

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

СТІЙКІСТЬ І СТІЙКА МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

Методичні вказівки
до виконання контрольних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 „Будівництво” заочної форми навчання

Київ 2014

УДК 539.4
ББК 30.121
Р64

Укладач М.О. Пеклов, старш. викладач

Рецензент Л.Т. Шкельов, канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск А.М. Станкевич, канд. техн. наук

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 7 від 11 березня 2014 року.*

Стійкість і стійка міцність прямих стержнів: методичні вказівки
Р64 до виконання контрольних робіт / уклад. М.О. Пеклов. – К.:
КНУБА, 2014. – 80 с.

Містять елементи теорії, методичні рекомендації до виконання контрольних робіт з другої частини курсу „Опір матеріалів” та індивідуальні завдання. Розглянуто питання стійкості і стійкої міцності прямих стержнів.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.06011 „Будівництво” заочної форми навчання.

© КНУБА, 2014

ЗМІСТ

Загальні положення	4
СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ	5
СТІЙКІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ ЗА МЕЖЕЮ ПРУЖНОСТІ МАТЕРІАЛУ	13
ТРИ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ	15
<i>Задача 1. Визначення коефіцієнта безпеки за стійкістю прямого стержня</i>	19
<i>Задача 2. Визначення допустимого з умови стійкості стержня навантаження $F_{кр, adm}$</i>	23
<i>Задача 3. Підбір з умови стійкості стержня розмірів його поперечного перерізу</i>	28
СТІЙКА МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ	33
ТРИ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКУ МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ	36
<i>Задача 4. Перевірка виконання умови стійкої міцності прямого стержня, навантаженого силою F</i>	41
<i>Задача 5. Визначення допустимої з умови стійкої міцності стержня сили $F_{adm, кр}$</i>	43
<i>Задача 6. Підбір поперечного перерізу стержня з умови його стійкої міцності</i>	45
<i>Задача 7. Підбір з умови стійкої міцності стержня номера рівнобокого кутника</i>	47
<i>Задача 8. Підбір з умови стійкої міцності стержня номера елемента сортаменту</i>	53
Список літератури	59
<i>Додаток 1</i>	60
<i>Додаток 2</i>	61
<i>Додаток 3</i>	62
<i>Додаток 4</i>	65
<i>Додаток 5</i>	66
<i>Додаток 6</i>	67
<i>Додаток 7</i>	68
<i>Додаток 8</i>	70
<i>Додаток 9</i>	73
<i>Додаток 10</i>	74
<i>Додаток 11</i>	76
<i>Додаток 12</i>	77

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Стійкість – фундаментальне поняття механіки деформованого твердого тіла. Забезпечення умови стійкості прямолінійної форми рівноваги стиснутих прямих стержнів є неодмінною вимогою кожного статичного розрахунку будівельної споруди і її конструктивних елементів. Вплив недоліків форми тіла, неоднорідності властивості матеріалу, виконання конструктивних елементів та інших другорядних для розрахунків на міцність і жорсткість чинників, враховується за допомогою розрахунку на стійку міцність.

Допомогти студентам оволодіти поняттям ”стійкість“ і навчити їх виконувати розрахунки на стійкість і стійку міцність стиснутих прямих стержнів і є метою рекомендованих методичних вказівок.

Разом з тим, саме розв’язання задач стійкості викликає у студентів труднощі, які мають об’єктивний характер. По-перше, студент вперше зустрічається з поняттям „стійкість”. По-друге, підбір з умови стійкості поперечного перерізу стержня математично зводиться до шукання розв’язку нелінійного рівняння, де невідома представлена в табличній формі. Щоб частково уникнути цих труднощів, для стержнів з простою геометрією перерізу розв’язок шукають із застосуванням питомого радіуса інерції поперечного перерізу. В додатках наведено потрібний допоміжний матеріал, що суттєво скорочує обсяг обчислення і робить методичні вказівки цілком автономним виданням.

Дані індивідуальної задачі визначаються за допомогою шифру
Шифр – це шестизначне число, яке задається викладачем.

Одна частина даних, що стосується усіх задач, знаходиться в таблицях додатків і на рис. 1. Друга частина даних, яка саме і визначає дані індивідуальної задачі, знаходиться в таблицях, якими завершуються всі приклади розв’язаних задач.

Безпосередньо самі дані знаходяться на перехресті рядків і стовпців таблиць. Номер рядка таблиці задається відповідними цифрами шифру. Номер стовпчика таблиці, визначається номером місця цифри в шифрі, як показано нижче.

номер місця цифри в шифрі	1	2	3	4	5	6
шестизначний шифр задачі	6	4	1	3	2	7

Перша цифра шифру „6” визначає шостий рядок таблиці. В шифрі цифра „6” має перший номер, якщо почати рахувати цифри шифру зліва. Тому номер цієї цифри „1”. Це вказує на перший стовпчик таблиці. Самі дані знаходяться на перехресті шостого рядка і першого стовпчика таблиці.

Друга цифра шифру „4” визначає четвертий рядок таблиці. В шифрі цифра „4” має другий номер, якщо почати рахувати цифри шифру зліва. Тому номер цієї цифри „2”. Це вказує на другий стовпчик таблиці. Самі дані знаходяться на перехресті четвертого рядка і другого стовпчика таблиці.

Контрольну роботу виконують у форматі А4 (книжкова орієнтація). Вона повинна мати титульний аркуш (див. дод. 12). Розрахунки та пояснення потрібно писати з однієї сторони аркуша, рисунки дозволяється виконувати олівцем.

СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

У стиснутому з обох кінців двома силами прямому довгому стержні (відношення довжини стержня до найбільшого розміру його поперечного перерізу більше шести) за малих значень параметра навантаження F виникають, у першу чергу, поздовжні деформації. Скорочується довжина стержня. Зберігається його початкова прямолінійна форма.

Під час зростання навантаження картина суттєво змінюється: крім постійно зростаючих поздовжніх деформацій виникають ще згинальні деформації. Вони викликані поздовжнім згинанням стержня. Поздовжні деформації швидко зростають і згодом стають вирішальним фактором, який визначає деформований стан стержня. Ці деформації можна розглядати як інтегральний наслідок зростання навантаження і недосконалостей геометрії стержня, неоднорідності матеріалу, недосконалостей виконаних опорних конструкцій та інших другорядних чинників. Подальше зростання навантаження супроводжується швидким зростанням переміщень, що робить неможливим нормальну експлуатацію споруди чи взагалі викликає її руйнування. Це дає уяву про поздовжнє згинання стержня під час його навантаження.

Якщо нехтувати усіма вказаними недосконалостями, то задача дещо спрощується. Вважається, що аж до певного значення навантаження поздовжнє згинання стержня відсутнє і відбувається лише стискання стержня. Так деформується стержень до моменту досягнення навантаженням F певного значення, за якого раптово відбувається його поздовжнє згинання.

Цей момент називається *втратою стійкості* стержня, а відповідна сила називається *критичною силою* і позначається $F_{кр}$. Її величина визначається геометрією стержня, механічними характеристиками матеріалу, конструкцією опор і є власною характеристикою стержня такою як, наприклад, частота першого обертопу.

Якщо нехтувати усіма вказаними недосконалостями й одночасно зберегти усі відомі спрощення і гіпотези лінійної теорії згинання прямих стержнів, то для визначення функції прогинів, яка є наслідком поздовжнього згинання стержня сталого поперечного перерізу, можна скласти диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + \frac{N_x}{EI_z} \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0,$$

де EI_z – жорсткість стержня в площині втрати стійкості xu ; $N_x = F$ – поздовжня сила N_x у задачах стійкості під час стискання береться додатною, під час розтягання – від’ємною. Зовнішня сила F – стискає сила, що прикладена на кінці стержня; $v(x)$ – шукана функція прогину, яка задовольняє в площині xu заданим граничним умовам.

Якщо ввести позначення $k^2 = \frac{N_x}{EI_z}$ (k – це критичний параметр,

що відповідає значенню $N_x = F_{кр}$), то диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + k^2 \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0;$$

Загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння можна отримати у вигляді, який задовольняє умовам *Koши*, і

називається методом початкових параметрів. Тоді зусилля і переміщення визначаються формулами:

– функція прогину:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x + \frac{M_{z0}}{N_x} (1 - \cos kx) + \frac{Q_{y0} k}{N_x} (kx - \sin kx);$$

– функція кута повороту:

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \varphi_0 + \frac{M_{z0} k}{N_x} \sin kx + \frac{Q_{y0}}{N_x} (1 - \cos kx);$$

– функція згинального моменту:

$$M_z(x) = EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = M_{z0} \cos kx + \frac{Q_{y0}}{k} \sin kx;$$

– функції поперечної сили:

$$Q_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx} = -M_{z0} k \sin kx + Q_{y0} \cos kx,$$

де v_0 , φ_0 , M_{z0} , Q_{y0} – початкові параметри, які визначаються граничними умовами для функції $v(x)$ і її похідних у площині втрати стійкості xu ; N_x – поздовжня сила в стержні, яка визначається за недеформованою схемою споруди. Вона зберігає свій початковий напрямок і після втрати стійкості стержня; Q_y – поперечна сила в стержні, яка розташована в площині поперечного перерізу, визначається за деформованою схемою споруди і (увага!) спрямована по нормалі до зігнутої осі стержня.

Розв'язок диференціального рівняння через початкові параметри дозволяє визначити значення критичного параметра.

У кожному стержні шукана функція прогину і її похідні визначаються чотирма початковими параметрами. Якщо на одному із кінців стержня відомі два з чотирьох початкових параметри, то для визначення інших двох, які залишились невідомими, потрібно використати дві відомі граничні умови на протилежному кінці стержня. Для цих двох невідомих початкових параметрів потрібно скласти систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь. Система двох лінійних рівнянь однорідна. Крім того вона містить ще критичний параметр. Характеристичне рівняння для визначення критичного

параметра k визначається такою умовою, що визначник системи двох лінійних рівнянь повинен дорівнювати нулю.

Отримане характеристичне рівняння трансцендентне. Найменший, не нульовий корінь цього рівняння і є шуканий критичний параметр.

Під час втрати стійкості поздовжня сила дорівнює критичній. Значення критичної сили визначається за формулою:

$$F_{kp} = k^2 EI_z.$$

Як приклад визначимо критичний параметр для стиснутого стержня сталого поперечного перерізу довжиною l , який має шарнірні опори на обох кінцях (рис. 1, схема 1). Втрата стійкості відбувається у площині xu . Початок прямокутної системи координат xuz знаходиться на лівому кінці стержня. Вісь x спрямована вздовж осі стержня. Граничні умови на кінцях стержня:

- за $x = 0$ $v(0) = v_0 = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0 = ?$, $M_z(0) = M_0 = 0$, $Q_y(0) = Q_0 = ?$
- за $x = l$ $v(l) = v_0 = 0$, $\varphi(l) = \varphi_0 = ?$, $M_z(l) = M_0 = 0$, $Q_y(l) = Q_0 = ?$

У перерізі $x = 0$ з чотирьох початкових параметрів два невідомі. Це φ_0 і Q_0 . Для їх визначення є дві умови на другому кінці стержня. За $x = l$ $v(l) = 0$, $M_z(l) = 0$. Це дає змогу скласти систему двох лінійних алгебраїчних, відносно φ_0 і Q_0 , рівнянь для визначення невідомих початкових параметрів:

$$\text{– за } v(l) = 0, \quad \varphi_0 \cdot l + \frac{Q_{y0} k}{k} (kl - \sin kl) = 0;$$

$$\text{– за } M_z(l) = 0, \quad \frac{Q_{y0}}{k} \sin kl = 0.$$

Система двох лінійних рівнянь однорідна. Тому характеристичне рівняння для визначення критичного параметра k визначається такою умовою, що визначник системи двох лінійних рівнянь повинен дорівнювати нулю:

$$\det(kl) = \begin{vmatrix} l & \frac{k}{N_x} (kl - \sin kl) \\ 0 & \frac{1}{k} \sin kl \end{vmatrix} = 0.$$

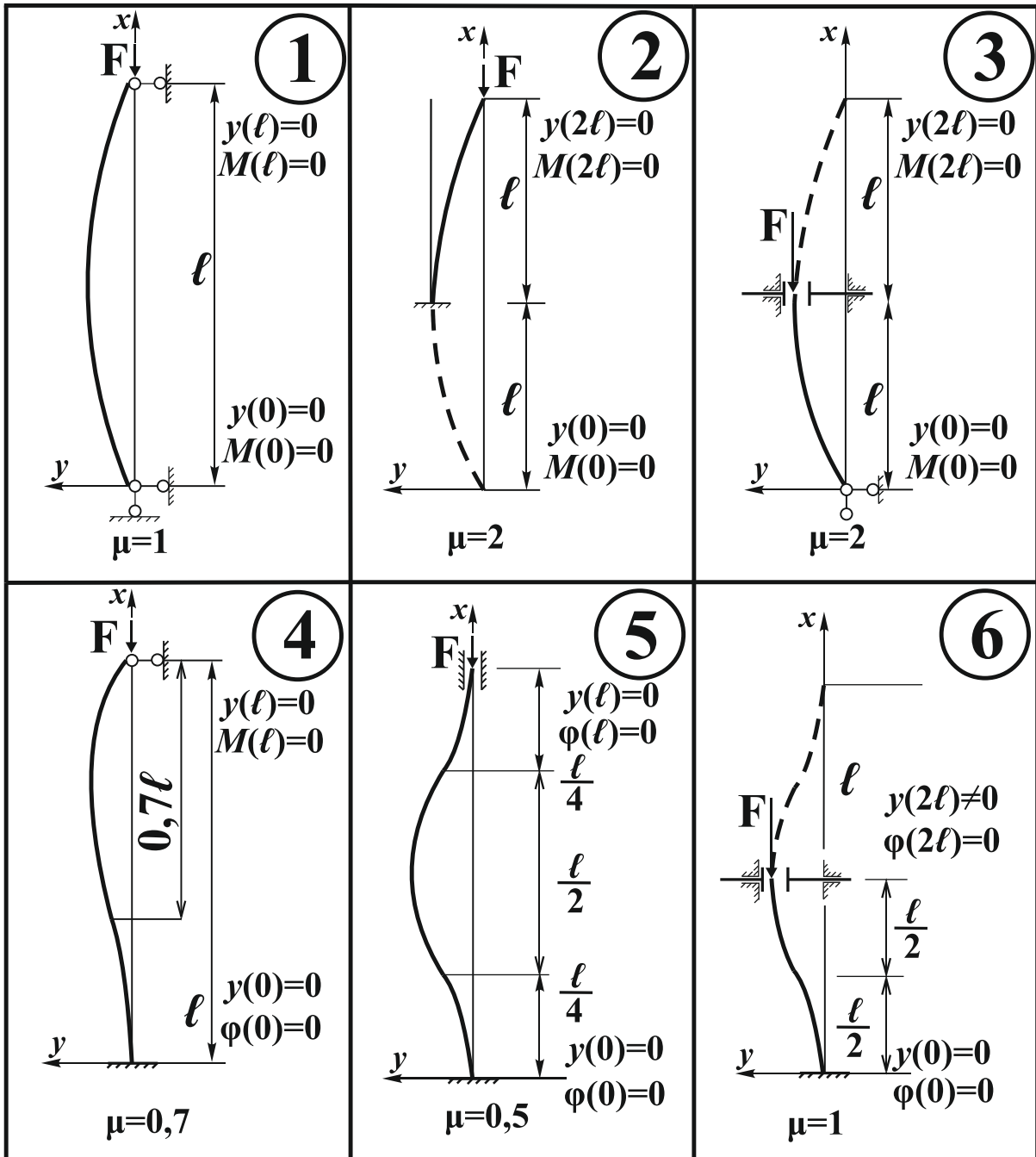


Рис. 1. Схеми для простих випадків закріплення кінців стержня

Характеристичне рівняння $\frac{\ell}{k} \sin kl = 0$. Можливо, лише $\sin kl = 0$.

Найменший не нульовий корінь цього рівняння є число π . Тому $kl = \pi$.

Критичний параметр $k = \frac{\pi}{\ell}$. Критична сила для стержня з двома

шарнірно опертими кінцями визначається за формулою:

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2}.$$

Це формула Ейлера і за її допомогою визначають першу критичну силу для стержня сталого поперечного перерізу з двома шарнірно опертими кінцями.

На рис. 1 наведено схеми для інших простих випадків закріплення кінців стержня. Для кожної схеми вказана можлива зігнута вісь стержня після втрати ним стійкості. Вказані також граничні умови, які були використані під час складання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Корені характеристичного рівняння визначаються аналогічно до того, як це зроблено в наведеному вище прикладі. Їх значення наведено в таблиці нижче.

Номер схеми на рис. 1	1	2	3	4	5	6
Найменший корінь $k\ell$	π	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/1,4292$	2π	π

Чисельним значенням критичного параметра k , який враховує різні випадки закріплення обох кінців стержня, можна надати певний геометричний сенс, якщо ввести поняття *зведена довжина* стержня:

$$\ell_{зв} = \mu\ell,$$

де μ – коефіцієнт зведення довжини будь-якого стержня до довжини шарнірно опертого стержня, що має ту саму критичну силу $F_{кр}$.

Пояснення до схем рис. 1

1. Для шарнірно опертого стержня (схема 1) зведена довжина стержня збігається з довжиною стержня, тому $\mu = 1$ і $\ell_{зв} = \ell$.
2. Довжина зігнутої осі консольного стержня (схема 2) становить половину довжини зігнутої осі віртуального стержня з шарнірно опертими кінцями, тому $\mu = 2$ і $\ell_{зв} = 2\ell$. На схемі 2 пунктиром вказано другу половину віртуального стержня.
3. Зведена довжина зігнутої осі стержня з двома жорстко закріпленими кінцями (схема 5) становить половину його довжини. Віртуальний стержень розташовано посередині стержня між двома точками перетину, які знаходяться на відстані $\ell/4$ від обох кінців стержня. Тому $\mu = 0,5$ і $\ell_{зв} = 0,5\ell$. На схемі 5 знаходяться дві точки перетину, де кривизна зігнутої осі стержня дорівнює нулю.

4. На зігнутій осі стержня з одним жорстко закріпленим, а другим шарнірно опертим кінцем (схема 4) точка перетину розташована на відстані $0,7 \ell$ від шарнірно опертого кінця.

5. На схемі 3 показано стержень, на верхній кінець якого накладено в'язі, що обмежують лише кут повороту поперечного перерізу кінця стержня і не обмежують його лінійне переміщення. Ці в'язі зображені двома горизонтальними Т-подібними стержнями, які дозволяють лише горизонтальні переміщення. Зігнута вісь цього стержня становить половину довжини стержня з шарнірно опертими кінцями, тому $\mu = 2$ і $\ell_{зв} = 2\ell$. На схемі 3 пунктиром вказано другу половину віртуального стержня.

6. На схемі 6 показано стержень, на верхній кінець якого накладено в'язі, що обмежують лише кут повороту поперечного перерізу і не чинять опір лінійному переміщенню. Зігнута вісь цього стержня становить половину довжини стержня з двома жорстко закріпленими кінцями, тому $\mu = 1$ і $\ell_{зв} = \ell$. На схемі 6 пунктиром показано другу половину віртуального стержня.

Дані для зведеної довжини стержня $\ell_{зв}$ усіх шести схем рис. 1 дають можливість для всіх розглянутих випадків закріплення кінців стержня записати одну узагальнену формулу Ейлера:

$$F_{kp, Eйл} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{зв})^2},$$

де $\ell_{зв} = \mu\ell$ – це зведена довжина стержня; μ – коефіцієнт зведення довжини стержня до стержня з обома шарнірно опертими кінцями. Значення коефіцієнта μ наведено на схемах рис. 1.

Критичні напруження визначають за формулою:

$$\sigma_{kp, Eйл} = \frac{F_{kp}}{A_{brutto}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{зв})^2 A_{brutto}} = \frac{\pi^2 E i_z^2}{(\ell_{зв})^2},$$

де A_{brutto} – площа поперечного перерізу стержня, коли не враховуються місцеві ослаблення (отвір від болтів, заклепок тощо). Тому далі використовується звичайне позначення площі поперечного перерізу стержня літерою A :

$i_z = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – це радіус інерції поперечного перерізу стержня.

