

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Розрахунок статично невизначуваної

(нерозрізної) балки методом сил

Методичні рекомендації, завдання та приклад
виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 „Будівництво”

Київ 2016

УДК 539.3

ББК 30.121

О-61

Укладач: О.Ф.Корбаков , кандидат технічних наук, доцент

Рецензент О.П. Кошевий, кандидат технічних наук, доцент

Відповідальний за випуск А. М. Станкевич, кандидат технічних наук, доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 6 від 23 березня 2016 року.*

Опір матеріалів. Розрахунок статично невизначуваної (нерозрізної) балки методом сил: методичні рекомендації, завдання та приклад до виконання розрахунково-графічних роботи для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво» / уклад: О.Ф.Корбаков. –К.: КНУБА, 2016.-28с.

Методичні рекомендації містять варіанти індивідуальних завдань, вказівки та детальний план виконання розрахунково-графічної роботи з курсу «Опір матеріалів» по темі « Розрахунок статично невизначуваної (нерозрізної) балки методом сил », а також приклад виконання завдання.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво» для практичного використання під час виконання розрахунково-графічної роботи.

© КНУБА, 201

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам виконати розрахунково-графічну роботу з курсу „Опір матеріалів” за темою:

Розрахунок статично невизначуваної (нерозрізної) балки методом сил.

Розрахунково-графічну роботу студент повинен виконати за індивідуальним завданням, умова якого визначається згідно з шифром, виданим викладачем. Вихідні дані (розрахункові схеми та числові значення) студент вибирає з додатків (див. дод. 1, 2) за власним шифром у вигляді тризначного числа.

Оформлюється розрахунково-графічна робота на аркушах формату А4, які скріплюються зліва. Титульний аркуш роботи оформлюється за зразком:

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота № _____

/тема/

Виконав:

студент _____

/спеціальність, курс, група/

/прізвище, ініціали/

Керівник _____

/прізвище, ініціали/

Київ – 20__ р.

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення – олівцем. Дозволяється комп’ютерне виконання креслень.

Для виконання завдання наведено план та рекомендації щодо поетапного розрахунку. Для ілюстрації наведено приклад виконання РГР. Виконуючи кожен етап розрахунків, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (см^2 , см^3 , см^4 , кН, кНм).

Розрахунково-графічна робота вважається зарахованою після її захисту.

Розрахунок статично невизначуваних (нерозрізних) балок методом сил

Короткі відомості з теорії

1. Ступінь статичної невизначуваності

Суцільна статично невизначувана балка, яка не переривається на всьому протязі шарнірами, називається нерозрізною. В нерозрізних балках кількість невідомих опорних реакцій більше кількості рівнянь статичної рівноваги які можна скласти для довільної плоскої системи сил. Кількість цих рівнянь для одного твердого тіла, як відомо, дорівнює 3-ом. Тому такі балки є статично невизначуваними. Їх ступінь статичної невизначуваності дорівнює кількості ‘зайвих’ в’язей і може бути визначена за формулою:

$$n = k_R - 3. \quad (1)$$

У цій формулі: n - ступінь статичної невизначуваності балки, k_R - кількість реакцій опор в заданій балці.

2. Основні невідомі і основна система методу сил

Нерозрізна балка, що підлягає розрахунку, замінюється балкою (або системою балок), яка може бути розрахована простіше. Для цього в заданій балці відкидаються деякі існуючі в’язі. По напрямку відкинутих в’язей прикладають їх невідомі реакції (сили), вони є основними невідомими методу сил. Така, знов створена схема балки, яка знаходиться під дією навантажень, прикладених до вихідної балки, ще й завантажена невідомими реакціями відкинутих в’язей називається основною системою. Основна система методу сил - це статично визначувана система, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням ‘зайвих’ в’язей. Для розрахунку нерозрізних балок, як правило, використовують основну систему, що утворюється постановкою наскрізних шарнірів над проміжними опорами. Таким чином

основна система являє собою сукупність окремих однопрольотних балок, які деформуються незалежно одна від одної. Дія зовнішнього навантаження з однієї однопрольотної балки на іншу не передається. Основними невідомими в даному випадку є згинальні моменти, що виникають у перерізах балки над її опорами. Кількість невідомих дорівнює ступені статичної невизначуваності n .

3. Система канонічних рівнянь методу сил

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2) виражає відсутність переміщень в основній системі в напрямках відкинутих “зайвих” в’язей. При виконанні умов закладених в цих рівняннях деформований, а значить і напружений стан статично визначуваної основної системи буде еквівалентним напружено-деформованому стану вихідної статично невизначуваної балки.

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (2) називається системою канонічних рівнянь методу сил. Невідомі X_1, X_2, \dots, X_n - це реакції відкинутих зайвих в’язей, коефіцієнти при невідомих δ_{ij} - це переміщення в основній системі в напрямках i -х відкинутих в’язей від одиничних величин невідомих X_j . Вільні члени системи Δ_{iF} - переміщення в напрямку i -ої одиничної в’язі від зовнішнього силового навантаження балки. Їх ще називають вантажними коефіцієнтами.

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь визначаються за формулою Максвелла – Мора:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} dx; \quad (3)$$

Обчислення такого інтегралу носить назву “множення” епюр.

У випадку розрахунку нерозрізної балки на зовнішнє силове навантаження (стан F) вантажні коефіцієнти визначаються за формулою:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \cdot M_F}{EI} dx; \quad (4)$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно побудувати n епюр згинальних моментів одиничних станів \bar{M}_i , які виникають в прольотах балок основної системи від дії кожного невідомого $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) окремо, а також епюру згинальних моментів вантажного стану M_F від дії зовнішнього навантаження. Безпосереднє інтегрування в формулах (3), (4) замінюється чисельним з використанням правила Верещагіна і формул Сімпсона – Корноухова. У випадку розрахунку нерозрізної балки на вплив температурного поля (стан T), вантажні коефіцієнти визначаються за формулою:

$$\Delta_{it} = \pm \sum \alpha \frac{|t_{\text{в}} - t_{\text{н}}|}{h} A_{M_i}; \quad (5)$$

де A_{M_i} – площа епюри згинальних моментів i -го одиничного стану, $t_{\text{в}}, t_{\text{н}}$ – температури верхнього та нижнього волокна балки, α - коефіцієнт лінійного розширення матеріалу (для сталі $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹) h – висота поперечного перерізу балки. В формулі (5) береться знак плюс, якщо розтягнені волокна стержня в i -му одиничному стані збігаються з розтягнутими волокнами від дії температури.

Якщо нерозрізна балка розраховується на примусове зміщення опор (стан C), вантажні коефіцієнти можна визначити за формулою:

$$\Delta_{ic} = -\sum \bar{R}_{ik} \cdot c_k. \quad (6)$$

У цьому виразі \bar{R}_{ki} - опорна реакція в i -му одиничному стані, c_k - відповідне (по напрямку реакції) вимушене зміщення опори в стані C.

Якщо направлення реакції \bar{R}_{ik} співпадає з напрямком зміщення c_k , то обидві величини беруться з однаковим знаком і Δ_{ic} в цьому випадку буде від'ємним.

