

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І
АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Розрахунок статично невизначуваних систем
Розрахунок стиснених і стиснуто-зігнутих стержнів**

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.06.0101 „Будівництво”

Київ – 2014

УДК 539.3
ББК 30.121
О-61

Укладачі: А. М. Станкевич, кандидат технічних наук, доцент
І. В. Жупаненко, кандидат технічних наук, доцент
Д. В. Левківський, асистент

Рецензент Л. Т. Шкельов, кандидат технічних наук, професор

Відповідальний за випуск А. М. Станкевич, кандидат технічних наук,
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 3
від 14 жовтня 2014 року*

Опір матеріалів. Розрахунок статично невизначуваних систем. Роз-
О-61 рахунок стиснених і стиснуто-зігнутих стержнів: методичні
рекомендації, завдання та приклади виконання розрахунково-
графічних робіт / уклад. А. М. Станкевич, І. В. Жупаненко,
Д. В. Левківський – К.: КНУБА, 2014. – 54 с.

Методичні рекомендації містять варіанти індивідуальних завдань, вказівки та детальні плани виконання розрахунково-графічних робіт з курсу "Опір матеріалів", а також приклади розв'язання кожного завдання. Розглянуто розділи: «Розрахунок статично невизначуваних систем» та «Розрахунок стиснених і стиснуто-зігнутих стержнів».

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.06.0101 «Будівництво», для практичного використання при виконанні розрахунково-графічних робіт.

© КНУБА, 2014

Навчально-методичне видання

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Загальні положення

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам напряму підготовки 6.06.0101 «Будівництво» у виконанні розрахунково-графічних робіт по темах: «Розрахунок статично невизначуваних систем» та «Розрахунок стиснених і стиснуто-зігнутих стержнів».

При виконанні розрахунково-графічних робіт студенту необхідно засвоїти основні теоретичні положення відповідного розділу, особливості застосування розрахункових формул, а також використовувати деякі довідкові дані.

З огляду на це, кожен розділ методичних рекомендацій складається з двох частин. В першій – теоретичній – частині наведено постановку та вихідні умови задачі, детальний план та загальні вказівки до розв’язання задач, а також основні теоретичні положення, розрахункові формули та довідкові дані до відповідного розділу.

В другій частині теоретичний матеріал проілюстровано прикладами розв’язання відповідних задач. Наведено числові приклади до всіх типів задач, що входять до розрахунково-графічних робіт, з докладними поясненнями та ілюстраціями.

1. Розрахунок статично-невизначуваних систем

Загальні зауваження

Статично-невизначуваними називаються системи, в яких реакції у накладених в'язях неможливо визначити тільки з рівнянь рівноваги. В таких системах більше в'язей, ніж потрібно для забезпечення геометричної незмінності системи, тобто деякі в'язі в цьому відношенні виявляються "зайвими".

По кількості "зайвих" в'язей (або "зайвих" невідомих реакцій в них) визначається *ступінь статичної невизначуваності*:

$$n = k - 3,$$

де k – кількість накладених на систему в'язей, 3 – кількість рівнянь статичної рівноваги.

Для розрахунку статично невизначуваної системи необхідно розкрити її статичну невизначуваність, для чого:

1) визначається ступінь статичної невизначуваності n ;

2) звільняють систему від n "зайвих" в'язей, замінюючи її статично-визначуваною *основною системою*. Вибір "зайвих" в'язей вільний, тому для однієї і тієї ж статично-невизначуваної системи можливі кілька варіантів основних систем, головне, щоб вони були геометрично незмінними;

3) завантажують основну систему заданим навантаженням та невідомими реакціями у відкинутих в'язях. Така система називається *еквівалентною*;

4) складають систему канонічних рівнянь – умов рівності нулю переміщень у напрямку відкинутих в'язей:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

де δ_{ij} – переміщення по напрямку i -ї відкинутої в'язі від одичної сили $X_j = 1$, Δ_{iP} – переміщення по напрямку i -ї відкинутої в'язі від заданого навантаження. Коефіцієнти системи визначаються як інтеграли Мора. Для цього в основній системі розглядають окремо

вантажний та одиничні станів системи, для яких будують епюри згинальних моментів (або інших зусиль).

5) після розв'язання системи будуються дійсні епюри зусиль.

Така схема розрахунку називається *методом сил*, оскільки за невідомі обираються реактивні сили в "зайвих" в'язях.

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми стержня побудувати епюри внутрішніх зусиль, визначити розміри поперечного перерізу, виконати перевірку жорсткості або побудувати епюри переміщень.

Вихідні дані

За особистим шифром із додатків Д.2 – Д.4 вибрати лінійні розміри стержня, величини навантажень та номер розрахункової схеми.

План виконання роботи

1. Відповідно до завдання, накреслити у масштабі розрахункову схему стержня. Вказати величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів.
2. Визначити степінь статичної невизначуваності.
3. Обрати основну систему.
4. Побудувати епюри внутрішніх зусиль для допоміжних одиничних та вантажного станів.
5. Скласти канонічні рівняння методу сил і розв'язати їх.
6. Побудувати дійсні епюри внутрішніх зусиль.
7. Виконати кінематичну перевірку.
8. З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу заданої форми.
9. Побудувати епюри напружень та переміщень або визначити переміщення заданих точок.

ПРИКЛАД 1.1. Розрахунок статично-невизначуваного стержня на розтяг-стиск.

Для стержня ступінчато-змінного поперечного перерізу, розрахункова схема якого показана на рис. 1.1, визначити розміри поперечних перерізів стержня квадратної форми при заданих співвідношеннях площ перерізів для кожної ділянки стержня, побудувати епюри нормальних напружень та деформацій. Матеріал стержня – сосна (допустиме напруження $\sigma_{adm} = 8$ МПа, модуль пружності $E = 10$ ГПа).

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 1.1 а).

2. Визначаємо степінь статичної невизначуваності стержня. Оскільки стержень навантажений лише поздовжніми силами, для нього можна скласти лише одне рівняння статичної рівноваги: $\sum X_i = 0$. При цьому в защемленнях виникають лише реакції вздовж осі стержня, тобто дві невідомі реакції. Тоді степінь статичної невизначуваності стержня:

$$n = 2 - 1 = 1.$$

3. Обираємо основну систему методу сил (рис. 1.1 б), відкидаючи "зайву" в'язь в одному із защемлень і замінюючи її дію невідомою силою X_1 .

4. Будуємо епюри поздовжніх сил N для допоміжних станів: вантажного N_P (завантажуючи основну систему заданим навантаженням) (рис. 1.1 в) та одиничного N_1 (завантажуючи основну систему силою $X_1 = 1$) (рис. 1.1 г).

5. Записуємо канонічне рівняння методу сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

де для обраної основної системи δ_{11} – переміщення вздовж осі X точки прикладання сили X_1 , спричинене силою $X_1 = 1$,

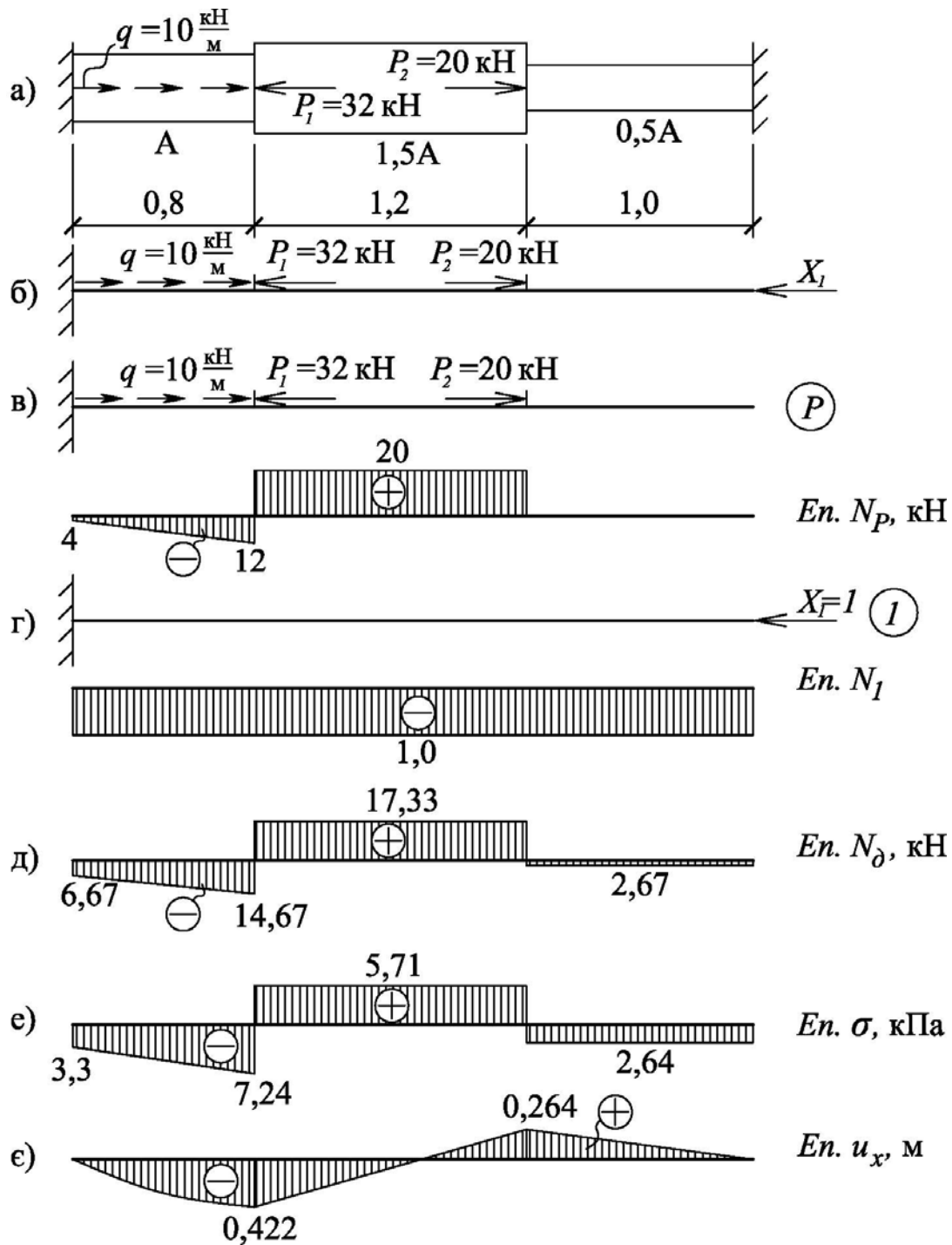


Рис. 1.1

Δ_{1P} – переміщення вздовж осі X точки прикладання сили X_1 , спричинене заданим навантаженням.

Коефіцієнти системи:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_1 N_1}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} (-1) \cdot 0,8 \cdot (-1) + \frac{1}{1,5EA} (-1) \cdot 1,2 \cdot (-1) +$$

$$+ \frac{1}{0,5EA} (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{3,6}{EA} \frac{\text{м}}{\text{кН}},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_1 N_P}{EA_i} dx = \\ &= \frac{1}{EA} \left(-\frac{4+12}{2} \right) \cdot 0,8 \cdot (-1) + \frac{1}{1,5EA} 20 \cdot 1,2 \cdot (-1) = -\frac{9,6}{EA} \text{ м.} \end{aligned}$$

$$\frac{3,6}{EA} X_1 - \frac{9,6}{EA} = 0 \Rightarrow X_1 = 2,67 \text{ кН.}$$

6. Будуємо дійсну епюру поздовжніх сил N_∂ (рис. 1.1 д). Для розрахункової схеми (рис. 1.1 б) покладаємо $X_1 = 2,67$ кН, або за принципом суперпозиції:

$$N_\partial = N_1 \cdot X_1 + N_P.$$

7. Кінематична перевірка:

$$\begin{aligned} \Delta_{1\partial} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_1 N_\partial}{EA_i} dx = \\ &= \frac{1}{EA} \left(-\frac{6,67+14,67}{2} \right) \cdot 0,8 \cdot (-1) + \frac{1}{1,5EA} 17,33 \cdot 1,2 \cdot (-1) + \\ &+ \frac{1}{0,5EA} (-2,67) \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{1}{EA} (8,536 - 13,864 + 5,34) = \\ &= \frac{1}{EA} (13,876 - 13,864). \end{aligned}$$

Відносна похибка обчислення:

$$\Delta = \frac{|13,876 - 13,864|}{13,876} \cdot 100\% = 0,086\% < 0,1\%.$$

8. Визначаємо небезпечний переріз стержня (по епюрі N_∂ визначаємо найбільше значення поздовжньої сили з врахуванням площі перерізу на цій ділянці):

$$\text{а) } \sigma_1 = \frac{17,33}{1,5A} = \frac{11,553}{A},$$

$$\text{б) } \sigma_2 = \frac{14,67}{A} = \sigma_{\text{max}}.$$

Записуємо умову міцності стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{14,67}{A} \leq [\sigma] = 8 \times 10^3 \text{ кПа} \Rightarrow$$

$$A^H = \frac{14,67}{8 \times 10^3} = 18,34 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,34 \text{ см}^2.$$

Площа квадратного поперечного перерізу:

$$A = a^2 = 18,34 \text{ см}^2 \Rightarrow a^H = \sqrt{18,34} = 4,3 \text{ см}.$$

Приймаємо розмір перерізу кратним 0,5 см і виконуємо перевірку міцності:

$$a = 4 \text{ см}: \sigma_{\max} = \frac{14,67}{A} = \frac{14,67 \times 10^{-3}}{4^2 \times 10^{-4}} = 9,2 \text{ МПа} > [\sigma] = 8 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапруження: } \Delta = \frac{9,2 - 8}{8} \cdot 100\% = 15\% > 5\%.$$

Остаточно приймаємо розмір перерізу $a = 4,5 \text{ см}$.

9. Визначаємо напруження на кожній ділянці стержня:

$$\sigma_1 = \frac{-6,67 \times 10^{-3}}{4,5^2 \times 10^{-4}} = -3,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{-14,67 \times 10^{-3}}{4,5^2 \times 10^{-4}} = -7,24 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{17,33 \times 10^{-3}}{1,5 \cdot 4,5^2 \times 10^{-4}} = 5,71 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{-2,67 \times 10^{-3}}{0,5 \cdot 4,5^2 \times 10^{-4}} = -2,64 \text{ МПа}.$$

За отриманими значеннями будуємо епюру нормальних напружень (рис. 1.1 е).

10. Визначаємо видовження кожної ділянки стержня:

$$\Delta l_1 = \int_0^{0,8} \frac{N_1 N_\partial}{EA} dx = \frac{1}{1 \times 10^7 \cdot 4,5^2 \times 10^{-4}} \left(-\frac{6,67 + 14,67}{2} \right) \cdot 0,8 \cdot (-1) =$$

$$= -0,422 \times 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{1,5EA} = \frac{17,33 \cdot 1,2}{1 \times 10^7 \cdot 1,5 \cdot 4,5^2 \times 10^{-4}} = 0,685 \times 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{1,5EA} = \frac{-2,67 \cdot 1}{1 \times 10^7 \cdot 0,5 \cdot 4,5^2 \times 10^{-4}} = -0,264 \times 10^{-3} \text{ м}.$$

Поздовжнє переміщення u_x точок зміни перерізу стержня:

$$u_{x1} = 0 + \Delta l_1 = 0 - 0,422 = -0,422 \text{ мм},$$

$$u_{x2} = u_{x1} + \Delta l_2 = -0,422 + 0,685 = 0,263 \text{ мм},$$

$$u_{x3} = u_{x2} + \Delta l_3 = 0,263 - 0,264 \approx 0.$$

Будуємо епюру переміщень u_x (рис. 1.1 є).