Зауваження 1. Узагальнена формула Ейлера визначає критичну силу $F_{кр}$ за умови, що нормальні напруження в стержні під час втрати стійкості не перебільшують межу пружності матеріалу:

$$\sigma_{кр,Ейл} \leq \sigma_{пр},$$

де $\sigma_{кр,Ейл}$ – критичні напруження; $\sigma_{пр}$ – межа пружності матеріалу.

Формулу критичних напружень можна записати ще так

$$\sigma_{кр,Ейл} = \frac{F_{кр}}{A_{brutto}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{зв})^2 A_{brutto}} = \frac{\pi^2 E i_z^2}{(\ell_{зв})^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell_{зв}}{i_z}\right)^2},$$

Знаменник дробу $\frac{\ell_{зв}}{i_z}$ позначається літерою λ_{xy} (виголошується

як “ламда”) і називається *гнучкість стержня* $\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z}$.

де - ху є індекси, які вказують площину втрати стійкості стержня.

Перший індекс вказує напрямок осі стержня. Другий індекс вказує напрямок одної з головних осей поперечного перерізу. Разом вони визначають площину в якій відбувається втрати стійкості стержня. Ось z , яка ортогональна до площини втрати стійкості, визначає напрямок другої головної осі поперечного перерізу.

. Гнучкість стержня залежить лише від геометрії стержня і умов закріплення його кінців.

Критичні напруження стиснутого стержня в площині xy визначаються узагальненою формулою Ейлера:

$$\sigma_{кр,Ейл} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_{xy})^2}$$

лише в межах пружності матеріалу $\sigma_{кр,Ейл} \leq \sigma_{пр}$. З цієї умови можна отримати вираз для граничного значення гнучкості стержня:

$$\lambda_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{mn}}}.$$

Ця формула дає нижню межу застосування узагальненої формули Ейлера:

$$\infty > \lambda > \lambda_{\text{lim}}.$$

З конструктивних і практичних міркувань верхню межу гнучкості стержня обмежують значенням 200 і беруть область існування узагальненої формули Ейлера в таких межах:

$$\lambda_{\text{lim}} < \lambda < 200.$$

Стержні, для яких виконуються ці обмеження, називають *довгими*.

Зауваження 2. Враховуючи труднощі, які виникають під час експериментального визначення напружень межі пропорційності матеріалів і відсутності інколи значень σ_{mn} у навчальній літературі, допустимо, за необхідності, брати замість σ_{mn} напружень межі пружності матеріалів σ_{np} . Для пластичних матеріалів межа пружності майже збігається з межею текучості матеріалу σ_T . Тому за відсутності цих даних, замість σ_{mn} беруть значення межі текучості матеріалу σ_T .

СТІЙКІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ ЗА МЕЖЕЮ ПРУЖНОСТІ МАТЕРІАЛУ

Короткі прямі стержні під час стискання не втрачають стійкість, а руйнуються, зберігаючи свою початкову прямолінійну форму. Для пластичних матеріалів це відбувається під час досягнення межі текучості σ_T . Для крихких матеріалів – під час досягнення межі міцності. Гнучкість коротких прямих стержнів, звичайно, не перебільшує 20.

Коли гнучкість стержня знаходиться в межах $20 < \lambda < \lambda_{\text{lim}}$, то теоретичне дослідження стійкості прямого стержня суттєво ускладнюється. Справа в тому, що під час подальшого зростання навантаження в поперечних перерізах стержня з'являються окремі зони, де нормальні напруження перебільшують межу пружності. У цих зонах має місце нелінійна залежність між деформацією та нормальним напруженням $\sigma = f(\varepsilon)$ і під час визначення

нормального напруження використовується ще і дотичний модуль пружності матеріалу. Разом з тим, у процесі значних переміщень з'являються зони, де виникає розвантаження і, як наслідок, зберігається лінійна залежність між деформацією і нормальним напруженням. Стержень під час поздовжнього згинання поводить себе як стержень з двома різними модулями пружності.

Вираз критичної сили, який отримали Ф.С. Ясінський і Ф. Енгессер за стаціонарного навантаження стержня, і вираз критичної сили, який отримали Ф. Шенлі і Ю.Н. Работнов за зростаючого навантаження, у деяких випадках підтверджують експерименти, але під час практичних розрахунків не мають суттєвих переваг порівняно з простішою емпіричною залежністю, яку запропонував на основі обробки значної кількості дослідних даних проф. Ф.С. Ясінський:

$$\sigma_{кр,яс} = a_{яс} - b_{яс}\lambda,$$

де $a_{яс}$, $b_{яс}$ – константи, які залежать лише від механічних властивостей матеріалу. Вони наведені в дод. 11; λ – гнучкість стержня, яка ні в якому разі не повинна перебільшувати значення граничної гнучкості $\lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$.

Враховуючи, що гнучкість коротких прямих стержнів обмежена значенням 40, область застосування формули Ф.С. Ясінського також обмежена:

$$40 < \lambda < \lambda_{\text{lim}}.$$

За значень гнучкості $\lambda < 40$ вважається, що значення критичних напружень не можуть перебільшити значення межі текучості σ_T (для пластичних матеріалів) або межі міцності $\sigma_{мм}$ (для крихких матеріалів).

Критичні напруження під час поздовжнього стискання прямого стержня визначаються формулою:

$$\sigma_{кр}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sigma_T \text{ або } \sigma_{мм}}{\lambda} & \text{коли } \lambda \leq 40 \\ \frac{a_{яс} - b_{яс} \lambda}{\pi^2 E} & \text{коли } 40 < \lambda < \lambda_{lim} \\ \frac{\pi^2 E}{(\lambda_{xy})^2} & \text{коли } \lambda_{lim} < \lambda < 200 \end{cases} .$$

На графіку (рис. 2) крива $\sigma_{кр}(\lambda)$ обмежує область стійкості стержня.

Точками позначено криву, яка обмежує область стійкої міцності стержня.

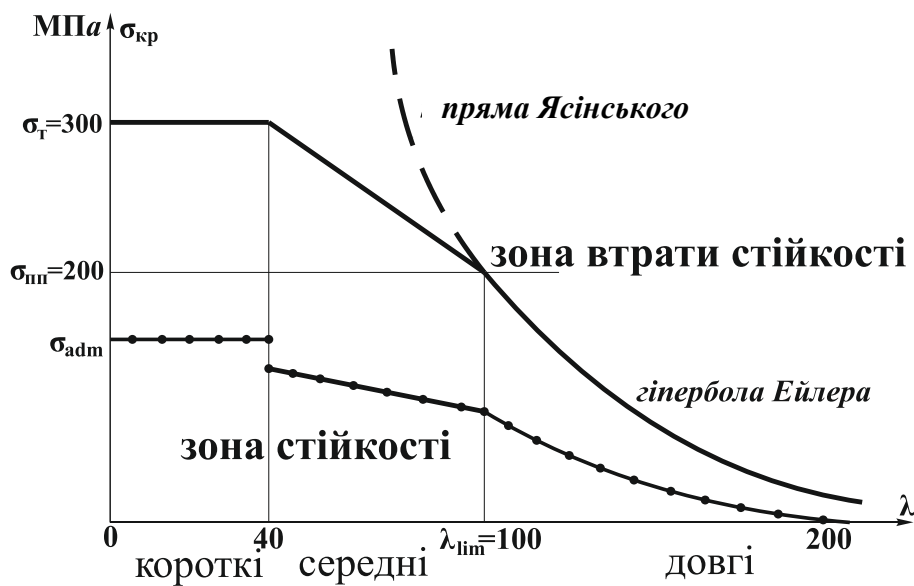


Рис. 2. Зона стійкості прямолінійних стержнів

Критичну силу прямого стержня сталого поперечного перерізу за межею пружності матеріалу визначають за формулою:

$$F_{кр,яс} = A_{brutto} \cdot \sigma_{кр,яс} .$$

ТРИ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

Під час розрахунку на стійкість прямих стержнів, насамперед, зустрічаються такі задачі.

Задача 1. Визначення коефіцієнта безпеки за стійкістю k_{cm} .
 Задано розрахункову схему стержня, геометричні і механістичні параметри, які її визначають. Відоме діюче навантаження F .
 Потрібно визначити значення коефіцієнта безпеки за стійкістю.

Розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему стержня. Взяти початок системи координат у нижній нерухомій опорі та спрямувати вісь x вздовж осі стержня.

2. Якщо апріорі до розв'язку задачі не можна вказати площину втрати стійкості стержня, то потрібно послідовно розглянути можливий випадок втрати стійкості в обох головних площинах.

3. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в головній площині xy . Визначається значення гнучкості в цій площині і, залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{kp, Eйл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{kp, Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$. Можлива критична сила буде менша з двох $F_{kp, xy} = \min(F_{kp, Eйл}, F_{kp, Яс})$.

4. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в іншій головній площині xz . Визначається значення гнучкості в цій площині і, залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{kp, Eйл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{kp, Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$, можлива критична сила буде менша з двох $F_{kp, xz} = \min(F_{kp, Eйл}, F_{kp, Яс})$.

5. Дійсна критична сила в стержні буде менша:

$$F_{kp} = \min(F_{kp, xy}, F_{kp, xz}).$$

6. Значення коефіцієнта безпеки за стійкістю $k_{cm} = \frac{F_{kp}}{F}$.

Задача 2. Визначення допустимого з умови стійкості стержня навантаження $F_{adm, kp}$.

Задано розрахункову схему стержня, геометричні і механістичні параметри, які її визначають. Задано також значення коефіцієнта безпеки за стійкістю k_{cm} .

Потрібно визначити допустиме з умови стійкості стержня навантаження $F_{adm,kr}$.

Розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему стержня. Взяти початок системи координат у нижній нерухомій опорі та спрямувати вісь x вздовж осі стержня.

2. Якщо апріорі до розв'язку задачі не можна вказати площину втрати стійкості стержня, то слід послідовно розглянути обидва можливих випадки втрати стійкості в обох головних площинах.

3. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в головній площині xu . Визначається значення гнучкості в цій площині i , залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{kr,Ейл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{kr,Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$, можлива критична сила буде менша з двох $F_{kr,xu} = \min(F_{kr,Ейл}, F_{kr,Яс})$.

4. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в іншій головній площині xz . Визначається значення гнучкості в цій площині i , залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{kr,Ейл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{kr,Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$, можлива критична сила буде менша з двох $F_{kr,xz} = \min(F_{kr,Ейл}, F_{kr,Яс})$.

5. Дійсна критична сила в стержні буде менша:

$$F_{kr} = \min(F_{kr,xu}, F_{kr,xz}).$$

6. Значення допустимого з умови стійкості прямого стержня навантаження визначається за формулою:

$$F_{adm,kr} = \frac{F_{kr}}{k_{cm}}.$$

Задача 3. Підбір з умови стійкості стержня розмірів його поперечного перерізу.

Задано розрахункову схему стержня, його довжину і механістичні характеристики. Задано також значення коефіцієнта безпеки зі стійкості $k_{ст}$. Лінійні розміри схеми поперечного перерізу стержня задано з точністю до одного параметра b або вказано тип сортаменту (швелер, двотавр, кутник).

Потрібно визначити допустиме з умови стійкості стержня значення шуканого параметра і виконати креслення схеми поперечного перерізу.

Розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему стержня. Взяти початок системи координат у нижній нерухомій опорі та спрямувати вісь x вздовж осі стержня. Накреслити схему поперечного перерізу за довільного значення шуканого параметра (наприклад, взяти одиницю довжини). Визначити всі потрібні для подальшого розрахунку геометричні характеристики поперечного перерізу як функції шуканого параметра.

2. Якщо апріорі до розв'язку задачі не можна вказати площину втрати стійкості стержня, то слід послідовно розглянути можливий випадок втрати стійкості в обох головних площинах.

3. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в головній площині xy . Визначається значення гнучкості в цій площині і, залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{кр,Ейл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{кр,Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$, можлива критична сила буде менша з двох $F_{кр,xy} = \min(F_{кр,Ейл}, F_{кр,Яс})$.

Якщо $F_{кр,xy} = F_{кр,Ейл}$, то допустиме з умови стійкості прямого стержня значення шуканого параметра визначається умовою:

$$\frac{F_{кр,Ейл}}{k_{ст}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{3в})^2},$$

де $-I_z$ – відома функція шуканого параметра $b_{xy,Ейл}$.

Якщо $F_{kp,xy} = F_{kp,Яс}$, то допустиме з умови стійкості прямого стержня значення шуканого параметра визначається з умови:

$$\frac{F_{kp,Яс}}{k_{cm}} = A_{brutto} \cdot (a - b\lambda),$$

де A_{brutto} – відома функція шуканого параметра $b_{xy,Яс}$.

Можливе значення шуканого параметра буде більше.

4. Робиться припущення, що стержень втрачає стійкість в іншій головній площині xz . Визначається значення гнучкості в цій площині і, залежно від її значення, значення критичної сили за формулою Ейлера $F_{kp,Ейл}$, якщо $\lambda_{lim} < \lambda < 200$ або за формулою Ясінського $F_{kp,Яс}$, якщо $40 < \lambda < \lambda_{lim}$, можлива критична сила буде менша з двох $F_{kp,xz} = \min(F_{kp,Ейл}, F_{kp,Яс})$.

Якщо $F_{kp,xz} = F_{kp,Ейл}$, то допустиме з умови стійкості прямого стержня значення шуканого параметра визначається з умови:

$$\frac{F_{kp,Ейл}}{k_{cm}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{3в})^2},$$

де I_z – відома функція шуканого параметра $b_{xz,Ейл}$.

Якщо $F_{kp,xz} = F_{kp,Яс}$, то допустиме з умови стійкості прямого стержня значення шуканого параметра визначається з умови:

$$\frac{F_{kp,Яс}}{k_{cm}} = A_{brutto} \cdot (a - b\lambda),$$

де A_{brutto} – відома функція шуканого параметра, $b_{xz,Яс}$.

Можливе значення шуканого параметра буде більше:

$$b_{xz} = \max(b_{xz,Ейл}, b_{xz,Яс}).$$

5. Дійсне значення шуканого параметра буде більше:

$$b = \max(b_{xy}, b_{xz}).$$

Задача 1

Визначення коефіцієнта безпеки за стійкістю прямого стержня

Вихідні дані до задачі, які задано шестизначним шифром 621347, знаходяться в таблиці вихідних даних до задачі 1 на стр. 23. Безпосередньо самі дані знаходяться на перехресті рядків таблиці, номери яких задаються відповідними цифрами шифру, і стовпчиків таблиці, номери яких вказують номер місця цифри в шифрі.

Номер місця цифри в шифрі	1	2	3	4	5	6
Шестизначний шифр	6	2	1	3	4	7

Перша цифра шифру „6” визначає шостий рядок таблиці. В шифрі номер цієї цифри „1”. Це вказує на перший стовпчик таблиці, де знаходиться номер схеми стержня „5”. Сама розрахункова схема стержня міститься в дод. 1. Це схема 5. Її креслення на рис. 3, *a*.

Друга цифра шифру „2” визначає другий рядок таблиці. В шифрі номер цієї цифри „2”. Це вказує на другий стовпчик таблиці, де знаходиться значення довжини стержня $\ell = 4,8$ м.

Третя цифра шифру „1” визначає перший рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „3”. Це вказує на третій стовпчик, де знаходиться номер схеми перерізу стержня „1”. Сама схема міститься в дод. 3. Це схема 1. Це – прямокутник. Його креслення на рис. 3, *a*.

Четверта цифра шифру „3” визначає третій рядок таблиці. В шифрі номер цієї цифри „4”. Це вказує на четвертий стовпчик, де знаходиться геометричний параметр $p = 0,15$ м, який визначає розміри фігури (прямокутник): $H = p = 0,15$ м, $B = 2 \cdot H = 0,3$ м.

П’ята цифра шифру „4” визначає четвертий рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „5”. Це вказує на п’ятий стовпчик, де знаходиться номер рядка „8” дод. 11 механічних характеристик матеріалу. Самі характеристики містяться в рядку 8 дод. 11. Матеріал – сосна. Модуль пружності $E = 10$ ГПа, допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 10$ МПа. Коефіцієнти формули Ясінського $a_{Яс} = 29,3$ МПа, $b_{Яс} = 0,194$ МПа і значення граничної гнучкості $\lambda_{lim} = 110$.

Шоста цифра шифру „7” визначає сьомий рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „6”. Це вказує на шостий стовпчик таблиці, де знаходиться значення діючої сили $F = 0,2$ МН.

За вихідними даними виконано креслення (рис. 3, а), на якому вказано, як опирається стержень і наведено систему координат.

Потрібно визначити величину критичної сили F_{kp} і значення коефіцієнта безпеки за стійкістю:

$$k_{cm} = \frac{F_{kp}}{F}.$$

Розв'язання задачі

Геометричні характеристики перерізу. Площа $A = B \cdot H = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$. Моменти інерції і радіуси інерції:

$$I_y = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,15^3}{12} = 8,4375 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4. \quad I_z = 3,375 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$i_y = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{0,3}{\sqrt{12}} = 8,66 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad i_z = \frac{H}{\sqrt{12}} = \frac{0,15}{\sqrt{12}} = 4,33 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

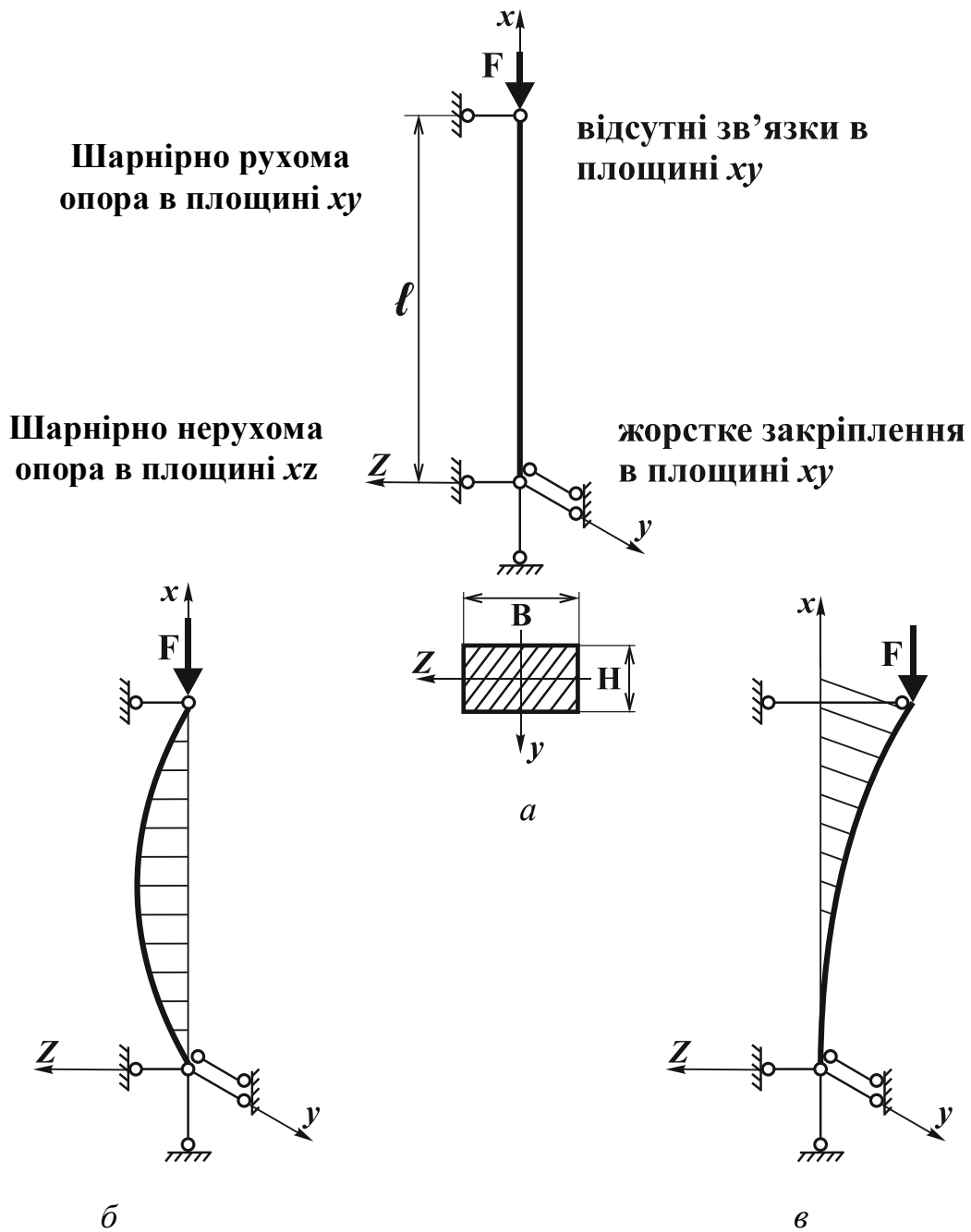


Рис. 3: а – прямолінійна форма рівноваги стержня за $F < F_{кр}$;
 б – xz -можлива площина втрати стійкості за $F_{кр,xz}$,
 в – xu -можлива площина втрати стійкості за $F_{кр,xu}$.

