

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Повний розрахунок прокатної балки Складний опір

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.06.0101 „Будівництво”

Київ 2013

УДК 539.3
ББК 30.121
О-61

Укладачі: А. М. Станкевич, канд. техн. наук, доцент
І. В. Жупаненко, канд. техн. наук, доцент
Д. В. Левківський, асистент

Рецензент Л. Т. Шкельов, канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск А. М. Станкевич, кандидат
технічних наук, доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 1 від 30 серпня 2013 року*

Опір матеріалів. Повний розрахунок прокатної балки.
О-61 Складний опір: методичні рекомендації, завдання та
прикладні виконання розрахунково-графічних робіт /уклад.:
А. М. Станкевич, І. В. Жупаненко, Д. В. Левківський – К.:
КНУБА, 2013. – 52 с.

Методичні рекомендації містять варіанти індивідуальних
завдань, вказівки та детальні плани виконання розрахунково-
графічних робіт з курсу "Опір матеріалів", а також приклади
розв'язання кожного завдання. Розглянуто розділи: "Повний
розрахунок прокатної балки" та "Складний опір".

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом
підготовки 6.06.0101 «Будівництво», для практичного
використання при виконанні розрахунково-графічних робіт.

© КНУБА, 2013

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам виконати розрахунково-графічні роботи з дисципліни „Опір матеріалів” за розділами:

- „Розрахунок прокатної балки на міцність та жорсткість”;
- „Складний опір”.

Кожну розрахунково-графічну роботу студент повинен виконати за індивідуальним завданням, умова якого (розрахункові схеми та числові значення) визначається згідно шифру за додатками Д.1, Д.2, Д.3 та Д.4. Шифр у вигляді тризначного числа визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Розрахунково-графічна робота оформлюється на аркушах формату А4, які скріплюються зліва.

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення виконувати олівцем. Дозволяється комп’ютерне виконання креслень.

Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання кожного етапу розрахунків. Для ілюстрації наведено приклади виконання кожної РГР. Виконуючи кожен етап розрахунків, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (см^2 , см^3 , см^4 , кН, кНм, МПа).

Розрахунково-графічна робота вважається зарахованою після її захисту.

1. РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ

Загальні зауваження

Розрахунок на міцність. При виконанні розрахунків на міцність у більшості випадків достатньо враховувати екстремальні нормальні напруження, вважаючи, що найбільш небезпечними є крайні точки перерізу. Умова міцності в такому випадку має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq \sigma_{adm},$$

де M_{\max} – найбільший по модулю згинальний момент у балці, кНм; W_y – момент опору перерізу, м²; σ_{adm} – допустимі напруження матеріалу балки, кПа.

Але при певних видах навантажень, умовах закріплення балок виникають ситуації, коли у одному перерізі нормальні та дотичні напруження одночасно набувають достатньо великих (або екстремальних) значень. У цих випадках уже неможливо обмежуватись лінійною залежністю для напружень, отже, потрібно розглядати плоску задачу.

Для таких випадків повний розрахунок виконують за еквівалентними напруженнями. Під еквівалентними напруженнями ($\sigma_{екв}$) розуміємо напруження при одноосьовому розтягу, який однаково небезпечний заданому напруженому стану. Еквівалентне напруження обчислюється через головні напруження заданого напруженого стану.

При розрахунку будівельних конструкцій найбільш прийнятні результати отримують, застосовуючи третю (теорія найбільших дотичних напружень) та четверту (теорія енергії формозміни) теорії міцності:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)}$$

$$\text{або} \quad \sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Враховуючи, що для плоского напруженого стану, що виникає в балці при плоскому згині, головні напруження обчислюються за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

і, підставляючи ці вирази до попередніх формул, отримаємо вирази для еквівалентних напружень у вигляді:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Нормальні напруження σ на рівні z_i від нейтральної осі визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i,$$

де M_y – згинальний момент в небезпечному перерізі, в якому визначаються еквівалентні напруження; I_y – момент інерції прийнятого перерізу; z_i – відстань від нейтральної осі до точки перерізу, де визначаються напруження.

Дотичні напруження τ на рівні z_i від нейтральної осі визначаються за формулою:

$$\tau = \frac{Q_z \cdot S_{yi}}{I_y \cdot b_i},$$

де Q_z – поперечна сила в небезпечному перерізі, в якому визначаються еквівалентні напруження; S_{yi} – статичний момент відносно нейтральної осі частини перерізу вище рівня z_i ; b_i – ширина перерізу на рівні z_i .

Розрахунок на жорсткість. Розрахунок будівельних конструкцій на жорсткість вимагає виконання умови:

$$f \leq f_u,$$

де f – прогин (переміщення) осі елемента конструкції, спричинений заданим навантаженням, f_u – граничний прогин (переміщення).

Прогин f осі елемента конструкції від заданого навантаження визначається методом початкових параметрів (для балок постійної жорсткості) або методом Мора.

Граничний прогин елемента конструкції визначається за ДСТУ Б.В.1.2-3:2006 «Прогини і переміщення» залежно від призначення конструктивного елемента. Для елементів конструкцій будівель і споруд, граничні прогини і переміщення яких не обумовлені вищезгаданим стандартом або не встановлені завданням, граничне значення прогинів і переміщень обирається $f_u = \frac{l}{150}$, де l – проліт (відстань між опорами) елемента конструкції, а для консолі $l = 2l_k$ (l_k – виліт консолі).

Метод початкових параметрів. Розглянемо стержень, на який діє довільне навантаження (рис. 1.1).

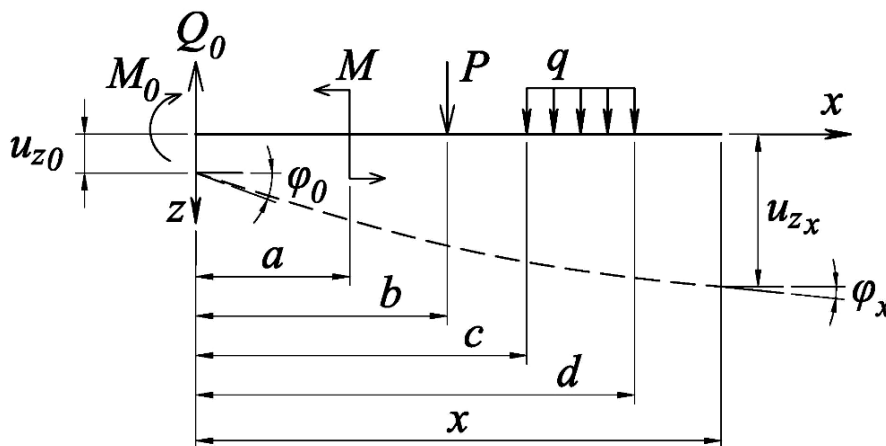


Рис. 1.1

Крайній лівий переріз стержня є початковим перерізом. Початок системи координат розташовуємо у центрі ваги початкового перерізу. Позначимо u_{z0} – прогин початкового перерізу; φ_0 – кут повороту початкового перерізу; Q_0 , M_0 – поперечна сила і згинальний момент

в початковому перерізі (рис. 1.1). Величини u_{z0} , φ_0 , Q_0 , M_0 називаються початковими параметрами.

Прогин довільного перерізу стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$EIu_z(x) = EIu_{z0} + EI\varphi_0 \cdot x - \frac{M_0}{2} \cdot x^2 - \frac{Q_0}{6} \cdot x^3 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2} \cdot (x - a_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{6} \cdot (x - b_i)^3 + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{24} \left[(x - c_i)^4 - (x - d_i)^4 \right]. \quad (1.1)$$

Кут повороту довільного перерізу стержня з координатою x визначається за співвідношенням:

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - M_0 \cdot x - \frac{Q_0}{2} \cdot x^2 + \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x - a_i) + \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{2} \cdot (x - b_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{6} \left[(x - c_i)^3 - (x - d_i)^3 \right]. \quad (1.2)$$

У рівняннях (1.1) та (1.2) враховують лише ті члени, які залежать від навантажень, розташованих між початком координат і перерізом балки, що розглядається. Рівняння (1.1) та (1.2) складені з урахуванням напрямків сил і моментів, прийнятих на рис. 1.1. При протилежних напрямках навантажень знаки перед відповідними членами цих рівнянь змінюються на протилежні.

Початкові зусилля Q_0 та M_0 визначаються з епюр поперечних сил та згинальних моментів відповідно, а початкові переміщення u_{z0} та φ_0 з умов закріплення стержня (рис. 1.2).

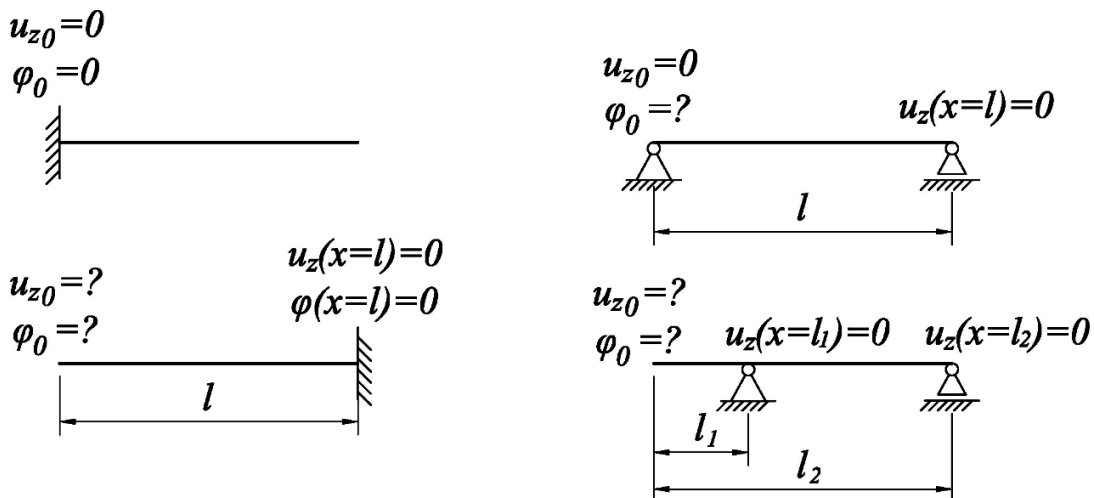


Рис. 1.2

Метод Мора. Визначаючи переміщення методом Мора, розглядаються два стани: вантажний (будується еюра згинальних моментів M_p від заданого навантаження) та одиничний. В одиничному стані балка завантажується одиничним навантаженням у перерізі в напрямку шуканого переміщення.

