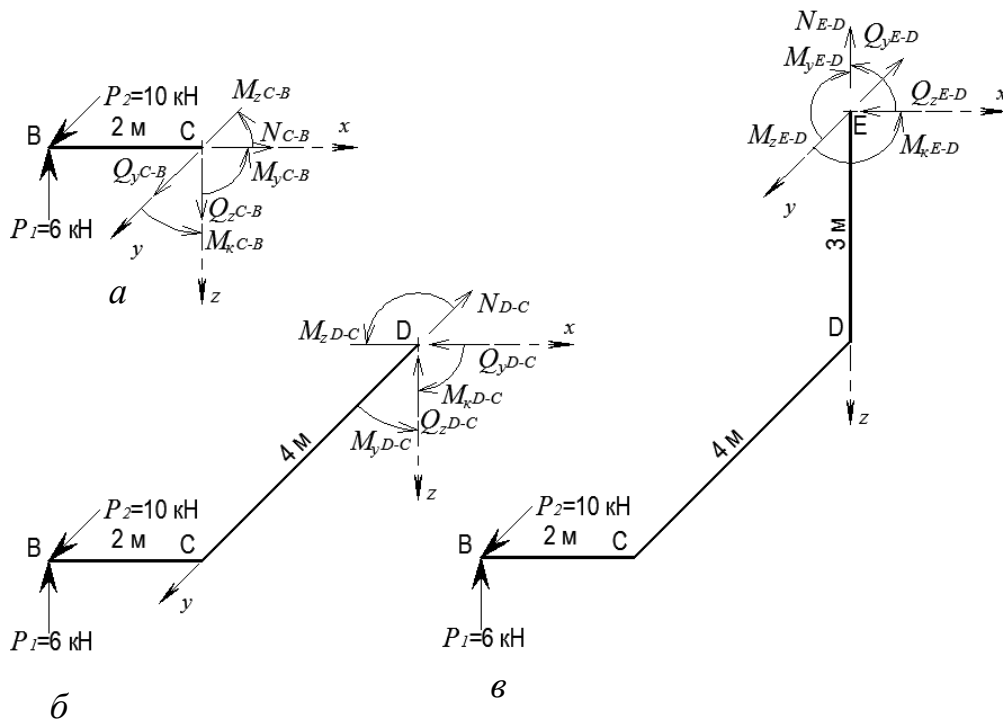


Рис. 2.17

Ділянка $C - B$ (рис. 2.17. а):

$$N_{C-B} = 0;$$

$$Q_{yC-B} = -P_2 = -10 \text{ кН}; \quad Q_{zC-B} = P_1 = 6 \text{ кН};$$

$$M_{\kappa C-B} = 0;$$

$$M_{yB} = 0; \quad M_{yC} = P_1 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм};$$

$$M_{zB} = 0; \quad M_{zC} = -P_2 \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кНм}.$$

Ділянка $D - C$ (рис. 2.17 б):

$$N_{D-C} = P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{yD-C} = 0;$$

$$Q_{zD-C} = P_1 = -6 \text{ кН};$$

$$M_{\kappa D-C} = -P_1 \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм};$$

$$M_{yC} = 0; \quad M_{yD} = P_1 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кНм};$$

$$M_{zD-C} = -P_2 \cdot 2 = -10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм}.$$

Ділянка $E - C$ (рис. 2.17 в):

$$N_{E-D} = -P_1 = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{yE-D} = P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{zE-D} = 0;$$

$$M_{yE-D} = P_1 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм};$$

$$M_{zD} = P_1 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кНм};$$

$$M_{zE} = P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 3 = 6 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 54 \text{ кНм}.$$

5. За підрахованими значеннями ординат будуюмо епюри внутрішніх зусиль (рис. 2.18). При цьому враховуємо, що ординати епюри згинальних моментів відкладаються з боку розтягнутих волокон.

6. Для перевірки правильності побудови епюр перевіряємо рівновагу вузлів рами. Для прикладу на рис. 2.19 показано вузол D.