Поперечний переріз стержня – це фігура, яка має дві осі симетрії. Осі y і z є головними осями фігури. Але граничні умови обпирання стержня в головних площинах xu і xz – різні. Тому априорі не можна визначити площину, в якій стержень втрачає стійкість. Слід

послідовно розглянути обидва можливі випадки втрати стійкості стержня в обох головних площинах.

Визначення критичної сили $F_{kp,xz}$, якщо стержень втрачає стійкість в площині xz (рис. 3, б). В площині xz обидва кінці стержня шарнірно оперті. Тому, згідно з першою схемою таблиці, яку розташовано на рис. 1, коефіцієнт зведення довжини $\mu_{xz} = 1$. Гнучкість стержня в площині xz не перебільшує граничну:

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \ell}{i_y} = \frac{1 \cdot 4,8}{8,66 \cdot 10^{-2}} = 55,43 < \lambda_{\text{lim}} = 110.$$

Це свідчить, що втрата стійкості стержня відбувається за межею пружності матеріалу і критичне напруження визначається за формулою Ясінського:

$$\sigma_{kp,Яс} = a_{Яс} - b_{Яс} \lambda, = 29,3 - 0,194 \cdot 110 = 7,96 \text{ МПа}.$$

Критичну силу стержня за втрати стійкості в площині xz визначають за формулою:

$$F_{kp,xz} = F_{kp,Яс} = A \cdot \sigma_{kp,Яс} = 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 7,96 \cdot 10^6 = 0,358 \text{ МН}.$$

Визначення критичної сили $F_{kp,xy}$, якщо стержень втрачає стійкість в площині xy (рис. 3, в). У площині xy на верхньому кінці стержня в'язі відсутні. Нижній кінець жорстко закріплений. Тому, згідно з другою схемою таблиці, яку розташовано на рис. 1., коефіцієнтів зведення довжини стержня, в цій площині $\mu_{xy} = 2$. Гнучкість стержня в площині xy перебільшує граничну:

$$\lambda_{xy} = \frac{\mu_{xy} \ell}{i_z} = \frac{2 \cdot 4,8}{4,33 \cdot 10^{-2}} = 221,7 > \lambda_{\text{lim}} = 110.$$

Це свідчить, що втрата стійкості стержня відбувається в межах пружності матеріалу і критичне напруження визначається за Ейлером.

Критичну силу за втрати стійкості в площині xy визначають за формулою:

$$F_{kp,xy} = F_{kp,Ейл} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{36})^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 3,375 \cdot 10^{-4}}{(2 \cdot 4,8)^2} = 0,361 \text{ МН},$$

Критична сила для стержня буде менше з двох значень:

$$F_{kp} = \min(F_{kp,xz}, F_{kp,xy}) = \min(0,358; 0,361) = 0,358 \text{ МН}.$$

$$\text{Коефіцієнт безпеки за стійкістю } k_{cm} = \frac{F_{kp}}{F} = \frac{0,358}{0,2} = 1,79.$$

Вихідні дані до задачі 1

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	Третя	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня, ℓ , м	номер схеми перерізу (дод. 3.)	геометричний параметр перерізу, p , м	механічні характеристики (дод. 11.)	діюча сила, F , МН
1	4	4,6	1	0,2	7	0,1
2	6	4,8	5	0,17	8	0,2
3	7	5	6	0,15	7	0,2
4	8	5,2	7	0,22	8	0,1
5	9	4,6	8	0,15	7	0,1
6	5	4,8	9	0,2	8	0,2
7	2	5	3	0,22	7	0,2
8	3	5,2	2	0,18	8	0,1
9	1	4,6	1	0,2	7	0,2

Задача 2

Визначення допустимого з умови стійкості стержня

навантаження $F_{kp,adm}$

Вихідні дані до задачі, які задані шестизначним шифром 564893, знаходяться в таблиці вхідних даних до задачі 2 на стор. 27. Безпосередньо самі дані знаходяться на перехресті рядків таблиці, номери яких задаються відповідними цифрами шифру, і стовпчиків таблиці, номери яких вказуються номером місця цифри в шифрі.

Номер місця цифри в шифрі	1	2	3	4	5	6
Шестизначний шифр	5	6	4	8	9	3

Перша цифра шифру „5” визначає п'ятий рядок таблиці. В шифрі номер цієї цифри „1”. Це вказує на перший стовпчик таблиці, де знаходиться номер схеми стержня „8”. Сама розрахункова схема стержня міститься в дод. 1. Це схема 8. Її креслення на рис. 4, а.

Друга цифра шифру „6” визначає шостий рядок таблиці. В шифрі номер цієї цифри „2”. Це вказує на другий стовпчик таблиці, де знаходиться значення довжини стержня $\ell = 9$ м.

Третя цифра шифру „4” визначає четвертий рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „3”. Це вказує на третій стовпчик, де знаходиться номер схеми перерізу стержня „8”. Сама схема міститься в дод. 2. Цей переріз складається з трьох швелерів. Його креслення на рис. 4, а.

Четверта цифра шифру „8” визначає восьмий рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „4”. Це вказує на четвертий стовпчик, де знаходиться номер сортаменту – 24. Самі геометричні характеристики містяться в дод. 5. Площа $A = 30,6$ см². Моменти інерції $I_y = 208$ см⁴, $I_z = 2900$ см⁴. Радіуси інерції $i_y = 2,6$ см, $i_z = 9,73$ см. Центр ваги $c = 2,42$ см.

П’ята цифра шифру „9” визначає дев’ятий рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „5”. Це вказує на п’ятий стовпчик, де знаходиться номер рядка „1” таблиці. Самі механічні характеристики матеріалу містяться в рядку 1 дод. 11. Матеріал – сталь Ст. 3. Модуль пружності $E = 200$ ГПа, допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 200$ МПа. Коефіцієнти формули Ясінського: $a_{Яс} = 310$ МПа, $b_{Яс} = 1,14$ МПа і значення граничної гнучкості $\lambda_{lim} = 100$.

Шоста цифра шифру „3” визначає третій рядок таблиці. У шифрі номер цієї цифри „6”. Це вказує на шостий стовпчик таблиці, де знаходиться значення коефіцієнта безпеки за стійкістю $k_{cm} = 3$.

За вихідними даними виконано креслення (рис. 4, а), на якому показано, як опирається стержень і наведено систему координат.

Потрібно визначити допустиме з умови стійкості прямого стержня навантаження:

$$F_{kp,adm} = \frac{F_{kp}}{k_{cm}}.$$

Розв’язання задачі

Геометричні характеристики поперечного перерізу стержня визначаються в системі координат, яку показано на рис. 4, а. Площа $A = 3 \cdot 30,6 = 91,8$ см², моменти інерції $I_y = 2 \cdot 2900 + 208 = 6008$ см⁴,

$I_z = 2(208 + 30,6(12 + 2,42)^2) + 2900 = 16041,7 \text{ см}^4$. Радіуси інерції визначають за формулою:

$$i_y = \sqrt{\frac{6008}{91,8}} = 8,09 \text{ см}, i_z = \sqrt{\frac{16041}{91,8}} = 13,2 \text{ см}.$$

Визначення критичної сили $F_{кр,xz}$, якщо стержень втрачає стійкість у площині xz (рис. 4, б). У площині xz нижній кінець стержня жорстко закріплений. Верхній кінець має жорстко закріплену рухому опору. У цьому перерізі відсутній кут повороту за одночасного довільного лінійного переміщення.

Таким граничним умовам відповідає шоста схема таблиці, яку розташовано на рис. 1, і тому коефіцієнт зведення довжини $\mu_{xz} = 1$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м}$. Гнучкість стержня в площині xz перебільшує граничну:

$$\lambda_{xz} = \frac{\ell_{зв}}{i_y} = \frac{9}{8,09 \cdot 10^{-2}} = 110,2 > \lambda_{\text{lim}} = 110.$$

Це свідчить, що втрата стійкості стержня відбувається в межах пружності матеріалу і критичне напруження визначається за Ейлером.

Критичну силу за втрати стійкості в площині xz визначають за формулою:

$$F_{кр,xz} = F_{кр,Ейл} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{зв})^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 6008 \cdot 10^{-8}}{(9)^2} = 1,464 \text{ МН}.$$

Визначення критичної сили $F_{кр,xy}$, якщо стержень втрачає стійкість в площині xy (рис. 4, в). У площині xy нижній кінець стержня жорстко закріплений. Верхній кінець має шарнірну рухому опору. У цьому перерізі відсутнє лінійне переміщення за одночасно довільного кута повороту. Таким граничним умовам відповідає четверта схема таблиці, яку розташовано на рис. 1, і тому коефіцієнт зведення довжини $\mu_{xz} = 0,7$. Зведена довжина стержня в цій площині $\ell_{зв} = \mu_{xy} \cdot \ell = 0,7 \cdot 9 = 6,3 \text{ м}$. Гнучкість стержня в площині xy не перебільшує граничну:

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{6,3}{13,2 \cdot 10^{-2}} = 47,72 < \lambda_{\text{lim}} = 110.$$

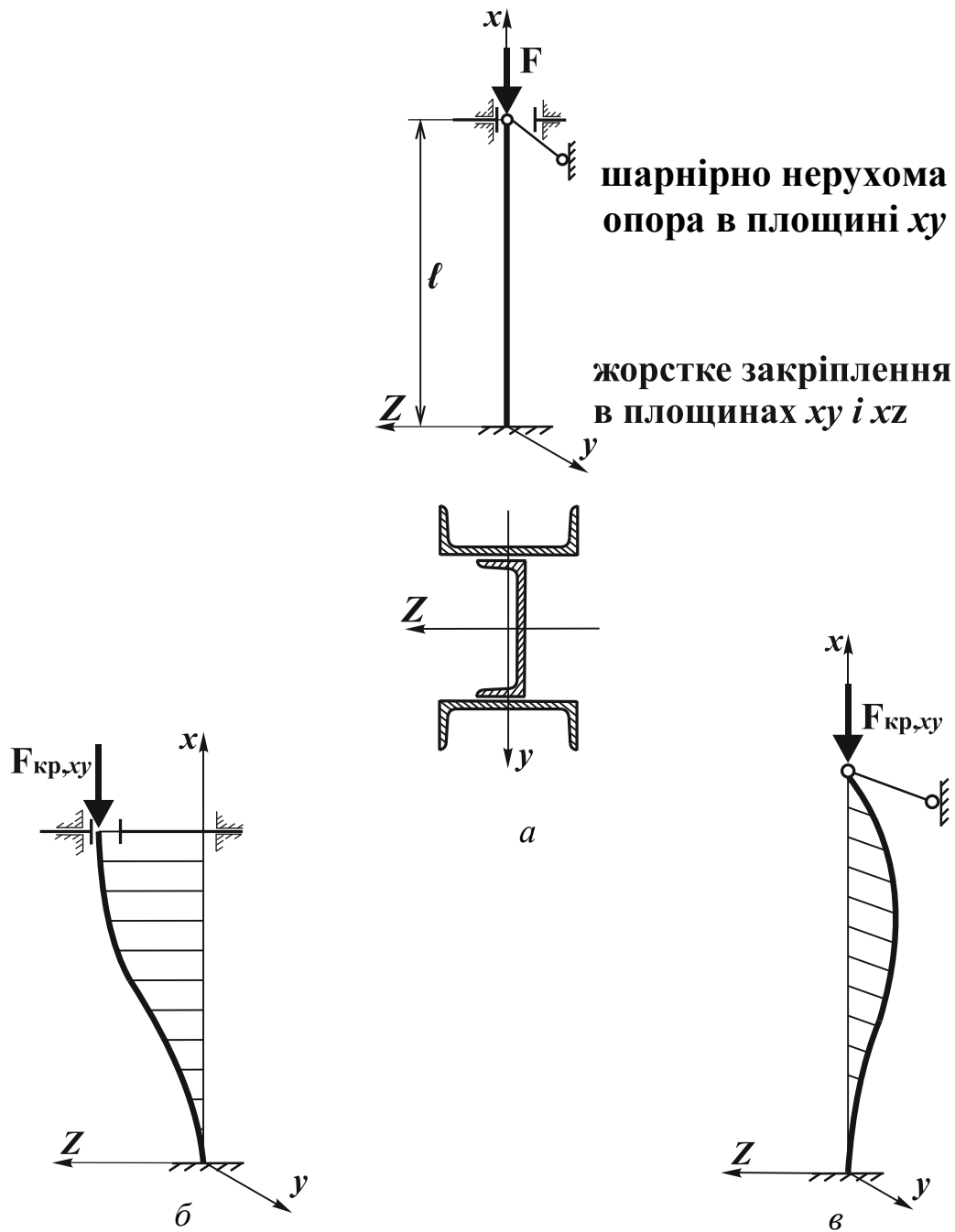


Рис. 4: а – прямолінійна форма рівноваги стержня за $F < F_{кр}$;

б – xz -можлива площина витрати стійкості за $F_{кр,xz}$;

в – xy -можлива площина витрати стійкості за, $F_{кр,ху}$.

Це свідчить, що втрата стійкості стержня відбувається за межею пружності матеріалу і критичне напруження визначають за формулою Ясінського:

$$\sigma_{кр,Яс} = a_{Яс} - b_{Яс} \lambda, = 29,3 - 0,194 \cdot 47,72 = 255,6 \text{ МПа} > 200 \text{ МПа} .$$

Воно перебільшує межу текучості сталі:

$$\sigma_{kp, Яс} = 255,6 \text{ МПа} > \sigma_T = \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$$

і тому в якості критичного напруження беруть $\sigma_{kp, Яс} = 200 \text{ МПа}$.

Критичну силу стержня за втрати стійкості в площині xu визначають так:

$$F_{kp, xy} = F_{kp, Яс} = A \cdot \sigma_{kp, Яс} = 91,8 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \cdot 10^6 = 1,836 \text{ МПа}.$$

Критична сила для стержня буде менше з двох значень:

$$F_{kp} = \min(F_{kp, xz}, F_{kp, xy}) = \min(1,464; 1,836) = 1,464 \text{ МН}.$$

Допустиме з умови стійкості прямого стержня навантаження:

$$F_{kp, adm} = \frac{F_{kp}}{k_{cm}} = \frac{1,464}{3} = 0,488 \text{ МН}$$

Вихідні дані до задачі 2

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третя	Четверта	п'ята	Шоста
	номер схеми стержня (дод. 1)	довжина стержня ℓ м	номер схеми перерізу (дод. 2)	номер сорта- менту	механічні характе- ристики (дод. 11)	Коефіцієнт безпеки за стійкістю k_{cm}
1	8	8,6	6	27	8	2,8
2	9	9,8	5	22	3	3,2
3	7	9,5	1	20	1	3
4	5	8,2	8	24	4	3,4
5	8	8,8	7	30	2	2,8
6	3	9	2	33	9	3,2
7	1	8,5	5	36	7	3,2
8	4	9,2	3	24	5	2,8
9	2	9,4	4	40	1	3

Задача 3

**Підбір з умови стійкості стержня розмірів
його поперечного перерізу**

Вихідні дані до задачі задано шифром 356893. Номер схеми стержня „3” дод. 1, креслення на рис. 5, а. Довжина стержня $\ell = 6$ м. Номер схеми перерізу стержня „9” дод. 3. Переріз має форму еліпса (рис. 5, а). Геометричний параметр ρ невідомий.

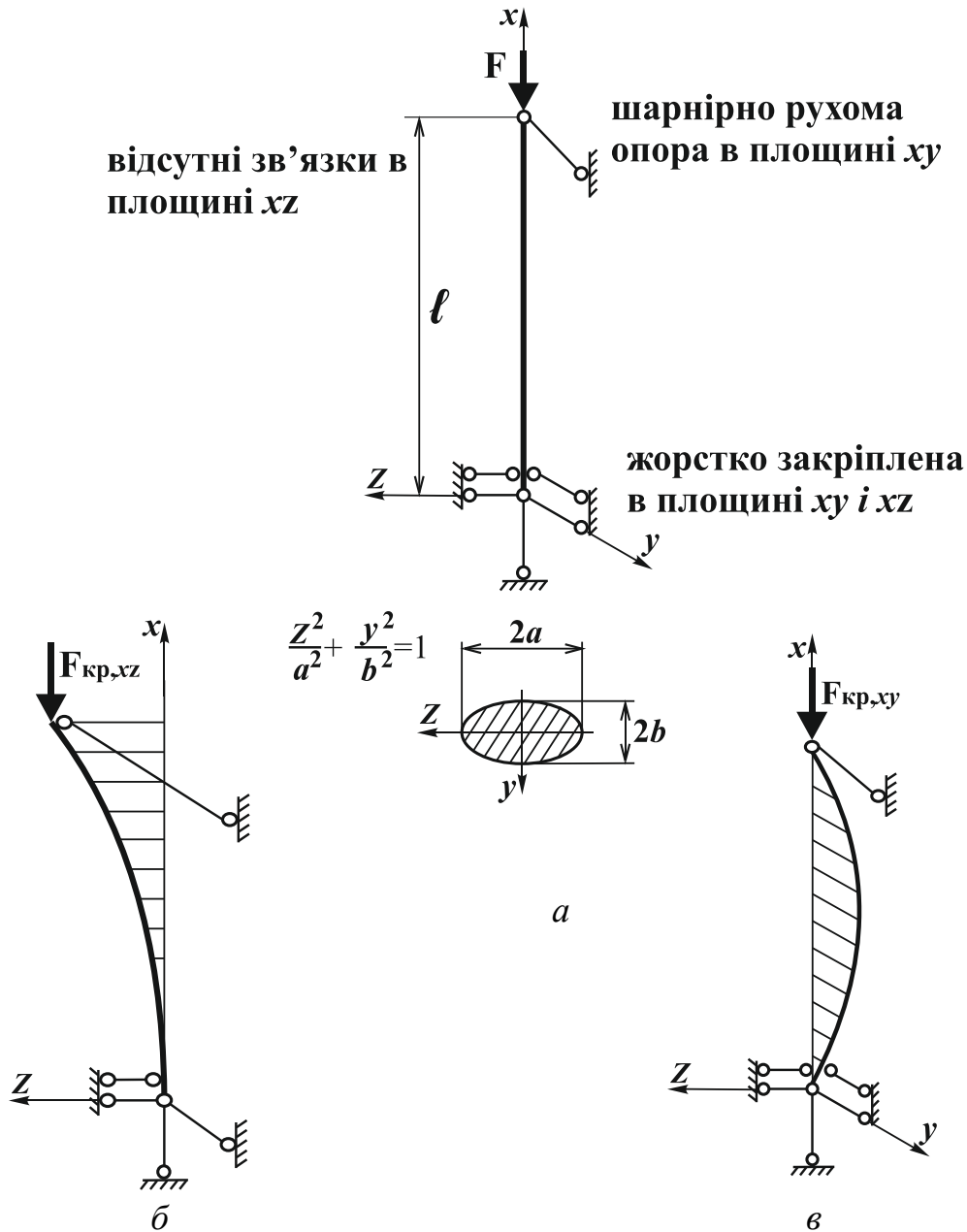


Рис. 5: а – прямолінійна форма рівноваги стержня за $F < F_{кр}$;
 б – xz -можлива площина витрати стійкості за $F_{кр,xz}$;
 в – xy -можлива площина витрати стійкості за, $F_{кр,xy}$.