Визначаючи прогин, прикладається зосереджена сила рівна одиниці, а визначаючи кут повороту – одиничний момент. Від одиничного навантаження будується еюра згинальних моментів M_i .

Переміщення визначається за формулою:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{M_i \cdot M_p}{EI} dx, \quad (1.3)$$

де l – довжина ділянки інтегрування, в межах якої зберігаються закони зміни моментів вантажного і одиничного станів (немає стрибків чи зламів на обох еюрах), EI – згинальна жорсткість стержня.

Інтеграл Мора визначаються окремо для кожної ділянки інтегрування за правилом Верещагіна або Сімпсона-Корноухова.

Правило Верещагіна:

$$\int_l M_i \cdot M_p dx = \Omega_k \cdot y_c,$$

де Ω_k – площа ділянки еюри M_p довжиною l , y_c – ордината еюри M_i , взята під центром ваги площі еюри M_p (рис. 1.3)

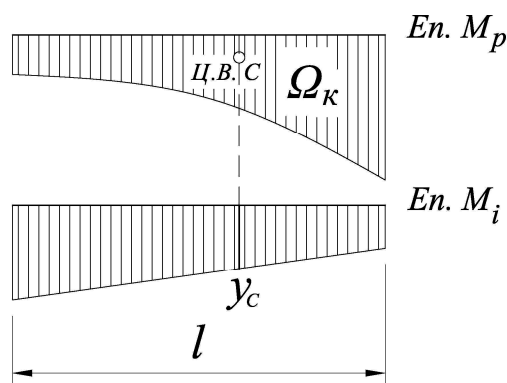


Рис. 1.3

Правило Сімпсона-Корноухова:

$$\int_l M_i \cdot M_p dx = \frac{l}{6} \left(y_p^{лів} \cdot y_i^{лів} + 4y_p^{сеп} \cdot y_i^{сеп} + y_p^{пр} \cdot y_i^{пр} \right),$$

де $y_p^{лів}, y_i^{лів}, y_p^{пр}, y_i^{пр}$ – ординати епюр моментів M_p та M_i з лівого та з правого країв ділянки інтегрування, $y_p^{сеп}, y_i^{сеп}$ – ординати епюр моментів M_p та M_i посередині ділянки інтегрування (рис. 1.4).

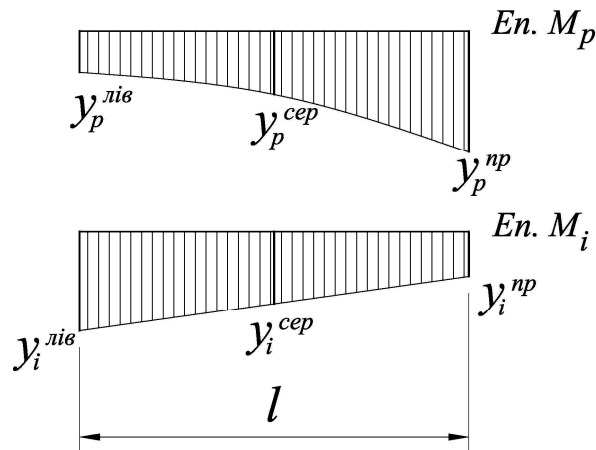


Рис. 1.4

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми балки підібрати поперечний переріз двотавра, виконати повну перевірку міцності балки, визначити переміщення осі балки та побудувати епюри переміщень, перевірити жорсткість балки.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод.1 вибрати розрахункову схему балки, лінійні розміри та величини навантажень. Граничний прогин

взяти $f_u = \frac{l}{250}$.

План розв'язання задачі

- 1) побудувати епюри внутрішніх зусиль у балці;
- 2) підібрати двотавровий поперечний переріз;
- 3) виконати повну перевірку міцності балки прийнятого перерізу;

- 4) визначити переміщення осі балки методом початкових параметрів та побудувати епюри переміщень;
- 5) перевірити максимальні переміщення методом Мора;
- 6) перевірити жорсткість балки.

Приклад 1. Для балки, розрахункова схема якої показана на рис. 1.5, потрібно підібрати переріз прокатного двотавра, виконати повну перевірку міцності балки, визначити переміщення осі балки та побудувати їх епюри, виконати перевірку жорсткості балки.

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему балки (рис. 1.5).

2. Визначаємо реакції опор з рівнянь рівноваги балки.

$$\sum F_x = 0; \quad H_B = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad q \cdot (2+3) \cdot \left(\frac{2+3}{2} + 1 \right) = M + V_B \cdot 4 + P \cdot 1 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3,5 - 12 - 8 \cdot 1}{4} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot (2+3) \cdot \left(\frac{2+3}{2} - 2 \right) + M + P \cdot 5 = R_C \cdot 4 \Rightarrow$$

$$R_C = \frac{4 \cdot 5 \cdot 0,5 + 12 + 8 \cdot 5}{4} = \frac{62}{4} = 15,5 \text{ кН}.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum F_z = 0; \quad q \cdot 5 + P = V_B + R_C$$

$$4 \cdot 5 + 8 = 12,5 + 15,5$$

$$28 = 28$$

3. Будуємо епюри внутрішніх зусиль (Q та M) у балці (рис. 1.5).

4. Переріз балки підбираємо з умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{adm},$$

де максимальне значення згинального моменту $M_{\max} = 12$ кНм визначаємо з епюри (рис. 1.5), а допустиме напруження σ_{adm}

визначається матеріалом балки. Оскільки балка сталева, допустиме напруження $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

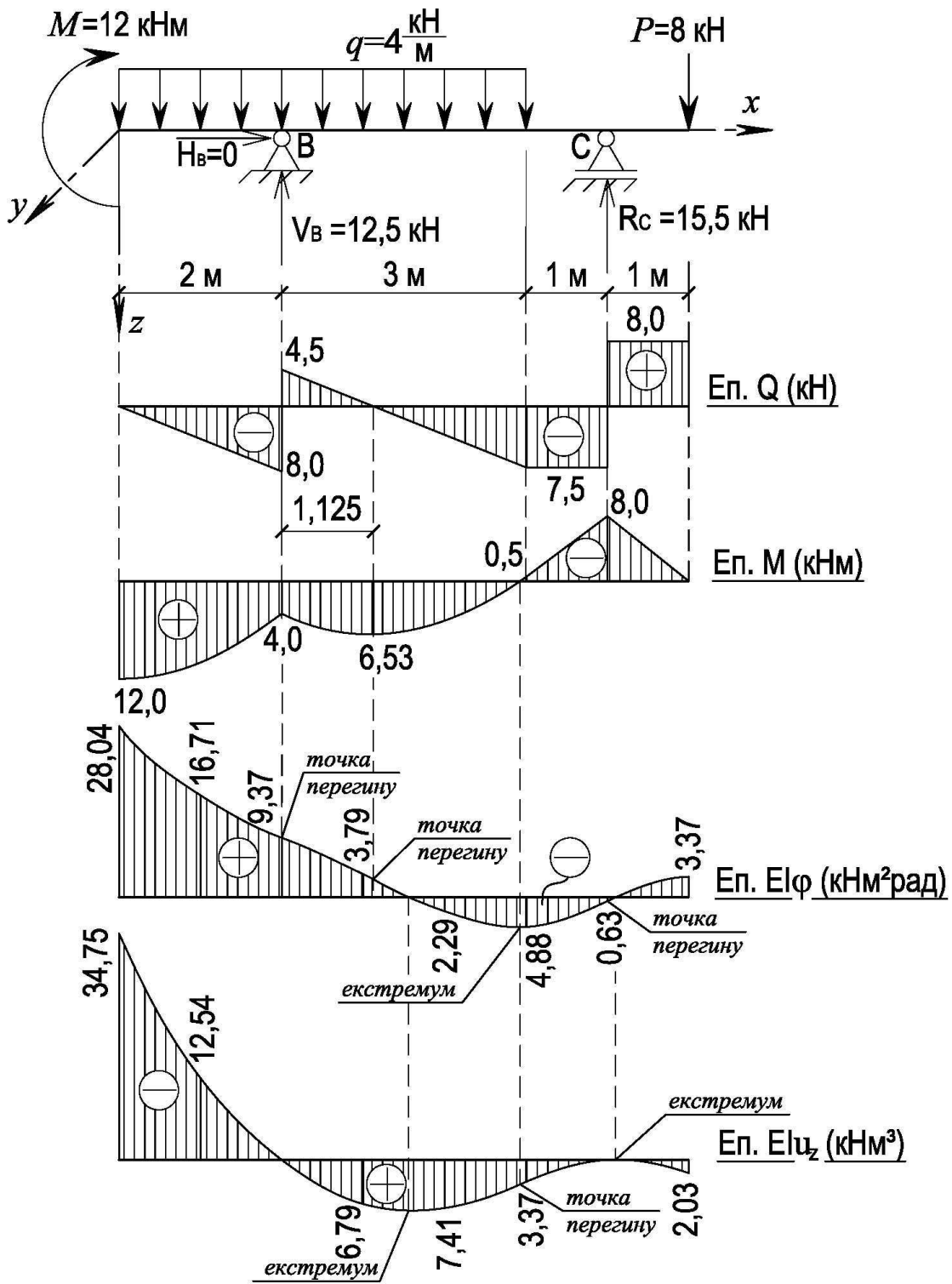


Рис. 1.5

З умови міцності визначаємо необхідний момент опору перерізу: $W^H = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{12}{160 \cdot 10^3} \left[\frac{\text{кНм}}{\text{кПа}} \right] = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 75 \text{ см}^3$.