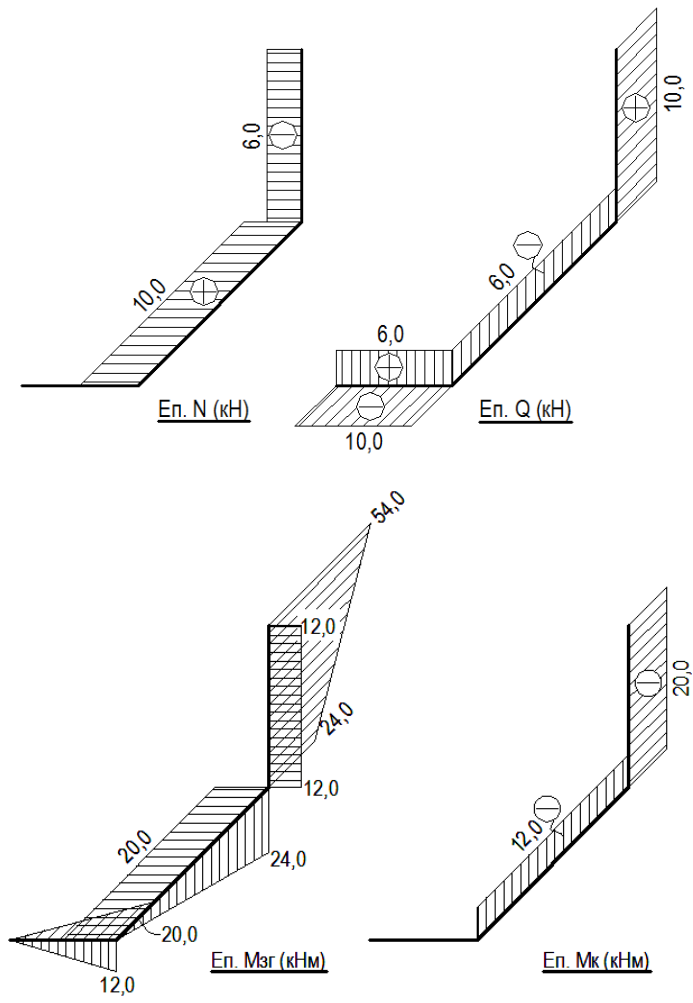


Рис. 2.18

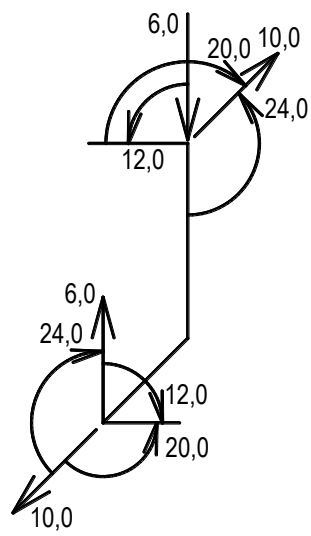
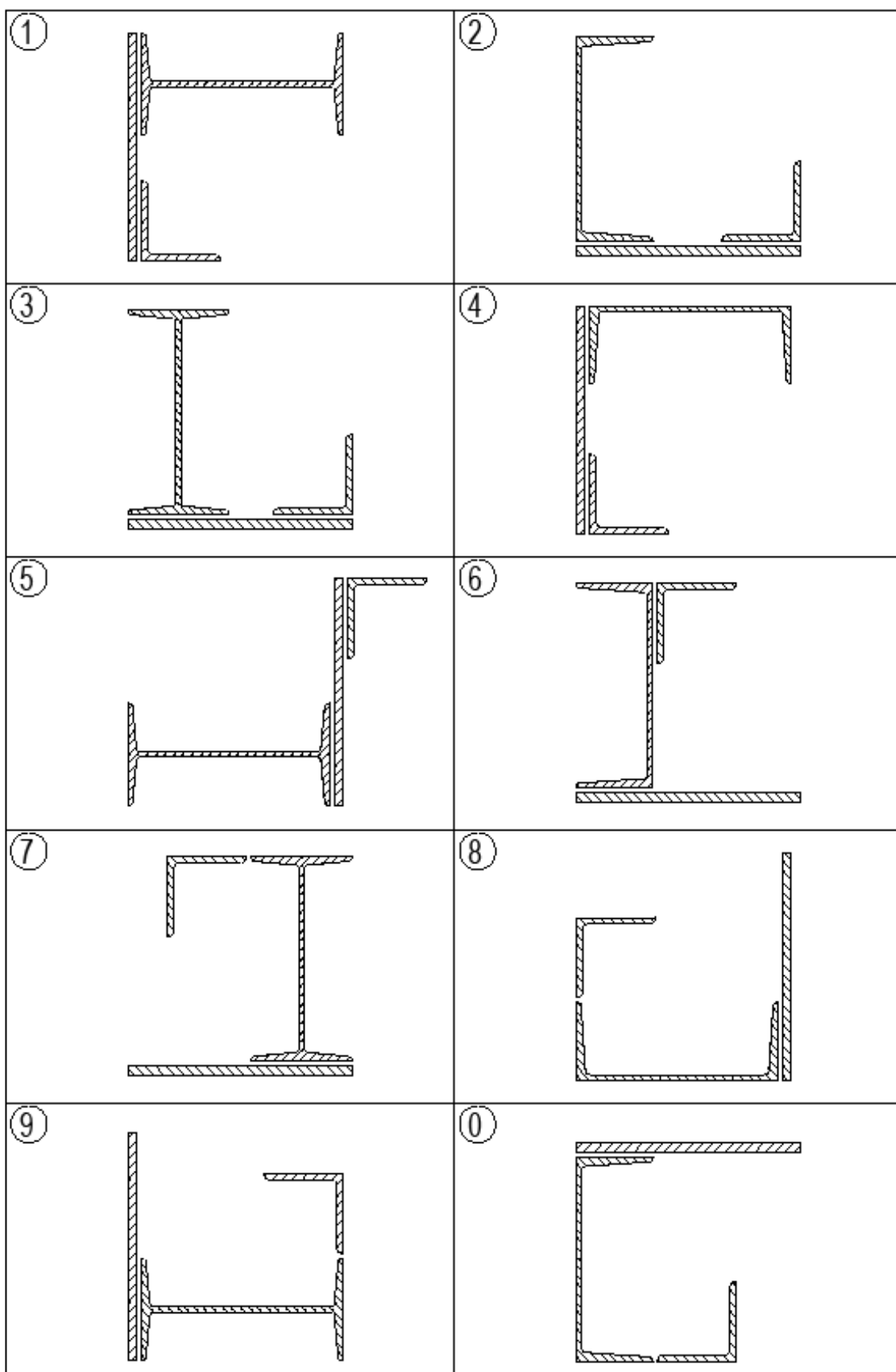