Відповідно до наведених правил, система канонічних рівнянь (2) для двічі статично невизначуваної балки буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Для один раз статично невизначуваної балки це буде канонічне рівняння:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0; \quad (8)$$

Після обчислення коефіцієнтів і формування системи канонічних рівнянь необхідно переконатись в її стандартному канонічному вигляді:

- Коефіцієнти при невідомих розташовані на головній діагоналі системи рівнянь суттєво додатні: $\delta_{ii} > 0$; (9)
- Побічні коефіцієнти системи рівнянь симетричні відносно головної діагоналі: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; (10)
- Сума всіх коефіцієнтів при невідомих дорівнює добутку сумарної одиничної епюри моментів самої на себе:

$$\sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij} = \delta_{\Sigma\Sigma}; \quad \delta_{\Sigma\Sigma} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma \cdot \bar{M}_\Sigma}{EI} dx; \quad \bar{M}_\Sigma = \Sigma \bar{M}_i; \quad (11)$$

- Сума коефіцієнтів при невідомих j -го стовбця системи рівнянь дорівнює добутку сумарної одиничної епюри моментів на одиничну епюру \bar{M}_j :

$$\Sigma \delta_{ij} = \delta_{j\Sigma}; \quad ; \quad \delta_{j\Sigma} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_j \cdot \bar{M}_\Sigma}{EI} dx; \quad (12)$$

- Сумма стовбця грузових коефіцієнтів дорівнює добутку сумарної одиничної епюри моментів на вантажну епюру M_F :

$$\sum \Delta_{iF} = \Delta_{\Sigma F}; \quad \Delta_{\Sigma F} = \Sigma \int_l \frac{M_F \cdot \bar{M}_{\Sigma}}{EI} dx; \quad (13)$$

4. Побудова дійсних епюр зусиль

Розв'язок системи канонічних рівнянь визначає величини основних невідомих X_1, X_2, \dots, X_n . Далі виконується звичайний спосіб побудови епюр в основній системі одночасно від дії всіх навантажень: зовнішніх сил і основних невідомих з визначенням опорних реакцій і чисельних величин зусиль в характерних перерізах балки. Проте більш раціональним треба вважати спосіб накладання. Він ґрунтується на принципі незалежності дій (принцип суперпозиції) і полягає в тому що, будь-яке зусилля від дії суми сил може бути отримане як сума зусиль від дії кожної сили окремо. На цій підставі можна записати:

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F; \quad (14)$$

$$M_t = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n; \quad (15)$$

$$M_C = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n. \quad (16)$$

Для отримання дійсної епюри моментів треба виконати поординатне сумування епюр які її складають. Епюра $\bar{M}_1 X_1$ - це епюра така ж як і \bar{M}_1 ординати якої збільшені в X_1 разів.

Для виконання кінематичної перевірки дійсної епюри згинальних моментів M_{∂} слід перемножити її на будь-яку одиничну епюру моментів (в тому числі і сумарну), побудованих в основній системі. Якщо результат буде дорівнювати нулю, це означає нерозривність деформацій: кут зламу у введених шарнірах відсутній і епюра M_{∂} побудована вірно.

$$\Delta_{\partial \Sigma} = 0; \quad \Delta_{\partial \Sigma} = \Sigma \int_l \frac{M_{\partial} \cdot \bar{M}_{\Sigma}}{EI} dx; \quad (17)$$

$$\Delta_{\partial i} = 0; \quad \Delta_{\partial i} = \Sigma \int_l \frac{M_{\partial} \cdot \bar{M}_i}{EI} dx; \quad (18)$$

При розрахунку балки на дію температурного поля, результатом правильності побудови дійсної епюри згинальних моментів є рівність

суми стовбця вантажних коефіцієнтів Δ_{it} системи канонічних рівнянь, добутку сумарної одиничної епюри моментів \bar{M}_Σ на дійсну епюру згинальних моментів від температури M_t зі зворотнім знаком:

$$\sum \Delta_{it} = - \Delta_{\Sigma t} \text{ або } \sum \Delta_{it} + \Delta_{\Sigma t} = 0; \quad \Delta_{\Sigma t} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma \cdot M_t}{EI} dx; \quad (19)$$

При розрахунку балки на осадку опор, результатом правильності побудови дійсної епюри згинальних моментів є рівність суми стовбця вантажних коефіцієнтів Δ_{ic} системи канонічних рівнянь добутку сумарної одиничної епюри моментів \bar{M}_Σ на дійсну епюру згинальних моментів від осадки опор M_C зі зворотнім знаком: $\sum \Delta_{ic} = - \Delta_{\Sigma C}$,

$$\text{або } \sum \Delta_{ic} + \Delta_{\Sigma C} = 0; \quad \Delta_{\Sigma C} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma \cdot M_C}{EI} dx; \quad (20)$$

Дійсні епюри поперечних сил в нерозрізній балці можна отримати використовуючи диференціальну залежність $Q_\partial = dM_\partial / dx$. На ділянках балки де $q = 0$, епюра Q – константа, а якщо $q \neq 0$, Q – похила, тому вказана вище залежність для окремих ділянок балки може бути представлена в вигляді:

$$Q_\partial = \frac{M_\partial^{np} - M_\partial^{liv}}{a}; \quad \text{при } q = 0; \quad (21)$$

$$Q_\partial^{np} = \frac{M_\partial^{np} - M_\partial^{liv}}{a} \pm \frac{q \cdot a}{2}; \quad \text{при } q \neq 0. \quad (22)$$

де Q_∂^{liv} , Q_∂^{np} , M_∂^{np} , M_∂^{liv} - числові значення дійсних факторів на лівому і правому кінцях ділянки відповідно, a – довжина ділянки.

Дійсні опорні реакції нерозрізної балки можуть бути обчислені як величини скачків в місцях опор на дійсній епюрі поперечних сил:

$$R_k = Q_k^{np} - Q_k^{liv}; \quad (23)$$

де Q_k^{np} і $Q_k^{лів}$ - дійсні величини поперечних сил відповідно праворуч і ліворуч k -ої опори балки.

Маючи опорні реакції, не важко виконати перевірку статичної рівноваги всієї конструкції: $\sum F_x = 0$; $\sum F_z = 0$; $\sum M = 0$. (24)

5. Визначення переміщень у нерозрізній балці

Переміщення в статично невизначуваній нерозрізній балці можна обчислити формулою Максвелла – Мора:

$$\Delta_{k\partial} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_k \cdot M_{\partial}}{EI} dx ; \quad (25)$$

де: M_{∂} - дійсна еюра згинальних моментів в нерозрізній балці, \bar{M}_k - еюра згинального моменту від одиничної сили (або одиничного моменту), що відповідає шуканому переміщенню. Ця еюра може бути побудована як у вихідній статично невизначуваній балці, так і у вихідній основній системі так і у будь якій іншій основній системі, котра відповідає заданій балці.

6. Постановка задачі та вихідні дані

Для заданої нерозрізної балки побудувати дійсні еюри згинальних моментів і поперечних зусиль від дії заданого силового навантаження. З умови міцності підібрати переріз балки з прокатного двотавра. Перевірити жорсткість балки. Визначити зусилля в балці від заданої температури і заданої осадки опори.

Вихідні дані: схему балки з навантаженнями і чисельні величини розмірів, навантажень, температур, зміщень опор вибирають за особистим шифром з додатку 1.