За таблицею сортаменту визначаємо номер профілю з близькими значеннями моменту опору:

$$\text{№ 12 } W = 58,4 \text{ см}^3;$$

$$\text{№ 14 } W = 81,7 \text{ см}^3.$$

Перевіряємо напруження для кожного із зазначених профілів:

двотавр № 12:

$$\sigma_{\max} = \frac{12}{58,4 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{кНм}}{\text{м}^3} \right] = 205,5 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа},$$

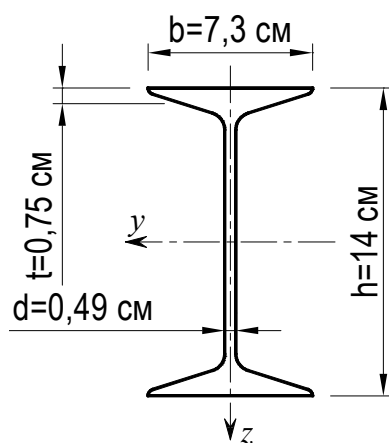
перенапруження складає: $\Delta = \frac{205,5 - 160}{160} \cdot 100\% = 28,4\%$ більше за

допустиме $[\Delta] = 5\%$, тому перевіряємо двотавр №14:

$$\sigma_{\max} = \frac{12}{81,7 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{кНм}}{\text{м}^3} \right] = 146,9 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа},$$

недонапруження складає: $\Delta = \left| \frac{146,9 - 160}{160} \right| \cdot 100\% = 8,2\%$.

Остаточно обираємо двотавр № 14, для якого з таблиці сортаменту виписуємо геометричні характеристики:



$$I_y = 572 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 81,7 \text{ см}^3;$$

$$S_{y,\max} = 46,8 \text{ см}^3;$$

$$h = 14 \text{ см};$$

$$b = 7,3 \text{ см};$$

$$t = 0,75 \text{ см};$$

$$d = 0,49 \text{ см}.$$

5. Виконуємо повну перевірку міцності балки обраного перерізу:

а) максимальні нормальні напруження виникають у перерізі балки при $x = 0$, де $M_{\max} = 12$ кНм.

$$\sigma_{\max} = \frac{12}{81,7 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{кНм}}{\text{м}^3} \right] = 146,9 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 1.6). За висотою перерізу нормальні напруження розподіляються за лінійним законом:

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i,$$

тобто на центральній осі напруження дорівнюють нулю, а в крайніх точках мають максимальні значення (рис. 1.6);

б) максимальні дотичні напруження виникають у перерізі балки при $x = 6$ м, де $Q_{\max} = 8$ кН.

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\max}}{I_y \cdot b} = \frac{8 \times 10^{-3} \cdot 46,8 \times 10^{-6}}{572 \times 10^{-8} \cdot 0,49 \times 10^{-2}} \left[\frac{\text{МН} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^4 \cdot \text{м}} \right] = 13,4 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = 13,4 \text{ МПа} < \tau_{adm} = 100 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапруження складає: } \Delta = \left| \frac{13,4 - 100}{100} \right| \cdot 100\% = 86,6\%.$$

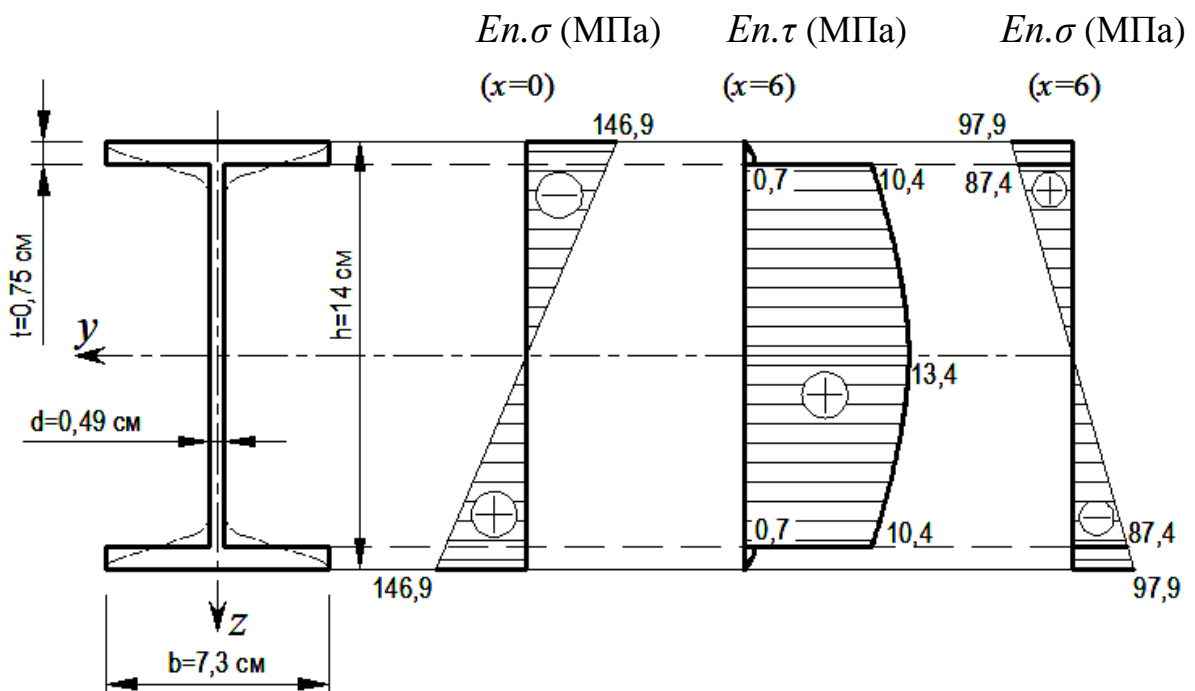


Рис. 1.6

За висотою перерізу епюра дотичних напружень обмежена квадратною параболою. При цьому в місцях різкої зміни ширини перерізу (точка стику полиці зі стінкою двотавра) на епюрі дотичних напружень виникає стрибок. Для визначення напруження в цих точках дійсний переріз двотавра ідеалізуємо, замінюючи полицьку прямокутником шириною $b = 7,3$ см і висотою $t = 0,75$ см (рис. 1.6). Визначаємо статичний момент ідеалізованої полицьки відносно центральної осі:

$$S^n = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} = 7,3 \cdot 0,75 \cdot \frac{14-0,75}{2} = 36,3 \text{ см}^3.$$

Визначаємо дотичні напруження в полицці (ширина перерізу $b = 7,3$ см):

$$\tau^n = \frac{Q \cdot S^n}{I_y \cdot b} = \frac{8 \times 10^{-3} \cdot 36,3 \times 10^{-6}}{572 \times 10^{-8} \cdot 7,3 \times 10^{-2}} \left[\frac{\text{МН} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^4 \cdot \text{м}} \right] = 0,7 \text{ МПа}.$$

Визначаємо дотичні напруження в стінці (ширина перерізу $d = 0,49$ см):

$$\tau^s = \frac{Q \cdot S^n}{I_y \cdot b} = \frac{8 \times 10^{-3} \cdot 36,3 \times 10^{-6}}{572 \times 10^{-8} \cdot 0,49 \times 10^{-2}} \left[\frac{\text{МН} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^4 \cdot \text{м}} \right] = 10,4 \text{ МПа}.$$

За підрахованими значеннями будуємо епюру дотичних напружень (рис. 1.6);

в) еквівалентні напруження за IV теорією міцності перевіряємо в небезпечному перерізі при $x = 6$ м, де одночасно виникає значна поперечна сила ($Q = 8$ кН) і згинальний момент ($M = 8$ кНм). Значення зусиль беремо по модулю.

За висотою перерізу найбільш небезпечною є точка стику полицьки зі стінкою, в якій одночасно виникають нормальні та дотичні напруження. Значення дотичних напружень були обчислені в попередньому пункті. Їх епюра зображена на рис. 1.6.

Визначаємо нормальні напруження:

— в точці стику полицьки зі стінкою:

$$\sigma^n = \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{8}{572 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{14}{2} - 0,75 \right) \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{кНм} \cdot \text{м}}{\text{м}^4} \right] =$$

$$= 87,4 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 87,4 \text{ МПа};$$

— максимальне значення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{8}{81,7 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{кНм}}{\text{м}^3} \right] = 97,9 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 97,9 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 1.6).

Обчислюємо еквівалентні напруження за IV теорією міцності:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{87,4^2 + 3 \cdot 10,4^2} = 89,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{red} = 89,8 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}.$$

6. Визначаємо переміщення методом початкових параметрів.

Лівий край балки вільний від закріплень, відповідно з початкових параметрів відомі зусилля: $Q_0 = 0$, $M_0 = -12 \text{ кНм}$.