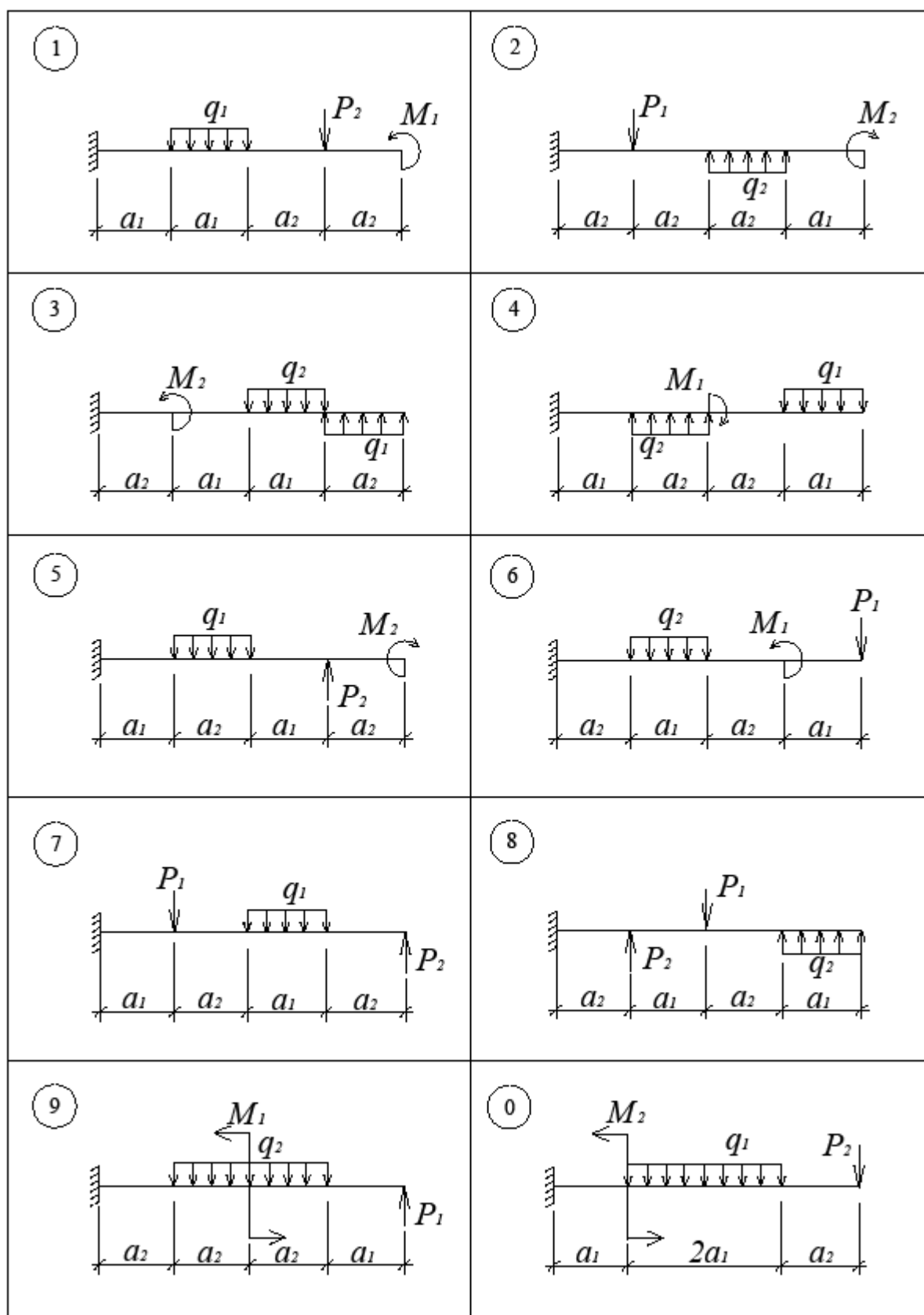
Рис. 2.19

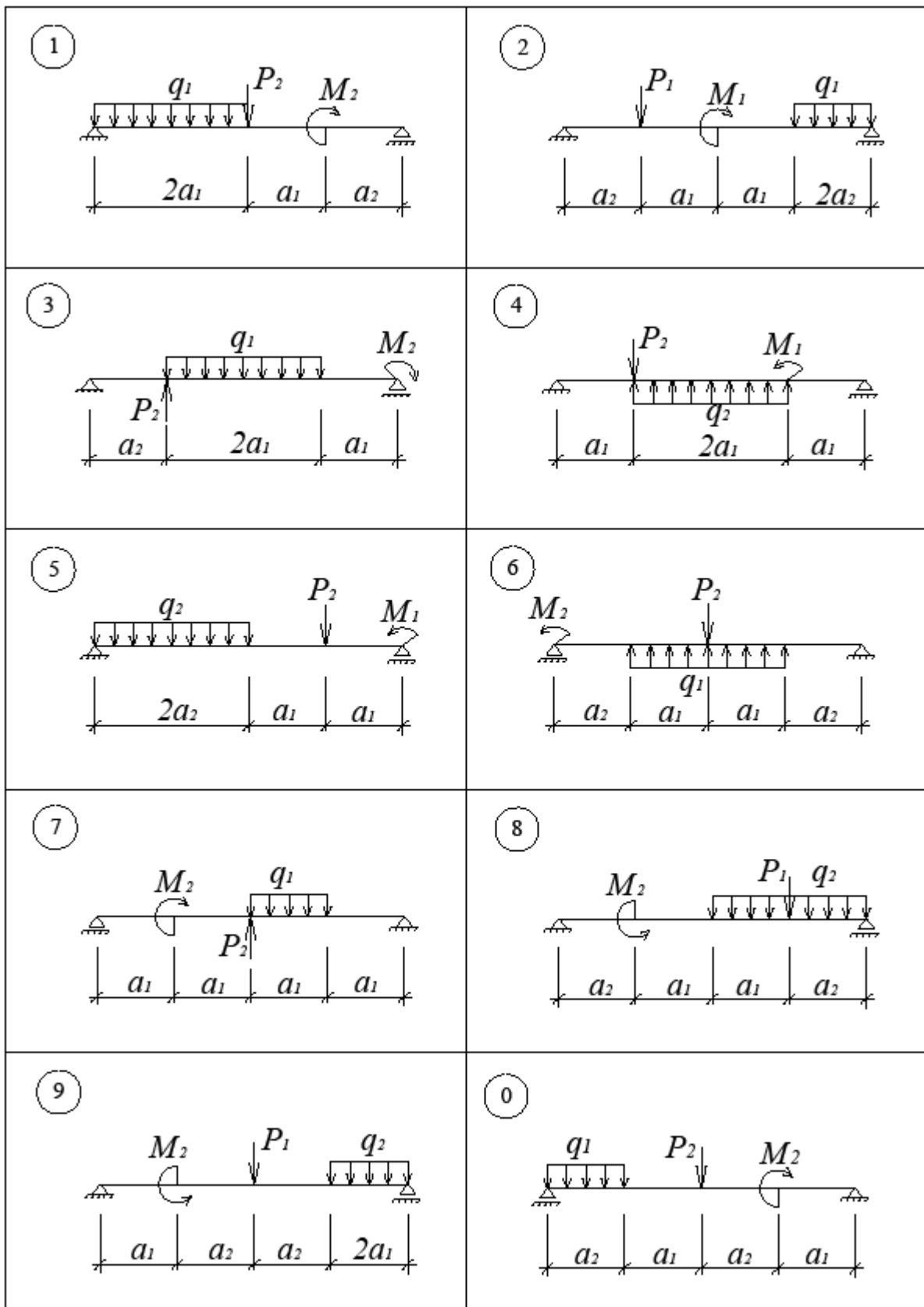


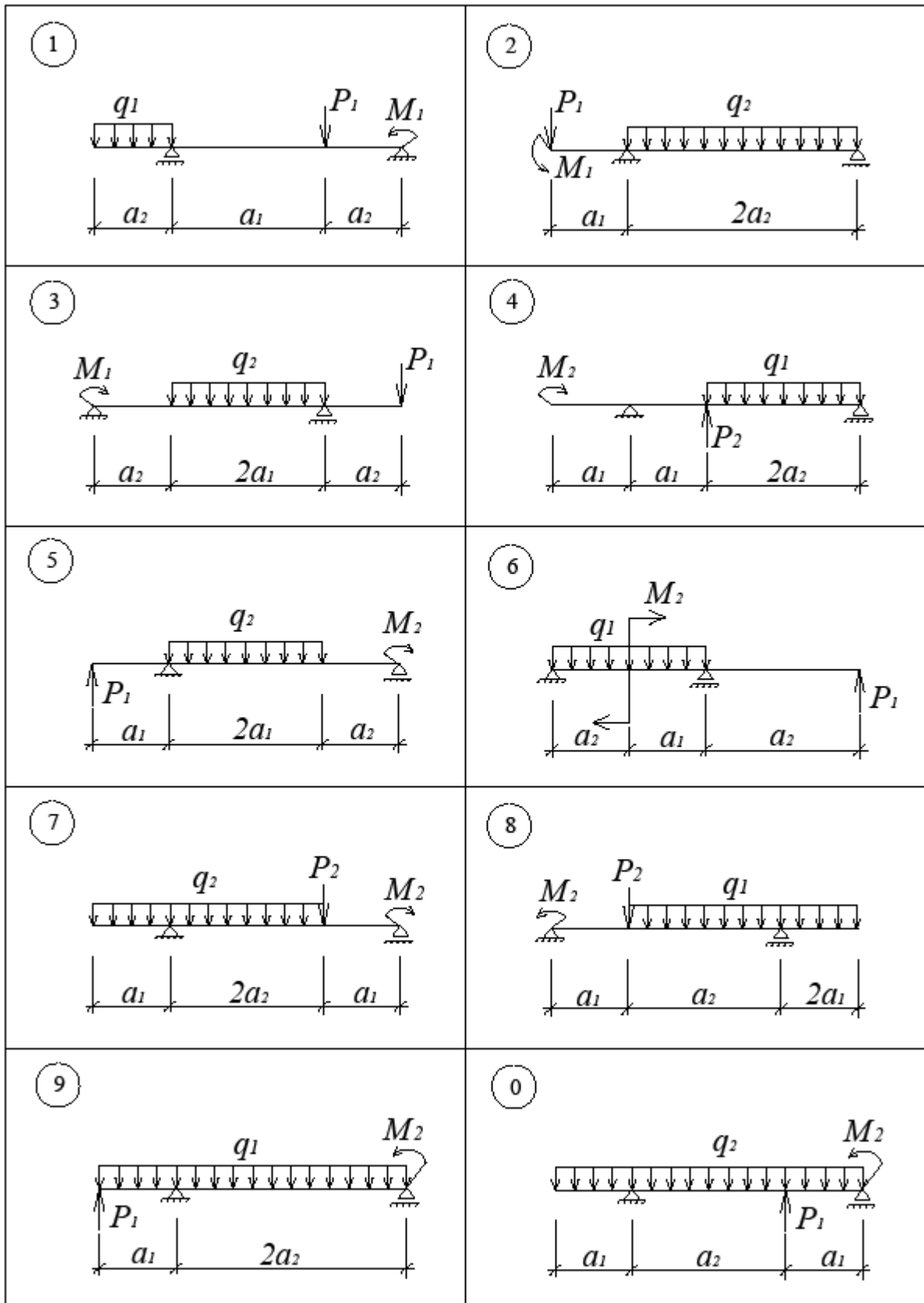
Цифра шифру	Перша цифра шифру		Друга цифра шифру		Третя цифра шифру
	Номер двотавра	Номер швелера	Розміри кутика (мм)	Розміри пластини (мм)	Номер схеми перерізу
1	24	27	90x8	350x6	1
2	30	20	80x5,5	320x8	2
3	22	24	125x16	280x12	3
4	16	22a	100x10	340x10	4
5	36	18	75x8	360x16	5
6	18	22	100x8	260x8	6
7	24a	24a	90x6	280x8	7
8	20	30	110x7	320x14	8
9	22a	20a	100x6	240x10	9
0	27	16	125x12	300x12	0