ПРИКЛАД 1.2. Розрахунок статично-невизначуваного стержня на кручення.

Для стержня змінної жорсткості, розрахункова схема якого показана на рис. 1.2, визначити розміри поперечного перерізу стержня круглої форми, побудувати епюри дотичних напружень та кута закручування. Матеріал стержня – сосна (допустиме напруження $\sigma_{adm} = 8 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 0,6 \cdot \sigma_{adm} = 0,6 \cdot 8 = 4,8 \text{ МПа}$, модуль пружності $E = 10 \text{ ГПа}$, Модуль зсуву $G = 0,4E = 0,4 \cdot 10 \text{ ГПа} = 4 \text{ ГПа}$).

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему стержня і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 1.2 а).

2. Визначаємо степінь статичної невизначуваності стержня. Оскільки стержень навантажений лише моментами кручення, для нього можна скласти лише одне рівняння статичної рівноваги: $\sum M_{xi} = 0$. При цьому в защемленнях виникають лише відповідні

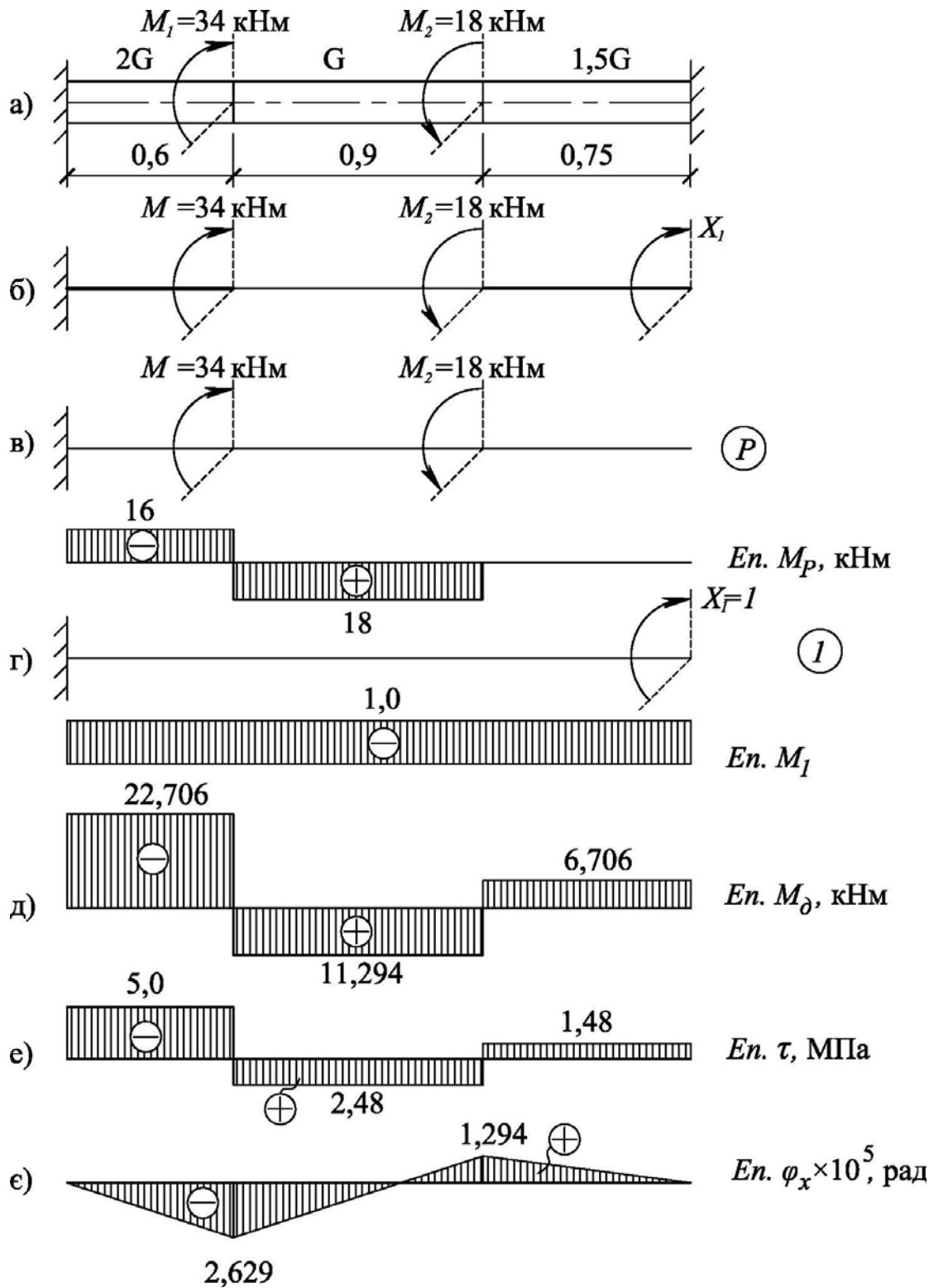


Рис. 1.2

складові реакції, тобто дві невідомі реакції. Тоді степінь статичної невизначуваності стержня:

$$n = 2 - 1 = 1.$$

3. Обираємо основну систему методу сил (рис. 1.2 б), відкидаючи "зайву" в'язь в одному із защемлень і замінюючи її дію невідомим моментом X_1 .

4. Будуємо епюри моментів кручення M для допоміжних станів: вантажного M_P (завантажуючи основну систему заданим навантаженням) (рис. 1.2 в) та одиничного M_1 (завантажуючи основну систему моментом $X_1 = 1$) (рис. 1.2 г).

5. Записуємо канонічне рівняння методу сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

де для обраної основної системи δ_{11} – кут закручування правого кінця стержня спричинене моментом $X_1 = 1$, Δ_{1P} – кут закручування правого кінця стержня спричинене заданим навантаженням. Коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_1 M_1}{GI_{pi}} dx = \frac{1}{2GI_p} (-1) \cdot 0,6 \cdot (-1) + \frac{1}{GI_p} (-1) \cdot 0,9 \cdot (-1) + \\ &+ \frac{1}{1,5GI_p} (-1) \cdot 0,75 \cdot (-1) = \frac{1,7}{GI_p} \frac{1}{\text{кНм}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_1 M_P}{GI_{pi}} dx = \\ &= \frac{1}{2GI_p} (-16) \cdot 0,6 \cdot (-1) + \frac{1}{GI_p} 18 \cdot 0,9 \cdot (-1) = -\frac{11,4}{GI_p}. \end{aligned}$$

$$\frac{1,7}{GI_p} X_1 - \frac{11,4}{GI_p} = 0 \Rightarrow X_1 = 6,706 \text{ кНм.}$$

6. Будуємо дійсну епюру моментів кручення M_∂ (рис. 1.2 д). Покладаємо $X_1 = 6,706$ кНм для розрахункової схеми (рис. 1.2 б), або за принципом суперпозиції:

$$M_\partial = M_1 \cdot X_1 + M_P.$$

7. Кінематична перевірка:

$$\begin{aligned}\Delta_{1\partial} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_1 M_{\partial}}{GI_{pi}} dx = \frac{1}{2GI_p} (-22,706) \cdot 0,6 \cdot (-1) + \\ &+ \frac{1}{GI_p} 11,294 \cdot 0,9 \cdot (-1) + \frac{1}{1,5GI_p} (-6,706) \cdot 0,75 \cdot (-1) = \\ &= \frac{1}{GI_p} (6,8118 - 10,1646 + 3,353) = \frac{1}{GI_p} (10,1648 - 10,1646).\end{aligned}$$

Відносна похибка обчислення:

$$\Delta = \frac{|10,1648 - 10,1646|}{10,1648} \cdot 100\% = 0,002\% < 0,1\%.$$

8. Визначаємо небезпечний переріз стержня (по епюрі M_{∂} визначаємо найбільше значення моменту кручення) і записуємо умову міцності стержня:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{22,706}{W_p} \leq [\tau] = 4,88 \times 10^3 \text{ кПа} \Rightarrow \\ W_p^H &= \frac{22,706}{4,8 \times 10^3} = 4730 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 4730 \text{ см}^3\end{aligned}$$

Момент опору круглого поперечного перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 4730 \text{ см}^3 \Rightarrow d^H = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4730}{\pi}} = 28,88 \text{ см}.$$

Приймаємо розмір перерізу кратним 0,5 см і виконуємо перевірку міцності:

$$d = 28,5 \text{ см}:$$

$$\tau_{\max} = \frac{22,706}{W_p} = \frac{22,706 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 28,5^3}{16} \times 10^{-6}} = 5 \text{ МПа} > [\tau] = 4,8 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапруження: } \Delta = \frac{|4,8 - 5|}{4,8} \cdot 100\% = 4,17\% < 5\%.$$

Оскільки перенапруження в межах допустимого, остаточно приймаємо розмір перерізу $d = 28,5 \text{ см}$.

9. Визначаємо напруження на кожній ділянці стержня:

$$\tau_1 = \frac{-22,706 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 28,5^3}{16} \times 10^{-6}} = -5 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{11,294 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 28,5^3}{16} \times 10^{-6}} = 2,48 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{-6,706 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 28,5^3}{16} \times 10^{-6}} = -1,48 \text{ МПа}.$$

За отриманими значеннями будемо епюру дотичних напружень (рис. 1.2 е).

10. Визначаємо кут закручування кожної ділянки стержня:

$$\varphi_1 = \frac{M_{\partial 1} l_1}{GI_{p1}} = \frac{(-22,706) \cdot 0,6}{2,4 \times 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 28,5^4}{32} \times 10^{-6}} = -2,629 \times 10^{-5} \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{\partial 2} l_2}{GI_{p2}} = \frac{11,294 \cdot 0,9}{4 \times 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 28,5^4}{32} \times 10^{-6}} = 3,923 \times 10^{-5} \text{ рад},$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{\partial 3} l_3}{GI_{p3}} = \frac{(-6,706) \cdot 0,75}{1,5 \cdot 4 \times 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 28,5^4}{32} \times 10^{-6}} = -1,294 \times 10^{-5} \text{ рад}.$$

Кут закручування φ_x точок зміни перерізу стержня:

$$\varphi_{x1} = 0 + \varphi_1 = 0 - 2,629 \times 10^{-5} = -2,629 \times 10^{-5} \text{ рад},$$

$$\varphi_{x2} = \varphi_{x1} + \varphi_2 = -2,629 \times 10^{-5} + 3,923 \times 10^{-5} = 1,294 \times 10^{-5} \text{ рад},$$

$$\varphi_{x3} = \varphi_{x2} + \varphi_3 = 1,294 \times 10^{-5} - 1,294 \times 10^{-5} = 0.$$

Будемо епюру кутів закручування φ_x (рис. 1.2 е).

ПРИКЛАД 1.3. Розрахунок нерозрізної балки.

Для балки, розрахункова схема якої показана на рис. 1.3, побудувати дійсні епюри внутрішніх зусиль, визначити розміри двотаврового поперечного перерізу, визначити прогин точки "k" та кут повороту перерізу "m".

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему балки і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 1.3 а).

2. Визначаємо степінь статичної невизначуваності балки. Невідомих опорних реакцій п'ять: дві в шарнірно-рухомих опорах і три в защемленні. Оскільки має місце плоский згин, для балки можна скласти три рівняння статичної рівноваги. Тоді степінь статичної невизначуваності стержня:

$$n = 5 - 3 = 2.$$

3. Обираємо основну систему методу сил, відкидаючи дві "зайві" в'язі і заміняючи їх дію невідомими силами X_1 та X_2 . При цьому можливі декілька варіантів основної системи (рис. 1.3 б). Вибір основної системи, в принципі, довільний тому остаточно зупиняємося на другому варіанті, відкидаючи праву шарнірно-рухому опору, заміняючи її силою X_1 , і в'язь, що утримує від повороту в защемленні, заміняючи її дію моментом X_2 .

4. Будуємо епюри згинальних моментів M для допоміжних станів: вантажного M_P (завантажуючи основну систему заданим навантаженням) (рис. 1.3 в) та двох одиничних M_1 (завантажуючи основну систему силою $X_1 = 1$) (рис. 1.3 г). і M_2 (завантажуючи основну систему моментом $X_2 = 1$) (рис. 1.3 д).

5. Записуємо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

де для обраної основної системи перше рівняння виражає рівність нулю вертикального переміщення лівого кінця основної системи, а

друге – рівність нулю кута повороту правого кінця балки (по напрямку відкинутих в'язей).