Невідомі початкові переміщення EIu_{z0} та $EI\phi_0$ визначаємо з умови, що точки B та C шарнірно оперті, відповідно їх прогин $EIu_z = 0$. Записуємо вирази для прогинів у цих точках за методом початкових параметрів, враховуючи напрямки дії навантажень:

$$EIu_z(x=2) = EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 2 + Q_0 \cdot \frac{2^3}{6} + M_0 \cdot \frac{2^2}{2} +$$

$$+ \frac{q}{24} \left[(2-0)^4 - (2-2)^4 \right] = 0;$$

$$EIu_z(x=6) = EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 6 + Q_0 \cdot \frac{6^3}{6} + M_0 \cdot \frac{6^2}{2} -$$

$$- V_B \frac{(6-2)^3}{6} + \frac{q}{24} \left[(6-0)^4 - (6-5)^4 \right] = 0.$$

Підставивши відомі значення, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{4}{24} \cdot 2^4 = 0 \\ EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 6 - 12 \cdot \frac{6^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{4^3}{6} + \frac{4}{24} [6^4 - 1^4] = 0 \\ EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 2 = 21,333 \\ EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot 6 = 133,5 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи дає початкові переміщення:

$$EIu_{z0} = -34,75 \text{ кНм}^3, \quad EI\phi_0 = 28,04 \text{ кНм}^2\text{рад.}$$

Балку розділяємо на чотири ділянки, в межах яких функції $Q(x)$ та $M(x)$ не змінюються, та записуємо вирази для прогину і кута повороту в межах цих ділянок. Значення EIu_z та $EI\phi$ обчислюємо з інтервалом в 1 метр:

1) $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$

$$\begin{aligned} EIu_z(x) &= EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{24} \cdot x^4 = \\ &= -34,75 + 28,04 \cdot x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{4}{24} \cdot x^4, \end{aligned}$$

$$EIu_z(x=1) = -34,75 + 28,04 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{1^2}{2} + \frac{4}{24} \cdot 1^4 = -12,54 \text{ кНм}^3,$$

$$EIu_z(x=2) = -34,75 + 28,04 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{4}{24} \cdot 2^4 = 0.$$

$$EI\phi(x) = EI\phi_0 + M_0 \cdot x + \frac{q}{6} \cdot x^3 = 28,04 - 12 \cdot x + \frac{4}{6} \cdot x^3,$$

$$EI\phi(x=1) = 28,04 - 12 \cdot 1 + \frac{4}{6} \cdot 1^3 = 16,71 \text{ кНм}^2\text{рад.},$$

$$EI\phi(x=2) = 28,04 - 12 \cdot 2 + \frac{4}{6} \cdot 2^3 = 9,37 \text{ кНм}^2\text{рад.}$$

2) $2 \leq x \leq 5 \text{ м}$

$$EIu_z(x) = EIu_{z0} + EI\phi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - V_B \cdot \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{q}{24} \cdot x^4 =$$

$$= -34,75 + 28,04 \cdot x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot x^4,$$

$$EIu_z(x=3) = -34,75 + 28,04 \cdot 3 - 12 \cdot \frac{3^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(3-2)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot 3^4 =$$

$$= 6,79 \text{ кНм}^3,$$

$$EIu_z(x=4) = -34,75 + 28,04 \cdot 4 - 12 \cdot \frac{4^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(4-2)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot 4^4 =$$

$$= 7,41 \text{ кНм}^3,$$

$$EIu_z(x=5) = -34,75 + 28,04 \cdot 5 - 12 \cdot \frac{5^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(5-2)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot 5^4 =$$

$$= 3,37 \text{ кНм}^3.$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 + M_0 \cdot x - V_B \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{q}{6} \cdot x^3 =$$

$$= 28,04 - 12 \cdot x - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot x^3,$$

$$EI\varphi(x=3) = 28,04 - 12 \cdot 3 - 12,5 \cdot \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot 3^3 = 3,79 \text{ кНм}^2 \text{рад.},$$

$$EI\varphi(x=4) = 28,04 - 12 \cdot 4 - 12,5 \cdot \frac{(4-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot 4^3 = -2,29 \text{ кНм}^2 \text{рад.},$$

$$EI\varphi(x=5) = 28,04 - 12 \cdot 5 - 12,5 \cdot \frac{(5-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot 5^3 = -4,88 \text{ кНм}^2 \text{рад.}$$

3) $5 \leq x \leq 6 \text{ м}$

$$EIu_z(x) = EIu_{z0} + EI\varphi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - V_B \cdot \frac{(x-2)^3}{6} +$$

$$+ \frac{q}{24} \cdot [x^4 - (x-5)^4] =$$

$$= -34,75 + 28,04 \cdot x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot [x^4 - (x-5)^4],$$

$$EIu_z(x=6) = -34,75 + 28,04 \cdot 6 - 12 \cdot \frac{6^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(6-2)^3}{6} + \\ + \frac{4}{24} \cdot [6^4 - (6-5)^4] = 0.$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 + M_0 \cdot x - V_B \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{q}{6} \cdot [x^3 - (x-5)^3] = \\ = 28,04 - 12 \cdot x - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot [x^3 - (x-5)^3],$$

$$EI\varphi(x=6) = 28,04 - 12 \cdot 6 - 12,5 \cdot \frac{(6-2)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot [6^3 - (6-5)^3] = \\ = -0,63 \text{ кНм}^2 \text{ рад.}$$

4) $6 \leq x \leq 7 \text{ м}$

$$EIu_z(x) = EIu_{z0} + EI\varphi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - V_B \cdot \frac{(x-2)^3}{6} - \\ - R_C \frac{(x-6)^3}{6} + \frac{q}{24} \cdot [x^4 - (x-5)^4] = -34,75 + 28,04 \cdot x - \\ - 12 \cdot \frac{x^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^3}{6} - 15,5 \cdot \frac{(x-6)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot [x^4 - (x-5)^4];$$

$$EIu_z(x=7) = -34,75 + 28,04 \cdot 7 - 12 \cdot \frac{7^2}{2} - 12,5 \cdot \frac{(7-2)^3}{6} - \\ - 15,5 \cdot \frac{(7-6)^3}{6} + \frac{4}{24} \cdot [7^4 - (7-5)^4] = 2,03 \text{ кНм}^3.$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 + M_0 \cdot x - V_B \cdot \frac{(x-2)^2}{2} - R_C \frac{(x-6)^2}{2} + \\ + \frac{q}{6} \cdot [x^3 - (x-5)^3] = 28,04 - 12 \cdot x - 12,5 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} - \\ - 15,5 \cdot \frac{(x-6)^2}{2} + \frac{4}{6} \cdot [x^3 - (x-5)^3],$$

$$EI\varphi(x=7) = 28,04 - 12 \cdot 7 - 12,5 \cdot \frac{(7-2)^2}{2} - 15,5 \cdot \frac{(7-6)^2}{2} + \\ + \frac{4}{6} \cdot [7^3 - (7-5)^3] = 3,37 \text{ кНм}^2 \text{рад.}$$

За підрахованими значеннями будуюмо епюри $EI\varphi$ та EIu_z (рис. 1.5), враховуючи диференціальні залежності.

7. Для контролю визначаємо методом Мора EIu_z та $EI\varphi$ на лівій консолі (точка D рис. 1.7).

Для визначення прогину та кута повороту розглядаємо одиничні стани. Прикладаємо в точці D одиничне навантаження в напрямку шуканого переміщення (одиничну силу та одиничний момент для визначення прогину та кута повороту відповідно). Будуємо епюри згинальних моментів для кожного одиничного стану (рис. 1.7).

Переміщення визначаємо за формулою Мора, перемножуючи епюру M_P моментів від заданого навантаження (вантажний стан) на одиничні епюри M_i :

$$EIu_{zC} = EI\Delta_1 = \int_0^l M_P M_1 dx = \frac{2}{6} [12 \cdot 0 + 4 \cdot 10 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2)] + \\ + \frac{3}{6} [4 \cdot (-2) + 4 \cdot 6,25 \cdot (-1,25) + (-0,5) \cdot (-0,5)] + \\ + \frac{1}{6} [(-0,5) \cdot (-0,5) + 4 \cdot (-4,25) \cdot (-0,25) + (-8) \cdot 0] = -34,75 \text{ кНм}^3$$

$$EI\varphi_C = EI\Delta_2 = \int_0^l M_P M_2 dx = \frac{2}{6} [12 \cdot 1 + 4 \cdot 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1] + \\ + \frac{3}{6} [4 \cdot 1 + 4 \cdot 6,25 \cdot 0,625 + (-0,5) \cdot 0,25] + \\ + \frac{1}{6} [(-0,5) \cdot 0,25 + 4 \cdot (-4,25) \cdot 0,125] = 28,04 \text{ кНм}^2 \text{рад.}$$