Матеріал – сосна. Механічні характеристики матеріалу: модуль пружності $E = 10$ ГПа, допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 10$ МПа. Коефіцієнти формули Ясінського: $a_{Яс} = 29,3$ МПа, $b_{Яс} = 0,194$ МПа.

Значення граничної гнучкості $\lambda_{lim} = 110$. Значення діючої сили $F = 0,2$ МН.

За вихідними даними виконано креслення (рис. 5, а), на якому вказано як опирається стержень і наведено систему координат.

Потрібно підібрати з умови стійкості стержня розмір його поперечного перерізу.

Розв'язання задачі

Поперечний переріз стержня має форму еліпса (рис. 5, а). Його розміри не визначено. Вони залежать від параметра p , який невідомий. Значення параметра p потрібно визначити з умови стійкості стержня:

$$F_{кр} \leq F,$$

де $F_{кр}$ – критична сила; F – діюча на стержень сила.

Геометричні характеристики поперечного перерізу стержня визначають як функції невідомого геометричного параметра p . Переріз має форму еліпса. В системі координат, яку показано на рис. 5, а, мала вісь еліпса $2 \cdot b = 2p$ розташована вздовж осі y . Більша вісь еліпса $2 \cdot a = 4p$ розташована вздовж осі z . Площа еліпса $A = \pi ab = 2\pi p^2$.

$$\text{Моменти інерції } I_y = \frac{\pi a^3 b}{4} = 2\pi p^4, I_z = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{\pi p^4}{2}.$$

$$\text{Радіуси інерції } i_y = \frac{a}{2} = p, i_z = \frac{b}{2} = \frac{p}{2}.$$

Визначення значення критичного параметра p , якщо стержень втрачає стійкість у площині xz (рис. 5, б). У площині xz нижній кінець стержня жорстко закріплений. На верхньому кінці стержня відсутні будь-які зв'язі. Це вільний кінець стержня. Цим граничним умовам відповідає друга схема, яку розташовано на рис. 1 коефіцієнтів зведення довжини в цій площині $\mu_{xz} = 2$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 2 \cdot 6 = 12$ м. Гнучкість стержня в площині xz – це функція невідомого параметра p :

$$\lambda_{xz} = \frac{\ell_{зв}}{i_y} = \frac{12}{p}$$

і тому не можна визначити в межах пружності матеріалу, чи за межею пружності матеріалу відбувається втрата стійкості стержня. Потрібно розглянути обидві можливості і вибрати ту, що більш небезпечна.

Нехай втрата стійкості стержня відбувається в межах пружності матеріалу і критична сила в стержні у площині xz визначається за формулою Ейлера:

$$F_{kp,xz,Eйл} = F_{kp,Eйл} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\ell_{зв})^2} = \frac{\pi^2 E 2\pi r_{p,xz,Eйл}^4}{(\ell_{зв})^2}.$$

Вона не може перебільшувати діючу силу $F = 0,2$ МН. Умова стійкості

$$\frac{\pi^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 2\pi r_{p,xz,Eйл}^4}{(12)^2} = 2 \cdot 10^6$$

визначає критичне значення параметра $r_{kp,xz,Eйл} = 0,123$ м.

Якщо втрата стійкості стержня відбувається за межею пружності матеріалу, то критичне напруження визначають за формулою Ясінського.

Критична сила за втрати стійкості стержня в площині xz

$$F_{kp,xz,яс} = F_{kp,яс} = A \cdot \sigma_{kp,яс} = 2\pi \cdot r_{kp,xz,яс}^2 \left(29,3 - 0,194 \cdot \frac{\ell_{зв}}{r_{kp,xz,яс}} \right)$$

не може перебільшувати діючу силу $F = 0,2$ МН. Коефіцієнти формули Ясінського мають розмірність МПа. Умова стійкості

$$2\pi \cdot r_{kp,xz,яс}^2 \left(29,3 - 0,194 \cdot \frac{\ell_{зв}}{0,5 \cdot r_{kp,xz,яс}} \right) \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6.$$

Критичне значення геометричного параметра $r_{kp,xz,яс}$ визначається розв'язком квадратного рівняння:

$$r_{kp,xz,яс}^2 - 0,1589 \cdot r_{kp,xz,яс} - 1,08638 \cdot 10^{-2} = 0.$$

З двох коренів рівняння лише один додатній. Критичне значення геометричного параметра $r_{kp,xz,яс} = 0,151$ м.

У площині xz , з двох можливих значень критичного параметра потрібне більше:

$$r_{kp,xz} = \max(r_{kp,xz,Eйл}, r_{kp,xz,яс}) = \max(0,123; 0,151) = 0,151.$$

Визначення значення критичного параметра p , якщо стержень втрачає стійкість у площині xu (рис. 5, в). У площині xu нижній кінець стержня жорстко закріплений. Верхній кінець має шарнірну рухому опору в площині xu . В цьому перерізі відсутнє лінійне переміщення за одночасно довільного значення кута повороту. Цим граничним умовам відповідає четверта схема, яку розташовано на рис. 1 Коефіцієнт зведення довжини стержня в цій площині $\mu_{xu} = 0,7$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xu} \cdot \ell = 0,7 \cdot 6 = 4,2$ м. Гнучкість стержня в площині xu – це функція невідомого параметра p :

$$\lambda_{xu} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{2\ell_{зв}}{p} = \frac{8,4}{p}$$

і тому не можна визначити в межах пружності матеріалу чи за межею пружності матеріалу відбувається втрата стійкості стержня. Слід розглянути обидві можливості і вибрати ту, що більш небезпечна.

Нехай втрата стійкості стержня відбувається в межах пружності матеріалу і критичну силу в стержні у площині xu визначають за формулою Ейлера:

$$F_{кр,хu,Ейл} = F_{кр,Ейл} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{зв})^2} = \frac{\pi^2 E \pi r^4}{2(\ell_{зв})^2}.$$

Вона не може перебільшувати діючу силу $F = 0,2$ МН. Умова стійкості

$$\frac{\pi^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot \pi r^4}{2(4,2)^2} = 2 \cdot 10^6$$

дозволяє визначити критичне значення геометричного параметра $r_{кр,хz,Ейл} = 0,128$ м.

Якщо втрата стійкості стержня відбувається за межею пружності матеріалу, то критичне напруження визначається за формулою Ясінського.

Критична сила за втрати стійкості стержня в площині xu

$$F_{kr,xу,яс} = F_{kr,Яс} = A \cdot \sigma_{kr,Яс} = 2\pi \cdot p_{kr,xу,яс}^2 \left(29,3 - 0,194 \cdot \frac{2\ell_{зв}}{p_{kr,xу,яс}} \right)$$

не може перебільшувати діючу силу $F = 0,2$ МН. Коефіцієнти формули Ясінського мають розмірність МПа. Умова стійкості

$$2\pi \cdot p_{kr,xу,яс}^2 \left(29,3 - 0,194 \cdot \frac{2 \cdot 8,4}{p_{kr,xу,яс}} \right) \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6.$$

Критичне значення геометричного параметра $p_{kr,xz,яс}$ визначається розв'язком квадратного рівняння:

$$p_{kr,xz,яс}^2 - 7,945 \cdot 10^{-2} \cdot p_{kr,xz,яс} - 1,08638 \cdot 10^{-2} = 0.$$

З двох коренів рівняння лише один додатній. Критичне значення геометричного параметра $p_{kr,xz,яс} = 0,107$ м.

У площині $xу$, з двох можливих значень критичного параметра потрібно взяти більший:

$$p_{kr,xу} = \max(p_{kr,xу,Ейл}, p_{kr,xу,Яс}) = \max(0,128; 0,107) = 0,128.$$

Для стержня з двох можливих значень критичного параметра потрібно узяти більший:

$$p_{kr} = \max(p_{kr,xz}, p_{kr,xу}) = \max(0,151; 0,128) = 0,151.$$

Розміри еліпса $a = 0,302$ м, $b = 0,151$ м. Площа $A = 0,143$ м².

Моменти інерції $I_y = 3,266 \cdot 10^{-3}$ м⁴ $I_z = 8,166 \cdot 10^{-4}$ м⁴.

Радіуси інерції $i_y = 0,151$ м, $i_z = 0,075$ м.

Вихідні дані до задачі 3

Цифри шифру задачі						
	перша	друга	третя	четверта	п'ята	Шоста

№ пор.	номер схеми стержня (дод. 1)	довжина стержня, l , м	номер схеми перерізу (дод. 3)	геометричний параметр перерізу, p , м	механічні характеристики (дод. 11)	Діюча сила, F , МН
1	4	6	4		5	0,1
2	6	7	5		8	0,2
3	3	5	6		1	0,2
4	8	7	7		4	0,1
5	9	6	8		2	0,1
6	5	8	9		9	0,2
7	2	5	3		7	0,1
8	7	8	2		8	0,2
9	1	6	1		9	0,2

СТІЙКА МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

У розглянутих попередніх розрахунках на стійкість прямих стержнів без уваги залишилися недоліки геометрії стержня (початковий прогин), неоднорідність матеріалу, недосконалість опірних пристроїв та ін. Це спростило задачу і одночасно унеможливило врахування однієї важливої обставини. Досвід експлуатації будівельних споруд, лабораторні випробування стиснутих прямих стержнів показують, що у процесі зростання сили названі чинники суттєво впливають на викликані поздовжнім згинанням деформації і поперечні переміщення стержня. Більше того, ці переміщення суперечать головному твердженню теорії стійкості прямих стержнів, що до моменту втрати стійкості стержня має місце лише його початкова прямолінійна форма рівноваги. І лише, коли сила досягає свого критичного значення раптово виникає вигинання стержня і з'являється суміжна криволінійна форма рівноваги. В дійсності, внаслідок початкових недоліків, поздовжнє вигинання виникає з самого початку стискання стержня. Задача є геометрично нелінійною. В першу чергу, тому що зусилля, а саме згинальний момент, залежать від невідомих переміщень. Суттєво, що за малого, відносно критичного значення сили вплив усіх цих факторів на величину прогину незначний. Вплив нелінійності різко зростає під час наближення сили до її критичного значення. Все це стосується довгих стержнів. Для стержнів середньої довжини, виконаних з пластичного матеріалу, задача стає ще складнішою. Під час

навантаження виникають зони, де стискаючи напруження, перебільшують межу пружності матеріалу. Задача стає ще і фізично нелінійною. Порушується лінійна залежність між напруженнями і деформаціями. Це значно ускладнює задачу дослідження поздовжнього згинання прямого стержня. Щоб хоч якось врахувати сумарний вплив вказаних обставин і отримати хоча б спрощений розв'язок задачі, розглядається простіша задача *стійкої міцності* прямого стержня. Розшукуються лише нормальні напруження, але з урахуванням впливу дії поздовжньої сили на переміщеннях, викликаних поздовжнім згинанням. Це досягається за допомогою коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$. Так називається коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження у процесі розрахунку стержня на стискання за деформованою схемою.

В задачах міцності допустиме нормальне напруження визначається як зменшене в $k_{міц}$ разів руйнівне напруження:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{руйн}}{k_{міц}},$$

де $k_{міц}$ – коефіцієнт безпеки за міцністю, який залежить лише від властивості матеріалу; $\sigma_{руйн}$ – руйнівне напруження (σ_T – для пластичних, $\sigma_{вр}$ – для крихких матеріалів).

В задачах стійкості допустиме нормальне напруження визначається також як зменшення в $k_{см}$ разів, але критичного напруження:

$$\sigma_{adm,см} = \frac{\sigma_{кр}}{k_{см}(\lambda)},$$

де $k_{см}(\lambda)$ – коефіцієнт безпеки за стійкістю, який залежить не тільки від властивості матеріалу, а ще і від гнучкості стержня; $\sigma_{кр}$ – критичне напруження, яке виникає в стержні під час втрати стійкості.

Вважається, що стан руйнування стержня і стан втрати стійкості стержня небезпечні однаково:

$$\sigma_{руйн} = \sigma_{кр}.$$

Це дозволяє отримати формулу допустимого нормального напруження за стійкістю:

$$\sigma_{adm,cm} = \varphi(\lambda)\sigma_{adm},$$

де $\varphi(\lambda) = \frac{k_{миц}}{k_{cm}(\lambda)}$ є коефіцієнт зменшення основного допустимого

напруження під час стискання та розрахунку за деформованою схемою споруди. Враховуючи, що взагалі втрата стійкості стержня є явище небезпечніше ніж його руйнування, завжди значення коефіцієнта безпеки за стійкістю беруть більшим ніж значення коефіцієнта безпеки за міцністю $k_{cm}(\lambda) > k_{миц}$. Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$ величина обмежена:

$$0 < \varphi(\lambda) < 1.$$

Значення $\varphi(\lambda)$ змінюється від одиниці для коротких стержнів $\lambda < 40$, де критичні напруження досягають значення руйнівних і тому $k_{cm}(\lambda) = k_{миц}$ та $\varphi(\lambda) = 1$ прямує до нуля для довгих стержнів.

З конструктивних міркувань гнучкість довгих стержнів обмежується до $\lambda < 200$. Це обмежує і величину $\varphi(\lambda)$ до таких значень, що для довгих стержнів допустиме за стійкістю нормальне напруження становить приблизно шосту частину від допустимого за міцністю нормального напруження:

$$\sigma_{adm,cm} \geq \frac{\sigma_{adm}}{6}.$$

Для деяких конструктивних матеріалів існують таблиці $\varphi(\lambda)$ коефіцієнта поздовжнього згинання. Під час складання цих таблиць коефіцієнт безпеки за стійкістю $k_{cm}(\lambda)$ беруть різним для різних значень гнучкості стержня. Причому найбільше значення $k_{cm}(\lambda)$ беруть для середніх за гнучкістю стержнів.

Таким чином розрахунок на стійкість прямих стержнів замінюється розрахунком на стійку міцність. Замість перевірки виконання умови стійкості стержня $F \leq F_{кр}$ робиться перевірка виконання умови міцності стержня $\sigma \leq \sigma_{adm,cm}$ зі зменшеним значенням допустимого напруження $\sigma_{adm,cm} = \varphi(\lambda)\sigma_{adm}$.

ТРИ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКУ МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

Під час розрахунку на стійку міцність прямих стержнів, насамперед, зустрічаються такі задачі.

Задача 1. Перевірка стійкої міцності прямого стержня.

Задано розрахункову схему стержня, геометричні й механістичні параметри, які її визначають. Відоме діюче навантаження F .

Потрібно визначити допустиму з умови стійкої міцності силу $F_{adm,kr}$ і порівняти її з діючим навантаженням F .

Розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему стержня. Взяти початок системи координат у нижній нерухомій опорі та спрямувати вісь x вздовж осі стержня.

2. Якщо апріорі до розв'язку задачі не можна вказати площину втрати стійкості стержня, то потрібно послідовно розглянути можливий випадок втрати стійкості в обох головних площинах.

3. Припускається, що стержень втрачає стійкість у головній площині xy . Визначаються геометричні характеристики поперечного перерізу, в тому числі значення радіуса інерції i_z . Залежно від розрахункової схеми стержня знаходиться коефіцієнт зведення його довжини до довжини шарнірно опертого стержня μ_{xy} і зведена довжина $\ell_{z\theta} = \mu \ell_{xy}$. Визначається значення гнучкості в цій площині

$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{z\theta}}{i_z}$ і за відповідною таблицею додатка знаходиться значення коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$. Визначається допустима з умови стійкої міцності сила $F_{adm,xy}$.

4. Припускається, що стержень втрачає стійкість у головній площині xz . Визначаються геометричні характеристики поперечного перерізу, в тому числі значення радіуса інерції i_y . Залежно від розрахункової схеми стержня знаходиться μ_{xz} і зведена довжина

$\ell_{z\theta} = \mu \ell_{xz}$. Визначається значення гнучкості в цій площині: $\lambda_{xz} = \frac{\ell_{z\theta}}{i_y}$ і

за відповідною таблицею додатка значення коефіцієнта поздовжнього

згинання $\varphi(\lambda)$. Визначається допустима з умови стійкої міцності сила $F_{adm,xz}$.

5. Допустима з умови стійкої міцності сила буде менша з них:

$$F_{adm,kr} = \min(F_{adm,xy}, F_{adm,xz}).$$

6. Якщо $F \leq F_{adm,kr}$ – умова стійкої міцності виконується.

Задача 2. Визначення допустимого з умови стійкої міцності стержня навантаження $F_{adm,kr}$.

Задано розрахункову схему стержня, геометричні і механістичні параметри, які її визначають.

Потрібно визначити допустиме з умови стійкої міцності стержня навантаження $F_{adm,kr}$.

Розв'язання задачі

Розв'язок задачі, за винятком пункту 6, повністю збігається з розв'язком попередньої задачі.

Задача 3. Підбір з умови стійкої міцності стержня розмірів його поперечного перерізу або номера елемента сортаменту, з якого складається його поперечний переріз.

Задано розрахункову схему стержня, його довжину і механістичні характеристики. Лінійні розміри схеми поперечного перерізу стержня задані, якщо він складається з простих фігур (коло, квадрат, прямокутник та їх комбінації), з точністю до одного невідомого параметра r . У випадку, коли схема поперечного перерізу стержня складається з елементів сортаменту (швелер, двотавр, кутник) вказано тип елементів сортаменту. Невідомим є номер елементів сортаменту.

Потрібно визначити допустимі з умови стійкої міцності стержня розміри його поперечного перерізу. Виконати креслення схеми поперечного перерізу.

Розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему стержня. Узяти початок системи координат на нижній опорі та спрямувати вісь x вздовж осі стержня. Безпосередньо під розрахунковою схемою стержня потрібно накреслити схему поперечного перерізу. Для перерізів, які складаються з елементів сортаменту (двотавр, швелер, рівнобокий кутник), це робиться за довільного масштабу. Для перерізів, які складаються з простих фігур (коло, кільце та ін.), які наведено в дод. 3, це робиться за довільного значення шуканого параметра p (наприклад, $p = 1$).

2. Якщо апріорі до розв'язку задачі не можна вказати площину втрати стійкості стержня, то потрібно послідовно розглянути можливий випадок втрати стійкості в обох головних площинах.

3. Під час підбору розмірів поперечного перерізу стержнів доцільно поділяти поперечні перерізи стержнів на два типи: на поперечні перерізи, які складені з елементів сортаменту і на поперечні перерізи, які складені з простих фігур.

4. Для поперечних перерізів, які складені з елементів сортаменту, суттєво те, що всі його елементи, які складають цей переріз, позначені одним номером, який невідомий. Отже і геометричні характеристики поперечного перерізу (площа, головні моменти інерції та ін.) визначаються цим номером. Шуканий номер елемента можна визначити з відповідної таблиці сортаменту, якщо відома площа елемента. Шукана площа елемента визначається розв'язком рівняння, яке можна отримати з умови виконання стійкої міцності стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{adm,cm} = \varphi(\lambda)\sigma_{adm}.$$

Враховуючи, що гнучкість стержня – це функція від значення площі перерізу $\lambda = F(A)$, то це є рівняння з однією невідомою $A = ?$. Але залежність $\varphi(\lambda)$ для більшості конструктивних матеріалів задано у вигляді таблиць. Це ускладнює звичайне розв'язання рівняння. Зручніше розглядати це рівняння як рівняння з двома невідомими $A = ?$, $\lambda = ?$, зв'язок між якими задано за допомогою таблиць коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$.

Для розв'язання рівняння і визначення невідомих $A = ?$, $\lambda = ?$ можна застосувати звичайний метод послідовних наближень. Задається перше чергове значення однієї невідомої, наприклад, $A^{(0)}$. Відповідне значення іншої невідомої $\lambda^{(0)}$ визначається розв'язком основного рівняння. Далі перевіряються сусідні значення невідомої

$$\left| A^{(k+1)} - A^{(k)} \right| \leq \delta,$$

де k – номер наближення; δ – задана точність.