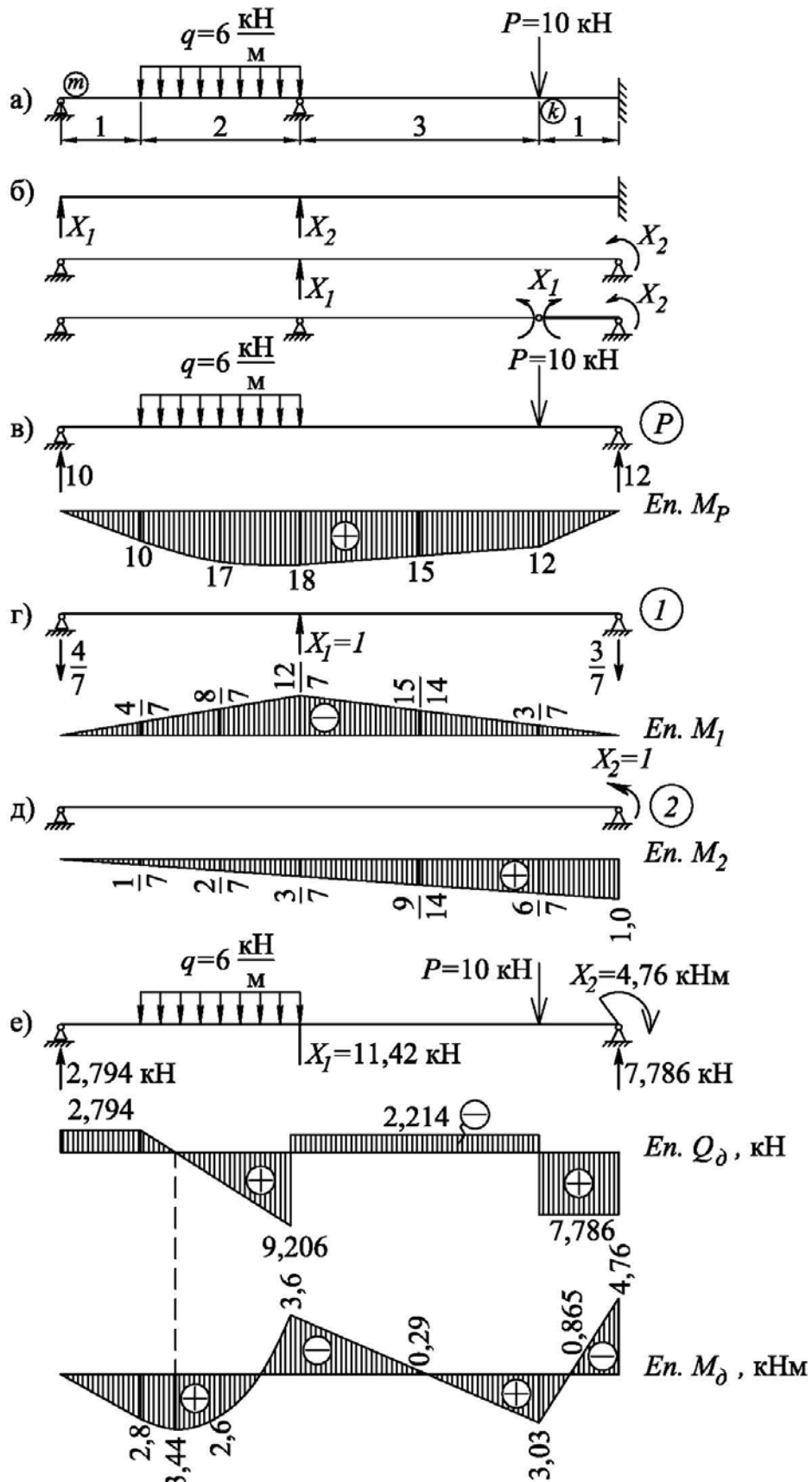


Рис. 1.3

Коефіцієнти системи:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum_{i=1}^2 \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{12}{7} \right) \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{12}{7} \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{12}{7} \right) \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{12}{7} \right) \right] = \frac{336}{49EI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} = \delta_{21} &= \sum_{i=1}^2 \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{12}{7} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \left\{ -\frac{12}{7} \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \left(-\frac{6}{7} \right) \cdot \frac{5}{7} \right\} \right] = -\frac{140}{49EI},\end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \delta_{21} = \int_l \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3EI},$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{6} \left(10 \cdot \frac{4}{7} + 4 \cdot 17 \cdot \frac{8}{7} + 18 \cdot \frac{12}{7} \right) \right] + \\ &+ \frac{3}{6} \left(18 \cdot \frac{12}{7} + 4 \cdot 15 \cdot \frac{15}{14} + 12 \cdot \frac{3}{7} \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \Big] = -\frac{1929}{21EI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2P} &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{6} \left(10 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot 17 \cdot \frac{2}{7} + 18 \cdot \frac{3}{7} \right) \right] + \\ &+ \frac{3}{6} \left(18 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot 15 \cdot \frac{9}{14} + 12 \cdot \frac{6}{7} \right) + \frac{1}{6} \left(12 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{13}{14} \right) \Big] = \frac{918}{21EI}.\end{aligned}$$

Система канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{336}{49EI} X_1 - \frac{140}{49EI} X_2 - \frac{1929}{21EI} = 0, & (\times 49 \cdot 3 \cdot EI) \\ -\frac{140}{49EI} X_1 + \frac{7}{3EI} X_2 + \frac{918}{21EI} = 0. & (\times 49 \cdot 3 \cdot EI) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1008 \cdot X_1 - 420 \cdot X_2 - 13503 = 0, \\ -420 \cdot X_1 + 343 \cdot X_2 + 6426 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1008 & -420 \\ -420 & 343 \end{vmatrix} = 1008 \cdot 343 - (-420) \cdot (-420) = 169344,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13503 & -420 \\ -6426 & 343 \end{vmatrix} = 13503 \cdot 343 - (-6426) \cdot (-420) = 1932609,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1008 & 13503 \\ -420 & -6426 \end{vmatrix} = 1008 \cdot (-6426) - (-420) \cdot 13503 = -806148,$$

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1932609}{169344} = 11,41 \text{ кН},$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-806148}{169344} = -4,76 \text{ кН}$$

6. Дійсні епюри внутрішніх зусиль будуюмо за розрахунковою схемою, показаною на рис. 1.3 е.

7. Кінематична перевірка:

$$\begin{aligned} \Delta_{1\partial} &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_1 M_{\partial}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2,8 \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{4}{7} \right) + \right. \\ &+ \frac{2}{6} \left[2,8 \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) + 4 \cdot 2,6 \cdot \left(-\frac{8}{7} \right) + (-3,6) \left(-\frac{12}{7} \right) \right] + \\ &+ \frac{3}{6} \left[(-3,6) \cdot \left(-\frac{12}{7} \right) + 4 \cdot (-0,29) \left(-\frac{15}{14} \right) + 3,03 \cdot \left(-\frac{3}{7} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} \left[3,03 \cdot \left(-\frac{3}{7} \right) + 4 \cdot (-0,87) \left(-\frac{3}{14} \right) + 0 \right] = \\ &= \frac{1}{EI} (-0,533 - 4,495 + 2,057 + 3,707 - 0,649 - 0,216 + 0,124) = \\ &= \frac{1}{EI} (5,888 - 5,893). \end{aligned}$$

Відносна похибка обчислення:

$$\Delta = \frac{|5,888 - 5,893|}{5,893} \cdot 100\% = 0,085\% < 0,1\%.$$

$$\Delta_{2\partial} = \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_2 M_{\partial}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{6} \left[2,8 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{7} + (-3,6) \cdot \frac{3}{7} \right] + \\
& + \frac{3}{6} \left[(-3,6) \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot (-0,29) \cdot \frac{9}{14} + 3,03 \cdot \frac{6}{7} \right] + \\
& + \frac{1}{6} \left[3,03 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot (-0,87) \cdot \frac{13}{14} + (-4,76) \cdot 1 \right] = \\
& = \frac{1}{EI} (0,133 + 1,124 - 0,514 - 1,144 + 1,299 + 0,433 - 1,332) = \\
& = \frac{1}{EI} (2,989 - 2,99).
\end{aligned}$$

Відносна похибка обчислення:

$$\Delta = \frac{|2,989 - 2,99|}{2,99} \cdot 100\% = 0,033\% < 0,1\%.$$

8. Визначаємо небезпечний переріз стержня (по епюрі M_{∂} визначаємо найбільше значення згинального моменту):

$|M_{\max}| = 4,76$ кНм і записуємо умову міцності балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] = 160 \times 10^3 \text{ кПа} \Rightarrow$$

$$W^H = \frac{4,76}{160 \times 10^3} = 29,75 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 29,75 \text{ см}^3.$$

За сортаментом прокатного двотавра (ГОСТ 8239-89) приймаємо двотавр № 10 ($W = 39,7 \text{ см}^3$, $I = 198 \text{ см}^4$) і виконуємо

перевірку міцності: $\sigma_{\max} = \frac{4,76 \times 10^{-3}}{39,7 \times 10^{-6}} = 120 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$

9. Визначаємо переміщення заданих перерізів балки методом Мора:

а) для визначення прогину перерізу "k" будуємо третій допоміжний стан: в основній системі прикладаємо вертикальну одиничну силу в точці "k" і будуємо епюру згинальних моментів M_3 (рис. 1.4 а). Прогин балки за формулою Мора:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_3 M_{\partial}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} + \right.$$

$$+ \frac{2}{6} \left[2,8 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{7} + (-3,6) \cdot \frac{3}{7} \right] +$$

$$+ \frac{3}{6} \left[(-3,6) \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot (-0,29) \cdot \frac{9}{14} + 3,03 \cdot \frac{6}{7} \right] +$$

$$+ \frac{1}{6} \left[3,03 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot (-0,87) \cdot \frac{3}{14} + (-4,76) \cdot 0 \right] = \frac{1,206}{EI}.$$

Жорсткість балки: $EI = 2 \times 10^8 \cdot 198 \times 10^{-8} = 396 \text{ кНм}^2$

Переміщення перерізу "k": $\Delta_k = \frac{1,206}{398} = 3,05 \times 10^{-3} \text{ м} = 3,05 \text{ мм}.$

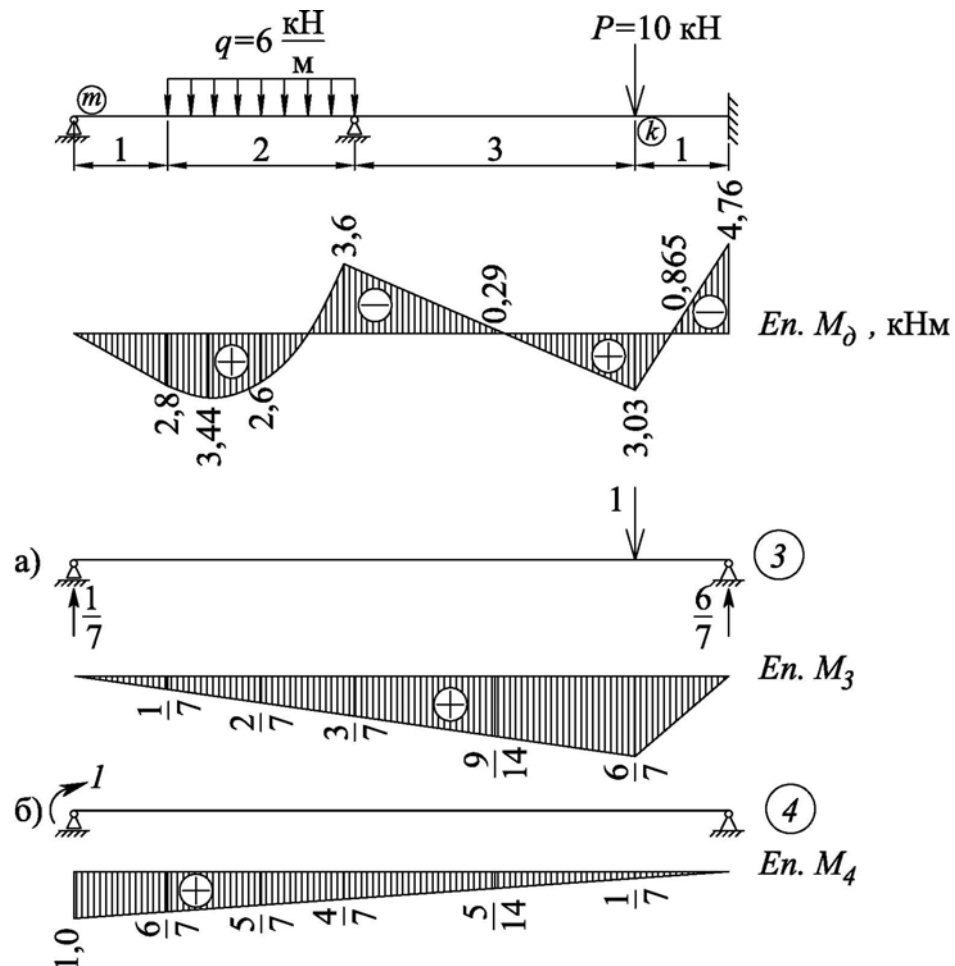


Рис. 1.4

б) для визначення кута повороту перерізу "m" будемо четвертий допоміжний стан: в основній системі прикладаємо одиничний момент в точці "m" і будемо епюру згинальних моментів M_4 (рис. 1.4 б). Кут повороту балки за формулою Мора:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \sum_{i=1}^4 \int \frac{M_4 M_{\partial}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \left(0 + 4 \cdot 1,4 \cdot \frac{13}{14} + 2,8 \cdot \frac{6}{7} \right) + \right. \\ &+ \frac{2}{6} \left[2,8 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot 2,6 \cdot \frac{5}{7} + (-3,6) \cdot \frac{4}{7} \right] + \\ &+ \frac{3}{6} \left[(-3,6) \cdot \frac{4}{7} + 4 \cdot (-0,29) \cdot \frac{5}{14} + 3,03 \cdot \frac{1}{7} \right] + \\ &\left. + \frac{1}{6} \left[3,03 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot (-0,87) \cdot \frac{1}{14} + (-4,76) \cdot 0 \right] \right\} = \frac{2,869}{EI}. \end{aligned}$$

З врахуванням жорсткості балки кут повороту перерізу "m":

$$\varphi_m = \frac{2,869}{398} = 7,2 \text{ рад.}$$

2. Розрахунок стиснутих та стиснуто-зігнутих стержнів

Загальні зауваження

Розраховуючи стержні на стиск, ми припускали, що до самого руйнування виникають лише поздовжні деформації (скорочення) і вісь стержня залишається прямолінійною. Однак при значній (порівняно з поперечними розмірами) довжині стержня його вісь при стиску скривлюється. При цьому, окрім напружень від поздовжньої сили, виникають напруження від згинального моменту і руйнування відбувається при напруженнях, що значно менші ніж підраховані за формулами простого стиску. Явище скривлення осі стержня при стиску називається *поздовжнім згином*, а супроводжуючий його перехід прямолінійної форми рівноваги в криволінійну називається *втратою стійкості*.

Критичною силою називається граничне навантаження, перевищення якого спричиняє перехід від стійкої до нестійкої форми рівноваги стержня.

Критична сила обчислюється в залежності від гнучкості стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де μ – коефіцієнт приведення довжини стержня, який залежить від умов закріплення стержня (див. рис. 2.1), l – довжина стержня, i_{\min} – мінімальний радіус інерції перерізу стержня.

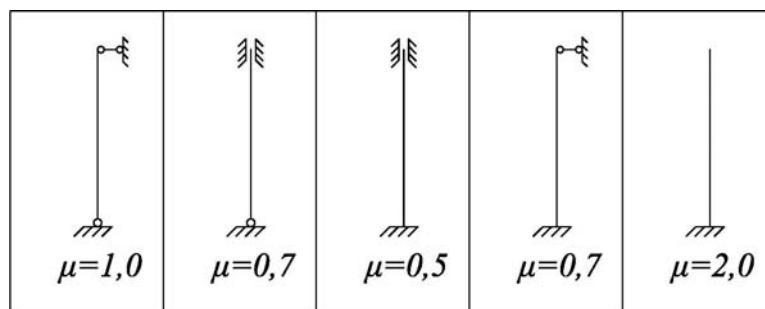


Рис. 2.1. Коефіцієнт приведення довжини

За умови, що гнучкість стержня $\lambda < \lambda_0$, руйнування відбувається раніше за втрату стійкості, а критичне напруження σ_{cr} дорівнює граничному напруженню при стиску, а саме:

- для пластичних матеріалів межі текучості матеріалу: $\sigma_{cr} = \sigma_m$,
- для крихких матеріалів межі міцності матеріалу: $\sigma_{cr} = \sigma_m$.

Якщо гнучкість стержня $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_u$, втрата стійкості відбувається при напруженнях, що перевищують межу пружності матеріалу, а критична сила обчислюється за емпіричною формулою Ф. С. Ясинського:

$$P_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = A \cdot (a - b \cdot \lambda),$$

де a і b – емпіричні коефіцієнти, величина яких залежить від матеріалу (для сталі $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа; для деревини $a = 29,4$ МПа, $b = 0,194$ МПа).