План виконання роботи

Розрахунок на дію силового навантаження

- 1) Визначення ступені статичної невизначуваності нерозрізної балки.
- 2) Вибір основної системи.
- 3) Побудова епюр одиничних станів в основній системі.
- 4) Побудова вантажної епюри згинальних моментів в основній системі.
- 5) Формування системи канонічних рівнянь:
 - обчислення коефіцієнтів при невідомих ,
 - обчислення вантажних коефіцієнтів системи,
 - перевірка коефіцієнтів системи,
 - розв'язок системи і визначення невідомих.
- 6) Побудова дійсної епюри згинальних моментів.
 - кінематична перевірка епюри моментів.
- 7) Побудова дійсної епюри поперечних сил.
- 8) Визначення опорних реакцій і перевірка статичної рівноваги балки.
- 9) Підбір перерізу балки з прокатного двотавра.
- 10) Перевірка жорсткості консольної ділянки балки (або жорсткості більш навантаженого прольоту).

Розрахунок на вплив температурного поля

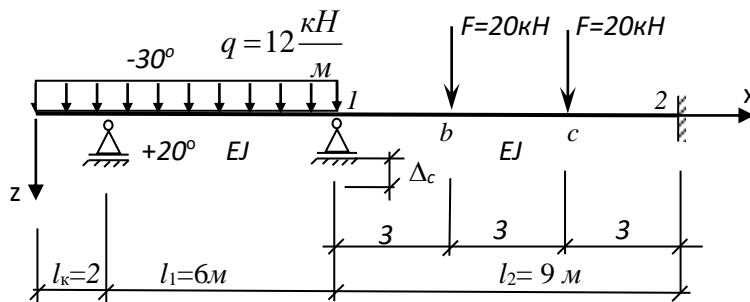
- 11) Обчислення вантажних коефіцієнтів системи.
- 12) Формування і розв'язок системи рівнянь.
- 13) Побудова дійсних епюр згинальних моментів. Кінематична перевірка .
- 14) Побудова дійсних епюр поперечних сил. Визначення опорних реакцій. Перевірка статичної рівноваги.

Розрахунок на осадку опор

- 15) Обчислення вантажних коефіцієнтів системи.

- 16) Формування і розв'язок системи рівнянь.
- 17) Побудова дійсних епюр згинальних моментів. Кінематична перевірка.
- 18) Побудова дійсних епюр поперечних сил. Визначення опорних реакцій. Перевірка статичної рівноваги.

Приклад виконання розрахунково – графічної роботи



Для заданої нерозрізної балки побудувати епюри дійсних згинальних моментів і поперечних сил від силового навантаження. З умови міцності по нормальним напруженням ($\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$) підібрати переріз балки з прокатного двотавра. Перевірити жорсткість консольної ділянки балки $\left(\frac{f_k}{2 \cdot l_k} adm = \frac{1}{250} \right)$. Визначити внутрішні зусилля в цій балці від впливу температури ($t^e = -30^\circ$, $t^u = 20^\circ$) в межах першого прольоту і від осадки опори 1 ($\Delta_c = 9 \text{ см}$). Для кожного з 3-х видів розрахунку виконати кінематичну і статичну перевірки правильності отриманого рішення. Модуль пружності сталі: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коефіцієнт лінійного розширення сталі: $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1} \text{ С}$.

1. Розрахунок на дію силового навантаження.

- 1) Ступінь статичної невизначуваності балки: $n = kR - 3 = 5 - 3 = 2$;
- 2) Вибір основної системи. В якості розрахункової схеми приймаємо основну систему ОС₃, як більш раціональну: епюри в цій системі будуть

мати найменші величини ординат і обмежуватись одним прольотом.

3) Побудова епюр моментів одиничних станів:

- 1-й одиничний стан: $X_1=1, X_2=0, F=0$.

$$\overline{R_0} = -\overline{R_1^I} = \frac{X_1}{l_1} = \frac{1}{6}; \quad \overline{R_2} = -\overline{R_1^{II}} = \frac{X_1}{l_2} = \frac{1}{9};$$

- 2-й одиничний стан: $X_1=0, X_2=1, F=0$.

$$\overline{R_1^{II}} = \overline{R_2} = \frac{X_2}{l_2} = \frac{1}{9};$$

- сумарна одинична еюра будується методом координатного сумування:

$$\overline{M_\Sigma} = \overline{M_1} + \overline{M_2}.$$

4) Побудова епюри моментів вантажного стану $F: X_1=0, X_2=0, F, q \neq 0$.

- балка 1:

$$\sum M_1 = 0: \quad R_0 \cdot 6 - 12 \cdot 8 \cdot 4 = 0; \quad R_0 = \frac{12 \cdot 4 \cdot 8}{6} = 64 \text{ кН}.$$

$$\sum M_0 = 0: \quad R_1^I \cdot 6 + 12 \cdot 8 \cdot 2 = 0; \quad R_1^I = \frac{12 \cdot 8 \cdot 2}{6} = 32 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка:} \quad \sum F_z = -64 - 32 + 12 \cdot 8 = 96 - 96 = 0.$$

$$M_0 = -12 \cdot 2 \cdot 1 = -24 \text{ кНм}; \quad M_{cp} = 32 \cdot 3 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = 96 - 54 = 42 \text{ кНм}.$$

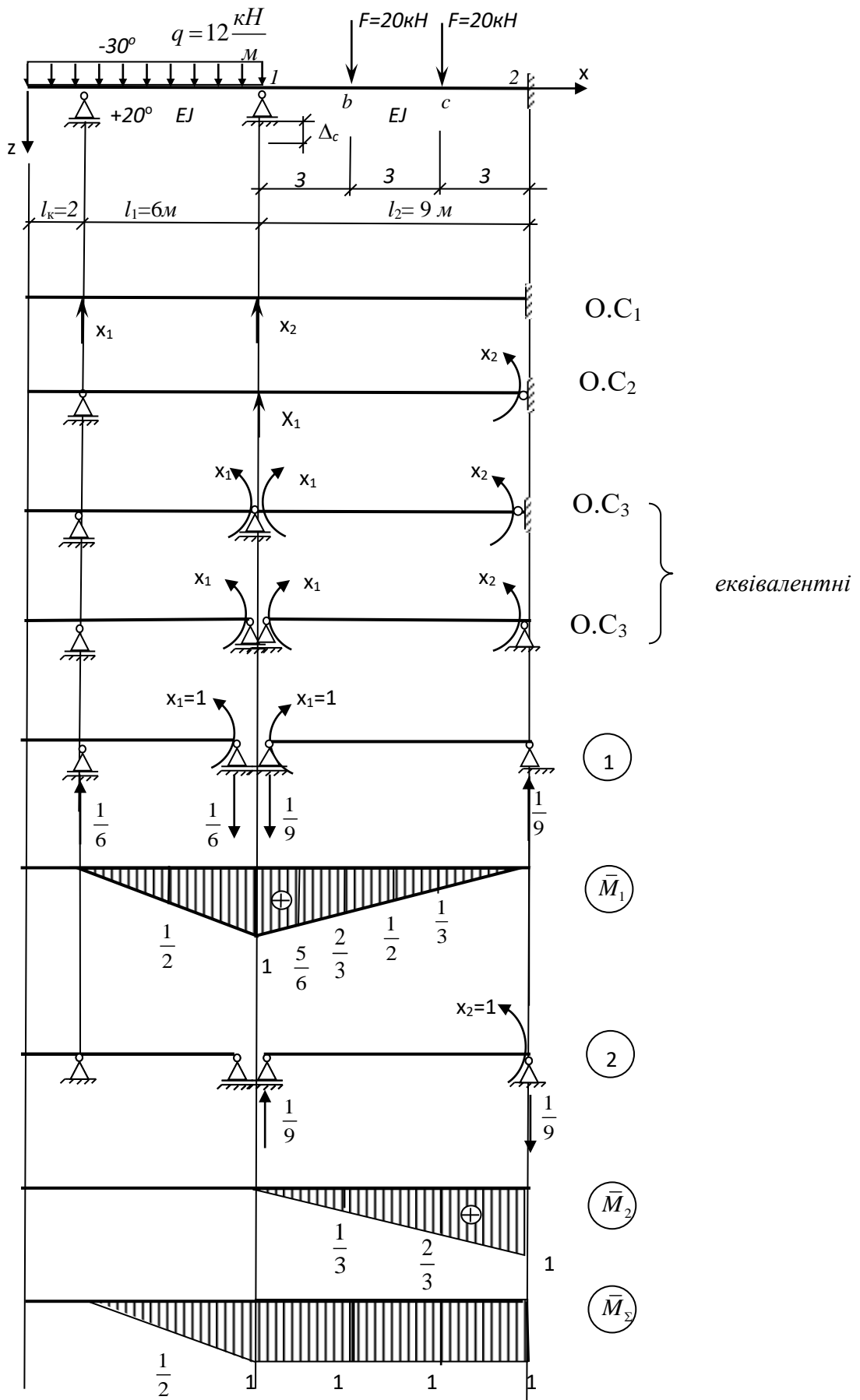
- балка 2: $R_1^{II} = R_2 = F = 20 \text{ кН}$; - з умови симетрії.