Якщо першочерговою невідомою є $\lambda^{(0)}$, то невідома $A^{(0)}$ визначається розв'язком основного рівняння. Далі перевіряються сусідні значення невідомої:

$$\left| \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \right| \leq \delta.$$

Процес ітерації закінчується після виконання вказаної умови або припиняється, якщо відбувається так зване зациклювання процесу рахування – періодичне повторювання одних і тих самих результатів незалежно від номера наближення k . Швидкість отримання розв'язку суттєво залежить від початкових значень невідомих. Для $A^{(0)}$ можна узяти значення площі, визначеної з умови міцності $A \geq \frac{F}{\sigma_{adm}}$.

Для $\lambda^{(0)}$ можна узяти значення $\lambda^{(0)} = 100$.

5. Для поперечних перерізів, які складені з простих фігур (коло, кільце, прямокутник), геометричні характеристики яких – це неперервні функції шуканого параметра ρ , розв'язок задачі можна прискорити за рахунок використання *питомого* радіуса інерції:

$$\rho = \frac{i}{\sqrt{A}},$$

де i – осьовий радіус інерції усього поперечного перерізу; A – площа усього поперечного перерізу.

Використання *питомого* радіуса інерції дозволяє отримати розв'язок задачі без застосування методу послідовних наближень, але потрібні спеціальні таблиці. За допомогою *питомого* радіуса інерції умову стійкої міцності стержня можна записати так:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \leq \frac{\mu \ell}{\rho} \sqrt{\frac{\sigma_{adm}}{F}}.$$

У цій нерівності усі компоненти, які знаходяться в правій частині, відомі. Тому можна підрахувати значення правої частини:

$$B = \frac{\mu \ell}{\rho} \sqrt{\frac{\sigma_{adm}}{F}}.$$

У лівій частині нерівності знаходиться відношення двох невідомих функцій $\lambda(p) = ?$ і $\varphi(\lambda) = ?$, які задано в табличному вигляді. Якщо доповнити відомі таблиці коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$ ще одним стовпцем $\frac{\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$, то це дає змогу для відомого значення B визначити значення обох невідомих $\lambda(p)$ і $\varphi(\lambda)$. За відомого значення $\varphi(\lambda)$ спочатку визначається площа поперечного перерізу:

$$A(p) = \frac{F}{\varphi(\lambda)\sigma_{adm}},$$

а потім і сам шуканий параметр p .

6. Припускається, що стержень втрачає стійкість в головній площині xy . Визначається значення шуканого параметра p_{xy} .

7. Припускається, що стержень втрачає стійкість у головній площині xz . Визначається значення шуканого параметра p_{xz} .

8. Дійсне значення шуканого параметра буде більше:

$$p = \max(p_{xy}, p_{xz}).$$

Задача підбору розмірів поперечного перерізу стержнів пов'язана з питанням раціональної форми перерізу під час поздовжнього стискання стержня. Доречні такі поради:

1. Дотримуватися умови рівності стійкості. Підбирати таку форму і розміри поперечного перерізу стержнів, коли виконується

$$F_{xy, kp} = F_{xz, kp}.$$

2. Для порівняння раціональності різних форм перерізів стержнів доцільно застосовувати значення питомого радіуса інерції.

Задача 4

Перевірка виконання умови стійкої міцності прямого стержня, навантаженого силою F

Вихідні дані до задачі. Розрахункова схема стержня і схема його поперечного перерізу співпадають з задачею 2 (див. рис. 4, а). Значення $\ell=9$ м.

Схема перерізу складається з трьох швелерів № 24. В системі координат, яку наведено на рис. 4, а, для середнього швелера площа $A = 30,6 \text{ см}^2$. Моменти інерції $I_y = 208 \text{ см}^4$, $I_z = 2900 \text{ см}^4$. Радіуси інерції $i_y = 2,6 \text{ см}$, $i_z = 9,73 \text{ см}$. Центр ваги $c = 2,42 \text{ см}$. Матеріал – сталь Ст. 3. Модуль пружності $E = 200 \text{ ГПа}$, допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$. Діюча сила $F = 0,9 \text{ МН}$.

Потрібно перевірити виконання умови стійкої міцності прямого стержня під час дії сили F .

Розв'язання задачі

Визначаємо критичну силу $F_{adm,xz}$, якщо стержень втрачає стійкість у площині xz (див. рис. 4, б). Тому $\mu_{xz} = 1$. Зведена довжина стержня $\ell_{zv} = \mu_{xz} \cdot \ell = 1 \cdot 9 = 9$ м. Геометричні характеристики в системі координат, яку наведено на рис. 4, а. Площа $A = 3 \cdot 30,6 = 91,8 \text{ см}^2$. Момент інерції $I_y = 2 \cdot 2900 + 208 = 6008 \text{ см}^4$.

$$\text{Радіус інерції } i_y = \sqrt{\frac{6008}{91,8}} = 8,09 \text{ см.}$$

$$\text{Гнучкість стержня в площині } xz \lambda_{xz} = \frac{\ell_{zv}}{i_y} = \frac{9}{8,09 \cdot 10^{-2}} = 111,2.$$

З дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сталь 3 СНП II 03-72”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці для значення гнучкості зі $\lambda=111$ і $\lambda=112$

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
111	0,506	156,04

111,2		
112	0,499	158,55

визначаємо значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(111,2) = \varphi(111) + \frac{\varphi(112) - \varphi(111)}{(112 - 111)} (111,2 - 111) = 0,5046.$$

Допустима з умови стійкої міцності стержня сила в площині xz
 $F_{adm,xz} = A\varphi(\lambda)\sigma_{adm} = 91,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5046 \cdot 200 \cdot 10^6 = 0,926 \text{ МН},$

Визначення критичної сили $F_{adm,xy}$, якщо стержень втрачає стійкість у площині xy (див. рис. 4, в). Тому $\mu_{xy} = 0,7$. Зведена довжина стержня $\ell_{ze} = \mu_{xy} \cdot \ell = 0,7 \cdot 9 = 6,3 \text{ м}.$

$$\text{Момент інерції } I_z = 2 \cdot (208 + 30,6 \cdot (12 + 2,42)^2) + 2900 = 16041,7 \text{ см}^4.$$

$$\text{Радіуси інерції } i_z = \sqrt{\frac{16041}{91,8}} = 13,2 \text{ см}.$$

$$\text{Гнучкість стержня в площині } xy \lambda_{xy} = \frac{\ell_{ze}}{i_z} = \frac{9}{13,2 \cdot 10^{-2}} = 47,72.$$

Значення коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(47,72)$ знаходиться між рядками таблиці дод. 8 зі значеннями $\lambda = 47$ і $\lambda = 48$

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
47	0,878	50,159
47,72		
48	0,875	51,314

і визначається шляхом лінійної інтерполяції:

$$\varphi(47,72) = \varphi(47) + \frac{\varphi(48) - \varphi(47)}{48 - 47} (47,72 - 47) = 0,8756.$$

Допустима з умови стійкої міцності стержня сила в площині xy :
 $F_{adm,xy} = A\varphi(\lambda)\sigma_{adm} = 91,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8756 \cdot 200 \cdot 10^6 = 1,6 \text{ МН},$

Допустима з умови стійкої міцності прямого стержня сила буде менша з двох:

$$F_{adm,kr} = \min(F_{adm,xy}, F_{adm,xz}) = \min(1,6; 0,926) = 0,926 \text{ МН}.$$

Висновок. Умова стійкої міцності прямого стержня виконується:

$$F = 0,9 \text{ МН} < F_{adm,kr} = 0,926 \text{ МН}.$$

Примітка. У випадку невиконання умови стійкої міцності прямого стержня робиться відповідний висновок.

Вихідні дані до задачі 4

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третья	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня, ℓ , м	номер схеми перерізу (дод. 2.)	геометричний параметр перерізу, ρ , м	механічні характеристики (дод.11.)	діюча сила, F , МН
1	8	8,8	6	40	1	1
2	7	9,4	5	22	1	0,9
3	9	9,5	7	36	1	0,8
4	5	10,2	8	24	1	0,7
5	3	8,8	7	27	1	1
6	8	9	8	33	1	0,6
7	1	8,5	5	30	1	0,9
8	2	9,8	7	24	1	1
9	4	9,4	6	40	1	0,8

Задача 5

Визначення допустимої з умови стійкої міцності стержня сили $F_{adm,kr}$

Вихідні дані до задачі. Розрахункова схема стержня і схема його поперечного перерізу співпадають з задачею 1 (див. рис. 3, а). Значення $\ell = 4,8$ м.

Поперечний переріз – прямокутник. $B = 0,3$ м, $H = 0,2$ м. У системі координат, яку наведено на рис. 3, а, довга сторона прямокутника розташована вздовж осі y . Площа $A = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$. Матеріал-сосна. Допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 10$ МПа.

Потрібно визначити допустиму з умови стійкої міцності силу $F_{adm,kr}$.

Розв'язання задачі

Визначення допустимої сили $F_{adm,xz}$, якщо стержень вигинається в площині xz (див. рис. 3, в). $\mu_{xz} = 1$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 1 \cdot 4,8 = 4,8$ м.

$$\text{Момент інерції } I_y = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

$$\text{Радіус інерції } i_y = 8,66 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\text{Гнучкість стержня в площині } xz \lambda_{xz} = \frac{\ell_{зв}}{i_y} = \frac{4,8}{8,66 \cdot 10^{-2}} = 55,42.$$

З дод. 7, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сосна”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці зі значеннями $\lambda = 55$ і $\lambda = 56$

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
55	0,758	63,173
55,52		
56	0,749	64,706

визначаємо значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(55,52) = \varphi(55) + \frac{\varphi(56) - \varphi(55)}{56 - 55} (55,52 - 55) = 0,753.$$

Допустима з умови стійкої міцності стержня сила в площині xz
 $F_{adm,xz} = A \varphi(\lambda) \sigma_{adm} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,753 \cdot 10 \cdot 10^6 = 0,452 \text{ МН},$

Визначення допустимої сили $F_{adm,xy}$, якщо стержень вигинається в площині xy (див. рис. 3, в). $\mu_{xy} = 2$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 2 \cdot 4,8 = 9,6$ м.

$$\text{Момент інерції } I_z = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

$$\text{Радіус інерції } i_z = 5,773 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Гнучкість стержня в площині xy

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{9,6}{5,773 \cdot 10^{-2}} = 166,2.$$

З дод. 7, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сосна”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
166	0,112	496,173

166/2		
167	0,111	501,25

зі значеннями $\lambda = 166$ і $\lambda = 167$ визначаємо значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(166,2) = \varphi(166) + \frac{\varphi(167) - \varphi(166)}{167 - 166} (166,2 - 166) = 0,1113.$$

Допустима з умови стійкої міцності стержня сила в площині xy $F_{adm,xy} = A\varphi(\lambda)\sigma_{adm} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1113 \cdot 10 \cdot 10^6 = 0,667 \text{ МН}$,

Допустима з умови стійкої міцності прямого стержня сила буде менша з двох:

$$F_{adm,kr} = \min(F_{adm,xy}, F_{adm,xz}) = \min(0,452; 0,667) = 0,452 \text{ КН}.$$

Вихідні дані до задачі 5

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третья	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня ℓ м	номер схеми перерізу (дод. 3.)	Номер сортаменту	механічні характеристики (дод. 11.)	діюча сила, F , МН
1	8	8	3	40	8	1
2	7	4	5	22	8	0,9
3	9	5	4	36	8	0,8
4	5	2	8	24	8	0,7
5	3	3	7	27	8	1
6	8	3	2	33	8	0,6
7	1	2	1	30	8	0,9
8	2	8	7	24	8	1
9	4	4	6	40	8	0,8

Задача 6

Підбір поперечного перерізу стержня з умови його стійкої міцності

Вихідні дані до задачі. Розрахункова схема стержня і схема його поперечного перерізу співпадають з даними задачі 3 (див. рис. 5, а).

Довжина стержня $\ell = 4$ м. Поперечний переріз має форму еліпса, у якого $a/b=2$ (дод. 3, схема 9). Геометрія еліпса визначається невідомим параметром p . У системі координат (див. рис. 5, а), мала вісь еліпса $2b = 2p$ розташована вздовж осі y . Велика вісь еліпса $2a = 4p$ розташована вздовж осі z . Матеріал – чавун. Допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 70$ МПа. Діюча сила $F = 2$ МН.

Потрібно з умови стійкої міцності підібрати параметр p .

Розв'язання задачі

Геометричні характеристики перерізу. Площа еліпса $A = 2\pi p^2$.

$$\text{Моменти інерції } I_y = \frac{\pi a^3 b}{4} = 2\pi p^4, \quad I_z = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{\pi p^4}{2}.$$

$$\text{Радіуси інерції } i_y = \frac{a}{2} = p, \quad i_z = \frac{b}{2} = \frac{p}{2}.$$

Питомі радіуси інерції перерізу:

$$\rho_{xy} = \frac{i_z}{\sqrt{A}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0,1995, \quad \rho_{xz} = \frac{i_y}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,399.$$

Визначення шуканого параметра p , якщо стержень вигинається в площині xz (див. рис. 5, б). $\mu_{xz} = 2$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 2 \cdot 4 = 8$ м.

Визначається параметр

$$\frac{\lambda_{xz}}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \frac{\mu_{xz} \ell}{\rho_{xz}} \sqrt{\frac{\sigma_{adm}}{F}}, \quad \frac{\lambda_{xz}}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \frac{2 \cdot 4}{0,399} \sqrt{\frac{70 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6}} = 118,62.$$

за допомогою якого в дод. 9, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, чавун”, шляхом лінійної інтерполяції у стовпчику $\lambda/\sqrt{\varphi}$ між рядками зі значеннями $\lambda/\sqrt{\varphi} = 116,631$ і $\lambda/\sqrt{\varphi} = 120,049$

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi(\lambda)}$
69	0,35	116,631
		118,62
70	0,34	120,049

визначається коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(118,52) = 0,35 + \frac{0,34 - 0,35}{120,049 - 116,631} (118,62 - 116,631) = 0,3441.$$

Шуканий параметр p можна визначити з умови стійкої міцності стержня в площині xz $F_{adm,xz} = F$, $A\varphi(\lambda_{xz})\sigma_{adm} = F$.

Отримане квадратне алгебраїчне рівняння для шуканого параметра

$$2\pi \cdot p^2 \cdot 0,3441 \cdot 70 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6.$$

Його додатній корінь $p_{xy} = 0,115$ см визначає розміри еліпса $a = 0,23$ см, $b = 0,115$ см.

Визначення шуканого параметра p , якщо стержень вигинається в площині xu (див. рис. 5, в). $\mu_{xz} = 1$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 1 \cdot 4 = 4$ м.

Визначається параметр

$$\frac{\lambda_{xy}}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \frac{\mu_{xy}\ell}{\rho_{xy}} \sqrt{\frac{\sigma_{adm}}{F}}; \quad \frac{\lambda_{xy}}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \frac{1 \cdot 4}{0,1995} \sqrt{\frac{70 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6}} = 118,62$$

Цьому значенню параметру $\lambda/\sqrt{\varphi} = 118,62$ у стовпчику $\varphi(\lambda)$ таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, чавун”, (див. дод. 9) відповідає значення коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(\lambda) = 0,3441$. Це збігається з попереднім розрахунком під час визначення параметра p при вигинанні стержня в площині xz . Для стержня виконується умова рівності стійкості. Результати, отримані для площині xu , придатні для всього стержня.

Вихідні дані до задачі 6

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третья	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня ℓ м	номер схеми перерізу (дод. 3)	геометричний параметр перерізу p , м	механічні характеристики (дод. 11)	діюча сила F МН
1	8	4,8	3		8	2
2	7	3,4	5		7	2,9
3	9	3,5	9		6	1,8
4	5	4,2	8		7	3,7
5	3	5,8	4		6	5
6	8	4,9	2		8	1,6

7	1	5,5	1		7	1,9
8	2	5,8	7		8	3
9	4	4,4	6		6	1,8

Задача 7

Підбір з умови стійкої міцності стержня номера рівнобокого кутника

Вихідні дані задачі. Розрахункову схему стержня і схему його поперечного перерізу наведені на рис. 6, а. Довжина стержня $\ell = 2$ м. Поперечний переріз це рівнобокий кутник. У системі координат (рис. 6, а) вісь x проходить через центр ваги перерізу і спрямована вздовж осі стержня. За $x=0$ поперечний переріз стержня жорстко закріплено. На іншому кінці стержня за $x=l$ відсутні будь які зв'язі. Сторони кутника паралельні двом координатним осям y і z . Матеріал-сталь. Допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 200$ МПа. Діюча сила $F = 0,2$ МН.

Потрібно з умови стійкої міцності підібрати розмір рівнобокого кутника.

Розв'язання задачі

Відомо, що головні осі рівнобокого кутника повернуті на кут 45° відносно його сторін. Втрата стійкості стержня відбувається в головній площині де гнучкість стержня найбільша. Це головна площина містить вісь стержня і вісь симетрії рівнобокого кутника. Вона позначена як вісь v . Це вісь $\max_{\text{итим}}$. Втрата стійкості стержня відбувається в цій площині xv . Стержень закріплено як консоль. Тому, згідно з другою схемою таблиці, яку розташовано на рис1., коефіцієнт зведення довжини $\mu_{xv} = 2$. Зведена довжина стержня $\ell_{ze} = \mu_{xv} \cdot \ell = 2 \cdot 2 = 4$ м.

Номер кутника визначаємо з умови стійкої міцності консолі, стиснутої силою

$$\frac{F}{\varphi(\lambda)A} \leq \sigma_{adm}$$

Ітерації відбуваються за змінній A .

Перша спроба. Задамо значення гнучкості $\lambda_{xy} = 100$. З дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання сталь 3 СНІП II 03-72”, цьому значенню гнучкості відповідає значення коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(100) = 0,582$. Потрібна площа визначається умовою стійкою міцності:

$$A^{(1)} = \frac{F}{\varphi(100) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,582 \cdot 200 \cdot 10^6} = 1,718 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

З дод. 6, де наведено дані сортаменту „Кутники рівнобокi (за ГОСТ 8239-72)”, в стовпчику „А” знаходяться значення площі кутників у см^2 .. Найближчим до потрібного $A=17,18 \text{ см}^2$ є значення площі $A^{(1)} = 17,2 \text{ см}^2$. Це кутник з шириною полки $b=110 \text{ мм}$ і товщиною полки $d=8 \text{ мм}$ Беремо цей кутник 110_8.