Якщо гнучкість стержня $\lambda > \lambda_u$, втрата стійкості відбувається при напруженнях, що не перевищують межу пружності матеріалу, а критична сила обчислюється за формулою Ейлера:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності матеріалу; I_{\min} – мінімальний момент інерції перерізу стержня; μ – коефіцієнт приведення довжини стержня, l – довжина стержня.

Допустимі напруження при поздовжньому згині приймаються з певним коефіцієнтом запасу стійкості по відношенню до критичних напружень:

$$n_s = \frac{\sigma_{cr}}{[\sigma]_s}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості n_s для сталей обирають в межах $1,8 \div 3,0$, при чому менші значення приймають при більшій гнучкості.

Умова міцності стиснених стержнів:

$$[\sigma]_s = \varphi[\sigma] \text{ або } \frac{P}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma],$$

де P – величина стискаючої сили, кН; A – площа поперечного перерізу стержня, м^2 ; φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при поздовжньому згині, що береться для кожного матеріалу при всіх значеннях гнучкості за таблицями (див. дод. 1).

Якщо на стержень одночасно діє і осьове, і поперечне навантаження, такий випадок деформації називається **поздовжньо-поперечним згином**. При розрахунку стержня на поздовжньо-поперечний згин згинальні моменти визначаються з врахуванням прогинів осі стержня. При цьому точним методом розрахунку є метод початкових параметрів.

Метод початкових параметрів. Розглянемо стержень, на який діє довільне навантаження (рис. 2.2).

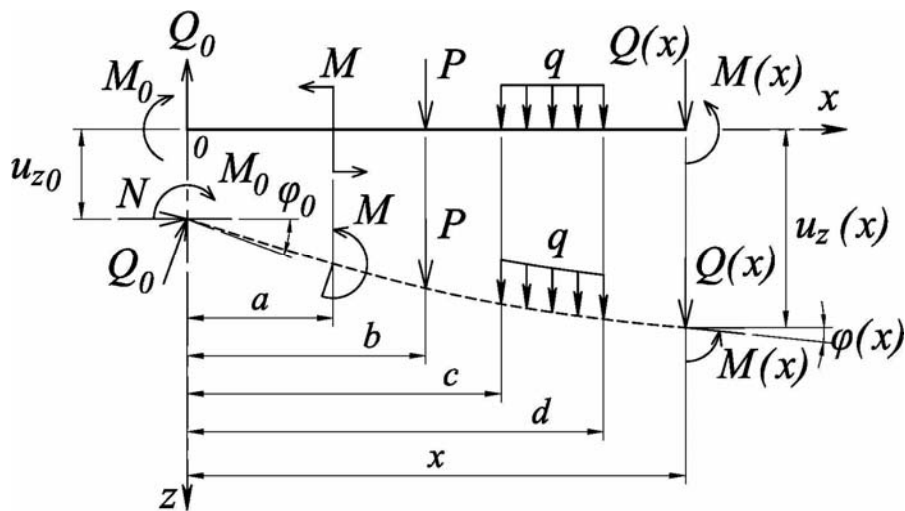


Рис. 2.2

Крайній лівий переріз стержня є початковим перерізом. Початок системи координат розташовуємо у центрі ваги початкового перерізу. Позначимо u_{z0} – прогин початкового перерізу; φ_0 – кут повороту початкового перерізу; Q_0 , M_0 – поперечна сила і згинальний момент в початковому перерізі (рис. 2.2). Величини u_{z0} , φ_0 , Q_0 , M_0 називаються початковими параметрами.

Прогин довільного перерізу стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$EIu_z(x) = EIu_{z0} + EI\varphi_0 \cdot x - M_0 \cdot \Phi_2(x) - Q_0 \cdot \Phi_3(x) + \\ + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Phi_2(x - a_i) + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \Phi_3(x - b_i) + \sum_{i=1}^n q_i [\Phi_4(x - c_i) - \Phi_4(x - d_i)]$$

Кут повороту довільного перерізу стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - M_0 \cdot \Phi_1(x) - Q_0 \cdot \Phi_2(x) + \\ + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Phi_1(x - a_i) + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \Phi_2(x - b_i) + \sum_{i=1}^n q_i [\Phi_3(x - c_i) - \Phi_3(x - d_i)]$$

Згинальний момент в довільному поперечному перерізі стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$M(x) = M_0 \cdot \Phi(x) + Q_0 \cdot \Phi_1(x) - \\ - \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Phi(x - a_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \Phi_1(x - b_i) - \sum_{i=1}^n q_i [\Phi_2(x - c_i) - \Phi_2(x - d_i)]$$

Поперечна сила в довільному поперечному перерізі стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$Q(x) = -\beta^2 M_0 \cdot \Phi_1(x) + Q_0 \cdot \Phi(x) - \\ - \beta^2 \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Phi_1(x - a_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \Phi(x - b_i) - \sum_{i=1}^n q_i [\Phi_1(x - c_i) - \Phi_1(x - d_i)]$$

Тут $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, $\Phi_4(x)$ – тригонометричні функції аргументу βx , що визначаються виразами:

$$\Phi(x) = \cos(\beta x), \quad \Phi_1(x) = \frac{1}{\beta} \sin(\beta x), \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{\beta^2} [1 - \cos(\beta x)],$$

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{\beta^3} [\beta x - \sin(\beta x)], \quad \Phi_4(x) = \frac{1}{\beta^4} \left[\frac{\beta^2 x^2}{2} + \cos(\beta x) - 1 \right];$$

$$\beta = \sqrt{\frac{N}{EI}}, \quad N - \text{стискаюча сила, } EI - \text{згинальна жорсткість балки.}$$

З умов закріплення на лівому кінці стержня два початкові параметри відомі, а решта два визначаються з граничних умов на правому кінці (рис. 2.3)

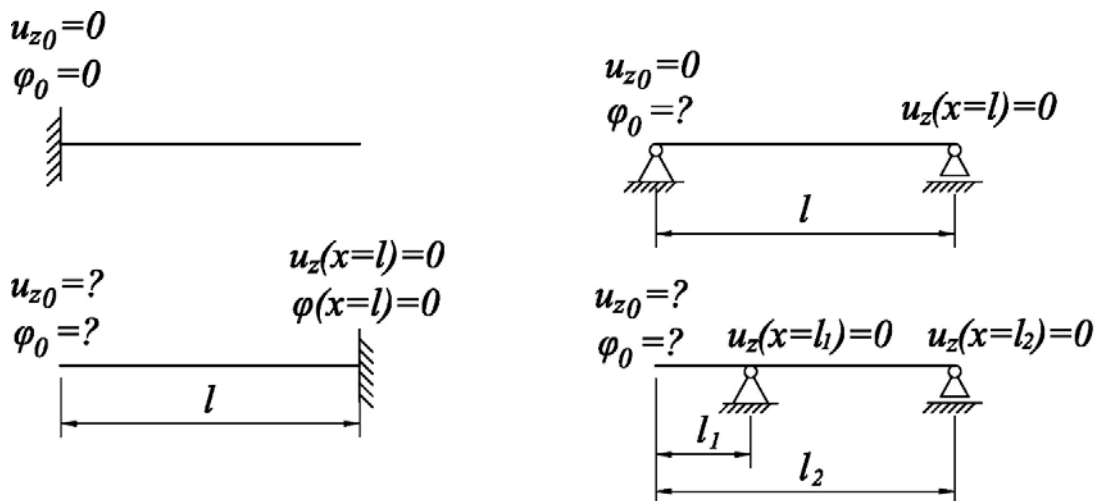


Рис. 2.3

У рівняннях враховують лише ті члени, які залежать від навантажень, розташованих між початком координат і перерізом балки, що розглядається. Рівняння складені з урахуванням напрямків сил і моментів, прийнятих на рис. 2.2. При протилежних напрямках навантажень знаки перед відповідними членами цих рівнянь змінюються на протилежні.

Розрахунок стиснуто-зігнутого стержня методом початкових параметрів є точним, але його застосування обмежується певним класом задач. Оскільки параметр β залежить від жорсткості стержня, метод початкових параметрів можна застосувати лише в задачах на визначення допустимого навантаження на стержень.

Для визначення розмірів поперечного перерізу застосовують наближений метод, за яким напруження визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N \cdot f_n}{W_y},$$

де N – величина стискаючої сили; M_y – згинальний момент в перерізі стержня; A, W_y – площа та момент опору перерізу; f_n – повний прогин стержня від одночасної дії стискаючої сили та поперечного навантаження.

Повний прогин визначається за формулою:

$$f_n = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_e}},$$

де f_0 – прогин від поперечного навантаження; N – величина стискаючої сили, що діє на стержень; N_e – так звана Ейлерова сила.

Ейлерова сила не залежить від гнучкості стержня і визначається за формулою:

$$N_e = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu \cdot l)^2},$$

де μ – коефіцієнт приведення довжини стержня (див. рис. 2.1), l – довжина стержня, EI_y – згинальна жорсткість стержня.

Задача 1. Підбір перерізу стисненого стержня

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми стержня визначити розміри поперечного перерізу заданої форми, величину критичної сили і коефіцієнт запасу стійкості.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 5 вибрати схему та лінійні розміри стержня, форму поперечного перерізу, величину стискаючої сили і матеріал стержня.

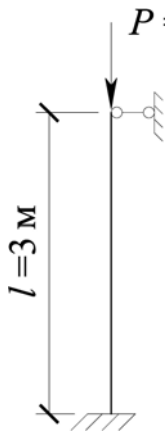
План виконання роботи:

- 1) з умов закріплення стержня визначити коефіцієнт приведення довжини μ ;
- 2) визначити розміри поперечного перерізу з урахуванням коефіцієнта зниження допустимих напружень φ ;
- 3) перевірити умову міцності для прийнятого перерізу;
- 4) визначити критичну силу та коефіцієнт запасу стійкості.

Приклад 2.1. Для стержня, розрахункова схема якого показана на рис. 2.4, визначити розміри поперечного перерізу з кутика рівнополічкового.

1. Визначаємо коефіцієнт приведення довжини. При умові, що один кінець стержня зашпелений, а інший – шарнірно обпертий за схемою рис. 2.1 приймаємо $\mu = 0,7$.

2. Розміри поперечного перерізу стержня визначаємо з умови міцності методом послідовних наближень.



В першому наближенні задаємо значення коефіцієнта $\varphi_1 = 0,5$ і визначаємо необхідну площу поперечного перерізу:

$$A^H = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{120}{0,5 \cdot 160 \times 10^3} = 15 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 15 \text{ см}^2$$

За сортаментом приймаємо найбільш близькі по площі профілі:

Рис. 2.4

$$\perp 90 \times 9 \quad A = 15,6 \text{ см}^2, \quad i_{\min} = 1,77 \text{ см};$$

$$\perp 100 \times 8 \quad A = 15,6 \text{ см}^2, \quad i_{\min} = 1,98 \text{ см};$$

$$\perp 110 \times 7 \quad A = 15,15 \text{ см}^2, \quad i_{\min} = 2,19 \text{ см}.$$

Приймаємо профіль з найбільшим радіусом інерції – $\perp 110 \times 7$ і визначаємо гнучкість:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,19} \approx 96.$$

За таблицею дод. 1 визначаємо $\varphi(\lambda = 96) = 0,611$.

Оскільки отримане значення коефіцієнта $\varphi = 0,611$ значно відрізняється від того, що задавали $\varphi_1 = 0,5$, виконуємо друге наближення, задаючи

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,611}{2} = 0,556.$$

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$A^H = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{120}{0,556 \cdot 160 \times 10^3} = 13,49 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 13,49 \text{ см}^2.$$

За сортаментом приймаємо найбільш близькі по площі профілі:

$$\perp 90 \times 8 \quad A = 13,93 \text{ см}^2, \quad i_{\min} = 1,77 \text{ см};$$

$$\perp 100 \times 7 \quad A = 13,75 \text{ см}^2, \quad i_{\min} = 1,98 \text{ см}.$$

Приймаємо профіль з більшим радіусом інерції – $\perp 100 \times 7$ і визначаємо гнучкість:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{1,98} = 106.$$

За таблицею дод. 1 визначаємо $\varphi(\lambda = 106) = 0,540$.

Отримане значення коефіцієнта $\varphi = 0,54$ відрізняється від того, що задавали в другому наближенні $\varphi_2 = 0,556$ на

$$\Delta = \frac{0,556 - 0,54}{0,556} \cdot 100\% = 3\%.$$

Оскільки різниця цих значень не перевищує 5%, вважаємо переріз прийнятним і перевіряємо умову міцності:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot A} = \frac{120 \times 10^{-3}}{0,54 \cdot 13,75 \times 10^{-4}} = 161,6 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапруження складає: } \Delta = \frac{|160 - 161,6|}{160} \cdot 100\% = 1\% < 5\%,$$

що в межах допустимого. Отже, остаточно приймаємо $\perp 100 \times 7$:
 $A = 13,75 \text{ см}^2, \quad I_{\min} = 54,16 \text{ см}^4$.

3. Критичну силу при гнучкості $\lambda = 106 > \lambda_u = 100$ визначаємо за формулою Ейлера:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \times 10^8 \cdot 54,16 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 3)^2} = 242,4 \text{ кН}.$$

4. Коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_s = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{242,4}{120} = 2,02$$

відповідає рекомендованим для сталі межам $1,8 < n_s = 2,02 < 3,0$.

Приклад 2.2. Для стержня, розрахункова схема якого показана на рис. 2.5, визначити розміри поперечного перерізу заданої форми.

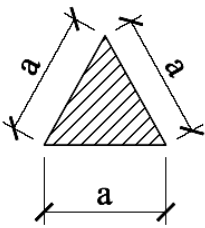
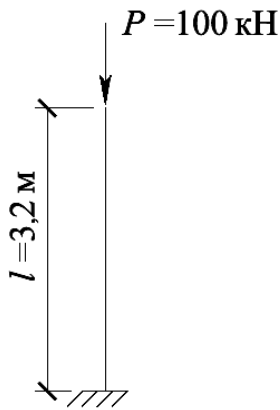


Рис. 2.5

Для перерізу у формі рівностороннього трикутника:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot (a \cdot \sin 60^\circ)}{2} = 0,433a^2,$$

$$I_{\min} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{a \cdot (a \cdot \sin 60^\circ)^3}{36} = 0,018a^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,018a^4}{0,433a^2}} = 0,204a.$$

Визначаємо розмір перерізу a :

$$A = 0,433a^2 = 250 \Rightarrow a^H = \sqrt{\frac{250}{0,433}} = 24,03 \text{ см.}$$

Приймаємо розмір кратним 0,5 см: $a = 24$ см і визначаємо радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,204a = 0,204 \cdot 24 = 4,9 \text{ см}$$

Матеріал стержня – сосна.

1. Визначаємо коефіцієнт приведення довжини. При умові, що один кінець стержня защемлений, а інший – вільний від закріплень за схемою рис. 2.1 беремо $\mu = 2,0$.

2. Розміри поперечного перерізу стержня визначаємо з умови міцності методом послідовних наближень.