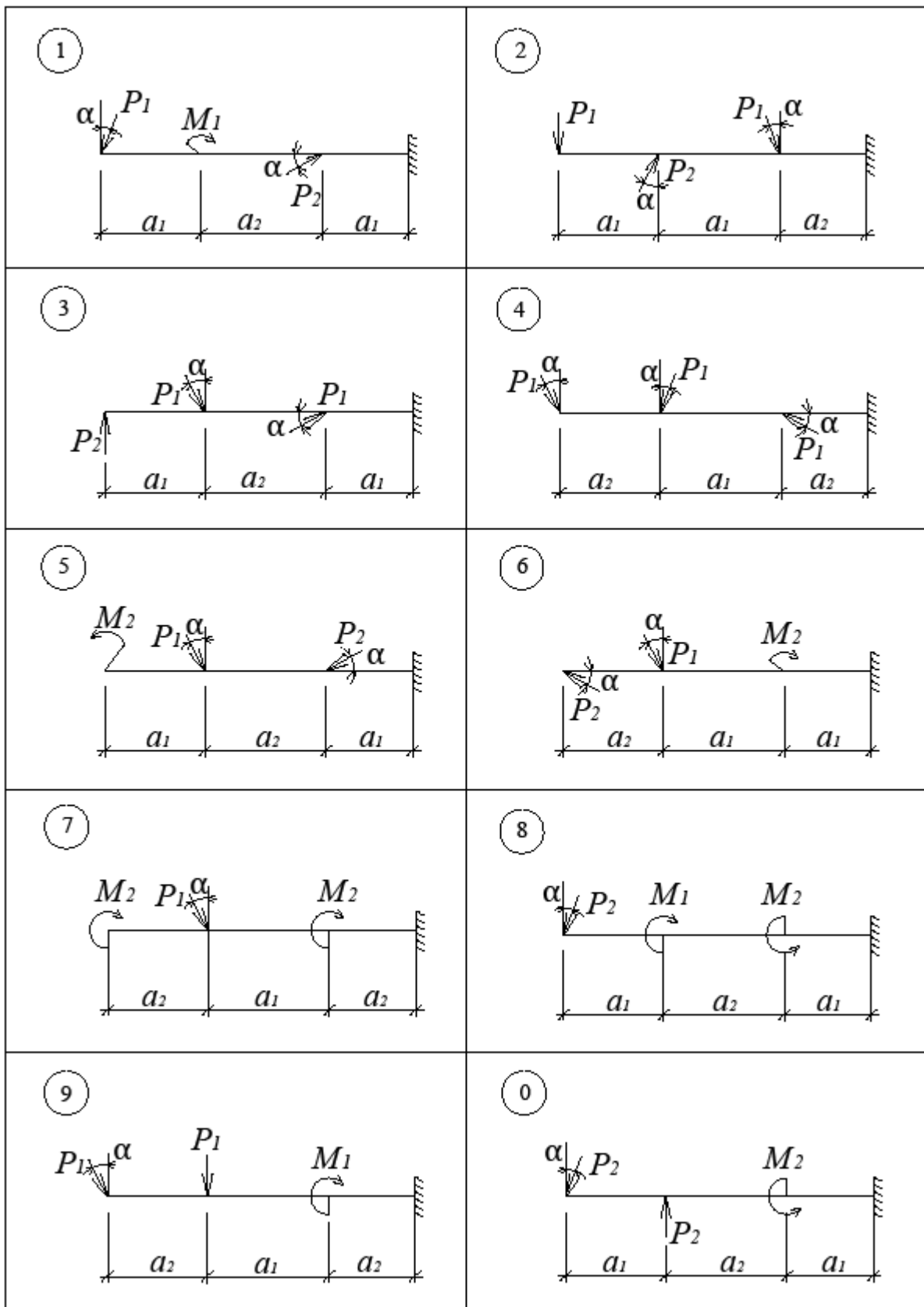
Додаток 2

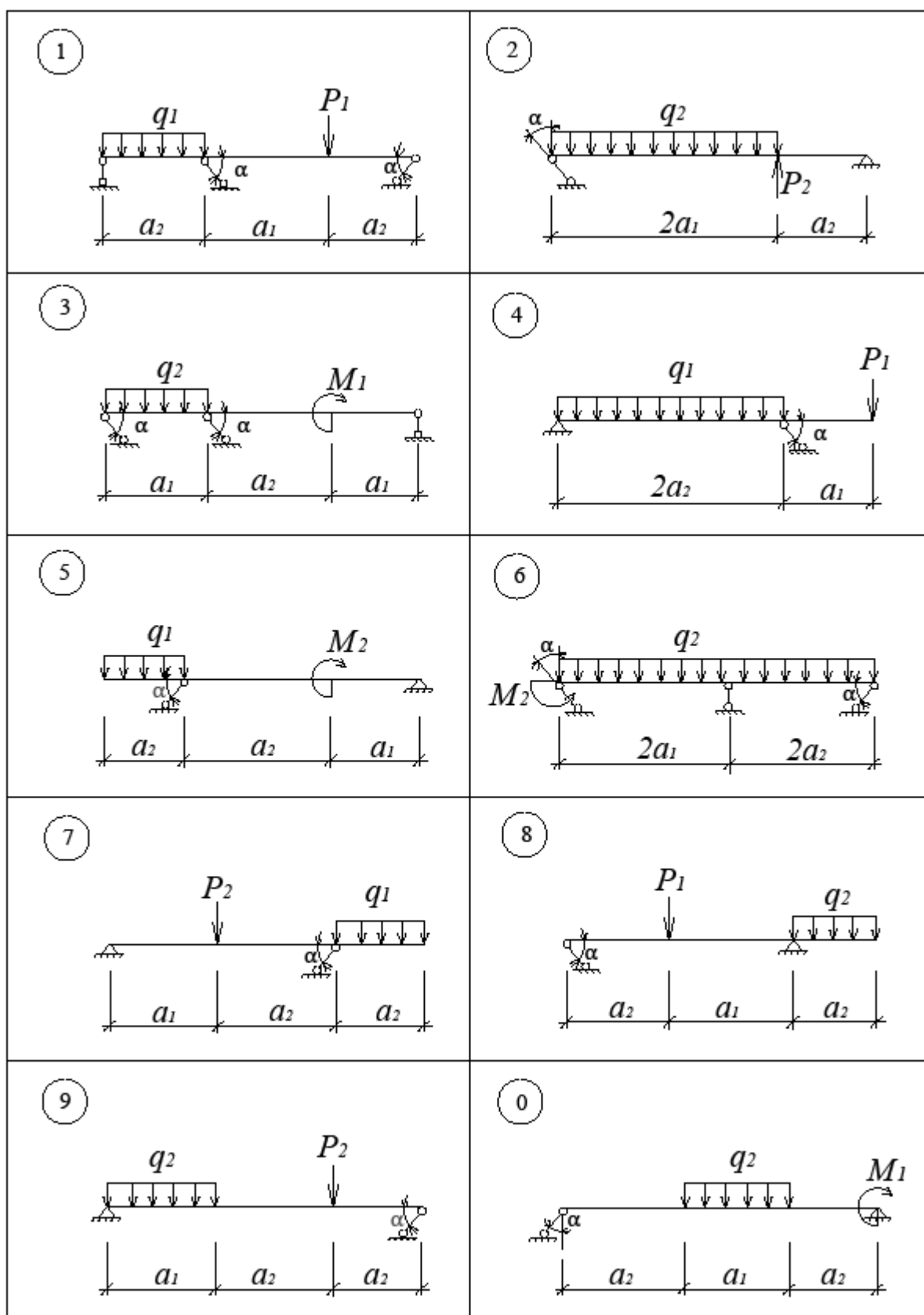
Цифра шифру	Перша цифра				Друга цифра				Третя цифра			
	a_1 , м	h_1 , м	M_1 , кНм	P_1 , кН	a_2 , м	h_2 , м	M_2 , кНм	P_2 , кН	q_1 , $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	q_2 , $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	α , град	Схема
1	2	5	12	9	3	5	11	10	4	7	30	1
2	3	4	10	17	2	3	25	16	6	5	45	2
3	4	3	26	11	4	2	13	14	8	9	60	3
4	3	4	20	13	3	4	19	8	6	7	45	4
5	2	3	18	23	4	3	15	24	4	9	30	5
6	4	5	16	21	2	4	9	20	8	5	60	6
7	2	3	22	15	2	5	23	18	6	11	30	7
8	3	4	14	25	3	5	7	8	4	5	45	8
9	4	5	24	7	4	2	21	12	6	9	30	9
0	2	4	10	19	3	4	17	22	8	7	60	0