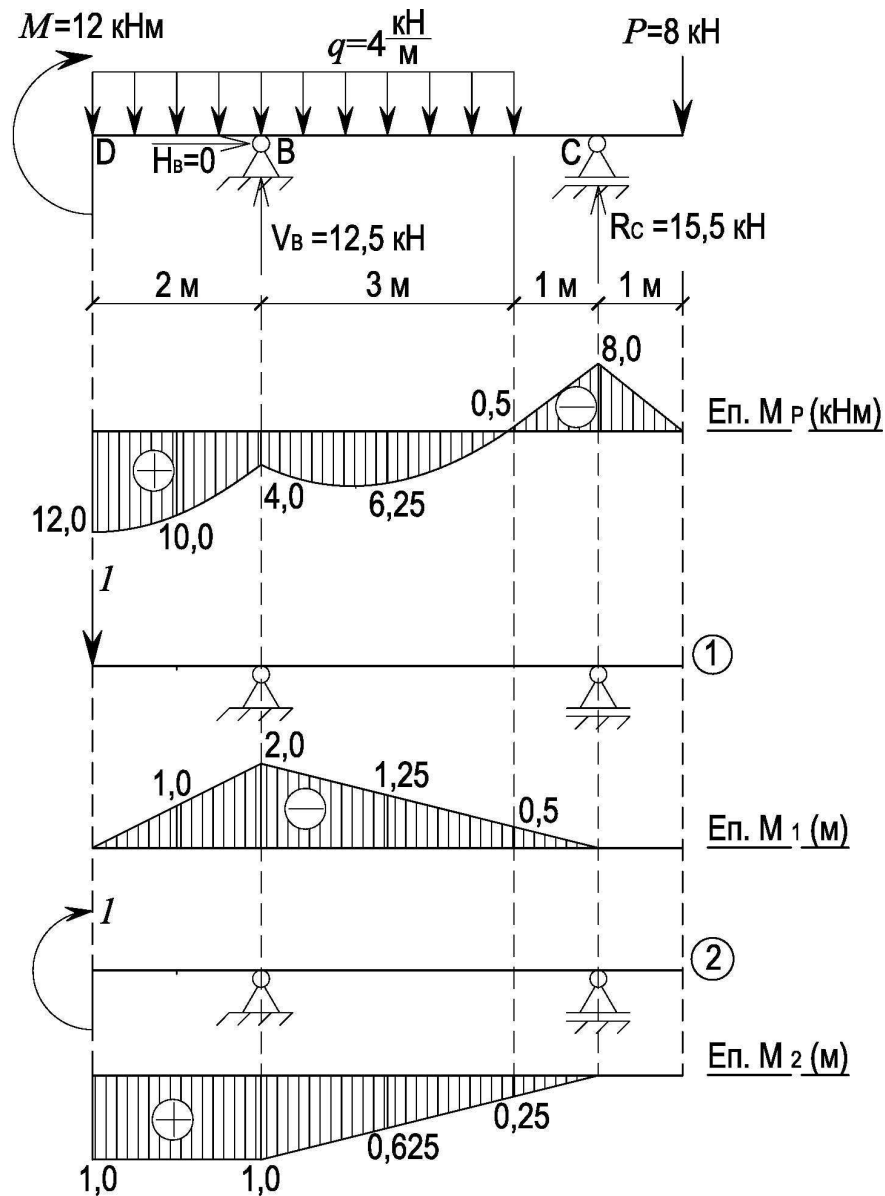


Рис. 1.7

8. Перевіримо жорсткість балки.

Максимальне переміщення виникає на лівій консолі

$$EIu_z = 34,75 \text{ кНм}^3:$$

$$u_z = \frac{34,75}{EI_y} = \frac{34,75}{2 \cdot 10^8 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} \left[\frac{\text{кН} \times \text{м}^3}{\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \times \text{м}^4} \right] = 0,03 \text{ м},$$

умова жорсткості $\frac{u_z}{2l_k} = \frac{0,03}{2 \cdot 2} = \frac{1}{133} > \frac{1}{250}$ не виконується, тому

момент інерції перерізу балки визначаємо з умови:

$$u_z = \frac{34,75}{EI_y} = \frac{34,75}{2 \cdot 10^8 \cdot I_y},$$

$$\frac{u_z}{2l_k} = \frac{34,75}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot I_y} = \frac{1}{250} \Rightarrow I_y = \frac{34,75 \cdot 250}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^8} = 1086 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

За отриманим значенням моменту інерції остаточно обираємо двотавр № 18 ($I_y = 1290 \text{ см}^4$).

Отже, переріз буде недонапруженим, тому що для такої умови закріплення та завантаження конструкції визначальною виявилась жорсткість.

2. СКЛАДНИЙ ОПІР

Загальні зауваження

Якщо навантаження, що діють на стержень, викликають у ньому одночасно кілька видів простих деформацій (розтяг, стиск, зсув, кручення, згин), напружено-деформований стан такого стержня називається *складним опором*.

Визначення напружень і деформацій при складному опорі ґрунтується на принципі суперпозиції:

- перевіряючи міцність, визначають напруження в перерізі стержня окремо від кожного силового фактора і алгебраїчно складають напруження одного виду (нормальні або дотичні);
- перевіряючи жорсткість, визначають переміщення перерізу в кожній з головних площин стержня і складають їх як геометричну суму векторів.

Задача 1. Косий згин стержня

Загальні зауваження

Косий згин виникає під дією сил чи моментів, силові площини (площини дії навантажень) яких різні, але проходять через вісь стержня (рис. 2.1) і при цьому не виникає кручення. Такий згин ще називають *неплоским*, оскільки зігнута вісь стержня є неплоскою кривою.

Напружений стан стержня при косому згині визначається як суперпозиція двох плоских. Навантаження, що діють у довільних силових площинах, розкладають на складові в головних площинах xu та xz , де u та z – головні осі інерції перерізу (рис. 2.1).

При косому згині в поперечних перерізах стержня виникає чотири внутрішніх силових фактори: Q_y , Q_z , M_z та M_y . При розрахунку на міцність впливом дотичних напружень нехтують, оскільки найбільш напруженими точками перерізу будуть кутові точки, де дотичні напруження рівні нулю (рис. 2.2).

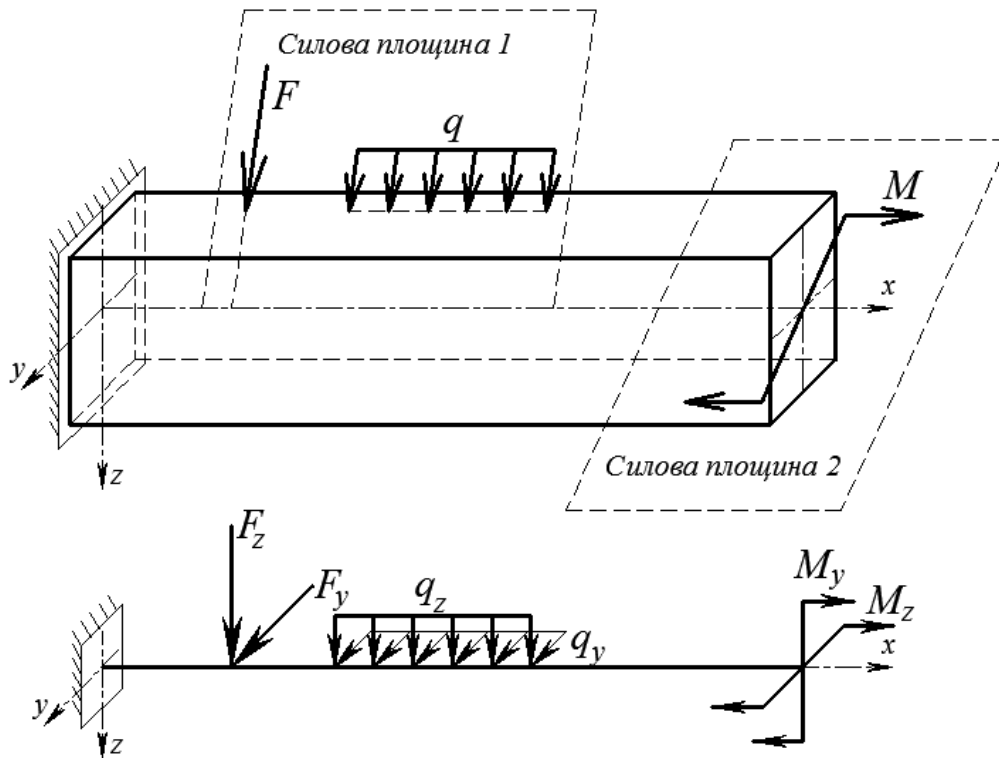


Рис. 2.1

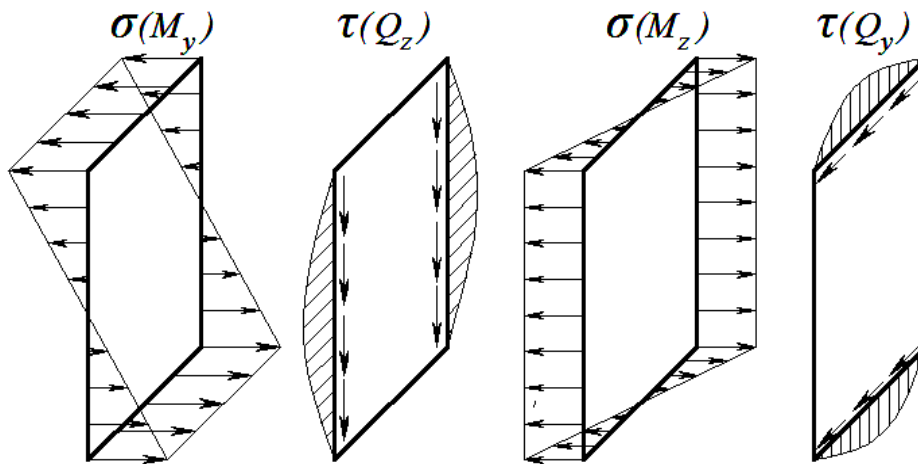


Рис. 2.2

Нормальні напруження в будь-якій точці перерізу $A(y_i; z_i)$ визначаються як сума напружень від двох плоских згинів у головних площинах стержня:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_i.$$

Згинальні моменти вважаються додатними, якщо розтягують волокна з додатного напрямку відповідної осі.

Рівняння нейтральної лінії при косому згині впливає з умови рівності нулю нормальних напружень:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_0 + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_0 = 0,$$

де y_0, z_0 – координати точки нейтральної лінії (рис. 2.3). Як видно з рисунка

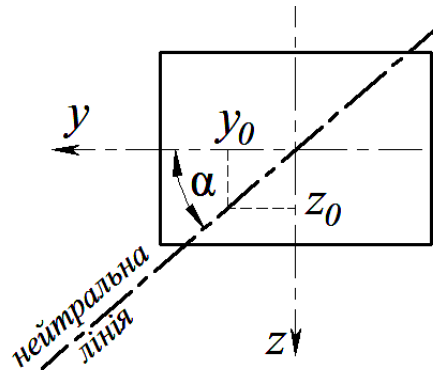


Рис. 2.3

$\text{tg}\alpha = \frac{z_0}{y_0}$, тоді:

$$\text{tg}\alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z}.$$

Це рівняння прямої, що проходить через центр ваги перерізу, кут α відраховується від головної осі y в додатному напрямку проти годинникової стрілки.