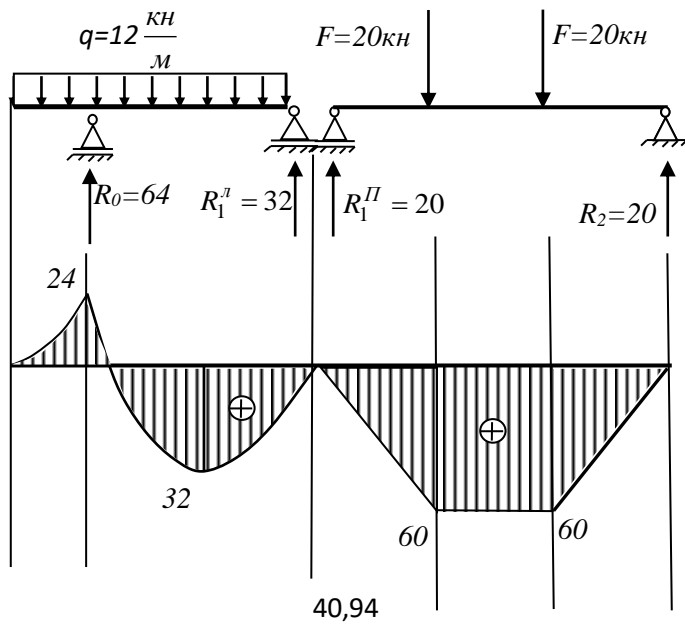
$$M_3 = M_6 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кНм}.$$

5) Система канонічних рівнянь для двічі статично невизначуваної системи:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases};$$

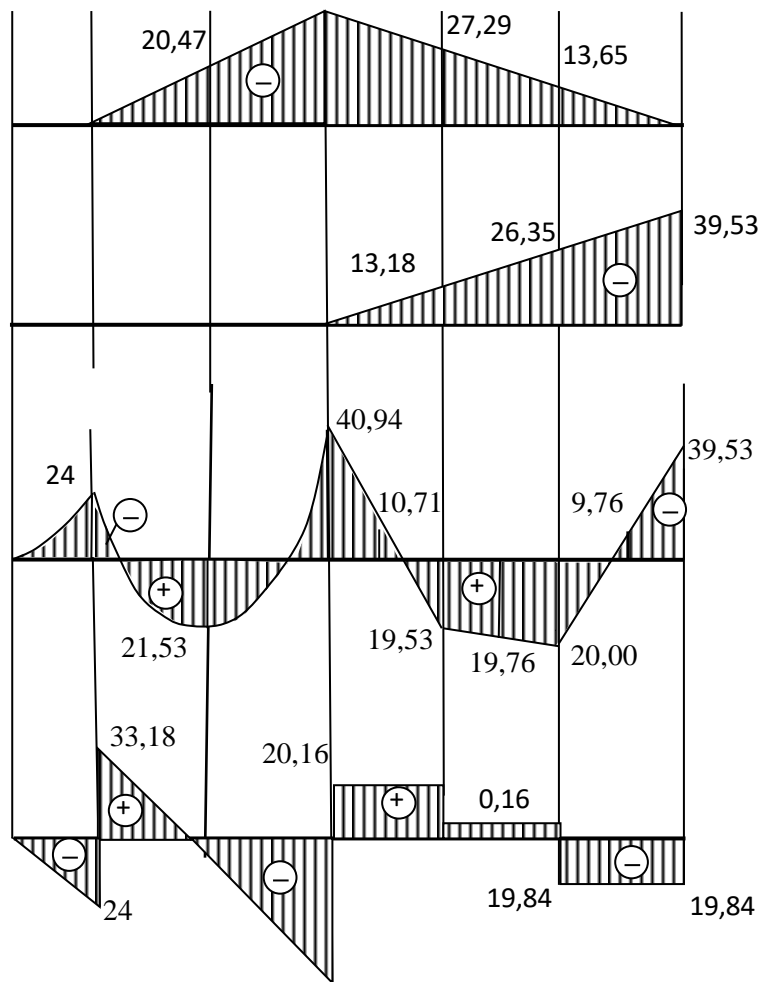
РОЗРАХУНОК НА ДІЮ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ





(F)