В першому наближенні задаємо значення коефіцієнта $\varphi_1 = 0,5$ і визначаємо необхідну площу поперечного перерізу:

$$A^H = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{100}{0,5 \cdot 8 \times 10^3} = 250 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 250 \text{ см}^2$$

$$\text{Визначаємо гнучкість стержня: } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 320}{4,9} \approx 131.$$

За таблицею дод. 1 визначаємо $\varphi(\lambda = 131) = 0,181$.

Оскільки отримане значення коефіцієнта $\varphi = 0,181$ значно відрізняється від того, що задавали $\varphi_1 = 0,5$, виконуємо друге наближення, задаючи

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,181}{2} = 0,34.$$

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$A^H = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{100}{0,34 \cdot 8 \times 10^3} = 367,6 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 367,6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо розмір перерізу a :

$$A = 0,433a^2 = 367,6 \Rightarrow a^H = \sqrt{\frac{367,6}{0,433}} = 29,14 \text{ см}.$$

Приймаємо розмір кратним 0,5 см: $a = 29$ см і визначаємо радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,204a = 0,204 \cdot 29 = 5,92 \text{ см}$$

$$\text{Визначаємо гнучкість стержня: } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 320}{5,92} \approx 108.$$

За таблицею дод. 1 визначаємо $\varphi(\lambda = 108) = 0,266$.

Отримане значення коефіцієнта $\varphi = 0,266$ відрізняється від того, що задавали в другому наближенні $\varphi_2 = 0,34$, тому виконуємо третє наближення, задаючи

$$\varphi_3 = \frac{0,34 + 0,266}{2} = 0,303.$$

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$A^H = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{100}{0,303 \cdot 8 \times 10^3} = 412,5 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 412,5 \text{ см}^2.$$

Визначаємо розмір перерізу a :

$$A = 0,433a^2 = 412,5 \Rightarrow a^H = \sqrt{\frac{412,5}{0,433}} = 30,87 \text{ см.}$$

Приймаємо розмір кратним 0,5 см: $a = 31$ см і визначаємо радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,204a = 0,204 \cdot 31 = 6,32 \text{ см}$$

$$\text{Визначаємо гнучкість стержня: } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 320}{6,32} \approx 101.$$

За таблицею дод. 1 визначаємо $\varphi(\lambda = 101) = 0,304$.

Отримане значення коефіцієнта $\varphi = 0,304$ практично не відрізняється від того, що задавали в третьому наближенні $\varphi_2 = 0,303$, вважаємо переріз прийнятним.

Площа прийнятого перерізу:

$$A = 0,433a^2 = 0,433 \cdot 31^2 = 416,1 \text{ см}^2$$

Перевіряємо умову міцності:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot A} = \frac{100 \times 10^3}{0,304 \cdot 416,1 \times 10^{-4}} = 7,91 \text{ МПа} < [\sigma] = 8 \text{ МПа.}$$

$$\text{Недонапруження складає: } \Delta = \frac{|8 - 7,91|}{8} \cdot 100\% = 1,13\%.$$

Отже, остаточно приймаємо розмір перерізу $a = 31$ см:
 $A = 416,1 \text{ см}^2$, $I_{\min} = 0,018a^4 = 0,018 \cdot 31^4 = 24054 \text{ см}^4$.

3. Критичну силу при гнучкості $\lambda = 101 > \lambda_u = 60$ визначаємо за формулою Ейлера:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1 \times 10^7 \cdot 24054 \times 10^{-8}}{(2 \cdot 3,2)^2} = 579 \text{ кН.}$$

4. Коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_s = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{579}{100} = 5,79.$$

Задача 2. Визначення допустимої сили для стиснутого стержня

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми та поперечного перерізу стержня визначити допустиме навантаження на стержень, величину критичної сили і коефіцієнт запасу стійкості.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 6 вибрати схему та лінійні розміри стержня, схему та розміри поперечного перерізу стержня із прокатної сталі.

План виконання роботи:

- 1) з умов закріплення стержня визначити коефіцієнт приведення довжини μ ;
- 2) визначити геометричні характеристики поперечного перерізу та коефіцієнт зниження допустимих напружень φ ;
- 3) з умови міцності визначити допустиму величину стискаючої сили;
- 4) визначити критичну силу та коефіцієнт запасу стійкості.

Приклад 2.3. Для стержня, розрахункова схема і поперечний переріз якого показані на рис. 2.6, визначити допустиме навантаження на стержень.

1. Визначаємо коефіцієнт приведення довжини. При умові, що обидва кінці стержня шарнірно обперті, за схемою рис. 2.1 приймаємо $\mu = 1$.

2. Визначаємо геометричні характеристики перерізу стержня (рис. 2.7):

$$\text{Площа перерізу } A = A_1 + A_2 + A_3 = 20,2 + 23,4 \cdot 2 = 67 \text{ см}^2.$$

Головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_2} = 58,6 + 1520 \cdot 2 = 3098,6 \text{ см}^4;$$

$$I_z = \sum_{i=1}^3 (I_{z_i} + A_i \cdot b_i^2) = 873 + (113 + 23,4 \cdot 6,45^2) \cdot 2 = 3046 \text{ см}^4.$$

$$I_{\min} = I_z = 3046 \text{ см}^4 .$$

Мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{3046}{67}} = 6,74 \text{ см}$$

Визначаємо гнучкість стержня та коефіцієнт зниження допустимих напружень:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1,0 \cdot 350}{6,74} \approx 52 .$$

За таблицею дод. 1 $\varphi(\lambda = 52) = 0,858$.

3. З умови міцності $\frac{P}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]$ маємо:

$$P_{adm} = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,858 \cdot 67 \times 10^{-4} \cdot 160 \times 10^3 = 920 \text{ кН} .$$

4. Критичну силу при гнучкості $\lambda_0 = 40 < \lambda = 52 < \lambda_u = 100$ визначаємо за формулою Ясинського:

$$P_{cr} = A \cdot (a - b \cdot \lambda) = 67 \times 10^{-4} (310 - 1,14 \cdot 52) \times 10^3 = 1680 \text{ кН} .$$

5. Коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_s = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{1680}{920} = 1,83 .$$

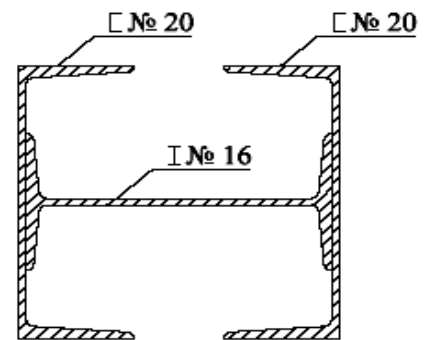
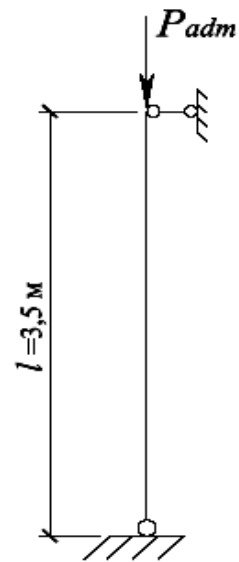


Рис. 2.6

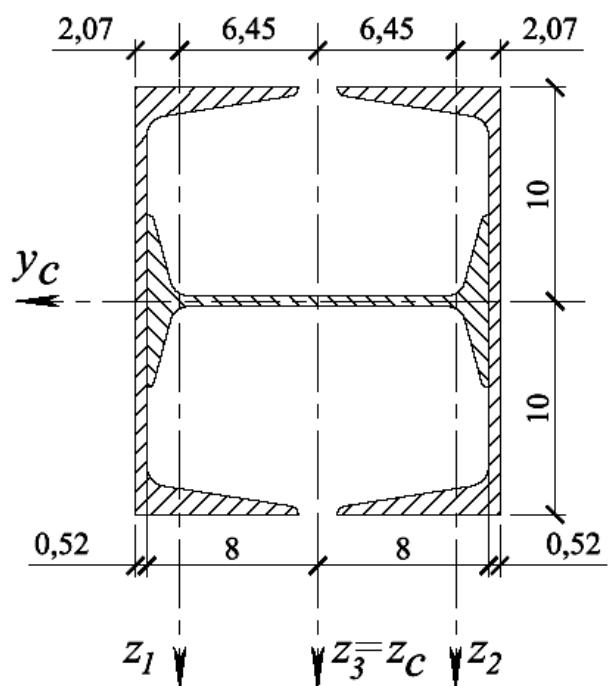


Рис. 2.7

Задача 3. Підбір перерізу стиснуто-зігнутого стержня

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми стержня визначити розміри поперечного перерізу з прокатного двотавра.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 7 вибрати схему та лінійні розміри стержня та величини навантажень.

План виконання роботи:

- 1) побудувати епюру згинальних моментів в стержні без врахування стискаючої сили;
- 2) визначити прогин стержня від поперечного навантаження в точці, де виникає найбільший згинальний момент;
- 3) визначити прогин стержня з врахуванням стискаючої сили;
- 4) підібрати розміри поперечного перерізу стержня;
- 5) в небезпечному перерізі визначити згинальний момент методом початкових параметрів і перевірити міцність стержня прийнятого поперечного перерізу.

Приклад 2.4. Для балки, розрахункова схема якої показана на рис. 2.8, підібрати розміри перерізу з прокатного двотавра.

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему балки і вказуємо величини діючих навантажень та числові значення лінійних розмірів (рис. 2.8 а).

2. Визначаємо реакції опор. Оскільки балка статично невизначувана (чотири невідомих реакції – три в защемленні і ще одна в шарнірно-рухомій опорі), розкриваємо статичну невизначуваність методом Мора.

Степінь статичної невизначуваності балки:

$$n = 4 - 3 = 1.$$

Обираємо основну систему методу сил, відкидаючи "зайву" шарнірну опору і заміняючи її дію невідомою силою X_1 (рис. 2.8 б).

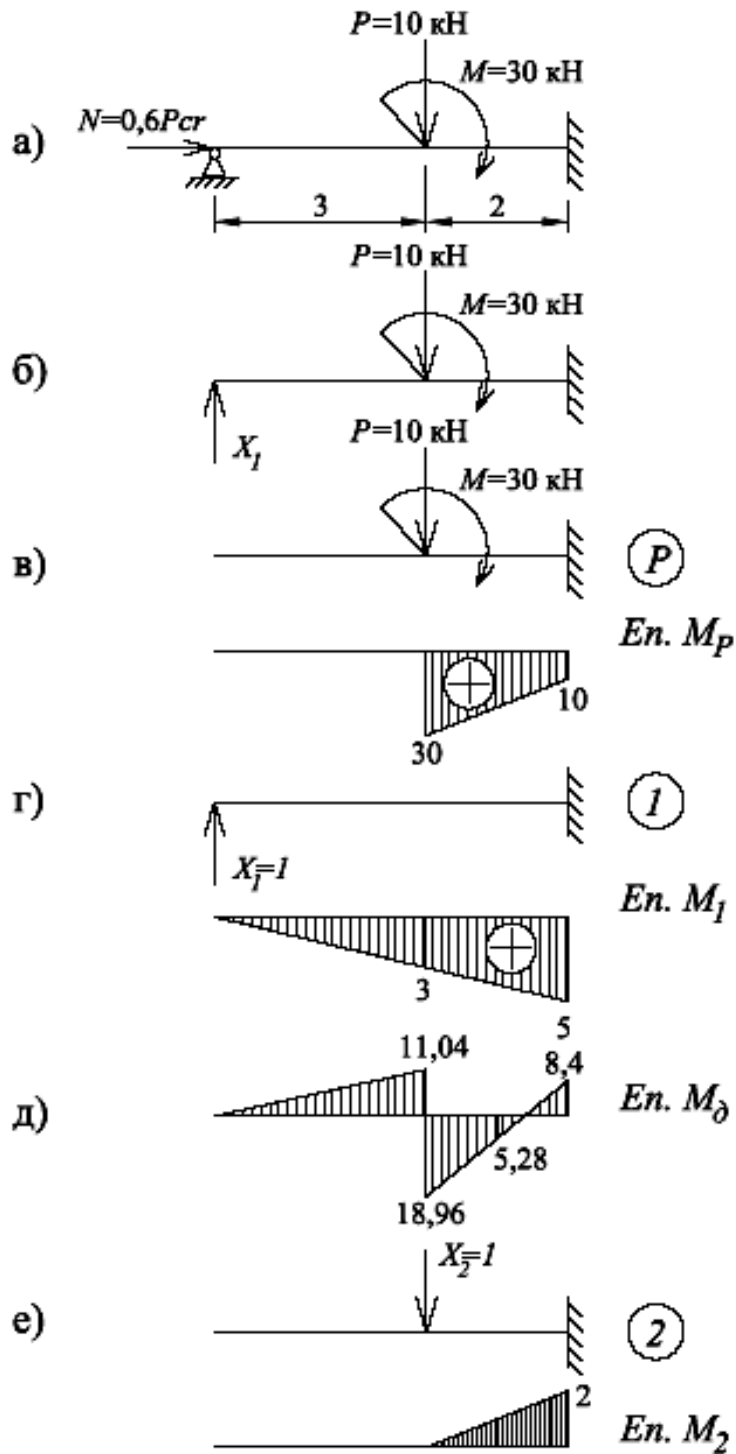


Рис. 2.8

Будуємо епюри згинальних моментів M для допоміжних станів: вантажного M_P (завантажуючи основну систему заданим навантаженням) (рис. 2.8 в) та одиничного M_1 (завантажуючи основну систему силою $X_1 = 1$) (рис. 2.8 г).

Канонічне рівняння методу сил: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$.

Коефіцієнти системи:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{41,667}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}},$$

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{2}{6EI} (30 \cdot 3 + 4 \cdot 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5) = \frac{153,333}{EI} \text{ м.}$$

$$\frac{41,667}{EI} X_1 + \frac{153,333}{EI} = 0 \Rightarrow X_1 = -3,68 \text{ кН.}$$

3. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 2.8 д).

4. Визначаємо прогин стержня в перерізі, де виникає найбільший згинальний момент. Прогин визначаємо методом Мора. Для цього будуємо допоміжний стан, прикладаючи одиничну силу по напрямку шуканого переміщення (рис. 2.8. е).

$$f_0 = \Delta_{2\partial} = \int_l \frac{M_2 M_{\partial}}{EI} dx =$$

$$= \frac{2}{6EI} (18,96 \cdot 0 + 4 \cdot 5,28 \cdot (-1) + (-8,4) \cdot (-2)) = -\frac{1,44}{EI} \text{ м.}$$

Варто зазначити, що пункти 2, 3 та 4 можна виконати методом початкових параметрів (рис. 2.9).

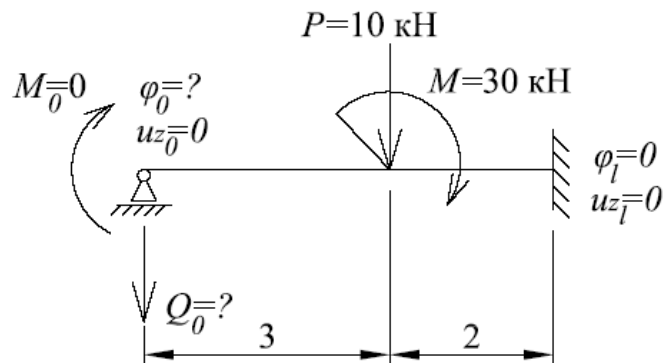


Рис. 2.9.