Переміщення визначаються також за принципом суперпозиції як геометрична сума векторів переміщень по кожній з головних осей перерізу:

$$f = \sqrt{u_y^2 + u_z^2}.$$

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми стержня при заданому співвідношенні сторін визначити розміри прямокутного поперечного перерізу. Побудувати епюру нормальних напружень у небезпечному перерізі, перевірити жорсткість балки.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 2 вибрати схему та лінійні розміри стержня, величини навантажень, прикладених у різних площинах, співвідношення довжин сторін для перерізу. Матеріал балки – дуб,

допустиме напруження $\sigma_{adm} = 10$ МПа, модуль пружності матеріалу $E = 10$ ГПа. Допустиме значення відносного прогину $\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{250}$.

План розв'язання задачі:

- 1) визначити проєкції навантаження на головні площини балки та побудувати епюри згинальних моментів у головних площинах;
- 2) визначити небезпечний переріз балки за найневигіднішою комбінацією згинальних моментів та підібрати розміри поперечного перерізу балки;
- 3) визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі та побудувати епюру нормальних напружень;
- 4) визначити вертикальний, горизонтальний та повний прогин балки прийнятого перерізу;
- 5) виконати перевірку жорсткості балки.

Приклад 2.1. Для балки прямокутного поперечного перерізу, розрахункова схема якої показана на рис. 2.4.а, визначити розміри прямокутного поперечного перерізу із співвідношенням сторін $\frac{h}{b} \left(\frac{b}{h} \right) = 1,4$, побудувати епюру нормальних напружень у небезпечному перерізі, перевірити жорсткість.

1. Викреслюємо в масштабі розрахункову схему балки (рис. 2.4.а). Балка завантажена моментом M у вертикальній площині, горизонтальною силою F та рівномірно розподіленим навантаженням q , прикладеним під кутом 30° до вертикалі. Розкладаємо навантаження на вертикальну і горизонтальну складові (рис. 2.4.б):

$$q_z = q \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot 0,866 = 5,2 \frac{\text{кН}}{\text{м}},$$

$$q_y = q \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot 0,5 = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

2. Будуємо епюри внутрішніх зусиль у головних площинах (xOz , xOy) балки (рис. 2.4.в, г).

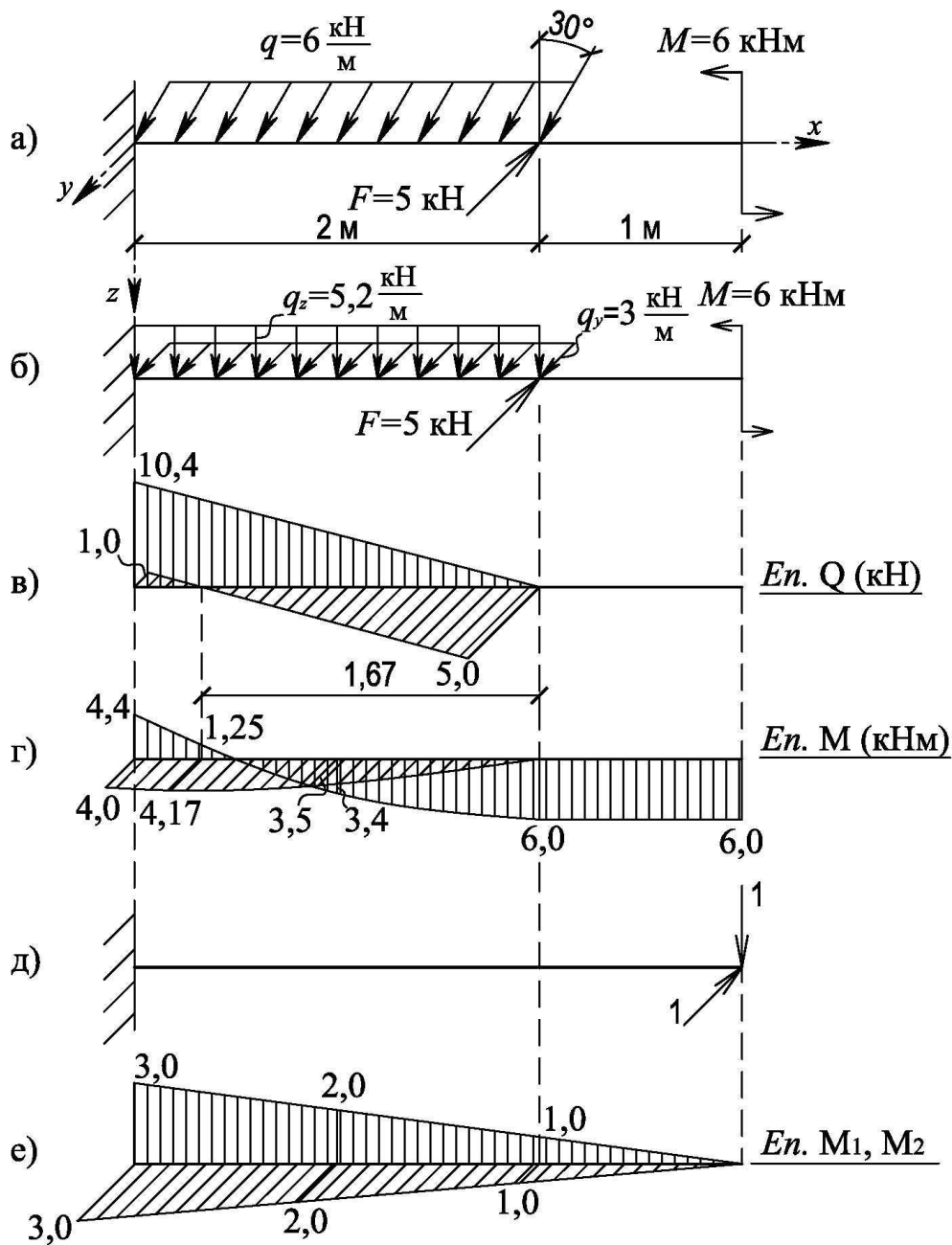


Рис. 2.4

3. Визначаємо небезпечний переріз балки і підбираємо розміри перерізу:

$$x = 0: \quad M_y = -4,4 \text{ кНм}, \quad M_z = 4,0 \text{ кНм};$$

$$x = 2: \quad M_y = 6 \text{ кНм}, \quad M_z = 0.$$

Переріз підбираємо в заземленні ($x = 0$), де виникає комбінація згинальних моментів у двох площинах.

Оскільки $|M_y| = 4,4 \text{ кНм} > |M_z| = 4,0 \text{ кНм}$, співвідношення сторін прямокутного перерізу обираємо $h > b \left(\frac{h}{b} = 1,4, h = 1,4b \right)$.

Визначаємо моменти опору перерізу:

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1,4b)^2}{6} = \frac{1,96}{6} b^3, \quad W_z = \frac{b^2 \cdot h}{6} = \frac{b^2 \cdot (1,4b)}{6} = \frac{1,4}{6} b^3.$$

Підставляємо в умову міцності:

$$\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$

вирази для моментів опору та величину допустимих напружень $\sigma_{adm} = 10 \text{ МПа}$:

$$\frac{4,4}{\frac{1,96}{6} b^3} + \frac{4}{\frac{1,4}{6} b^3} = 10 \times 10^3 \Rightarrow b^3 = \sqrt[3]{\frac{4,4 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{1,96 + 1,4}} = 0,1452 \text{ м},$$

$$h^3 = 1,4b = 1,4 \cdot 14,52 = 20,33 \text{ см}.$$

Обираємо розміри перерізу кратно 0,5 см:

$$b = 14,5 \text{ см}, \quad h = 20,5 \text{ см}.$$

Перевіряємо визначені розміри поперечного перерізу для іншого небезпечного перерізу ($x = 2 : M_y = 6 \text{ кНм}, M_z = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{6 \cdot 6}{14,5 \cdot 20,5^2 \times 10^{-6}} + \frac{0 \cdot 6}{14,5^2 \cdot 20,5} = \\ &= 5,91 \times 10^3 \text{ кПа} < \sigma_{adm} = 10 \times 10^3 \text{ кПа}. \end{aligned}$$

Моменти інерції перерізу:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{14,5 \cdot 20,5^3}{12} = 10409,9 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{14,5^3 \cdot 20,5}{12} = 5208 \text{ см}^4.$$

Викреслюємо в масштабі визначений переріз (рис. 2.5).

4. Визначаємо положення нейтральної лінії:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = -\frac{4}{-4,4} \cdot \frac{10409,9}{5208} = 1,8171 \Rightarrow \alpha = 61,2^\circ.$$

На кресленні перерізу показуємо нейтральну лінію, відкладаючи від осі Oy додатній кут $\alpha = 61,2^\circ$ проти руху годинникової стрілки (рис. 2.5).

5. Визначаємо напруження в кутових точках перерізу:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_i = \frac{-4,4 \times 10^{-3}}{10409,9 \times 10^{-8}} \cdot z_i + \frac{4 \times 10^{-3}}{5208 \times 10^{-8}} \cdot y_i = \\ &= -42,27 \cdot z + 76,89 \cdot y; \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = -42,27 \cdot 10,25 \times 10^{-2} + 76,89 \cdot 7,25 \times 10^{-2} = 1,24 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -42,27 \cdot 10,25 \times 10^{-2} + 76,89 \cdot (-7,25) \times 10^{-2} = -9,91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -42,27 \cdot (-10,25) \times 10^{-2} + 76,89 \cdot (-7,25) \times 10^{-2} = -1,24 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -42,27 \cdot (-10,25) \times 10^{-2} + 76,89 \cdot 7,25 \times 10^{-2} = 9,91 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 2.5). Для цього з кожної кутової точки перерізу проводимо прямі паралельно нейтральній лінії. Базу епюри будуємо перпендикулярно нейтральній лінії.

6. Визначаємо переміщення консолі балки.