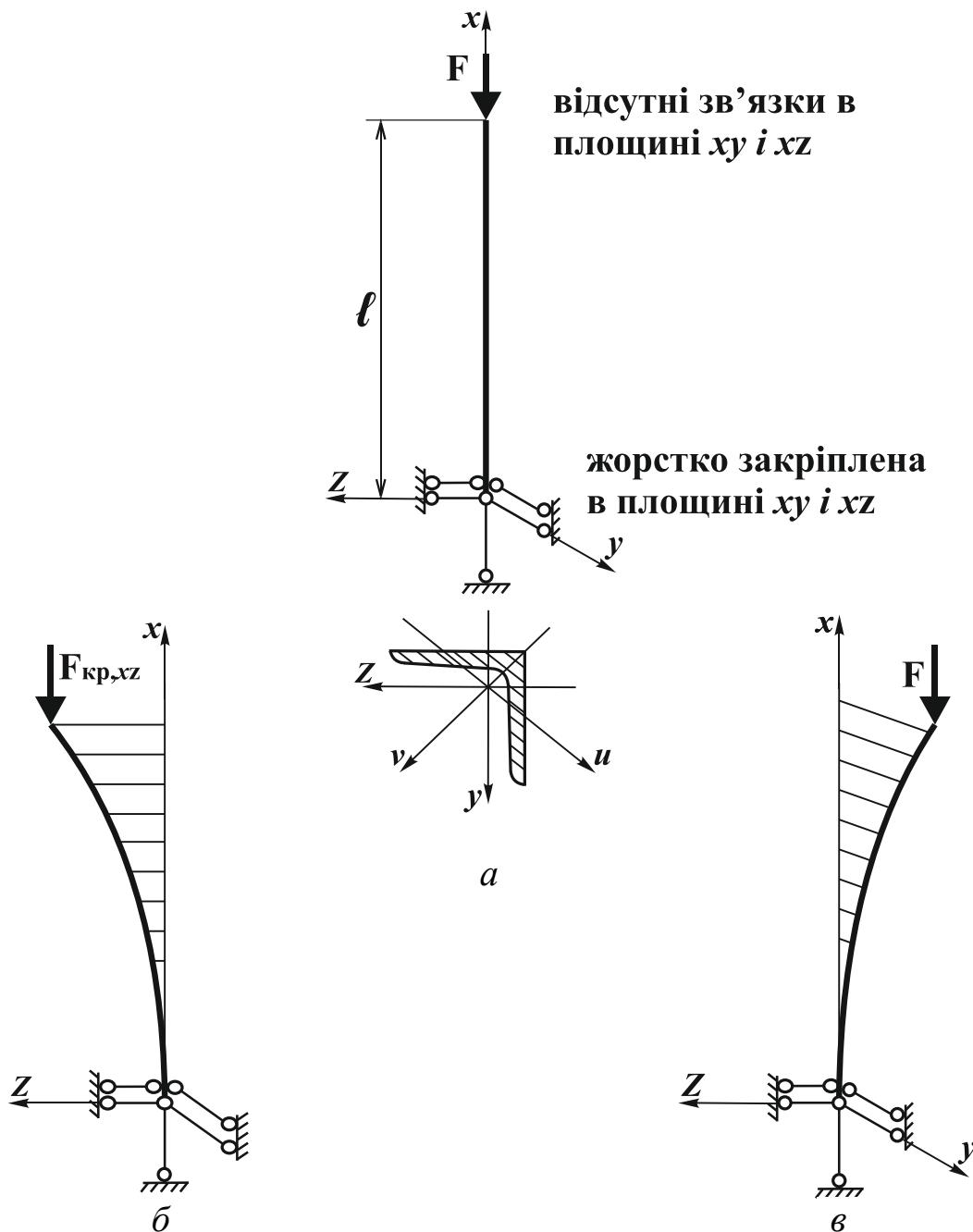


Рис. 6: a – прямолінійна форма рівноваги за $F < F_{кр}$;

$б$ – xz -можлива площина втрати стійкості за $F_{кр,xz}$;

$в$ – xy -можлива площина втрати стійкості за $F_{кр,xy}$.

У цьому рядку знаходиться значення мінімального радіуса інерції $i_{min} = 2,18$ см. Гнучкість стержня

$$\lambda_{max} = \frac{l_{3\beta}}{i_{min}} = \frac{4 \cdot 10^2}{2,18} = 183,486.$$

З дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сталь 3 СНІП II 03-72”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці для

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda\sqrt{\varphi(\lambda)}$
183	0,210	399,34
183,486		
184	0,208	403,45

значення гнучкості зі $\lambda=183$ і $\lambda=184$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(183,486) = \varphi(183) + \frac{\varphi(183) - \varphi(184)}{184 - 183} (183,486 - 183) = 0,209.$$

Відповідне значення нормального напруження

$$\sigma^{(1)} = \frac{F}{\varphi(183,486) \cdot A} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,209 \cdot 17,2 \cdot 10^{-4}} = 556,0 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 200$$

значно перебільшує допустиме напруження. Тому потрібна

друга спроба. Скористаємось попереднім значенням коефіцієнта поздовжнього згинання і визначимо потрібну площу перерізу:

$$A = \frac{F}{\varphi(183,486) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,209 \cdot 200 \cdot 10^6} = 47,84 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Цю вимогу задовольняє площа $A^{(2)} = 47,1 \text{ см}^2$ кутника 200_12.

Радіус інерції кутника $i_{min} = 3,99 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{4 \cdot 10^2}{3,99} = 100,25.$$

З дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сталь 3 СНІП II 03-72”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda\sqrt{\varphi(\lambda)}$
100	0,582	131,08
100,25		
101	0,575	133,19

зі значеннями $\lambda = 100$ і $\lambda = 101$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(100,25) = \varphi(100) + \frac{\varphi(101) - \varphi(100)}{101 - 100} (100,25 - 100) = 0,5802.$$

Відповідне значенню коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(100,25) = 0,5802$ нормальне напруження

$$\sigma^{(2)} = \frac{F}{\varphi(100,25) \cdot A} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,5802 \cdot 47,1 \cdot 10^{-4}} = 73,18 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$$

суттєво менше допустимого напруження. Тому потрібна

третьа спроба. Можна скоротити кількість ітерацій, якщо за потрібну площу перерізу узяти середнє значення площ двох попередніх спроб:

$$A = \frac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2} = \frac{17,2 + 47,1}{2} = 32,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Цю вимогу задовольняє площа $A^{(3)} = 31,4 \text{ см}^2$ кутника 160_10. Радіус інерції кутника $i_{min} = 3,19 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{4 \cdot 10^2}{3,19} = 125,4.$$

З дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці зі значеннями $\lambda = 125$ і $\lambda = 126$ визначається $\varphi(125,4) = 0,421$.

Відповідне нормальне напруження

$$\sigma^{(3)} = \frac{F}{\varphi(125,4) \cdot A} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,421 \cdot 31,4 \cdot 10^{-4}} = 151,4 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$$

менше допустимого напруження. Тому потрібна

четверта спроба. Враховуючи, що при перевірці стійкої міцності в першій спробі (кутник 110_8) нормальне напруження перебільшувало допустиме напруження

$$\sigma^{(1)} = 556,0 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 200$$

а під час другої і третій спроб (кутник 200_12 і кутник 160_10) відповідні значення нормальних напружень були меншими за допустиме напруження доцільно в четвертій спробі за потрібну площу перерізу взяти середнє значення площ першої і останньої третьої спроби:

$$A = \frac{A^{(1)} + A^{(3)}}{2} = \frac{17,2 + 31,4}{2} = 24,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Цю вимогу задовольняє площа $A^{(4)} = 24,7 \text{ см}^2$ кутника 140_9.

Радіус інерції кутника $i_{min} = 2,79 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{4 \cdot 10^2}{2,79} = 143,37.$$

З дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці зі значеннями $\lambda = 143$ і $\lambda = 144$ визначається $\varphi(143,4) = 0,334$.

Відповідне нормальне напруження

$$\sigma^{(4)} = \frac{F}{\varphi(143,4) \cdot A} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,334 \cdot 24,7 \cdot 10^{-4}} = 242,8 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$$

перебільшує допустиме напруження. Тому потрібна

п'ята спроба. Беремо кутник 140_10. Площа $A^{(4)} = 27,3 \text{ см}^2$.

Радіус інерції кутника $i_{min} = 2,78 \text{ см}$. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{4 \cdot 10^2}{2,78} = 143,9.$$

З дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці зі значеннями $\lambda = 143$ і $\lambda = 144$ визначається $\varphi(143,9) = 0,3315$.

Відповідне нормальне напруження

$$\sigma^{(5)} = \frac{F}{\varphi(143,9) \cdot A} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,3315 \cdot 27,3 \cdot 10^{-4}} = 221,0 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$$

перебільшує допустиме напруження на 10,5%.

Враховуючи, що найближчим зі значення площі $A^{(3)} = 31,4 \text{ см}^2$ є рівнобокий кутник 160_10, в якому значення нормальних напружень були меншими за допустиме напруження

$$\sigma^{(3)} = 151,4 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа} ,$$

береться кутник 160_10.

Вихідні дані до задачі 7

№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третя	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня ℓ м	номер схеми перерізу (дод. 2.)	номер сорта- менту	Механічні характе- ристики (дод. 11.)	діюча сила F МН
1	8	3,8	3		1	0,3
2	7	2,4	3		1	0,4
3	9	2,5	3		1	0,5
4	5	3,2	3		1	0,2
5	3	3	3		1	0,3
6	8	2	3		1	0,6
7	1	2,5	3		1	0,4
8	2	1,8	3		1	0,3
9	4	2,4	3		1	0,2

Задача 8

Підбір з умови стійкої міцності стержня номера елемента сортаменту

Вихідні дані до задачі. Розрахункову схему стержня і схему його поперечного перерізу задано (рис. 7, а). Довжина стержня $\ell = 6$ м. Поперечний переріз стержня складають два швелери. Матеріал – сталь. Допустиме за міцністю нормальне напруження $\sigma_{adm} = 240$ МПа. Діюча сила $F = 0,6$ МН.

Потрібно з умови стійкої міцності підібрати номер швелера або, якщо для заданого типу сортаменту це неможливо, то запропонувати інше рішення.

Розв'язання задачі

Поперечний переріз стержня складають елементи сортаменту (два швелери) і це дозволяє за допомогою умови рівності жорсткості спробувати підібрати найраціональніший переріз. У прийнятій системі координат для будь-якого номера швелера в площині xu гнучкість стержня обмежена величиною моменту інерції $2I_z$, де I_z – момент

інерції одного швелера. В протилежній площині значення моменту інерції залежить від параметра c $2I_n = 2(I_{n0} + A \cdot (z_0 + c)^2)$, де $2c$ – відстань між стінками двох швелерів. Тому гнучкість $\lambda_{xy}(c)$ можна змінювати. Доцільно визначити невідоме значення довжини відрізка $2c = ?$ з умови рівності жорсткості стержня.

Визначення шуканого номера швелера, якщо стержень вигинається в площині xy (рис. 7, в). Коефіцієнт $\mu_{xy} = 1$. Зведена довжина стержня $\ell_{зв} = \mu_{xz} \cdot \ell = 1 \cdot 6 = 6$ м.

Перша спроба. Задамо значення гнучкості $\lambda_{xy} = 100$. В дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання сталі 3 СНІП ІІ 03-72”, йому відповідає значення коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(100) = 0,582$. Потрібна площа визначається умовою стійкої міцності:

$$A = \frac{F}{\varphi(100) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,582 \cdot 240 \cdot 10^6} = 4,296 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Підбір номера швелера виконується за допомогою таблиці дод.5, де наведені дані сортаменту „Швелер (за ГОСТ 8240-72)”. В стовпчику „А” знаходяться значення площі швелера в см^2 . Під час першої спроби потрібна площа $A = 42,96 \text{ см}^2$. Цю вимогу задовольняє сума площ двох швелерів № 18а

$$A^{(1)} = 2 \cdot A(18a) = 2 \cdot 22,2 = 44,4 \text{ см}^2.$$

В рядку під номером 18а знаходяться інші геометричні характеристики, зокрема радіус інерції швелера $i_z = 7,32$ см. Гнучкість

$$\text{стержня } \lambda_{xy} = \frac{\ell_{зв}}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^2}{7,32} = 81,967.$$

З дод. 8, в таблиці “Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сталі 3 СНІП ІІ 03-72”, шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці

	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
81	0,709	96,197
81,967		
82	0,703	97,799

зі значеннями $\lambda = 81$ і $\lambda = 82$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(81,967) = \varphi(81) + \frac{\varphi(82) - \varphi(81)}{82 - 81} (81,967 - 81) = 0,703.$$

Відповідне значенню коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(81,967) = 0,703$ нормальне напруження

$$\sigma^{(1)} = \frac{F}{\varphi(81,967) \cdot A^{(1)}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,703 \cdot 44,4 \cdot 10^{-4}} = 192,2 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 240$$

менше допустимого напруження на 19,9%. Тому потрібна

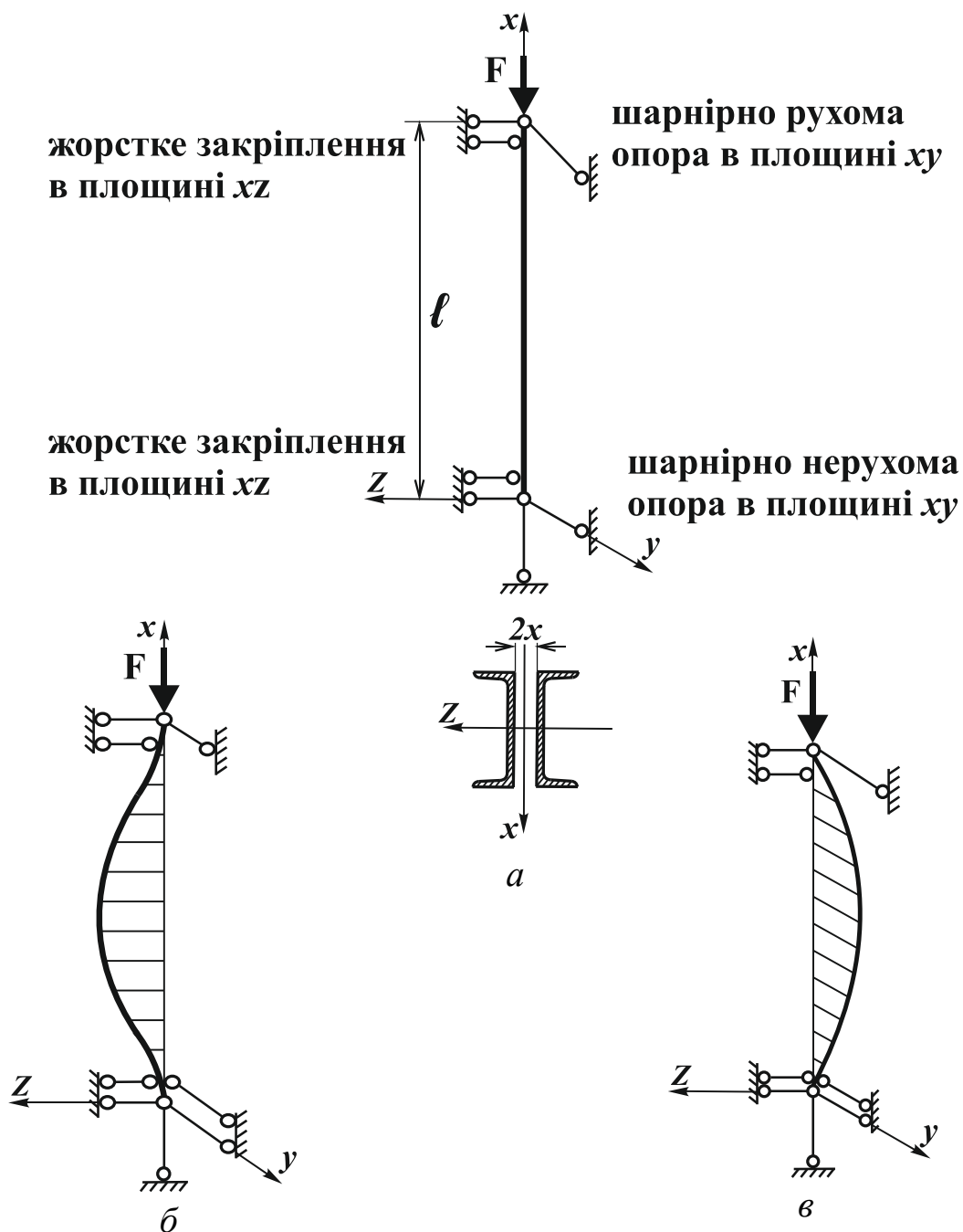


Рис. 7: *a* – прямолінійна форма рівноваги стержня за $F < F_{kp}$;

b – *xz*-можлива площина втрати стійкості за $F_{kp,xz}$;

в – *xy*-можлива площина втрати стійкості за $F_{kp,xy}$.

друга спроба. Скористаємось попереднім значенням коефіцієнта поздовжнього згинання і визначимо потрібну площу перерізу:

$$A = \frac{F}{\varphi(81,967) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,7032 \cdot 240 \cdot 10^6} = 3,555 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

Цю вимогу задовольняє площа двох швелерів № 16

$$A^{(2)} = 2 \cdot A(16) = 2 \cdot 18,1 = 36,2 \text{ см}^2.$$

Радіус інерції швелера № 16 $i_z = 6,42$ см. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{36}}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^2}{6,42} = 93,46.$$

З таблиці дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda \sqrt{\varphi(\lambda)}$
93	0,633	116,89
93,46		
94	0,626	118,81

таблиці зі значеннями $\lambda = 93$ і $\lambda = 94$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(93,46) = \varphi(93) + \frac{\varphi(94) - \varphi(93)}{94 - 93} (93,46 - 93) = 0,63.$$

Відповідне значенню коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(93,46) = 0,63$ нормальне напруження

$$\sigma^{(2)} = \frac{F}{\varphi(93,46) \cdot A^{(1)}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,63 \cdot 36,2 \cdot 10^{-4}} = 263,0 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 240 \text{ МПа}$$

перебільшує допустиме напруження на 9,6%. Тому потрібна

третья спроба. Скористаємось попереднім значенням коефіцієнта поздовжнього згинання і визначимо потрібну площу перерізу:

$$A = \frac{F}{\varphi(93,46) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,63 \cdot 240 \cdot 10^6} = 3,968 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Цю вимогу задовольняє сума площин двох швелерів № 18:

$$A^{(3)} = 2 \cdot A(18) = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ см}^2.$$

Радіус інерції швелера № 18 $i_z = 7,24$ см. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{38}}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^2}{7,24} = 82,87$$

З дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi(\lambda)}$
82	0,703	97,799
82,87		
83	0,697	99,417

зі значеннями $\lambda = 82$. і $\lambda = 83$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(82,87) = \varphi(82) + \frac{\varphi(83) - \varphi(82)}{83 - 82} (82,87 - 82) = 0,698.$$

Відповідне значенню коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(82,87)=0,698$ нормальне напруження

$$\sigma^{(3)} = \frac{F}{\varphi(82,87) \cdot A^{(1)}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,698 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4}} = 207,7 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 240$$

менше допустимого напруження на 13,45%. Цей результат кращий того, що був отриманий під час першої спроби. Але доцільна

четверта спроба. Скористаємось попереднім значенням коефіцієнта поздовжнього згинання і визначимо потрібну площу перерізу:

$$A = \frac{F}{\varphi(92,45) \cdot \sigma_{adm}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,637 \cdot 240 \cdot 10^6} = 3,582 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Цю вимогу задовольняє площа двох швелерів № 16а

$$A^{(4)} = 2 \cdot A(16a) = 2 \cdot 19,5 = 39 \text{ см}^2.$$

Радіус інерції швелера № 16а $i_z = 6,49$ см. Гнучкість стержня

$$\lambda_{xy} = \frac{\ell_{36}}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^2}{6,49} = 92,45.$$

З дод. 8 шляхом лінійної інтерполяції між рядками таблиці

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi(\lambda)}$
92	0,64	115
92,45		
93	0,633	116,89

зі значеннями $\lambda=92$ і $\lambda=93$ визначається значення коефіцієнта поздовжнього згинання:

$$\varphi(92,45) = \varphi(92) + \frac{\varphi(93) - \varphi(92)}{93 - 92} (92,87 - 92) = 0,637.$$

Відповідне значенню коефіцієнта поздовжнього згинання $\varphi(92,45) = 0,637$ нормальне напруження

$$\sigma^{(4)} = \frac{F}{\varphi(82,87) \cdot A^{(1)}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,637 \cdot 39 \cdot 10^{-4}} = 241,8 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 240 \text{ МПа}$$

перебільшує допустиме напруження $\sigma_{adm} = 240$ МПа на 0,75%.

Можна погодитися з таким перебільшенням допустимого напруження і узяти з умови стійкої міцності в площині xu два швелери № 16а.