При умові, що лівий край стержня шарнірно обпертий, відомі початковий прогин та початковий момент: $u_{z_0} = 0$, $M_0 = 0$, а невідомі кут повороту φ_0 та поперечна сила Q_0 . З умови, що правий край стержня жорстко защемлений, маємо: $u_{z_l} = 0$ та $\varphi_l = 0$.

Записуємо рівняння $u_{z_l} = 0$, $\varphi_l = 0$:

$$EIu_z(x=5) = EIu_0 + EI\varphi_0 \cdot x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} = EI\varphi_0 \cdot 5 + Q_0 \frac{5^3}{6} - 30 \frac{(5-3)^2}{2} + 10 \frac{(5-3)^3}{6} = 0,$$

або $5EI\varphi_0 + 20,833Q_0 = 46,667$.

$$EI\varphi(x=5) = EI\varphi_0 + M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} = EI\varphi_0 + Q_0 \frac{5^2}{2} - 30(5-3) + 10 \frac{(5-3)^2}{2} = 0,$$

або $EI\varphi_0 + 12,5Q_0 = 40$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5EI\varphi_0 + 20,833Q_0 = 46,667, \\ EI\varphi_0 + 12,5Q_0 = 40, \end{cases}$$

розв'язки якої є шуканими початковими параметрами:

$$EI\varphi_0 = -6 \text{ кНм}^2 \text{ рад}, \quad Q_0 = 3,68 \text{ кН}.$$

Прогин стержня в перерізі, де виникає найбільший згинальний момент, визначаємо методом початкових параметрів як переміщення при $x = 3$ м:

$$EIu_z(x=3) = EI\varphi_0 \cdot x + Q_0 \frac{x^3}{6} = -6 \cdot 3 + 3,68 \frac{3^3}{6} = -1,44 \text{ кНм}^3,$$

$$f_0 = \frac{EIu_z}{EI} = \frac{-1,44}{EI}.$$

5. В першому наближенні переріз стержня підбираємо з умови, що напруження від кожного із зусиль однакові:

$$\frac{N}{A} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{N \cdot f_n}{W_y} = \frac{\sigma_{adm}}{3}.$$

Тоді: $\frac{M_y}{W_y} = \frac{\sigma_{adm}}{3}$ або

$$\frac{18,96}{W_y} = \frac{160 \times 10^3}{3} \Rightarrow W_y^H = \frac{18,96 \cdot 3}{160 \times 10^3} = 355,5 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 355,5 \text{ см}^3.$$

За сортаментом приймаємо двотавр № 27, для якого $A = 40,2 \text{ см}^2$, $W_y = 371 \text{ см}^3$, $I_y = 5010 \text{ см}^4$, $i_y = 11,2 \text{ см}$.

Визначаємо коефіцієнт приведення довжини стержня. При умові, що один кінець стержня защемлений, а на інший – шарнірно обертий, за схемою рис. 2.1 обираємо $\mu = 0,7$.

При гнучкості стержня $\lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 500}{11,2} \approx 31 < \lambda_0 = 40$ критична

сила рівна: $P_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = A \cdot \sigma_m = 40,2 \times 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^3 = 965 \text{ кН}$.

Стискаюча сила $N = 0,6 P_{cr} = 0,6 \cdot 965 = 579 \text{ кН}$.

Ейлерова сила $N_e = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \times 10^8 \cdot 5010 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 5)^2} = 8073 \text{ кН}$.

Повний прогин стержня:

$$f_n = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_e}} = \frac{-1,44}{1 - \frac{579}{8073}} = \frac{2 \times 10^8 \cdot 5010 \times 10^{-8}}{1 - \frac{579}{8073}} = -0,155 \times 10^{-3} \text{ м}$$

Фактичні напруження в перерізі стержня:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N \cdot f_n}{W_y} = \\ &= \frac{579 \times 10^{-3}}{40,2 \times 10^{-4}} + \frac{18,96 \times 10^{-3}}{371 \times 10^{-6}} + \frac{579 \times 10^{-3} \cdot (-0,155 \times 10^{-3})}{371 \times 10^{-6}} = \\ &= 144 + 51,1 - 0,2 = 194,9 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Умова міцності не виконується, тому необхідно змінити розміри перерізу.

Приймаємо двотавр № 36, для якого $A = 61,9 \text{ см}^2$, $W_y = 743 \text{ см}^3$, $I_y = 13380 \text{ см}^4$, $i_y = 14,7 \text{ см}$.

При гнучкості стержня $\lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 500}{14,7} \approx 24 < \lambda_0 = 40$

критична сила дорівнює:

$$P_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = A \cdot \sigma_m = 61,9 \times 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^3 = 1486 \text{ кН.}$$

Стискаюча сила $N = 0,6P_{cr} = 0,6 \cdot 1486 \approx 890 \text{ кН.}$

$$\text{Ейлерова сила } N_e = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \times 10^8 \cdot 13380 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 5)^2} = 21560 \text{ кН.}$$

Повний прогин стержня

$$f_n = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_e}} = \frac{-1,44}{1 - \frac{890}{21560}} = -0,056 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Фактичні напруження в перерізі стержня:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N \cdot f_n}{W_y} = \\ &= \frac{890 \times 10^{-3}}{61,9 \times 10^{-4}} + \frac{18,96 \times 10^{-3}}{743 \times 10^{-6}} + \frac{890 \cdot (-0,056 \times 10^{-3})}{743 \times 10^{-6}} = \\ &= 143,8 + 25,5 - 0,1 = 169,2 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\text{Перенапруження } \Delta = \left| \frac{169,2 - 160}{160} \right| \cdot 100\% = 5,75\% > 5\% \text{ більше}$$

за допустиме, тому приймаємо наступний номер профілю: двотавр № 40, для якого $A = 72,6 \text{ см}^2$, $W_y = 953 \text{ см}^3$, $I_y = 19062 \text{ см}^4$, $i_y = 16,2 \text{ см.}$

$$\text{При гнучкості стержня } \lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 500}{16,2} \approx 22 < \lambda_0 = 40$$

критична сила рівна:

$$P_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = A \cdot \sigma_m = 72,6 \times 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^3 = 1742 \text{ кН.}$$

Стискаюча сила $N = 0,6P_{cr} = 0,6 \cdot 1742 = 1045 \text{ кН.}$

$$\text{Ейлерова сила } N_e = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \times 10^8 \cdot 19062 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 5)^2} = 30716 \text{ кН.}$$

Повний прогин стержня

$$f_n = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_e}} = \frac{-1,44}{1 - \frac{1045}{30716}} = -0,039 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Фактичні напруження в перерізі стержня:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N \cdot f_n}{W_y} = \\ &= \frac{1045 \times 10^{-3}}{72,6 \times 10^{-4}} + \frac{18,96 \times 10^{-3}}{953 \times 10^{-6}} + \frac{1045 \cdot (-0,039 \times 10^{-3})}{953 \times 10^{-6}} = \\ &= 143,9 + 19,9 - 0,1 = 163,7 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\text{Перенапруження } \Delta = \left| \frac{163,7 - 160}{160} \right| \cdot 100\% = 2,3\% < 5\% \text{ в межах}$$

допустимого, тому приймаємо двотавр № 40 і виконуємо перевірку міцності.

6. Визначаємо згинальний момент в небезпечному перерізі методом початкових параметрів.

Як зазначалося вище, з граничних умов відомі початковий прогин та початковий момент: $u_{z_0} = 0$, $M_0 = 0$, а кут повороту φ_0 та поперечну силу Q_0 визначаємо з граничних умов на правому кінці стержня: $u_{z_l} = 0$ та $\varphi_l = 0$.

$$\text{Визначаємо параметр } \beta = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \sqrt{\frac{1045}{2 \times 10^8 \cdot 19062 \times 10^{-8}}} = 0,166$$

і записуємо рівняння $u_{z_l} = 0$, $\varphi_l = 0$ за методом початкових параметрів:

$$\begin{aligned} EIu_z(x=5) &= EIu_{z_0} + EI\varphi_0 \cdot x - M_0 \cdot \Phi_2(x) - Q_0 \cdot \Phi_3(x) + \\ &+ M \cdot \Phi_2(x-a) + P \cdot \Phi_3(x-b) = EI\varphi_0 \cdot 5 - Q_0 \cdot \frac{1}{0,166^3} \times \\ &\times [0,166 \cdot 5 - \sin(0,166 \cdot 5)] - 30 \cdot \frac{1}{0,166^2} [1 - \cos(0,166 \cdot (5-3))] + \end{aligned}$$

$$+10 \cdot \frac{1}{0,166^3} [0,166(5-3) - \sin(0,166(5-3))] = 0,$$

$$\underline{EI\varphi_0 \cdot 5 - Q_0 \cdot 20,13 = 46,19.}$$

$$EI\varphi(x=5) = EI\varphi_0 - M_0 \cdot \Phi_1(x) - Q_0 \cdot \Phi_2(x) + M \cdot \Phi_1(x-a) +$$

$$+ P \cdot \Phi_2(x-b) = EI\varphi_0 - Q_0 \cdot \frac{1}{0,166^2} [1 - \cos(0,166 \cdot 5)] -$$

$$- 30 \frac{1}{0,166} \sin(0,166(5-3)) + 10 \frac{1}{0,166^2} [1 - \cos(0,166 \cdot (5-3))] = 0.$$

$$\underline{EI\varphi_0 - Q_0 \cdot 11,80 = 39,94}$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} EI\varphi_0 \cdot 5 - Q_0 \cdot 20,13 = 46,19, \\ EI\varphi_0 - Q_0 \cdot 11,80 = 39,94, \end{cases}$$

з якої визначаємо невідомі початкові параметри:

$$EI\varphi_0 = -6,867 \text{ кНм}^2 \text{ рад}, \quad Q_0 = -3,97 \text{ кН}.$$

Визначаємо згинальний момент в небезпечному перерізі (при $x = 3 \text{ м}$):

$$M(x=3) = M_0 \cdot \Phi(3) + Q_0 \cdot \Phi_1(3) - M \cdot \Phi(3-3) =$$

$$= -3,97 \cdot \frac{1}{0,166} \sin(0,166 \cdot 3) + 30 \cdot \cos(0,166(3-3)) = 18,58 \text{ кНм}.$$

7. Перевірку міцності виконуємо по максимальних нормальних напруженнях:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1045 \times 10^{-3}}{72,6 \times 10^{-4}} + \frac{18,58 \times 10^{-3}}{953 \times 10^{-6}} = 163,4 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапруження } \Delta = \left| \frac{163,4 - 160}{160} \right| \cdot 100\% = 2,1\% < 5\% \text{ в межах}$$

допустимого, тому остаточно приймаємо двотавр № 40.

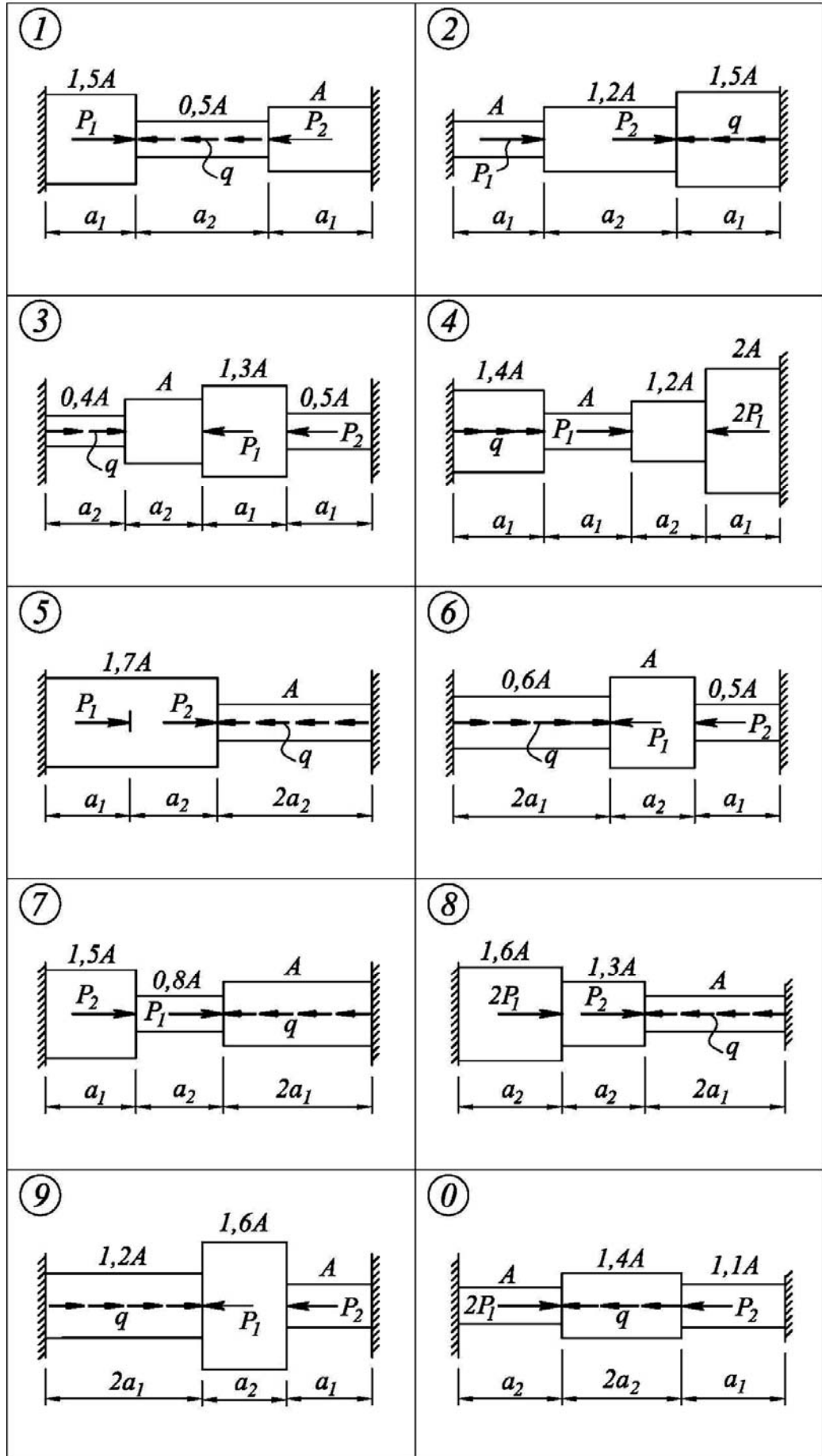
Коефіцієнт поздовжнього згину φ для сталі