Оскільки напрям повного прогину невідомий, визначаємо горизонтальну і вертикальну складові прогину методом Мора. Для на цього консолі прикладаємо

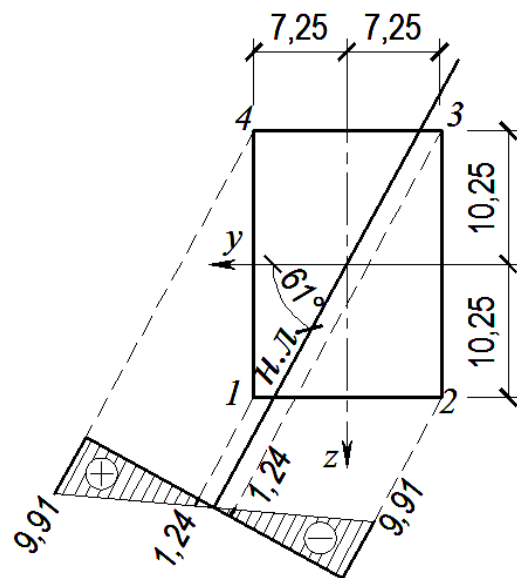


Рис. 2.5

горизонтальну та вертикальну одиничні сили (рис. 2.4.д) і будуюмо відповідні епюри згинальних моментів (рис. 2.4.е).

Визначаємо вертикальну складову прогину:

$$EI_y u_z = EI_y \Delta_z = \sum \int_l M_y M_1 dx = \frac{2}{6} (-4,4 \cdot (-3) + 4 \cdot 3,4 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1)) + 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} (-1) = -9,667 \text{ кНм}^3.$$

$$u_z = \frac{-9,667}{EI_y} = \frac{-9,667}{1 \times 10^7 \cdot 10409,9 \times 10^{-8}} \left[\frac{\text{кНм}^3}{\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \times \text{м}^4} \right] = -9,29 \times 10^{-3} \text{ м} = -9,29 \text{ мм}.$$

Визначаємо горизонтальну складову прогину:

$$EI_z u_y = EI_z \Delta_y = \sum \int_l M_z M_2 dx = \frac{2}{6} (4 \cdot 3 + 4 \cdot 3,5 \cdot 2 + 0 \cdot 1) = 13,333 \text{ кНм}^3.$$

$$u_y = \frac{13,333}{EI_z} = \frac{13,333}{1 \times 10^7 \cdot 5208 \times 10^{-8}} \left[\frac{\text{кНм}^3}{\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \times \text{м}^4} \right] = 25,6 \times 10^{-3} \text{ м} = 25,6 \text{ мм}.$$

Визначаємо повний прогин:

$$f = \sqrt{u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{25,6^2 + 9,29^2} = 27,23 \text{ мм}.$$

Перевіряємо умову жорсткості:

$$\frac{f}{2l_k} = \frac{27,23 \times 10^{-3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{220} > \left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{250},$$

умова не виконується, тому потрібно визначати розміри перерізу з умови жорсткості:

$$u_z = \frac{9,667}{EI_y} = \frac{9,667}{1 \times 10^7 \cdot \frac{b \cdot (1,4b)^3}{12}} = \frac{4,228 \times 10^{-6}}{b^4},$$

$$u_y = \frac{13,333}{EI_z} = \frac{13,333}{1 \times 10^7 \cdot \frac{b^3 \cdot (1,4b)}{12}} = \frac{11,428 \times 10^{-6}}{b^4},$$

$$f = \sqrt{u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{\left(\frac{4,228 \times 10^{-6}}{b^4}\right)^2 + \left(\frac{11,428 \times 10^{-6}}{b^4}\right)^2} = \frac{12,185 \times 10^{-6}}{b^4},$$

$$\frac{f}{2l_k} = \frac{12,185 \times 10^{-6}}{2 \cdot 3 \cdot b^3} = \frac{1}{250} \Rightarrow b^3 = \sqrt[3]{\frac{12,185 \times 10^{-6} \cdot 250}{6}} = 0,080 \text{ м},$$

$$h^3 = 1,4b^3 = 1,4 \cdot 0,15 = 0,21 \text{ м}.$$

Остаточно обираємо: $b = 15 \text{ см}$, $h = 21 \text{ см}$.

Отже, переріз буде недонапруженим, тому що для такої умови закріплення та завантаження конструкції визначальною виявилась жорсткість.

Задача 2. Позацентровий стиск стержня

Загальні зауваження

Позацентровий стиск (розтяг) виникає під дією сил паралельних осі стержня, рівнодіюча яких проходить через точку $P(y_F; z_F)$ (полюс сили) (рис. 2.6).

У поперечному перерізі стержня при такому навантаженні виникають внутрішні силові фактори: $N = F$; $M_y = F \cdot z_F$; $M_z = F \cdot y_F$.

Напруження в довільній точці перерізу з координатами $(y_i; z_i)$ визначаються як сума напружень від осьового стиску (розтягу) силою N та напружень від чистого згину моментами M_y та M_z :

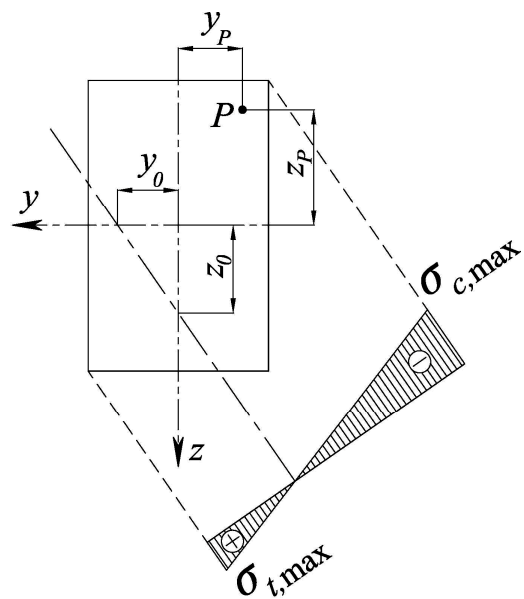


Рис. 2.6

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_i = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F}{i_z^2} \cdot y_i + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_i \right).$$

Положення нейтральної лінії визначається з умови:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F}{i_z^2} \cdot y_i + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_i \right) = 0.$$

Це можливо, якщо:

$$1 + \frac{y_F}{i_z^2} \cdot y_i + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_i = 0,$$

тоді, приймаючи одну змінну координату рівною нулю, отримаємо довжину відрізка, який нейтральна вісь відсікає від іншої координатної осі (рис. 2.6):

$$y_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F};$$

$$z_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_F}.$$

Ядро перерізу – геометричне місце точок навколо центру ваги перерізу, яке має таку властивість: сила прикладена в межах ядра перерізу викликає напруження одного знаку в усіх точках перерізу.

Виходячи з властивості ядра перерізу, зауважимо, що напруження одного знаку виникає вперше, коли нейтральна вісь стає дотичною до контуру перерізу. Отже, можна знайти координати точки прикладення сили, що викликає такий стан (рис. 2.7).

Вважаємо, що сила прикладена на осі z , відповідно $y_F = 0$:

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_i = 0 \Rightarrow \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_i = -1,$$

тут z_i – координати нульової лінії, а z_F – координата точки прикладення

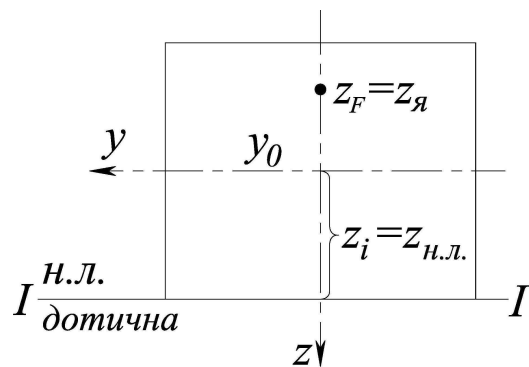


Рис. 2.7

сили, отже, $z_i = z_{н.л.}$, а $z_F = z_я$ – координати точок ядра перерізу:

$$y_я = -\frac{i_z^2}{a_y}, \quad z_я = -\frac{i_y^2}{a_z},$$

де $y_я$, $z_я$ – координати граничних точок ядра перерізу; a_y , a_z – відрізки, що відсікає дотична на головних осях перерізу.

Отже, для побудови ядра перерізу потрібно провести усі можливі дотичні до контуру перерізу, кожного разу обчислюючи координати точок ядра перерізу.

Постановка задачі

Для позацентрово стиснутої короткої кам'яної колони заданого поперечного перерізу визначити допустиму величину сили, побудувати епюри напружень для верхнього та нижнього перерізів колони.

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 3 вибрати схему та лінійні розміри перерізу колони, точку прикладення сили, висоту та об'ємну вагу матеріалу колони, величини допустимих напружень на стиск і на розтяг.

План розв'язання задачі:

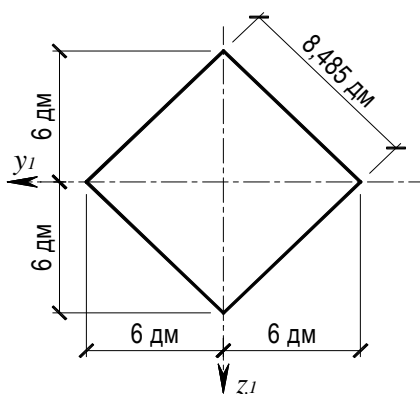
- 1) визначити положення центру ваги перерізу колони, головні моменти інерції та квадрати радіусів інерції;
- 2) побудувати ядро перерізу і визначити положення нейтральної лінії для верхнього перерізу колони;
- 3) визначити допустиму величину сили з умови міцності матеріалу в розтягнутій зоні верхнього перерізу та у стиснутій зоні нижнього перерізу колони;
- 4) визначити максимальні напруження у верхньому та нижньому перерізах колони і побудувати епюри напружень.