Визначення невідомого значення довжини відрізка $c = ?$ з умови рівності жорсткості стержня в площинах xu і xz (рис. 7, в). В площині xz $\mu_{xz}=0,5$. Зведена довжина стержня $\ell_{36} = \mu_{xz} \cdot \ell = 0,5 \cdot 6 = 3$ м. Головний момент інерції швелера № 16а відносно осі, яка паралельна стінці $I_{0y} = 78,8 \cdot 10^{-4}$ м⁴. Відстань від стінки до центра ваги $z_0 = 2$ см. Площа одного швелера $A(16a) = 19,5$ см². Площа поперечного перерізу $A = 2 \cdot 19,5 \cdot 10^{-2} = 39 \cdot 10^{-2}$ м²

Момент інерції перерізу стержня відносно осі y

$$I_y = 2 \cdot (I_{0y} + (z_0 + c)^2 \cdot A) = 2 \cdot (78,8 \cdot 10^{-4} + (2 \cdot 10^{-2} + c)^2 \cdot 19,5 \cdot 10^{-4})$$

Радіус інерції i_y і гнучкість стержня в площині xz визначається за формулами:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \lambda_{xz} = \frac{\ell_{3\theta}}{i_y}.$$

Умова рівності жорсткості стержня:

$$F_{xz} = F_{xy} \quad \text{або} \quad \frac{F}{\varphi(\lambda_{xz})A} = \frac{F}{\varphi(\lambda_{xy})A}$$

можлива лише за умови:

$$\varphi(\lambda_{xz}) = \varphi(\lambda_{xy}) \quad \text{або} \quad \lambda_{xz} = \lambda_{xy}.$$

З умови рівності обох значень гнучкості отримане квадратне алгебраїчне рівняння для шуканої довжини відрізка $2c = ?$:

$$I_{y0} + (z_0 + c)^2 \cdot A = \left(\frac{\mu_{xz}}{\mu_{xy}}\right)^2 \cdot I_z.$$

У чисельному вигляді

$$78,8 \cdot 10^{-8} + (2 \cdot 10^{-2} + c)^2 \cdot 19,5 \cdot 10^{-4} = \left(\frac{0,5}{1}\right)^2 \cdot 823 \cdot 10^{-8}.$$

Його розв'язок визначає шукану довжину відрізка $2c = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м.

Таким чином поперечний переріз стержня складають два швелера 16а, стінки яких паралельні і розташовані на відстані $2c = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м.

Вихідні дані до задачі 8

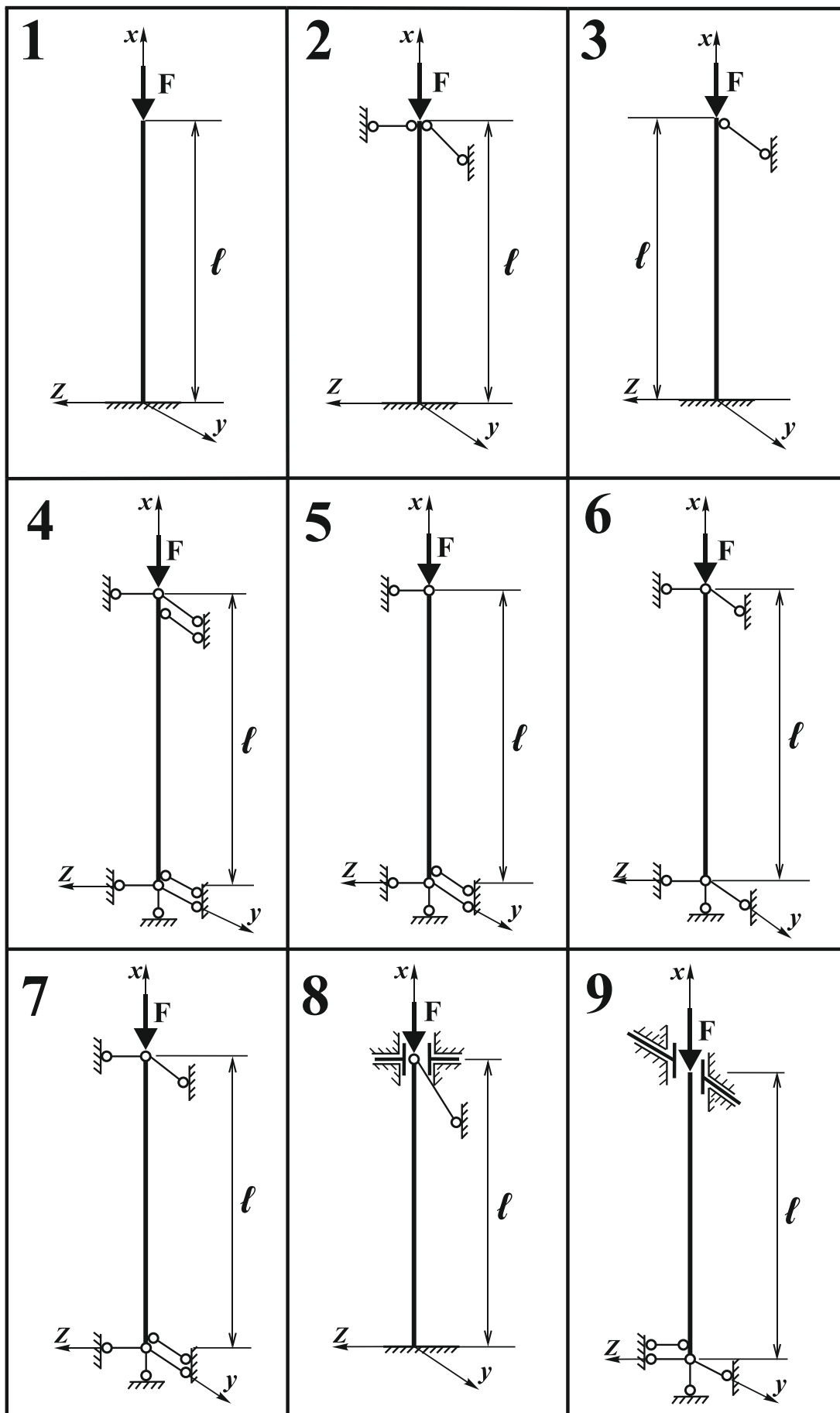
№ пор.	Цифри шифру задачі					
	перша	друга	третя	четверта	п'ята	шоста
	номер схеми стержня (дод. 1.)	довжина стержня, ℓ , м	схеми перерізу	номер сортаменту	механічні характеристики (дод. 11.)	діюча сила, F , МН
1	8	8,8	швелер	40	8	1
2	7	9,4	двотавр	22	3	0,9
3	9	9,5	швелер	36	1	0,8
4	5	10,2	швелер	24	5	0,7
5	3	8,8	двотавр	27	2	1
6	8	9	швелер	33	8	0,6
7	1	8,5	двотавр	30	7	0,9
8	2	9,8	7	24	5	1
9	4	9,4	6	40	1	0,8

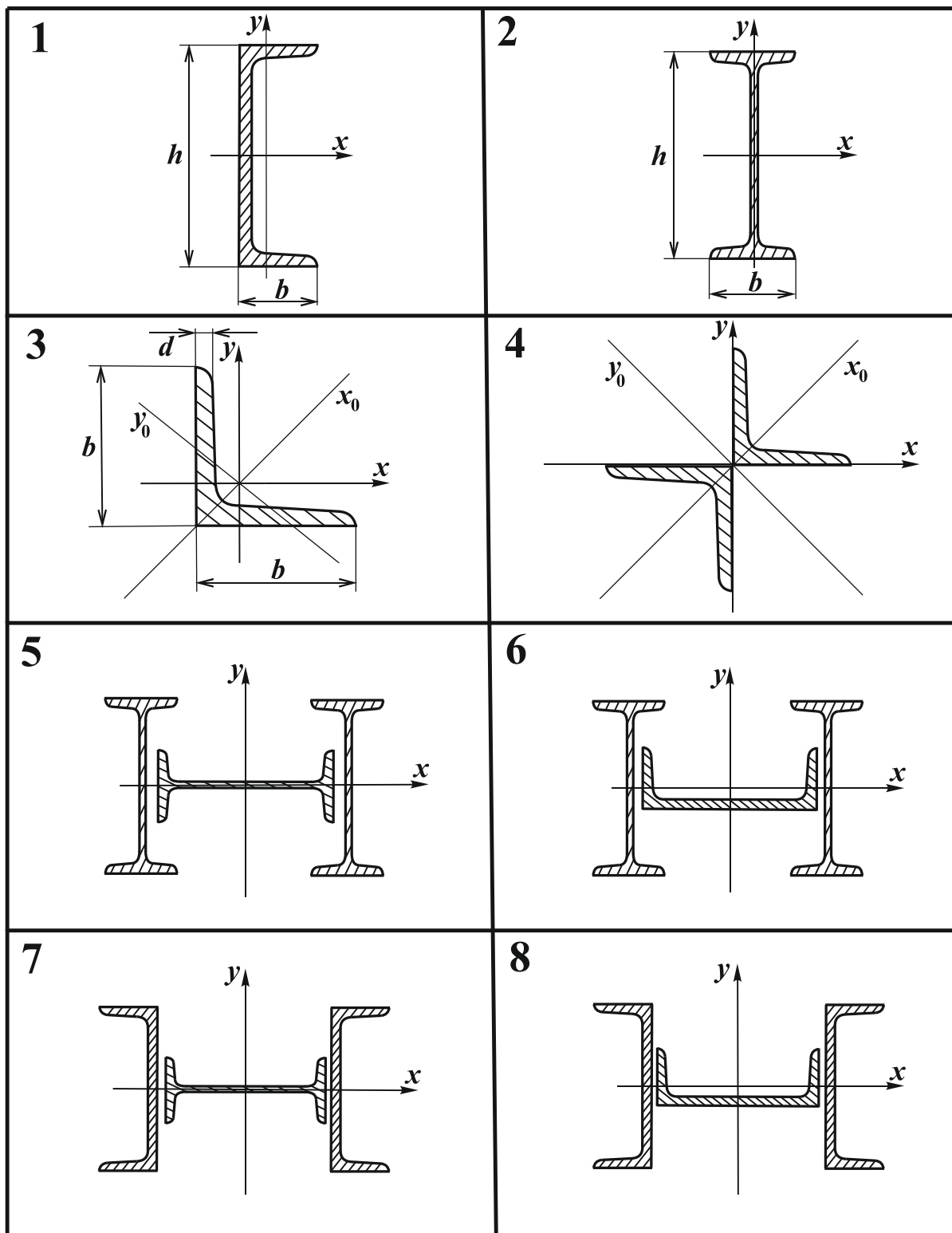
Список літератури

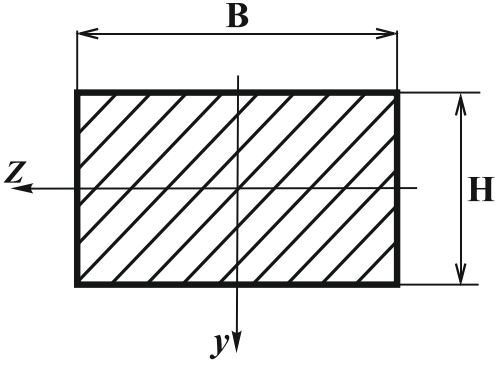
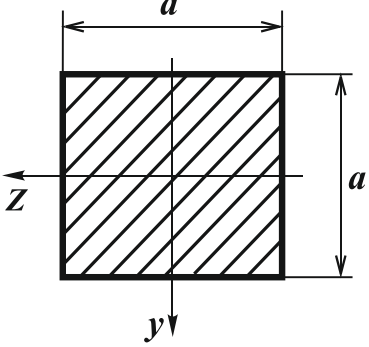
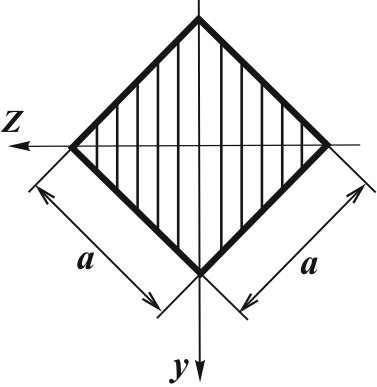
1. *Піскунов В.Г.* Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: підручник у 2 ч., 5 кн. -Ч. 1, кн. 2. Опір бруса. – К.: Вища школа. – 1944. – 333 с.

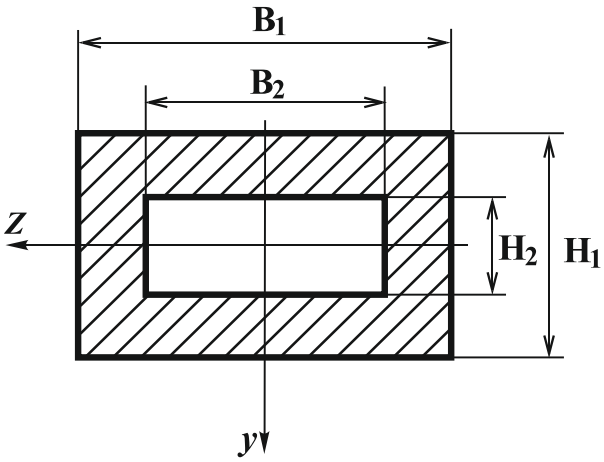
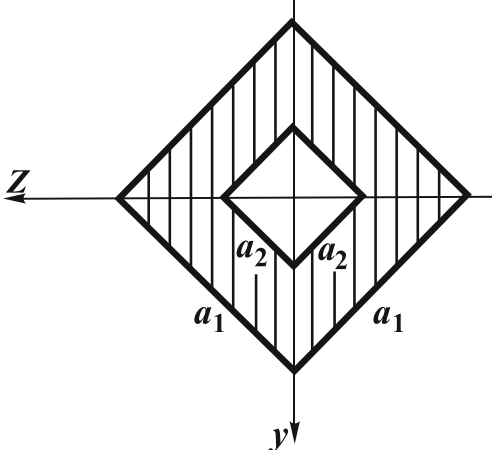
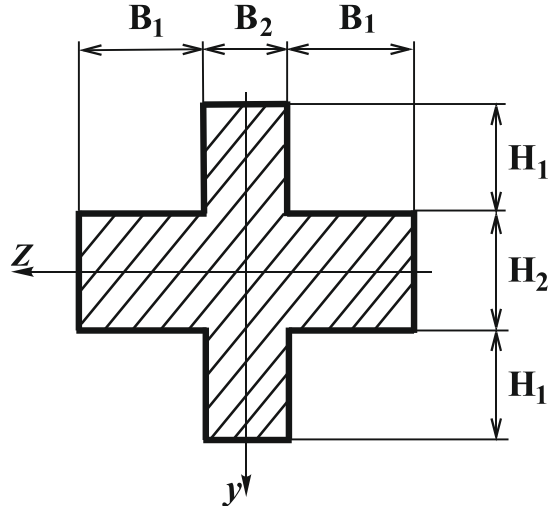
2. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С.* Опір матеріалів. – К.: Вища школа, 1993. – 654 с.

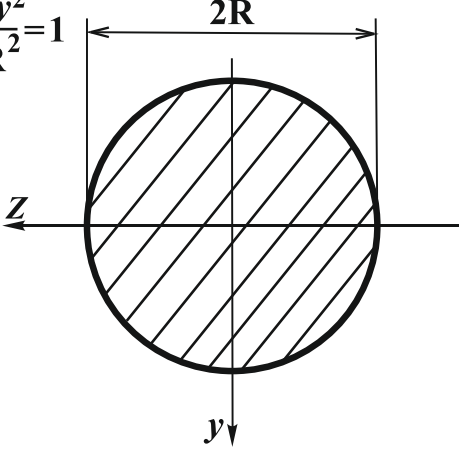
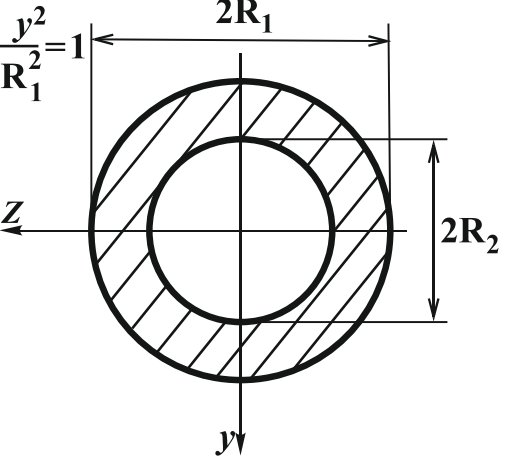
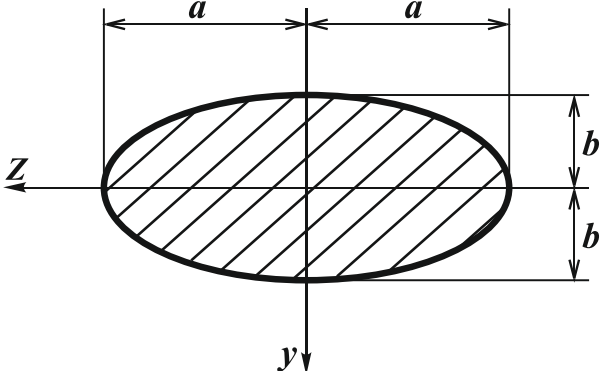
3. *СНиП II-23-81*: Стальные конструкции: нормы проектирования. – М.: Сройиздат, 1982. – 93 с.





<p>1</p>		<p>$p = \text{параметр}$ $H = p \quad B = 2 \cdot H$ $A = B \cdot H$ $I_z = \frac{B \cdot H^3}{12} \quad i_y = \frac{H}{\sqrt{12}}$ $I_y = \frac{B^3 \cdot H}{12} \quad i_z = \frac{H}{\sqrt{12}}$</p>
<p>2</p>		<p>$p\text{-параметр} \quad a=p$ $A = a^2$ $I_y = \frac{a^4}{12} \quad i_y = \frac{a}{\sqrt{12}}$ $I_z = \frac{a^4}{12} \quad i_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$</p>
<p>3</p>		<p>$p\text{-параметр} \quad a=p$ $A = a^2$ $I_y = \frac{a^4}{12} \quad i_y = \frac{a}{\sqrt{12}}$ $I_z = \frac{a^4}{12} \quad i_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$</p>

<p>4</p>		<p>p-параметр $B=p$ $B_1=3B_2 \quad H_1=\frac{B_1}{2}$ $A_1=B \cdot H_1 - B_2 \cdot H_2$ $I_z=\frac{B_1 \cdot H_1^3 - B_2 \cdot H_2^3}{12}$ $I_y=\frac{B_1^3 \cdot H_1 - B_2^3 \cdot H_2}{12}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$</p>
<p>5</p>		<p>p-параметр $a=p$ $a_1=2a_2$ $A_1=a_1^2 - a_2^2$ $I_y=\frac{1}{12}(a_1^4 - a_2^4)$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $I_z=I_y \quad i_z=i_y$</p>
<p>6</p>		<p>p-параметр $B=p$ $B_1=2B_2 \quad H_2=4H_1$ $H_1=B_1$ $A=2B_1 \cdot H_1 + B_2 \cdot H_2$ $I_z=\frac{B_1 \cdot H_2^3}{6} + \frac{B_2 \cdot (2H_1 + H_2)^3}{12}$ $I_y=\frac{H_1 \cdot B_2^3}{6} + \frac{H_2 \cdot (2B_1 + B_2)^3}{12}$ $i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$</p>

7	$\frac{z^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ 	<p>p-параметр $R=p$</p> $A = \pi \cdot R^2$ $I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad i_y = \frac{R}{2}$ $I_z = I_y \quad i_z = i_y$
8	$\frac{z^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2} = 1$ 	<p>p-параметр $R=p$</p> $R = 4R^2$ $A = \pi \cdot (R_1^2 - R_2^2)$ $I_y = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4)$ $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $I_z = I_y \quad i_z = i_y$
9	$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	<p>p-параметр $b=p$</p> $a = 2b$ $A = \pi ab$ $I_z = \frac{\pi}{4} ab^3 \quad i_z = \frac{b}{2}$ $I_y = \frac{\pi}{4} a^3 b \quad i_y = \frac{a}{2}$

Двотаври сталеві (за ГОСТ 8239-72)

№	A см ²	I _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _x см ³	I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см
10	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
24a	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Швелери сталеві (за ГОСТ 8240-72)

№	A см ²	I _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _x см ³	I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	z ₀ см
5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	4,84
6,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	5,90
8	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	17,0	454	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	20,7	1090	121	7,24	69,4	86	17,0	2,04	1,94
18a	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Кутники рівнобікі сталеві (по ГОСТ 8239-72)