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,990	0,989
10	0,988	0,986	0,984	0,983	0,981	0,979	0,977	0,975	0,974	0,972
20	0,970	0,967	0,965	0,962	0,959	0,956	0,954	0,951	0,948	0,946
30	0,943	0,939	0,935	0,932	0,928	0,924	0,920	0,916	0,913	0,909
40	0,905	0,901	0,897	0,894	0,890	0,886	0,882	0,878	0,875	0,871
50	0,867	0,862	0,858	0,853	0,848	0,844	0,839	0,834	0,829	0,825
60	0,820	0,815	0,810	0,805	0,800	0,795	0,790	0,785	0,780	0,775
70	0,770	0,764	0,759	0,754	0,748	0,742	0,737	0,732	0,726	0,720
80	0,715	0,709	0,703	0,697	0,691	0,685	0,679	0,673	0,667	0,661
90	0,655	0,648	0,640	0,633	0,626	0,619	0,611	0,604	0,597	0,589
100	0,582	0,575	0,568	0,561	0,554	0,547	0,540	0,533	0,526	0,519
110	0,512	0,506	0,499	0,493	0,486	0,480	0,474	0,467	0,461	0,454
120	0,448	0,443	0,438	0,433	0,428	0,423	0,417	0,412	0,407	0,402
130	0,397	0,392	0,387	0,382	0,377	0,372	0,368	0,363	0,358	0,353
140	0,348	0,344	0,339	0,335	0,331	0,326	0,322	0,318	0,314	0,309
150	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,277	0,274
160	0,270	0,267	0,264	0,261	0,258	0,255	0,252	0,249	0,246	0,243
170	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230	0,228	0,226	0,223	0,221	0,218
180	0,216	0,214	0,212	0,210	0,208	0,206	0,204	0,202	0,200	0,198
190	0,196	0,194	0,192	0,190	0,188	0,186	0,184	0,181	0,179	0,177
200	0,175	0,174	0,172	0,171	0,169	0,168	0,167	0,165	0,163	0,162
210	0,160	0,159	0,157	0,156	0,154	0,153	0,152	0,150	0,149	0,147
220	0,146									

Закінчення дод. 1

Коефіцієнт поздовжнього згину ϕ для деревини

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994
10	0,992	0,990	0,988	0,986	0,984	0,982	0,980	0,977	0,974	0,971
20	0,968	0,965	0,961	0,958	0,954	0,950	0,946	0,942	0,937	0,933
30	0,928	0,923	0,918	0,913	0,908	0,902	0,896	0,890	0,884	0,878
40	0,872	0,866	0,859	0,852	0,845	0,838	0,831	0,823	0,816	0,808
50	0,800	0,792	0,784	0,775	0,767	0,758	0,749	0,740	0,731	0,722
60	0,712	0,702	0,692	0,682	0,672	0,662	0,652	0,641	0,630	0,619
70	0,608	0,597	0,585	0,574	0,562	0,550	0,538	0,523	0,510	0,497
80	0,484	0,472	0,461	0,450	0,439	0,429	0,419	0,410	0,400	0,391
90	0,383	0,374	0,366	0,358	0,351	0,343	0,336	0,329	0,323	0,316
100	0,310	0,304	0,298	0,292	0,287	0,281	0,276	0,271	0,266	0,261
110	0,256	0,252	0,247	0,243	0,239	0,234	0,230	0,226	0,223	0,219
120	0,215	0,212	0,208	0,205	0,202	0,198	0,195	0,192	0,189	0,186
130	0,183	0,181	0,178	0,175	0,173	0,170	0,168	0,165	0,163	0,160
140	0,158	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,143	0,142	0,140
150	0,138	0,136	0,134	0,132	0,131	0,129	0,127	0,126	0,124	0,123
160	0,121	0,120	0,118	0,117	0,115	0,114	0,112	0,111	0,110	0,109
170	0,107	0,106	0,105	0,104	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098	0,097
180	0,096	0,095	0,094	0,093	0,092	0,091	0,090	0,089	0,088	0,087
190	0,086	0,085	0,084	0,083	0,082	0,082	0,081	0,080	0,079	0,078
200	0,078									

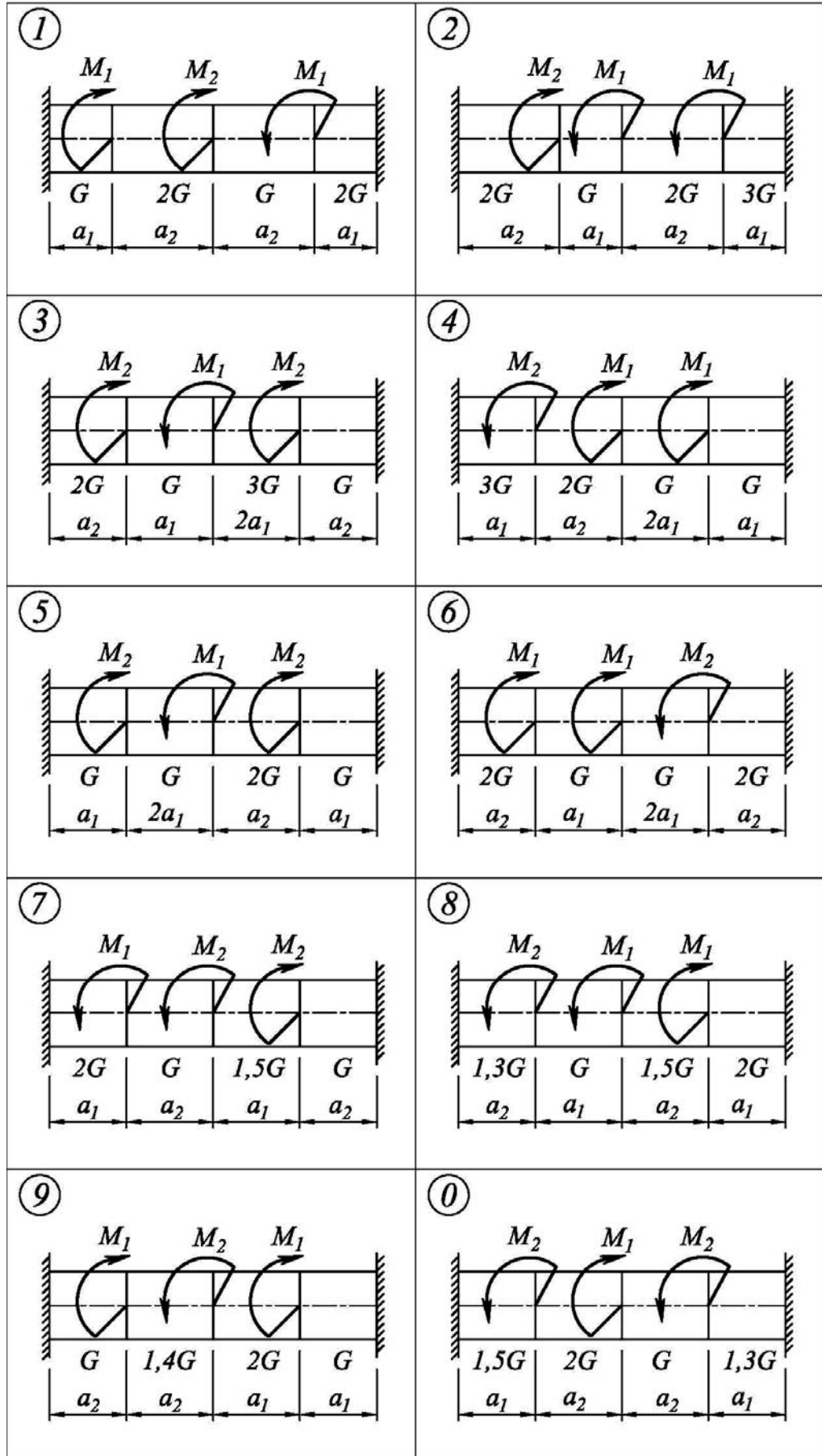


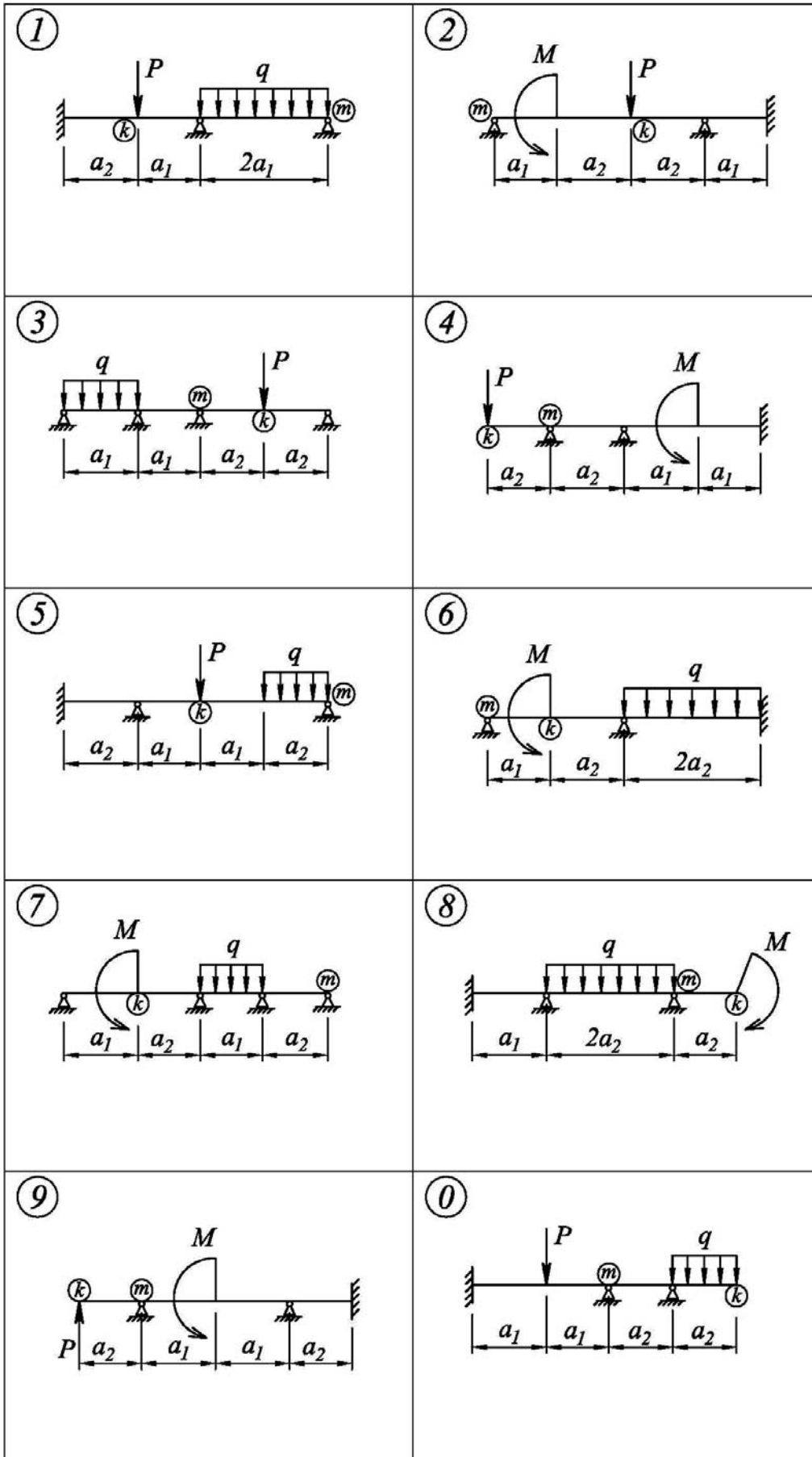
Закінчення дод. 2

Цифра шифру	Перша цифра шифру			Друга цифра шифру				Третя цифра шифру
	a_1 , м	a_2 , м	A	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	σ_{adm} , МПа	Номер схеми
1	1,4	1,8	Квадрат	10	14	4	27	3
2	1,2	1,5	Коло	12	16	3	36	2
3	1,3	1,6	Квадрат	9	13	2	25	1
4	1,25	1,46	Коло	13	18	2,5	30	0
5	1,3	1,7	Квадрат	14	19	3,2	33	9
6	1,5	1,9	Коло	11	20	2,2	40	8
7	1,35	2,0	Квадрат	10	17	1,95	50	7
8	1,45	1,75	Коло	12	16	2,3	36	6
9	1,2	1,85	Квадрат	13	15	3,12	29	5
0	1,4	1,96	Коло	9	19	3,4	42	4

Додаток 3

Цифра шифру	Перша цифра шифру			Друга цифра шифру			Третя цифра шифру
	a_1 , м	a_2 , м	G , МПа	M_1 , кНм	M_2 , кНм	τ_{adm} , МПа	Номер схеми
1	0,6	1,25	Сосна	5	9	Сталь 3	0
2	0,7	1,10	Дуб	4	10	Сосна	9
3	0,8	1,35	Сталь 3	6	11	Дуб	8
4	0,5	1,45	Сосна	7	12	Сталь 3	7
5	0,62	1,0	Дуб	4	13	Сосна	6
6	0,65	1,2	Сталь 3	6	14	Дуб	5
7	0,75	1,3	Сосна	5	12	Сталь 3	4
8	0,85	1,15	Дуб	3	13	Сосна	3
9	0,55	1,4	Сталь 3	5	14	Дуб	2
0	0,9	1,25	Сосна	6	10	Сталь 3	1





Цифра шифру	Перша цифра шифру			Друга цифра шифру		Третя цифра шифру	
	a_1 , м	a_2 , м	q , кН/м	P , кН	M , кНм	Номер схеми	σ_{adm} (МПа)
1	1	1,7	8	21	22	3	155
2	1,5	2,1	6	22	21	4	163
3	2,0	2,3	7	23	23	5	158
4	2,5	1,5	5	24	24	6	170
5	3,0	1,9	9	25	19	7	178
6	2,4	3,2	6	26	25	8	182
7	2,6	3,0	5	27	26	9	194
8	2,2	2,8	8	28	24	0	210
9	1,8	3,1	6	29	21	1	180
0	1,6	2,4	7	20	30	2	175

Додаток 5

Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра	Третя цифра
	Схема колони	L , м	P , кН	Схема перерізу
1	2	2,7	200	1
2	3	3,0	250	2
3	4	3,5	350	3
4	5	3,2	300	4
5	1	2,9	220	5
6	2	3,4	240	6
7	3	2,8	270	7
8	4	3,1	180	8
9	5	3,6	260	9
0	1	3,3	275	0