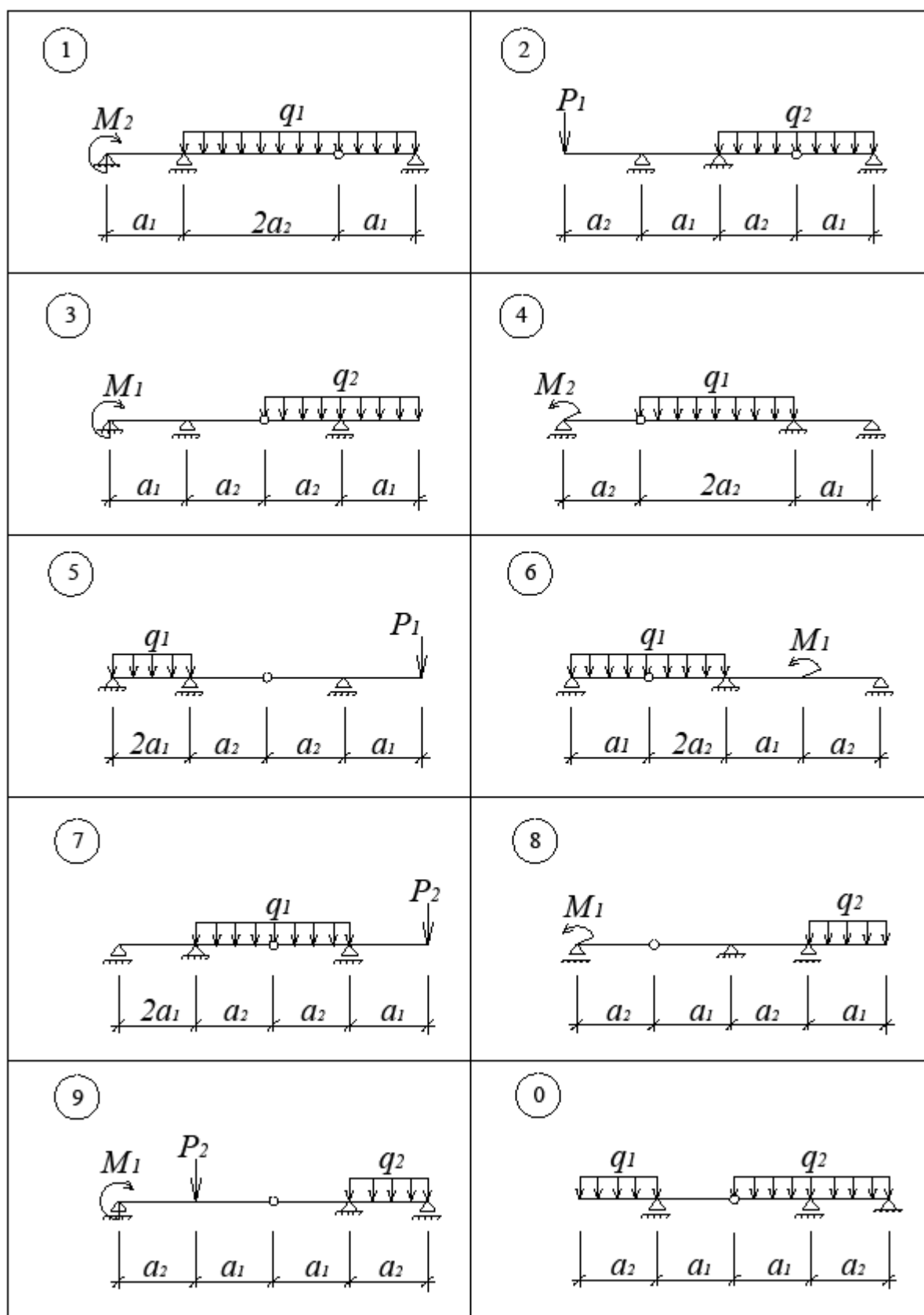


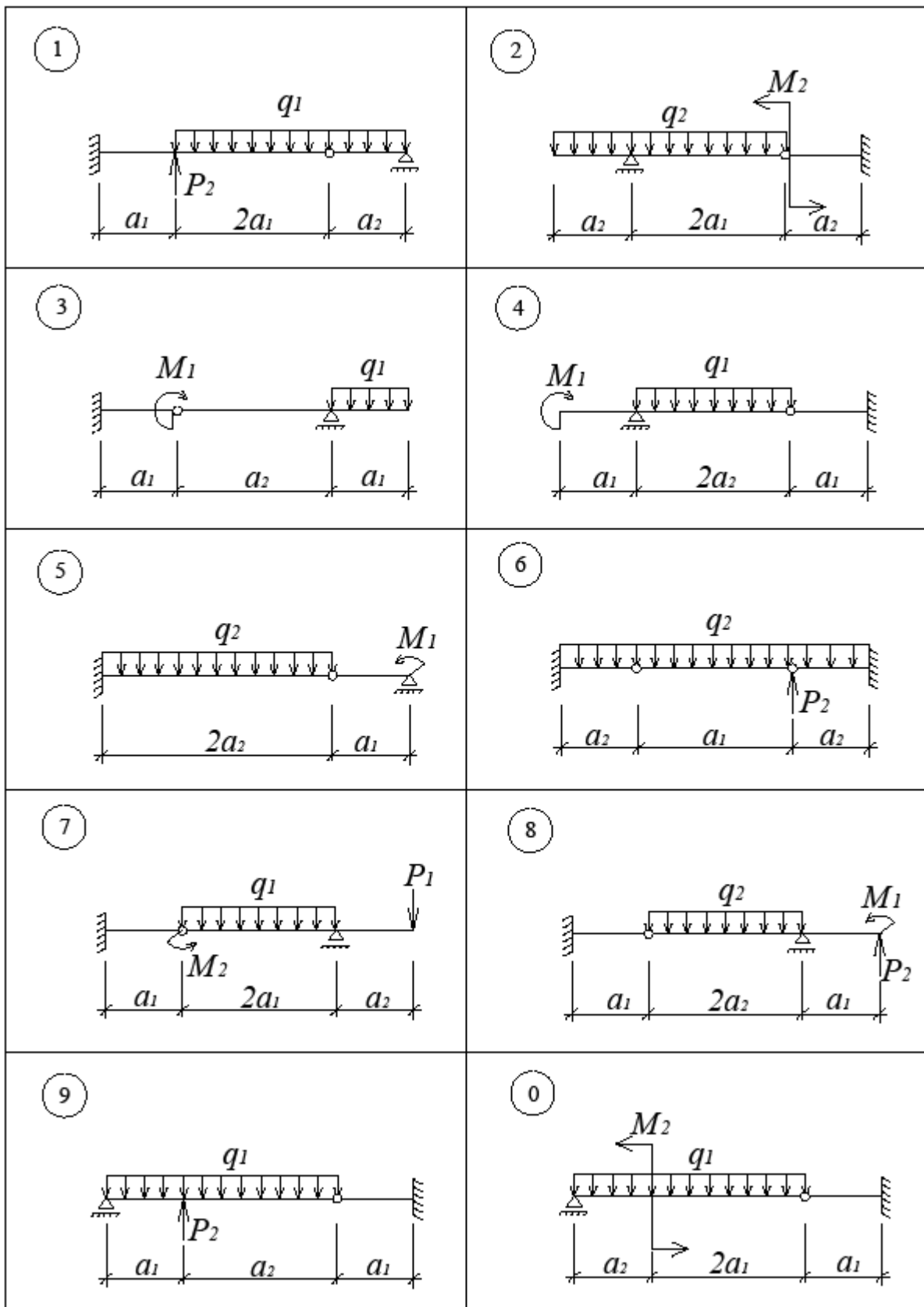


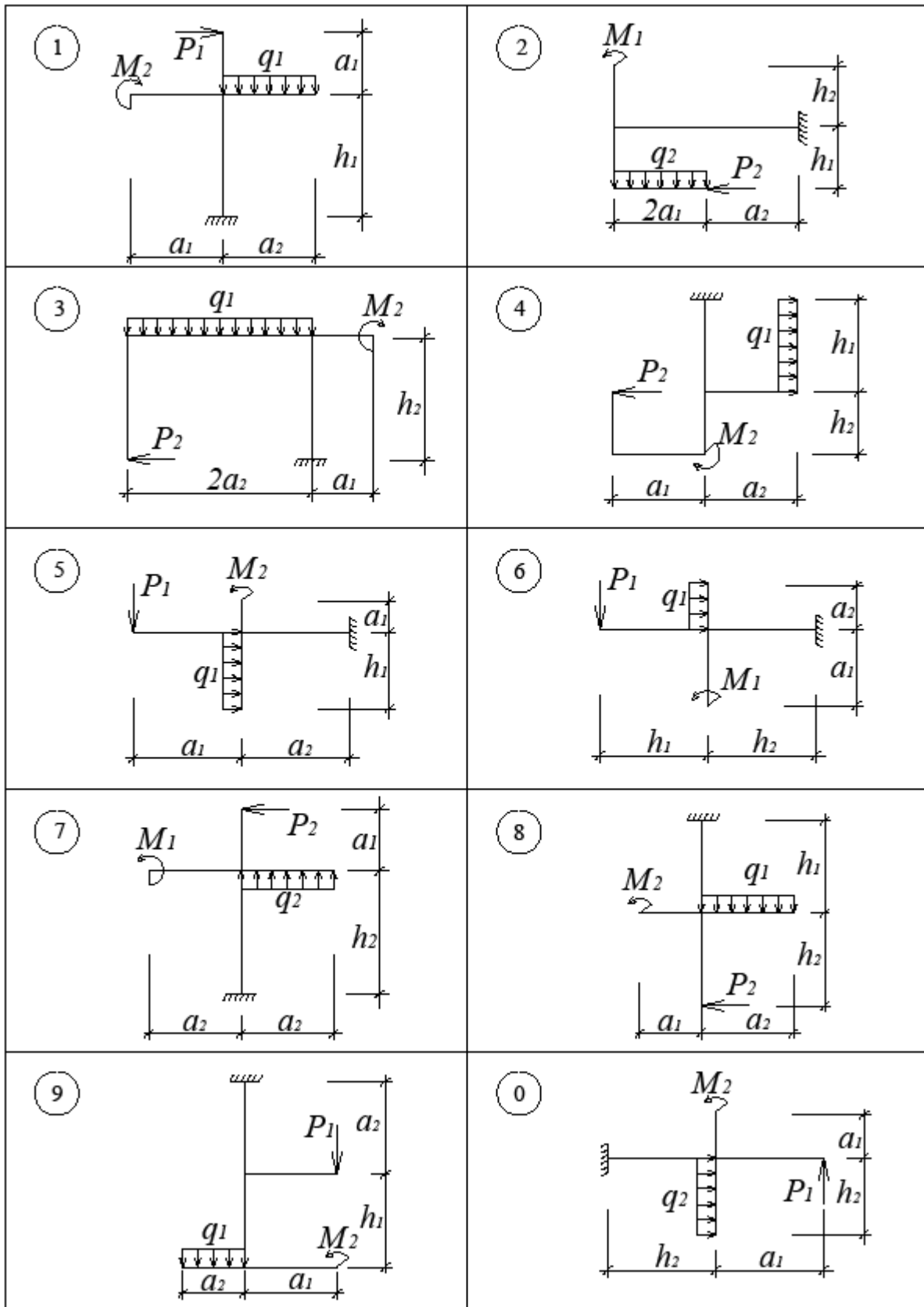


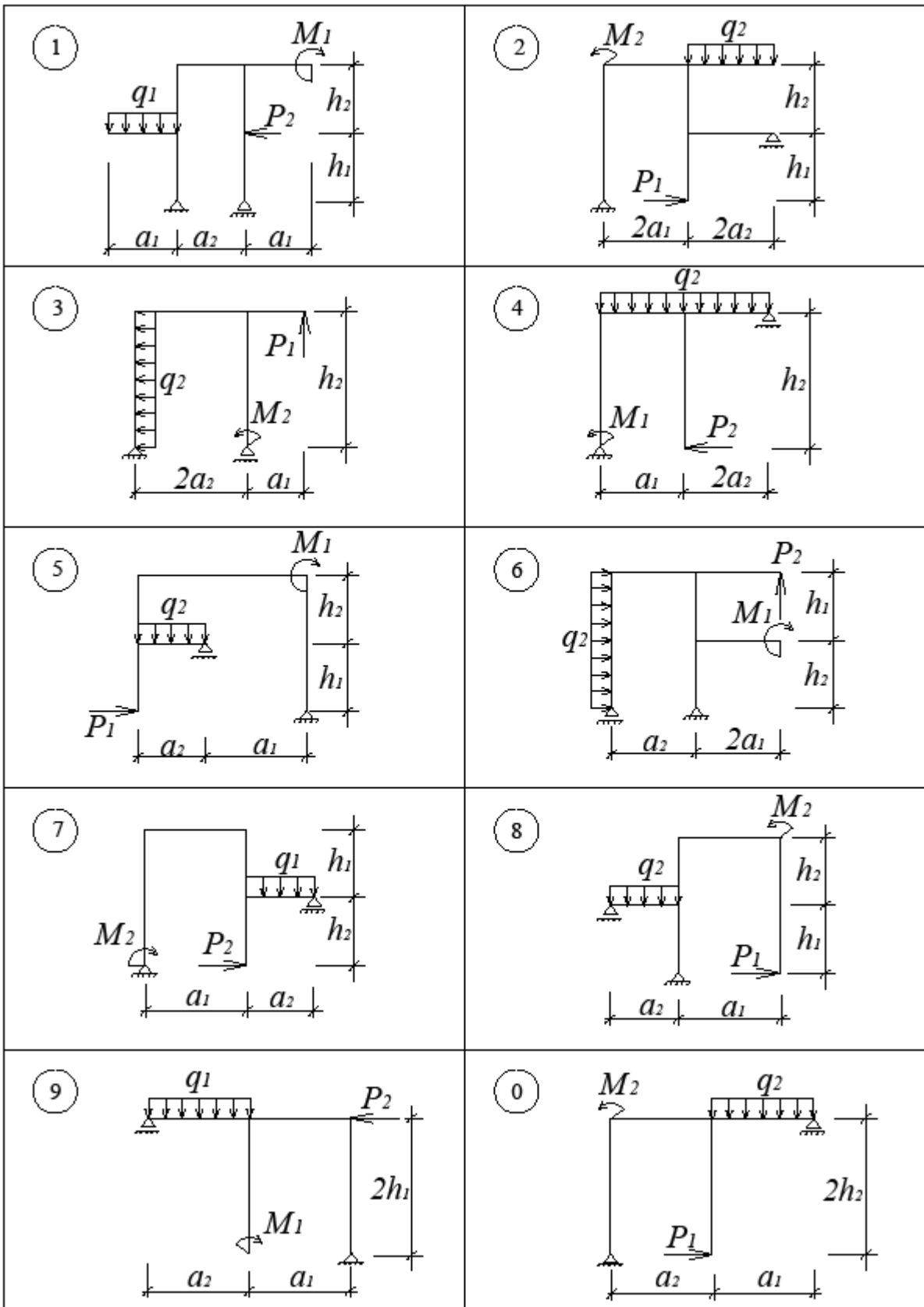


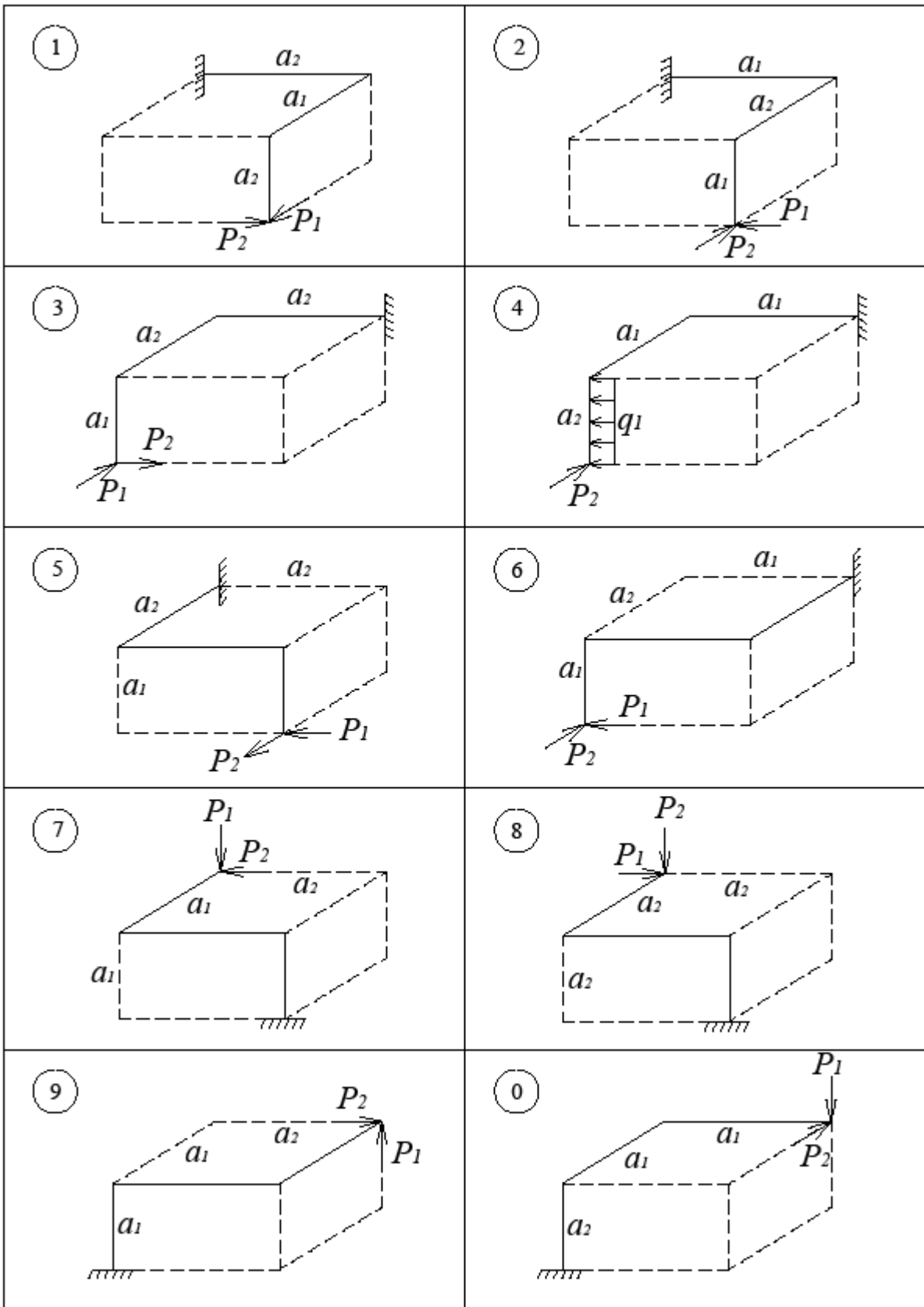












СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шлельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В. Опір матеріалів: Підручник. – К.: ЗАТ "Віпол", 2011. – 456 с.
2. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник. – К.: Вища шк., 1993. – 654 с.
3. Опір матеріалів з основами теорії пружності: навч. посіб.: у 2 ч., 5 кн. / За ред. В. Г. Піскунова – К.: Вища шк., 1994 – 1995.
Ч. 1, кн. 1: Загальні основи курсу – 1994. – 205 с.
Ч. 1, кн. 2: Опір бруса – 1994. – 335 с.
Ч. 2, кн. 4: Приклади і задачі – 1995. – 304 с.
4. *Справочник по сопротивлению материалов* / С. П. Фесик. – 2-е изд. – К.: Будівельник, 1982. – 367 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

ОШР МАТЕРІАЛІВ

Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів Побудова епюр внутрішніх зусиль

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 „Будівництво”

Укладачі: **СТАНКЕВИЧ** Анатолій Миколайович
ЖУПАНЕНКО Ірина В'ячеславівна
ЛЕВКІВСЬКИЙ Дмитро Володимирович

Редагування та коректура *В.С. Ясінської*
Комп'ютерне верстання *А.П. Морозюк*

Підписано до друку 2012. Формат 60x84
Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 4,25,
Тираж 75 прим. Вид. № 69/III-12 Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mai: red_isdat@ua.fm

Видруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 808 від 13.02.2002р.