M_F

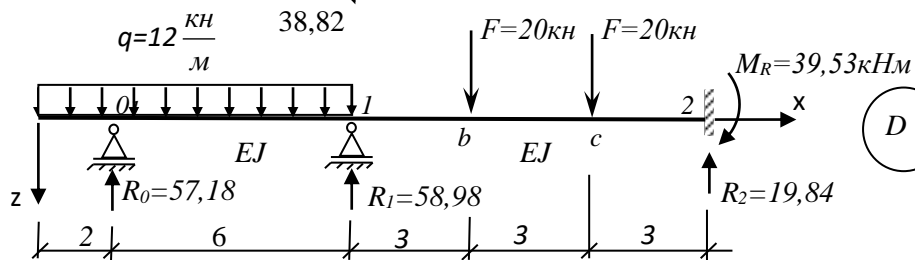


M_{1x_1}

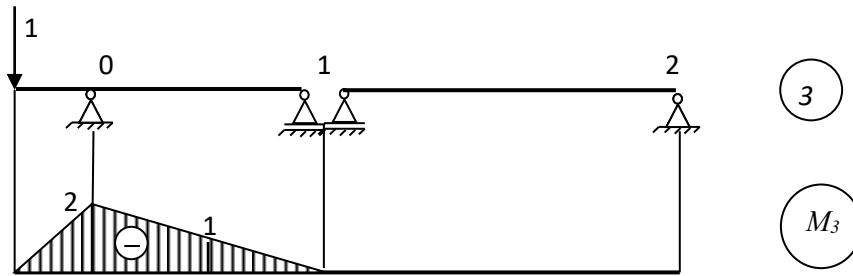
M_{2x_2}

M_{δ} кНМ

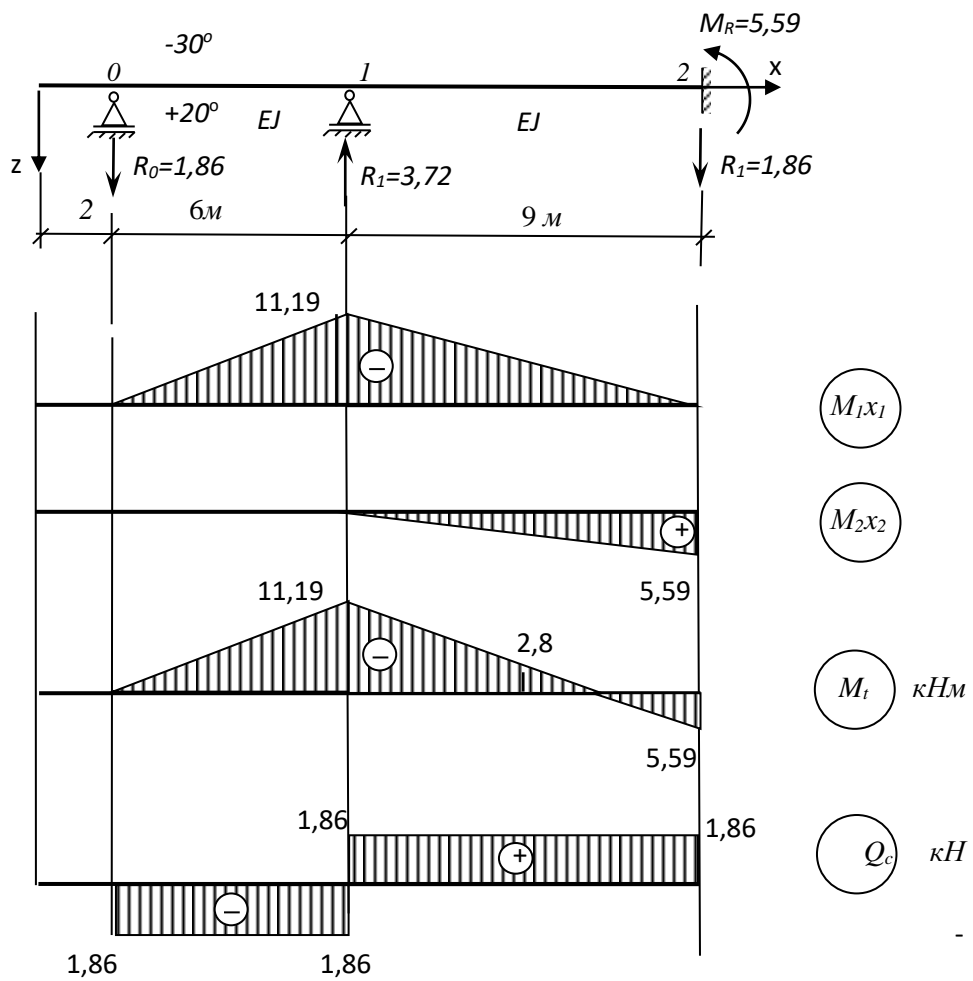
Q_{δ} кН



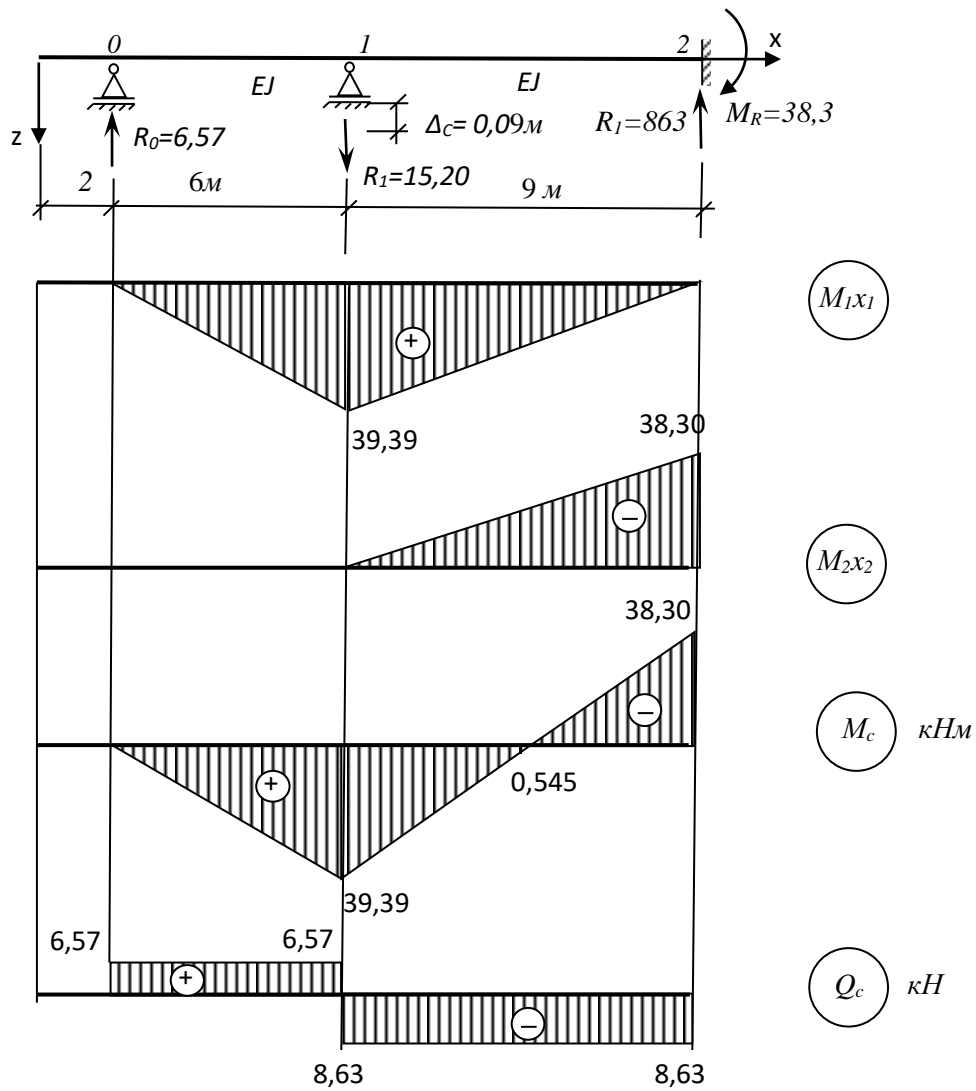
(D)



РОЗРАХУНОК НА ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ



РОЗРАХУНОК НА ОСАДКУ ОПОРИ



- обчислення коефіцієнтів при невідомих:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI_i} \int M_1 M_1 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{EI};$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{1}{EI_i} \int M_1 M_2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{1}{EI_i} \int M_2 M_2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{3}{EI};$$

- обчислення вантажних коефіцієнтів системи:

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{1}{EI_i} \int M_1 M_F dx = \frac{6}{6EI} \left(24 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 42 + 0 \right) + \frac{3}{6EI} \left(0 \cdot 1 + 4 \cdot 30 \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot 60 \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI} 60 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} 60 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{84}{EI} + \frac{180}{EI} = \frac{264}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_i} \int M_2 M_F dx = \frac{180}{EI}.$$

- формуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{5}{EI} x_1 + \frac{1,5}{EI} x_2 + \frac{264}{EI} = 0 \\ \frac{1,5}{EI} x_1 + \frac{3}{EI} x_2 + \frac{180}{EI} = 0 \end{cases};$$

- перевірка коефіцієнтів системи:

$$a) \quad \sum_i \sum_j \delta_{ij} = \delta_{\Sigma\Sigma}; \quad \sum_i \sum_j \delta_{ij} = 5 + 3 + 1,5 \cdot 2 = \frac{11}{EI};$$

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum \frac{1}{EI_i} \int \bar{M}_\Sigma \cdot \bar{M}_\Sigma dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 = \frac{11}{EI}.$$

$$б) \quad \sum_i \Delta_{iF} = \Delta_{\Sigma F}; \quad \sum_i \Delta_{iF} = \frac{264}{EI} + \frac{180}{EI} = \frac{444}{EI};$$

$$\Delta_{\Sigma F} = \sum \frac{1}{EI_i} \int M_\Sigma M_F dx = \frac{6}{6 \cdot EI} \left(0 \cdot 24 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 42 + 1 \cdot 0 \right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 60 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{EI} 60 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{84}{EI} + \frac{360}{EI} = \frac{444}{EI}.$$

- розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5X_1 + 1,5X_2 + 264 = 0 / 5 \\ 1,5X_1 + 3X_2 + 180 = 0 / 1,5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} X_1 + 0,3X_2 + 52,8 = 0 \\ X_1 + 2,0X_2 + 120,0 = 0, \end{cases}$$

$$1,7x_2 + 67,2 = 0,$$

$$X_2 = -\frac{67,2}{1,7} = -39,53;$$

$$X_1 = -2 \cdot (-39,53) - 120 = -40,94;$$

б) Побудова дійсних епюр згинальних моментів:

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F;$$

дійсна епюра моментів будується методом поординатного сумування .

- кінематична перевірка: $\Delta_{\Sigma\partial} = 0;$

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\partial} &= \sum \frac{1}{EI} \int M_{\Sigma} \cdot \bar{M}_{\partial} dx = \frac{6}{6 \cdot EI} \left(24 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 21,53 - 40,94 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI} 1 \cdot 3 \cdot 10,71 + \\ &+ \frac{1}{EI} 1 \cdot 3 \cdot 19,76 - \frac{1}{EI} 1 \cdot 3 \cdot 9,76 = (61,40 - 61,41) \frac{1}{EI} = 0,01 \approx 0. \end{aligned}$$

$$\text{Похибка: } \varepsilon = \frac{0,01}{61,40} \cdot 100\% = 0,016\% < 1\%.$$

7) Побудова епюри поперечних сил:

$$Q_{\partial} = \frac{M_{\partial}^{np} - M_{\partial}^{nie}}{a}; \quad \text{при } q = 0;$$

$$Q_{\partial}^{nie} = \frac{M_{\partial}^{np} - M_{\partial}^{nie}}{a} \pm \frac{q \cdot a}{2}; \quad \text{при } q \neq 0;$$

$$Q_{a0}^{lee} = \frac{-24 - 0}{2} + \frac{12 \cdot 2}{2} = 0,$$

$$Q_{a0}^{np} = \frac{-24 - 0}{2} - \frac{12 \cdot 2}{2} = -24 \text{ кН}.$$

$$Q_{01}^{лев} = \frac{-40,94 - (-24)}{6} + \frac{12 \cdot 6}{2} = -2,82 + 36 = 33,18 \text{ кН},$$

$$Q_{01}^{np} = \frac{-40,94 - (-24)}{6} - \frac{12 \cdot 2}{2} = -2,82 - 36 = -38,82 \text{ кН},$$

$$Q_{1b} = \frac{19,52 - (-40,94)}{3} = 20,15 \text{ кН},$$

$$Q_{bc} = \frac{20 - 19,52}{3} = 0,16 \text{ кН},$$

$$Q_{c2} = \frac{-39,53 - 20}{3} = -19,84 \text{ кН}.$$

8) Визначення опорних реакцій і перевірка статичної рівноваги балки:

$$R_i = Q_i^{np} - Q_i^{лев};$$

$$R_0 = 33,18 - (-24) = 57,18 \text{ кН};$$

$$R_1 = 20,16 - (-38,82) = 58,98 \text{ кН};$$

$$R_2 = 0 - (-19,84) = 19,84 \text{ кН};$$

$$M_R = 39,53 \text{ кНм}.$$

- перевірка статичної рівноваги:

$$\sum F_z = -57,18 - 58,98 - 19,84 + 2 \cdot 20 + 12 \cdot 8 = 136 - 136 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 39,53 + 58,98 \cdot 9 + 57,18 \cdot 15 - 20 \cdot 3 - 20 \cdot 6 - 12 \cdot 8 \cdot 13 = \\ &= 1428,05 - 1428 = 0,05 \approx 0; \end{aligned}$$

9) Підбір перерізу з прокатного двотавра. $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа};$

Потрібний момент опору прокатного двотавра:

$$W_y^{nom} = \frac{M_y^{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{40,94 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,256 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 256 \text{ см}^3;$$

Приймаємо: I № 22^a, $W_y = 254 \text{ см}^3$, $I_y = 2790 \text{ см}^4$.

$$\sigma_{max} = \frac{M_y^{max}}{W_y} = \frac{40,94 \cdot 10^3}{254 \cdot 10^{-6}} = 0,161 \cdot 10^9 \text{ Па} = 161 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа};$$

Перенапруження : $\frac{161-160}{160} \cdot 100\% = 0,6\% < 5\%$; Міцність забезпечена.

10) Перевірка жорсткості консолі:

$$\frac{f_{\kappa}}{2l_{\kappa}} \leq \frac{1}{250} - \text{умова жорсткості консольної ділянки.}$$

$$f_{\kappa} = \Delta_{3\partial} = \sum \frac{1}{EI_i} \int \overline{M}_3 \cdot M_{\partial} dx = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{6}{6EI_y} (2 \cdot 24 - 4 \cdot 1 \cdot 21,53 + 0) =$$

$$\frac{-14,12}{EI_y} = \frac{-14,12}{2 \cdot 10^8 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = -2,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,253 \text{ см};$$

$$\frac{f_{\kappa}}{2l_{\kappa}} = \frac{0,253}{2 \cdot 200} = \frac{1}{1581} < \frac{1}{200}; \quad \text{Жорсткість забезпечена.}$$

2. Розрахунок на температурний вплив (стан T).

Умови в прольоті балки що нагрівається:

$$t^e = -30^{\circ} \text{ с}, \quad t^h = 20^{\circ} \text{ с}, \quad l_1 = 6 \text{ м}, \quad h = 22 \text{ см} = 0,22 \text{ м}, \quad \alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1} \text{ C};$$

$$EI = 2 \cdot 10^8 \cdot 2790 \cdot 10^{-8} = 5580 \text{ кНм}^2.$$

Система канонічних рівнянь при розрахунку на вплив температури:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases};$$

Коефіцієнти системи при невідомих: δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} беремо з результатів пункту 5 цього розв'язку.