Номер		А см ²	I _x см ⁴	i _x см	I _{max} см ⁴	i _{max} см	I _{min} см ⁴	i _{min} см	I _{x1} см ⁴	z ₀ см
b мм	d мм									
63	4	4.96	18.9	1.95	29.9	2.45	7.81	1.25	33.1	1.69
	5	6.13	23.1	1.94	36.6	2.44	9.52	1.25	41.5	1.74
70	4,5	6.20	29.0	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	51.0	1.88
	5	6.86	31.9	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	56.7	1.90
75	5	7.39	39.5	2.31	62.6	2.91	16.4	1.49	69.6	2.02
	6	8.78	46.6	2.30	73.9	2.90	19.3	1.48	83.6	2.06
80	5,5	8.63	52.7	2.47	83.6	3.11	21.8	1.59	93.2	2.17
	6	9.38	57.0	2.47	90.4	3.11	23.5	1.58	102	2.19
90	6	10.6	82.1	2.78	130	3.50	34.0	1.79	145	2.43
	7	12.3	94.3	2.77	150	3.49	38.9	1.78	169	2.47
100	6,5	12.8	122	3.09	193	3.88	50.7	1.99	214	2.68
	7	13.8	131	3.08	207	3.88	54.2	1.98	231	2.71
110	7	15.2	176	3.40	279	4.29	72.7	2.19	308	2.96
	8	17.2	198	3.39	315	4.28	81.8	2.18	353	3.00
125	8	19.7	294	3.37	467	4.87	122	2.49	516	3.36
	9	22.0	327	3.86	520	4.86	135	2.48	582	3.40
140	9	24.7	466	4.34	739	5.47	192	2.79	818	3.78
	10	27.3	512	4.33	814	5.46	211	2.78	911	3.82
160	10	31.4	774	4.96	1229	6.25	319	3.19	1356	4.30
	11	34.4	844	4.95	1341	6.24	348	3.18	1494	4.35
180	11	38.8	1216	5.60	1933	7.06	500	3.59	2128	4.85
	12	42.2	1317	5.59	2093	7.04	540	3.58	2324	4.89
200	12	47.1	1823	6.22	2896	7.84	749	3.99	3182	5.37
	13	50.9	1961	6.21	3116	7.83	805	3.98	3452	5.42
220	14	60.4	2814	6.83	4470	8.60	1159	4.38	4941	5.93
	16	68.6	3175	6.81	5045	8.58	1306	4.36	5661	6.02
250	16	78.4	4717	7.76	7492	9.78	1942	4.98	8286	6.75
	18	87.7	5247	7.73	8337	9.75	2158	4.96	9342	6.83

Примітка. Номер кутника співпадає з розміром ширини полиці *b* мм

Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сосна, СНП II-B 3-72

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0	1	0	40	0,872	42,835	80	0,48	115,44
1	1	1	41	0,866	44,058	81	0,472	117,9
2	1	2	42	0,859	45,316	82	0,461	120,77
3	0,999	3,003	43	0,852	46,476	83	0,45	123,73
4	0,999	4,004	44	0,845	47,866	84	0,439	126,78
5	0,998	5,01	45	0,838	49,158	85	0,429	129,77
6	0,997	6,0181	46	0,831	50,461	86	0,419	132,86
7	0,996	7,0281	47	0,823	51,808	87	0,41	135,87
8	0,995	8,0402	48	0,816	53,138	88	0,4	139,14
9	0,994	9,0543	49	0,808	54,512	89	0,391	142,33
10	0,992	10,081	50	0,8	55,902	90	0,383	145,42
11	0,99	11,111	51	0,792	57,307	91	0,374	148,8
12	0,938	12,793	52	0,784	58,728	92	0,366	152,07
13	0,986	13,185	53	0,775	60,204	93	0,353	156,53
14	0,984	14,228	54	0,767	61,659	94	0,351	158,66
15	0,982	15,275	55	0,758	63,173	95	0,343	162,21
16	0,98	16,327	56	0,749	64,706	96	0,336	165,62
17	0,977	17,4	57	0,74	66,261	97	0,329	169,11
18	0,974	18,48	58	0,731	67,837	98	0,323	172,43
19	0,971	19,567	59	0,722	69,436	99	0,316	176,11
20	0,963	20,768	60	0,712	71,107	100	0,31	179,61
21	0,965	21,762	61	0,702	72,805	101	0,304	183,18
22	0,961	22,893	62	0,692	74,531	102	0,298	186,85
23	0,958	24,008	63	0,682	76,287	103	0,292	190,61
24	0,954	25,157	64	0,672	78,072	104	0,287	194,13
25	0,95	26,316	65	0,662	79,889	105	0,281	198,07
26	0,946	27,484	66	0,652	81,737	106	0,276	201,77
27	0,942	28,662	67	0,641	83,685	107	0,271	205,54
28	0,937	29,883	68	0,63	85,672	108	0,266	209,4
29	0,933	31,083	69	0,619	87,701	109	0,261	213,36

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
30	0,928	31,142	70	0,603	90,145	110	0,255	217,83
31	0,923	32,267	71	0,597	91,891	111	0,252	221,12
32	0,918	34,858	72	0,585	94,136	112	0,247	225,36
33	0,913	36,145	73	0,574	96,353	113	0,243	229,23
34	0,904	36,811	74	0,562	98,711	114	0,239	233,19
35	0,90	38,803	75	0,55	101,13	115	0,234	237,73
36	0,896	39,0	76	0,533	104,1	116	0,23	241,88
37	0,889	39,22	77	0,523	106,47	117	0,226	246,11
38	0,884	40,416	78	0,51	109,22	118	0,223	249,88
39	0,878	41,621	79	0,497	112,06	119	0,219	254,29
120	0,215	258,8	150	0,138	403,79	180	0,096	580,95
121	0,212	262,8	151	0,136	409,46	181	0,095	587,24
122	0,208	267,5	152	0,134	415,23	182	0,094	593,62
123	0,205	271,66	153	0,132	421,12	183	0,093	600,08
124	0,202	275,9	154	0,131	425,49	184	0,092	606,63
125	0,198	280,92	155	0,129	431,56	185	0,091	613,27
126	0,195	285,33	156	0,127	437,75	186	0,09	620
127	0,192	289,84	157	0,125	444,06	187	0,089	626,82
128	0,189	294,43	158	0,124	448,69	188	0,088	633,75
129	0,186	299,11	159	0,123	453,36	189	0,087	640,77
130	0,184	303,41	160	0,121	459,97	190	0,086	647,89
131	0,18	308,12	161	0,12	464,77	191	0,085	655,12
132	0,177	313,17	162	0,118	471,6	192	0,084	662,46
133	0,175	317,93	163	0,117	476,53	193	0,083	669,9
134	0,173	322,17	164	0,115	483,61	194	0,082	677,48
135	0,17	327,42	165	0,114	488,69	195	0,082	680,97
136	0,163	336,86	166	0,112	496,02	196	0,081	688,67
137	0,165	337,27	167	0,111	501,25	197	0,08	696,5
138	0,163	341,81	168	0,11	506,54	198	0,079	704,45
139	0,16	347,5	169	0,109	511,89	199	0,078	712,53
140	0,158	352,21	170	0,107	519,71	200	0,078	716,11

Закінчення дод. 7

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
141	0,156	356,99	171	0,106	525,22			
142	0,154	361,85	172	0,105	530,8			
143	0,152	366,79	173	0,104	536,45			
144	0,149	373,05	174	0,102	544,82			
145	0,147	378,19	175	0,101	550,65			
146	0,145	383,41	176	0,1	556,56			
147	0,143	388,73	177	0,099	562,54			
148	0,142	392,75	178	0,093	583,68			
149	0,14	398,22	179	0,097	574,73			

Додаток 8

Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, сталь 3, СНП II В3-72

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0	1	0	40	0,905	42,047	80	0,715	94,61
1	0,999	1,0005	41	0,901	43,194	81	0,709	96,197
2	0,998	2,002	42	0,897	44,346	82	0,703	97,799
3	0,996	3,006	43	0,894	45,478	83	0,697	99,417
4	0,995	4,01	44	0,89	46,64	84	0,691	101,05
5	0,994	5,0151	45	0,886	47,807	85	0,685	102,7
6	0,993	6,0211	46	0,882	48,981	86	0,679	104,37
7	0,992	7,0282	47	0,878	50,159	87	0,673	106,05
8	0,99	8,0403	48	0,875	51,314	88	0,667	107,75
9	0,989	9,0499	49	0,871	52,503	89	0,661	109,47
10	0,988	10,061	50	0,867	53,698	90	0,655	111,2
11	0,986	11,078	51	0,862	54,931	91	0,648	113,05
12	0,984	12,097	52	0,858	56,138	92	0,64	115
13	0,933	13,459	53	0,853	57,385	93	0,633	116,89
14	0,981	14,135	54	0,848	58,64	94	0,626	118,81
15	0,979	15,16	55	0,844	59,868	95	0,619	120,75
16	0,977	16,187	56	0,839	61,137	96	0,611	122,81
17	0,975	17,217	57	0,834	62,415	97	0,604	124,81

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
18	0,974	18,239	58	0,829	63,702	98	0,597	126,83
19	0,972	19,272	59	0,825	64,957	99	0,589	129
20	0,97	20,307	60	0,82	66,259	100	0,582	131,08
21	0,967	21,355	61	0,815	67,57	101	0,575	133,19
22	0,965	22,395	62	0,81	68,889	102	0,568	135,34
23	0,962	23,45	63	0,805	70,217	103	0,561	137,52
24	0,959	24,508	64	0,8	71,554	104	0,554	139,73
25	0,956	25,569	65	0,795	72,9	105	0,547	141,97
26	0,954	26,619	66	0,79	74,256	106	0,54	144,25
27	0,951	27,687	67	0,785	75,621	107	0,533	146,56
28	0,948	28,758	68	0,78	76,995	108	0,526	148,91
29	0,946	29,816	69	0,775	78,379	109	0,519	151,3
30	0,943	30,893	70	0,77	79,772	110	0,512	153,73
31	0,939	31,991	71	0,764	81,229	111	0,506	156,04
32	0,935	33,094	72	0,759	82,644	112	0,499	158,55
33	0,932	34,183	73	0,754	84,069	113	0,493	160,94
34	0,928	35,294	74	0,748	85,562	114	0,486	163,53
35	0,924	36,411	75	0,742	87,068	115	0,48	165,99
36	0,92	37,533	76	0,737	88,528	116	0,474	168,49
37	0,916	38,659	77	0,732	89,998	117	0,467	171,21
38	0,913	39,769	78	0,726	91,543	118	0,461	173,79
39	0,909	40,906	79	0,72	93,102	119	0,454	176,61
120	0,448	179,28	160	0,27	307,92	200	0,175	478,09
121	0,443	181,8	161	0,267	311,58	201	0,174	481,86
122	0,438	184,34	162	0,264	315,29	202	0,172	487,07
123	0,433	186,92	163	0,261	319,06	203	0,171	490,91
124	0,428	189,54	164	0,258	322,87	204	0,169	496,23
125	0,423	192,19	165	0,255	326,75	205	0,168	500,15
126	0,417	195,12	166	0,252	330,68	206	0,167	504,09
127	0,412	197,86	167	0,249	334,67	207	0,165	509,6
128	0,407	200,64	168	0,246	338,72	208	0,163	515,19

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
129	0,402	203,46	169	0,243	342,83	209	0,162	519,26
130	0,397	206,32	170	0,24	347,01			
131	0,392	209,23	171	0,238	350,52			
132	0,387	212,19	172	0,235	354,81			
133	0,382	215,19	173	0,233	358,4			
134	0,377	218,24	174	0,23	362,82			
135	0,372	221,34	175	0,228	366,5			
136	0,368	224,19	176	0,226	370,22			
137	0,363	227,39	177	0,223	374,82			
138	0,358	230,64	178	0,221	378,64			
139	0,353	233,95	179	0,218	383,38			
140	0,348	237,32	180	0,216	387,3			
141	0,344	240,4	181	0,214	391,27			
142	0,339	243,89	182	0,212	395,28			
143	0,335	247,07	183	0,21	399,34			
144	0,331	250,29	184	0,208	403,45			
145	0,326	253,96	185	0,206	407,6			
146	0,322	257,29	186	0,204	411,81			
147	0,318	260,68	187	0,202	416,07			
148	0,314	264,12	188	0,2	420,38			
149	0,309	268,04	189	0,198	424,75			
150	0,305	271,61	190	0,196	429,17			
151	0,302	274,77	191	0,194	433,64			
152	0,298	278,44	192	0,192	438,18			
153	0,295	281,7	193	0,19	442,77			
154	0,291	285,48	194	0,188	447,43			
155	0,288	288,83	195	0,186	452,15			
156	0,284	292,73	196	0,184	456,93			
157	0,281	296,17	197	0,181	463,05			
158	0,277	300,2	198	0,179	467,99			
159	0,274	303,75	199	0,177	473,01			

Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, чавун

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0			40	0,69	48,154	80	0,26	156,893
1			41	0,678	49,793	81	0,254	160,719
2			42	0,665	51,504	82	0,248	164,660
3			43	0,654	53,172	83	0,242	168,721
4			44	0,642	54,914	84	0,236	172,911
5			45	0,63	56,695	85	0,23	177,237
6			46	0,618	58,515	86	0,224	181,708
7			47	0,606	60,376	87	0,218	186,334
8			48	0,594	62,280	88	0,212	191,124
9			49	0,582	64,230	89	0,206	196,090
10	0,97	10,153	50	0,57	66,227	90	0,2	201,246
11	0,964	11,204	51	0,557	68,335	91	0,196	205,548
12	0,958	12,260	52	0,544	70,502	92	0,192	209,960
13	0,952	13,324	53	0,531	72,733	93	0,188	214,489
14	0,946	14,394	54	0,518	75,029	94	0,184	219,139
15	0,94	15,471	55	0,505	77,396	95	0,18	223,917
16	0,934	16,556	56	0,492	79,837	96	0,176	228,831
17	0,928	17,647	57	0,479	82,358	97	0,172	233,888
18	0,922	18,746	58	0,466	84,964	98	0,168	239,096
19	0,916	19,852	59	0,453	87,660	99	0,164	244,463
20	0,91	20,966	60	0,44	90,453	100	0,16	250,000
21	0,9	22,136	61	0,43	93,024	101	0,144	266,158
22	0,89	23,320	62	0,42	95,668	102	0,128	285,099
23	0,88	24,518	63	0,41	98,389	103	0,112	307,771
24	0,87	25,731	64	0,4	101,193	104	0,096	335,659
25	0,86	26,958	65	0,39	104,083	105	0,08	371,231
26	0,85	28,201	66	0,38	107,066	106	0,064	419,002
27	0,84	29,459	67	0,37	110,147	107	0,048	488,386
28	0,83	30,734	68	0,36	113,333	108	0,032	603,738
29	0,82	32,025	69	0,35	116,631	109	0,016	861,721

Закінчення дод. 9

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
30	0,81	33,333	70	0,34	120,049	110		
31	0,798	34,702	71	0,332	123,222	111		
32	0,786	36,094	72	0,324	126,491	112		
33	0,774	37,428	73	0,316	129,861	113		
34	0,762	38,949	74	0,380	120,044	114		
35	0,75	40,415	75	0,308	136,931	115		
36	0,738	41,906	76	0,292	140,644	116		
37	0,726	43,424	77	0,284	144,488	117		
38	0,714	44,971	78	0,276	148,470	118		
39	0,702	46,547	79	0,268	152,602	119		

Додаток 10

Коефіцієнт поздовжнього згинання $\varphi(\lambda)$, алюміній, $E = 70$ МПа

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0			40	0,935	41,367	80	0,792	89,893
1			41	0,93	42,515	81	0,789	91,190
2			42	0,925	43,670	82	0,786	92,492
3			43	0,921	44,806	83	0,782	93,859
4			44	0,916	45,973	84	0,779	95,172
5			45	0,911	47,147	85	0,776	96,491
6			46	0,906	48,327	86	0,773	97,816
7			47	0,901	49,515	87	0,77	99,146
8			48	0,897	50,681	88	0,766	100,547
9			49	0,892	51,882	89	0,763	101,889
10	1	10,000	50	0,887	53,089	90	0,76	103,237
11	1	11,000	51	0,884	54,243	91	0,757	104,591
12	1	12,000	52	0,881	55,401	92	0,753	106,021
13	1	13,000	53	0,878	56,563	93	0,75	107,387
14	1	14,000	54	0,875	57,728	94	0,746	108,832
15	1	15,000	55	0,873	58,865	95	0,743	110,212
16	1	16,000	56	0,87	60,038	96	0,74	111,598

Закінчення дод. 10

λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	λ	$\varphi(\lambda)$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
17	1	17,000	57	0,867	61,216	97	0,736	113,066
18	1	18,000	58	0,864	62,398	98	0,733	114,465
19	1	19,000	59	0,861	63,584	99	0,729	115,950
20	1	20,000	60	0,858	64,775	100	0,726	117,363
21	1	21,000	61	0,855	65,970	101	0,723	118,782
22	1	22,000	62	0,851	67,209	102	0,719	120,292
23	1	23,000	63	0,848	68,414	103	0,716	121,725
24	1	24,000	64	0,845	69,623	104	0,713	123,165
25	1	25,000	65	0,842	70,837	105	0,71	124,612
26	1	26,000	66	0,838	72,098	106	0,706	126,155
27	1	27,000	67	0,835	73,322	107	0,703	127,616
28	1	28,000	68	0,832	74,550	108	0,7	129,085
29	1	29,000	69	0,828	75,829	109	0,696	130,654
30	0,985	30,228	70	0,825	77,067	110	0,693	132,137
31	0,98	31,315	71	0,822	78,311	111	0,69	133,628
32	0,975	32,408	72	0,818	79,608	112	0,686	135,225
33	0,97	33,506	73	0,815	80,862	113	0,683	136,731
34	0,965	34,611	74	0,812	82,121	114	0,68	138,245
35	0,96	35,722	75	0,809	83,385	115	0,677	139,767
36	0,955	36,838	76	0,805	84,706	116	0,673	141,400
37	0,95	37,961	77	0,802	85,981	117	0,67	142,938
38	0,945	39,090	78	0,799	87,261	118	0,667	144,484
39	0,94	40,225	79	0,795	88,602	119	0,663	146,147
120	0,66	147,7098	130	0,63	163,7846	140	0,595	181,497
121	0,657	149,2804	131	0,627	165,4389	141	0,592	183,256
122	0,654	150,8589	132	0,623	167,2361	142	0,588	185,1824
123	0,651	152,4455	133	0,62	168,9102	143	0,585	186,964
124	0,648	154,0402	134	0,616	170,7318	144	0,582	188,7561
125	0,645	155,6432	135	0,613	172,4263	145	0,579	190,5587
126	0,642	157,2545	136	0,609	174,2731	146	0,575	192,5391
127	0,639	158,8742	137	0,606	175,9885	147	0,572	194,3656
128	0,636	160,5024	138	0,602	177,861	148	0,569	196,203
129	0,633	162,1391	139	0,599	179,598	149	0,565	198,2267

Механічні характеристики

	Матеріал	E , ГПа	σ_{adm} , МПа	$a_{яс}$, МПа	$b_{яс}$, МПа	Гранична гнучкість, λ_{lim}
1	Ст.3 або Ст.2	200	200	310	1,14	100
2	Ст.5	200	210	464	3,26	100
3	Сталь 40	200	240	321	1,16	90
4	Кремениста сталь	200	260	589	3,82	100
5	Сталь 30ХГСА	200	300	1100	6,65	100
6	Алюміній	70	180	400	3,33	70
7	Чавун	110	70	776	12,0	80
8	Сосна	10	10	29,3	0,194	110

Титульний аркуш контрольної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №

(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс, група _____

Студент _____

Керівник _____

Дата здачі завдання _____

2014

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

СТІЙКІСТЬ І СТІЙКА МІЦНІСТЬ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

Методичні вказівки
до виконання контрольних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 „Будівництво” заочної форми навчання

Укладач **ПЕКЛОВ** Микола Олександрович

Редагування та коректура *В.С. Ясінської*

Комп'ютерне верстання *І.С. Аршинкіної*

Підписано до друку 2014. Формат 60 × 84 ^{1/16}

Ум. друк. арк. 4,65. Обл.-вид. арк. 5,0.

Електронний документ. Вид. № 27/ПІ-14.

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@ukr.net, тел. (044)241-54-22, 241-54-87

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів

Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.