Схема перерізу

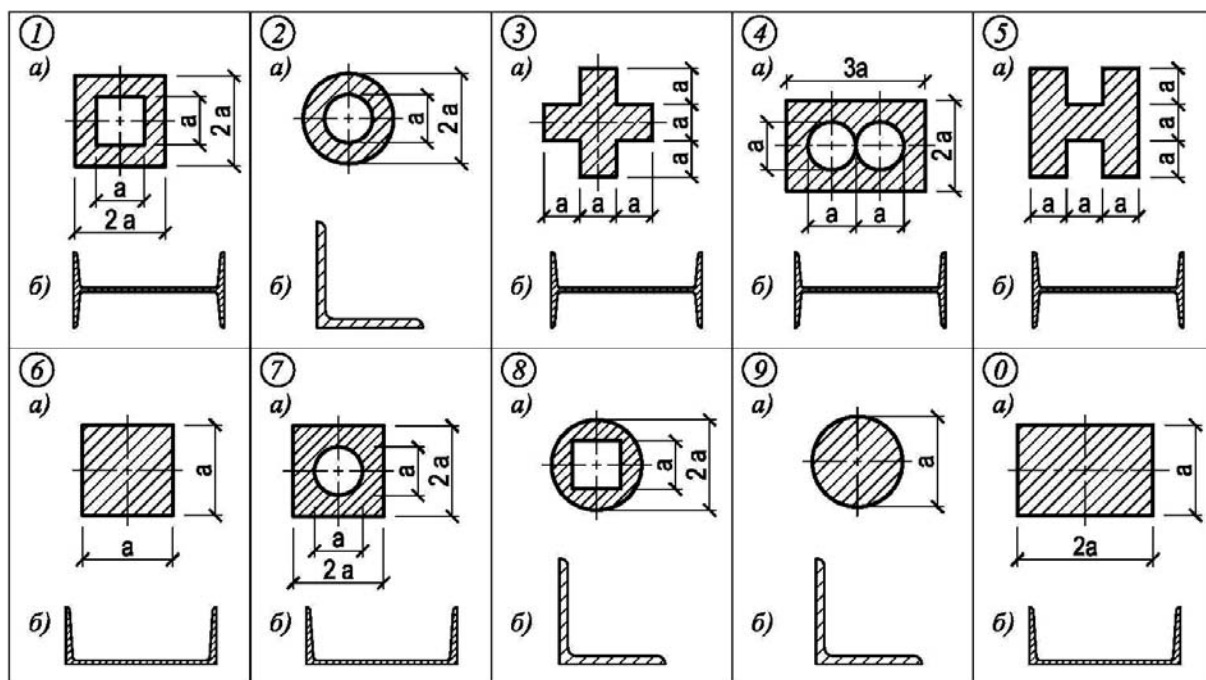
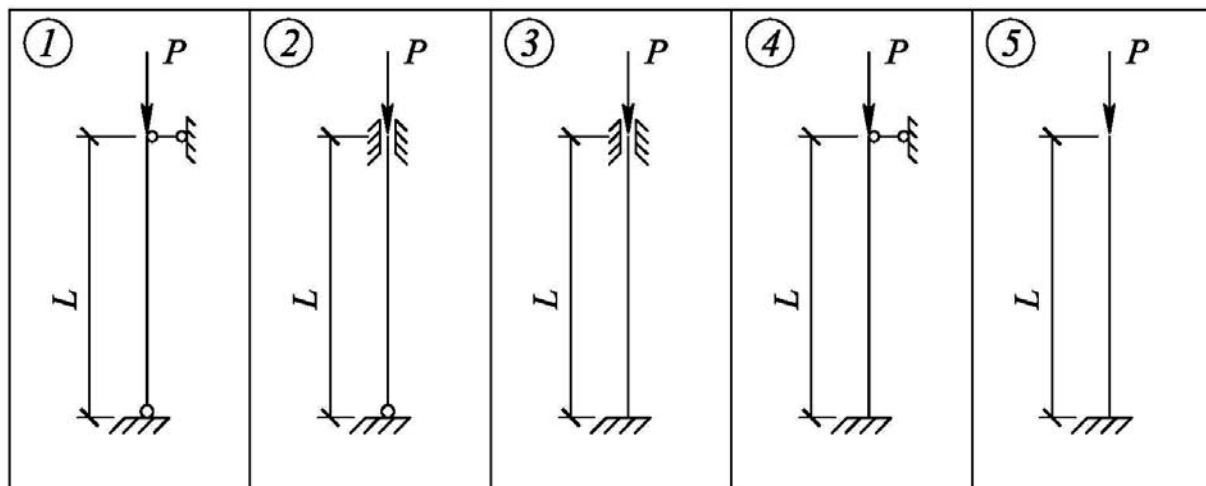
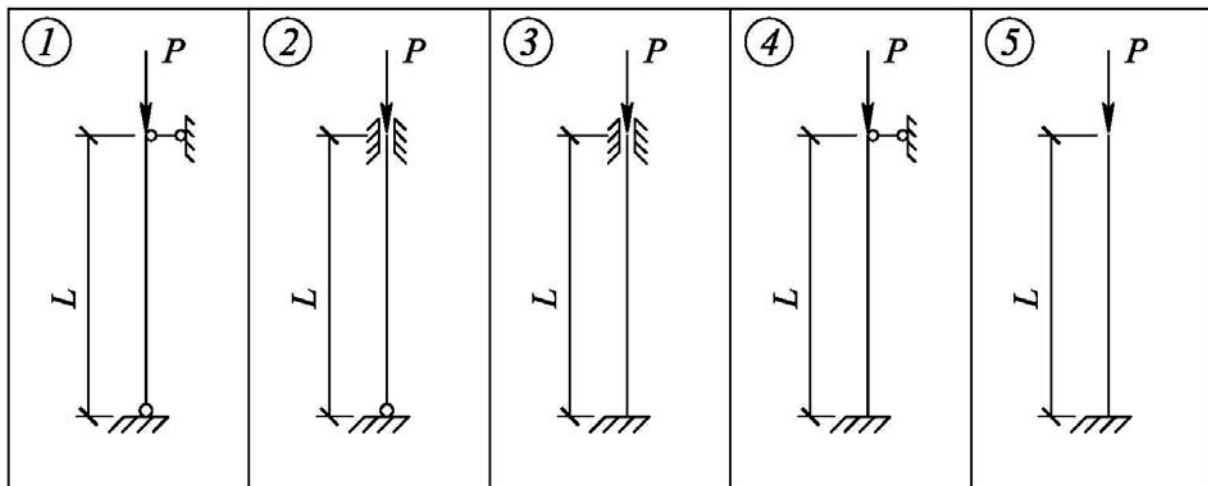


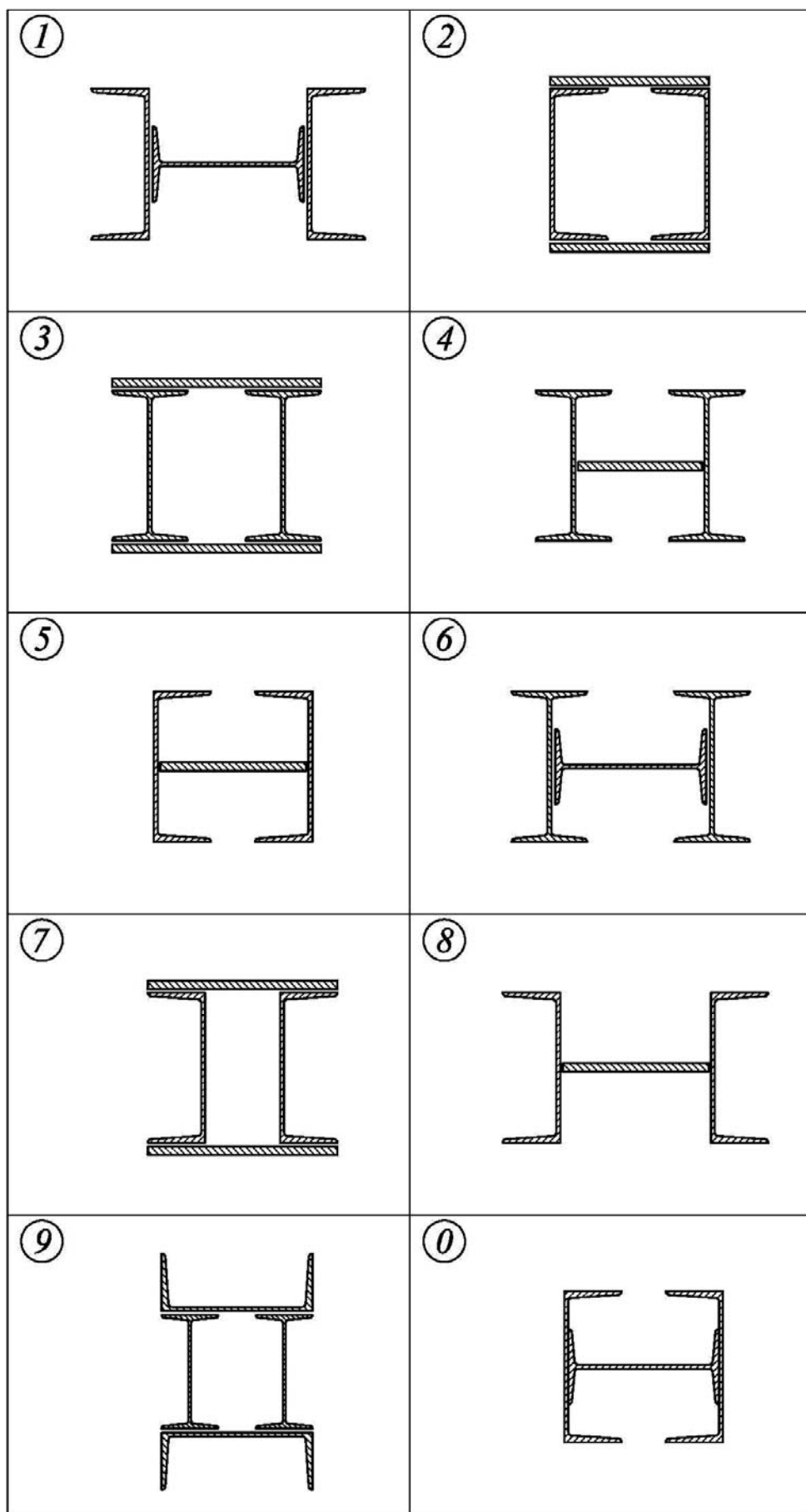
Схема колони

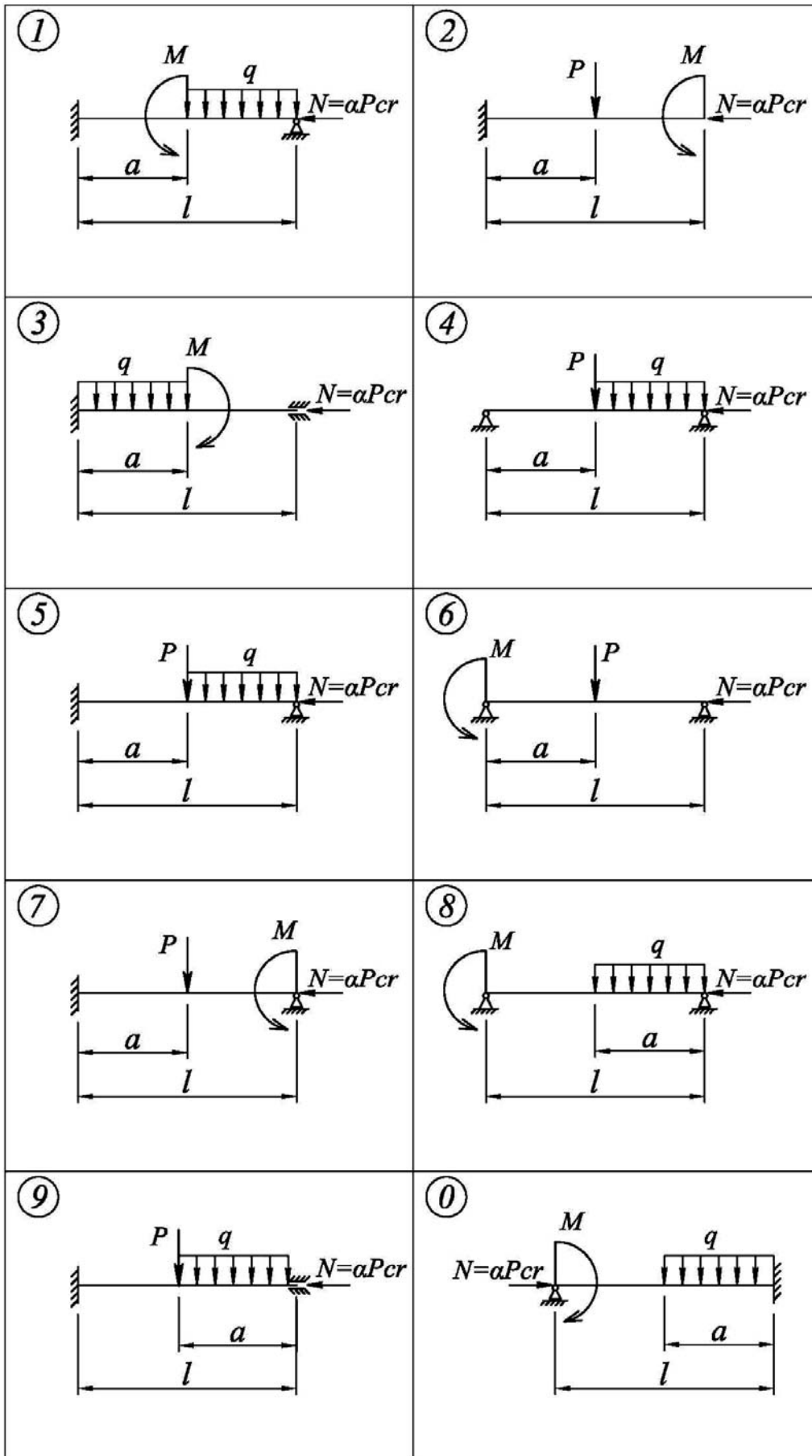


Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра		Третя цифра
	Схема колони	L , м	Номер профілю	Розміри пластини, мм	Схема перерізу
1	1	3,0	14	160×10	1
2	2	2,6	16	180×12	2
3	3	3,5	18	200×14	3
4	4	3,2	20	240×12	4
5	5	2,9	22	240×10	5
6	1	3,4	24	260×10	6
7	2	2,8	27	280×12	7
8	3	3,1	30	300×14	8
9	4	3,6	16	160×12	9
0	5	3,3	20	300×10	0

Схема колони







Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра			Третя цифра
	a , м	l , м	P , кН	M , кНм	α	Схема перерізу
1	2,0	4,5	30	35	0,4	1
2	2,5	4,0	35	30	0,45	2
3	2,0	3,5	33	40	0,5	3
4	3,0	5,0	40	27	0,6	4
5	2,4	4,0	45	31	0,55	5
6	3,2	4,8	50	33	0,4	6
7	2,8	4,6	42	36	0,45	7
8	3,5	5,0	44	44	0,6	8
9	2,75	4,5	41	34	0,5	9
0	3,0	5,5	40	30	0,4	0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Опір** матеріалів: підручник / Л. Т. Шкельов, А. М. Станкевич, Д. В. Пошивач. – К.: ЗАТ "Віпол", 2011. – 456 с.
2. **Опір** матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко – К.: Вища шк., 1993. – 654 с.
3. **Опір** матеріалів з основами теорії пружності: навчальний посібник у двох частинах, п'яти книгах / за ред. В. Г. Піскунова – К.: Вища школа, 1994 – 1995.
Ч – I, кн. 1: Загальні основи курсу – 1994. – 205 с.
Ч – I, кн. 2: Опір бруса – 1994. – 335 с.
Ч – II, кн. 4: Приклади і задачі – 1995. – 304 с.
4. **Справочник** по сопроотивленію материалов / С. П. Фесик. – [2-е изд.] – К.: Будівельник, 1982. – 367 с.