11) Вантажні коефіцієнти обчислюємо користуючись формулою:

$$\Delta_{it} = \pm \alpha \cdot \frac{|t^h - t^e|}{h} \cdot A_{\overline{M}_i};$$

δ

$$\Delta_{1t} = \frac{|-30 - 20|}{0,22} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \right) \cdot 125 \cdot 10^{-7} = 0,00852;$$

$$\Delta_{2t} = 0;$$

12) Система канонічних рівнянь розв'язується шляхом вирівнювання коефіцієнтів при невідомих :

$$\begin{cases} \frac{5}{EI} x_1 + \frac{1,5}{EI} x_2 + 0,00852 = 0 \\ \frac{1,5}{EI} x_1 + \frac{3}{EI} x_2 + 0 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 1,5x_2 + 0,00852 \cdot EI = 0 \\ 1,5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \cdot 2;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 0,01704 \cdot EI = 0 \\ 1,5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases};$$

$$8,5x_1 + 0,01704 \cdot EI = 0,$$

$$x_1 = -\frac{0,01704 \cdot EI}{8,5} = -\frac{0,01704 \cdot 5580}{8,5} = -11,19 \text{ кНм};$$

$$x_2 = (-1,5 \cdot (-11,19)) \cdot \frac{1}{3} = 5,59 \text{ кНм};$$

13) Будуємо дійсну епюру згинальних моментів від дії температури M_t , користуючись прийомом поординатного сумування епюр:

$$M_t = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2;$$

- кінематична перевірка дійсної епюри згинальних моментів від дії температури: $\Sigma \Delta_{it} + \Delta_{\Sigma C} = 0;$

$$\Sigma \Delta_{it} = 0,00852;$$

$$\begin{aligned} - \Delta_{\Sigma t} &= \Sigma \frac{1}{EI_i} \int \overline{M}_{\Sigma} \cdot M_i dx = \left(-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11,19 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2,80 \right) = \\ &= \frac{-47,58}{5580} = -0,00853; \end{aligned}$$

$$- \Sigma \Delta_{it} + \Delta_{\Sigma C} = 0,00852 - 0,00853 = -0,00001 \approx 0;$$

$$\text{Похибка: } \varepsilon = \frac{0,00001}{0,00852} \cdot 100\% = 0,117\%.$$

14) Побудова епюри поперечних сил:

$$\begin{aligned} Q_{(1)} &= \frac{-11,19 - 0}{6} = -1,86 \text{ кН}; \\ Q_{(2)} &= \frac{5,59 - (-11,19)}{9} = 1,86 \text{ кН}. \end{aligned}$$

- визначення опорних реакцій

$$R_i = Q_i^{np} - Q_i^{лев};$$

$$R_0 = -1,86 - 0 = -1,86 \text{ кН};$$

$$R_1 = 1,86 - (-1,86) = 3,72 \text{ кН};$$

$$R_2 = 0 - 1,86 = -1,86 \text{ кН};$$

$$M_R = 5,59 \text{ кНм}.$$

- перевірка статичної рівноваги:

$$\Sigma F_z = 6,51 - 14,18 + 8,47 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = -1,86 \cdot 6 + 1,86 \cdot 9 - 5,59 = -0,01 \approx 0.$$

3. Розрахунок на осадку опори 1 (стан С).

Умови в прольотах балки:

$$l_1 = 6 \text{ м}, \quad l_2 = 9 \text{ м}, \quad EI = 2 \cdot 10^8 \cdot 2790 \cdot 10^{-8} = 5580 \text{ кНм}^2.$$

Осадка опори 1: $\Delta_1 = 0,09 \text{ м}.$

Система канонічних рівнянь при розрахунку на зміщення опор:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1c} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2c} = 0 \end{cases};$$

Коефіцієнти системи при невідомих: $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ беремо з результатів пункту 5 цього розв'язку.

15) Вантажні коефіцієнти обчислюємо користуючись формулою:

$$\Delta_{ic} = -\sum \overline{R}_{ik} \cdot c_k;$$

- реакції опори 1 в першому і другому одиничних станах основної системи (визначені в пункті 5 цього розрахунку):

$$\overline{R}_{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9}; \quad \overline{R}_{21} = -\frac{1}{9};$$

$$\Delta_{1c} = -\sum \overline{R}_{11} \cdot \Delta_1 = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) \cdot 0,09 = -0,025;$$

$$\Delta_{2c} = -\sum \overline{R}_{21} \cdot \Delta_1 = -\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 0,09 = 0,010;$$

16) Формуємо і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{5}{EI}x_1 + \frac{1,5}{EI}x_2 - 0,025 = 0 \\ \frac{1,5}{EI}x_1 + \frac{3}{EI}x_2 + 0,010 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 1,5x_2 - 0,025EI = 0 \\ 1,5x_1 + 3x_2 + 0,010EI = 0 \end{cases} \cdot 2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - 0,050EI = 0 \\ 1,5x_1 + 3x_2 + 0,010EI = 0 \end{cases} -$$

$$8,5x_1 - 0,060 \cdot EI = 0;$$

$$x_1 = \frac{0,060 \cdot EI}{8,5} = \frac{0,060 \cdot 5580}{8,5} = 39,39 \text{ кНм};$$

$$x_2 = (-10 \cdot 39,39 + 0,05 \cdot 5580) \cdot \frac{1}{3} = -38,30 \text{ кНм.}$$

17) Будуємо дійсну епюру згинальних моментів:

$$M_c = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2;$$

- кінематична перевірка:

$$\Sigma \Delta_{ic} + \Delta_{\Sigma c} = 0;$$

$$\Sigma \Delta_{ic} = -0,025 + 0,010 = -0,015;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma c} &= \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_{\Sigma} \cdot M_c dx = \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 39,39 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 1 \cdot 0,545 \right) = \\ &= \frac{83,685}{EI} = \frac{83,685}{5580} = 0,0150; \end{aligned}$$

$$\Sigma \Delta_{ic} + \Delta_{\Sigma c} = -0,015 + 0,015 = 0.$$

18) Дійсна епюра поперечних сил:

$$Q_{(1)} = \frac{39,39 - 0}{6} = 6,57 \text{ кН};$$

$$Q_{(2)} = \frac{-38,30 - 39,39}{9} = -8,63 \text{ кН.}$$

- опорні реакції:

$$R_0 = 6,57 - 0 = 6,57 \text{ кН};$$

$$R_1 = -8,63 - 6,57 = -15,20 \text{ кН};$$

$$R_2 = 0 - (-8,63) = 8,63 \text{ кН},$$

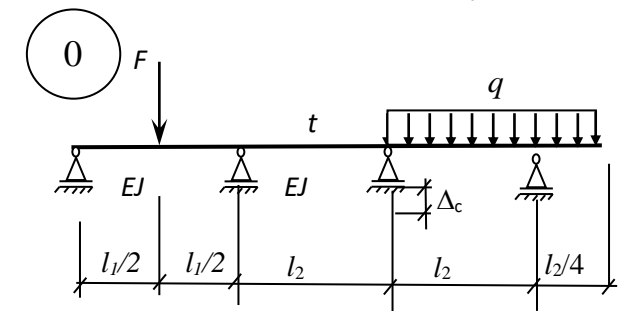
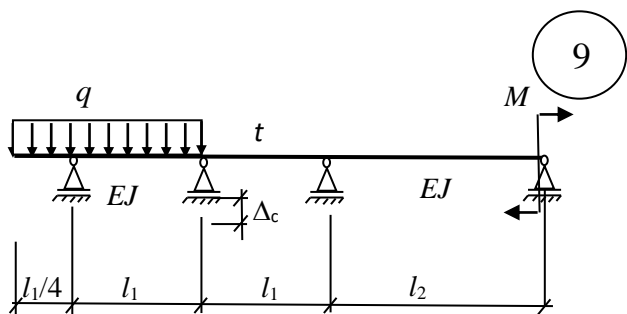
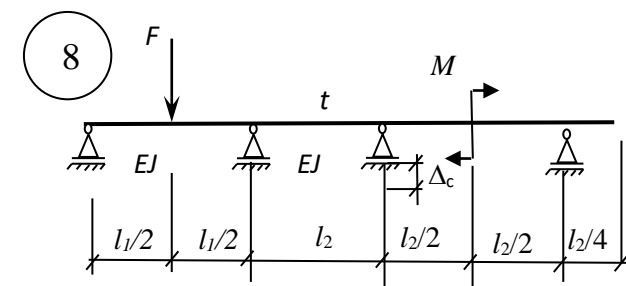
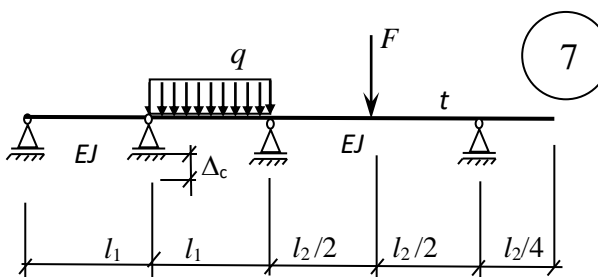
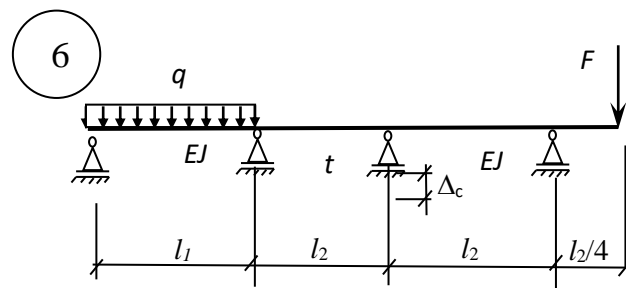
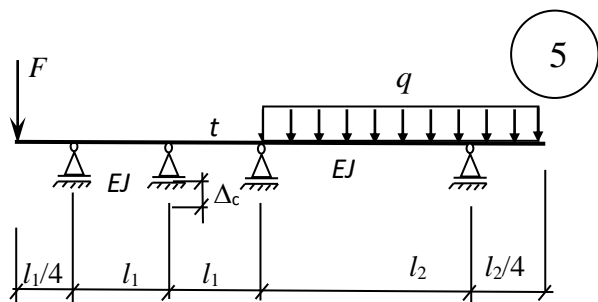
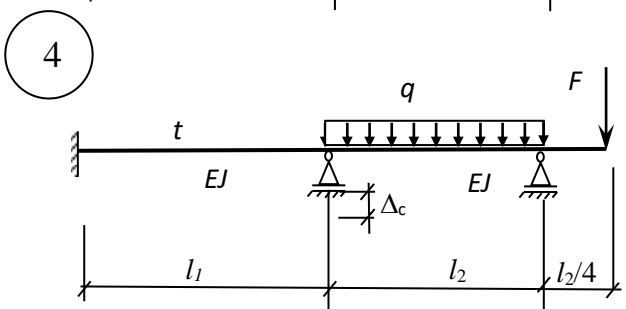
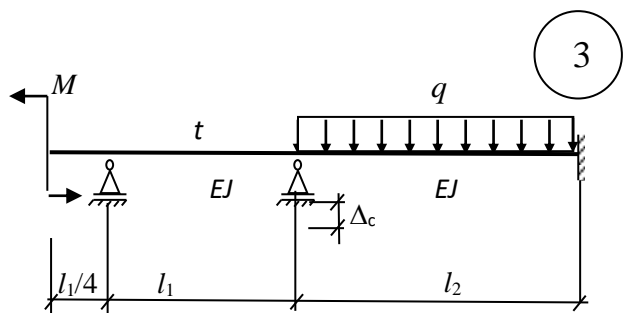
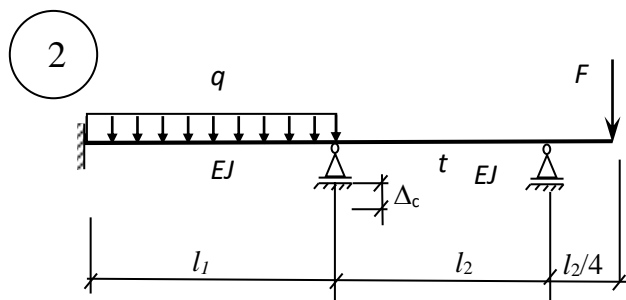
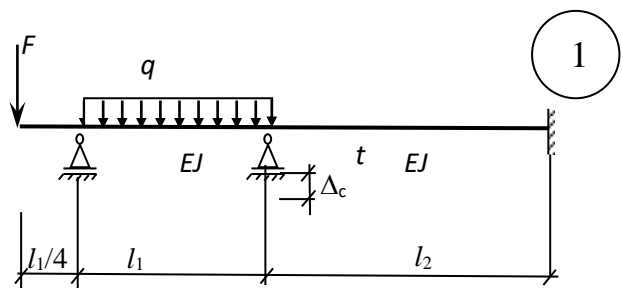
$$M_R = 5,59 \text{ кНм.}$$

- перевірка статичної рівноваги:

$$\Sigma F_z = 6,57 - 15,20 + 8,63 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = 6,57 \cdot 6 - 8,63 \cdot 9 + 38,3 = 77,72 - 77,67 = 0,05 \approx 0.$$

Додаток 1



№ строки	Цифри шифру							
	перша	друга				третя		
	l_1 м	l_2 м	M кНм	F кН	q кН/м	t^H градус	t^B градус	№ схеми
1	6	8	80	30	10	-20	20	1
2	6	8	70	40	8	-30	10	2
3	8	6	60	50	12	-10	40	3
4	10	8	50	60	8	-20	30	4
5	8	6	40	30	10	10	-30	5
6	8	10	50	40	12	20	-20	6
7	6	10	60	50	10	30	-10	7
8	10	6	70	60	8	40	-20	8
9	8	10	80	30	10	30	-20	9
0	10	8	60	40	12	20	-30	0

$$\Delta_c = \frac{l_1}{100} - \text{величина осадки опори}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Опір* матеріалів: підручник / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач.- К.: ЗАТ"Віпол", 2011.- 456с.
2. *Опір* матеріалів: підручник /Г.С. Писаренко – К.: Вища шк., 1993.-654 с.
3. *Опір* матеріалів з основами теорії пружності: навчальний посібник у двох частинах, п'яти книгах / за ред. В.Г. Піскунова - К.: Вища школа ,1994-1995.
Ч-I, кн.. 1: Загальні основи курсу – 1994. – 205 с.
Ч-I, кн.. 2: Опір бруса – 1994. -304 с.
Ч-II, кн..4: Приклади і задачі – 1995. -304 с.
4. Справочник по сопроотивленію материалов / С.П. Фесик. – [2-е изд.] - К.: Будівельник, 1982.-367 с.