Приклад 2.2. Коротка кам'яна колона, поперечний переріз якої показано на рис. 2.8, стискається власною вагою та силою F , прикладеною в точці С. Висота колони $H = 4,5$ м, об'ємна вага матеріалу $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$. Визначити величину допустимої стискуючої сили за умови, що допустимі напруження на розтяг $\sigma_{adm,t} = 200 \text{ кПа}$, на стискання – $\sigma_{adm,c} = 1800 \text{ кПа}$.

1. Визначаємо положення центру ваги перерізу та його геометричні характеристики відносно головних центральних осей.

Поперечний переріз (рис. 2.8.) розбиваємо на дві прості фігури (квадрат і вирізаний трикутник) і визначаємо геометричні характеристики цих фігур відносно власних центральних осей:

а) квадрат зі стороною $a = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,485 \text{ дм}$:



площа поперечного перерізу

$$A_1 = a^2 = 8,485^2 = 72 \text{ дм}^2;$$

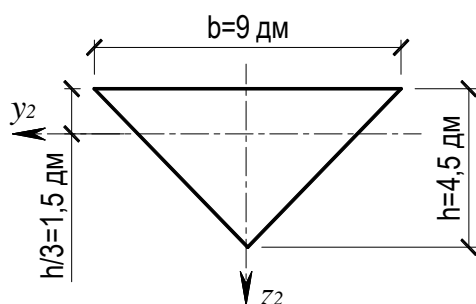
осьові моменти інерції

$$I_{y1} = I_{z1} = \frac{a^4}{12} = \frac{8,485^4}{12} = 432 \text{ дм}^4;$$

відцентровий момент інерції

$$I_{y1z1} = 0;$$

б) вирізаний трикутник:



площа поперечного перерізу

$$A_2 = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 9 \cdot 4,5 = 20,25 \text{ дм}^2;$$

осьові моменти інерції

$$I_{y2} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{9 \cdot 4,5^3}{36} = 22,78 \text{ дм}^4;$$

$$I_{z2} = \frac{b^3 \cdot h}{48} = \frac{9^3 \cdot 4,5}{48} = 68,34 \text{ дм}^4;$$

відцентровий момент інерції $I_{y2z2} = 0$.

Виконуємо у масштабі креслення перерізу і показуємо центральні осі елементів перерізу (рис. 2.8).

Центр ваги перерізу знаходиться на осі z_C , яка є віссю симетрії перерізу (рис. 2.8).

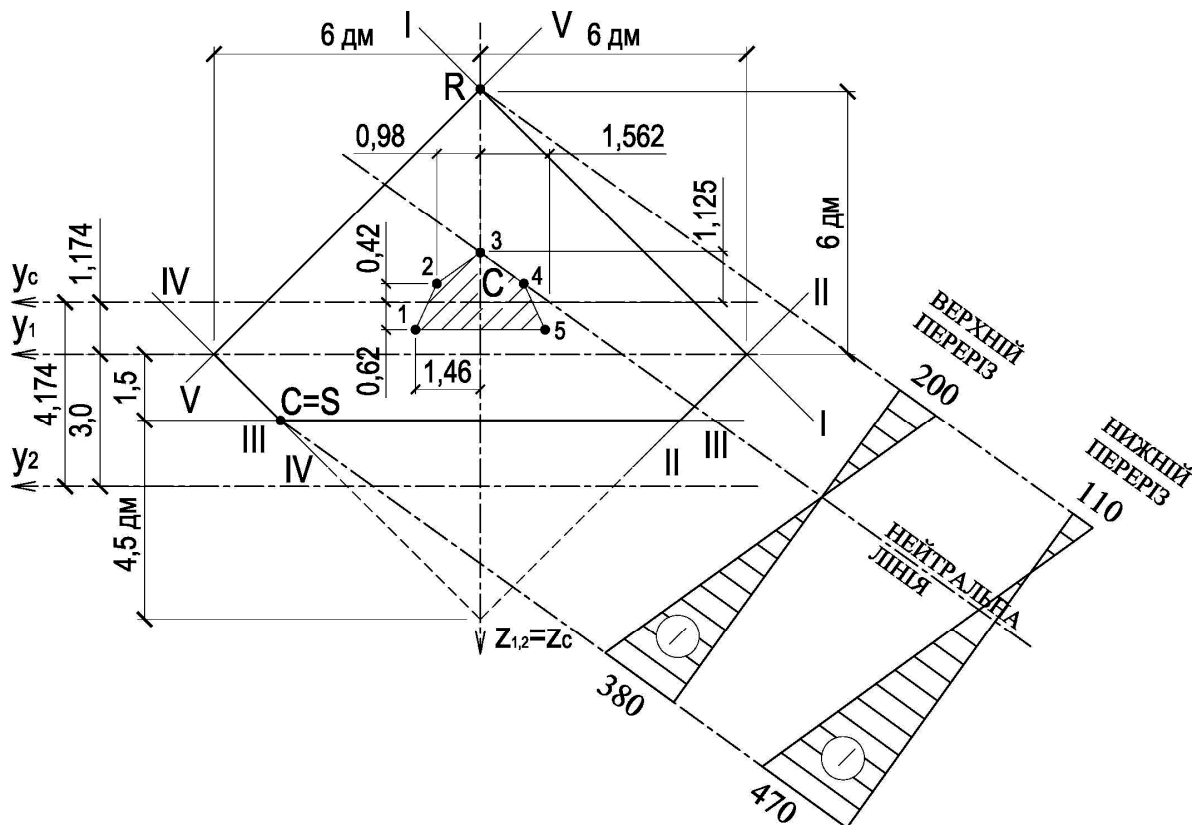


Рис. 2.8

Визначаємо координати центру ваги перерізу в початкових осях (центральных осях квадрата):

$$y_c = 0;$$

$$z_c = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{72 \cdot 0 - 20,25 \cdot 3}{72 - 20,25} = -1,174 \text{ дм.}$$

Показуємо на кресленні центр ваги і проводимо центральні осі (рис. 2.8).

Визначаємо головні центральні моменти інерції перерізу:

$$I_{yc} = \sum (I_{yi} + A_i \cdot z_{ci}^2) = 432 + 72 \cdot 1,174^2 + (-22,78) +$$

$$+(-20,25) \cdot (3 - (-1,174))^2 = 155,65 \text{ дм}^4;$$

$$I_{zc} = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_{ci}^2) = 432 + (-68,34) = 363,66 \text{ дм}^4.$$

Квадрати радіусів інерції:

$$i_y^2 = \frac{I_{yc}}{A} = \frac{155,65}{51,75} = 3,008 \text{ дм}^2, \quad i_z^2 = \frac{I_{zc}}{A} = \frac{363,66}{51,75} = 7,027 \text{ дм}^2.$$

2. Будуємо ядро перерізу.

Для побудови ядра перерізу через його крайні точки проводимо дотичні, що не перетинають переріз, і визначаємо відрізки, які дотичні відсікають на центральних осях (рис. 2.8).

$$\text{Дотична I-I: } a_y^I = -4,826 \text{ дм}, \quad a_z^I = -4,826 \text{ дм}$$

$$y_{я}^I = -\frac{7,027}{-4,826} = 1,46 \text{ дм}, \quad z_{я}^I = -\frac{3,008}{-4,826} = 0,62 \text{ дм}.$$

$$\text{Дотична II-II: } a_y^{II} = -7,174 \text{ дм}, \quad a_z^{II} = 7,174 \text{ дм}$$

$$y_{я}^{II} = -\frac{7,027}{-7,174} = 0,98 \text{ дм}, \quad z_{я}^{II} = -\frac{3,008}{7,174} = -0,42 \text{ дм}.$$

$$\text{Дотична III-III: } a_y^{III} = \infty, \quad a_z^{III} = 2,674 \text{ дм}$$

$$y_{я}^{III} = -\frac{7,027}{\infty} = 0, \quad z_{я}^{III} = -\frac{3,008}{2,674} = -1,12 \text{ дм}.$$

$$\text{Дотична IV-IV: } a_y^{IV} = 7,174 \text{ дм}, \quad a_z^{IV} = 7,174 \text{ дм}$$

$$y_{я}^{IV} = -\frac{7,027}{7,174} = -0,98 \text{ дм}, \quad z_{я}^{IV} = -\frac{3,008}{7,174} = -0,42 \text{ дм}.$$

$$\text{Дотична V-V: } a_y^V = 4,826 \text{ дм}, \quad a_z^V = -4,826 \text{ дм}$$

$$y_{я}^V = -\frac{7,027}{4,826} = -1,46 \text{ дм}, \quad z_{я}^V = -\frac{3,008}{-4,826} = 0,62 \text{ дм}.$$

За знайденими координатами граничних точок будуємо ядро перерізу (рис. 2.8).

3. Визначаємо положення нейтральної лінії для верхнього перерізу колони. Сила прикладена в точці C(4,5; 2,674):

$$a_y^0 = -\frac{7,027}{4,5} = -1,562 \text{ дм}, \quad a_z^0 = -\frac{3,008}{2,674} = -1,125 \text{ дм}.$$

На центральних осях відкладаємо відповідні відрізки і проводимо нульову лінію (рис. 2.8).

4. Обчислюємо величину допустимої сили F , прикладеної в точці $C(4,5; 2,674)$.

Умови міцності записуються для двох точок, найбільш віддалених від нейтральної осі в зоні стиску і зоні розтягу. Область перерізу по один бік від нейтральної осі є зоною стиску, по інший бік – зона розтягу. Та область, в якій прикладена стискаюча сила, є зоною стиску, інша – зона розтягу.

Умова міцності на розтяг у точці $R(0; -4,826)$ верхнього перерізу (точка найбільш віддалена від нейтральної осі в розтягнутій зоні):

$$\sigma_R = \frac{-F}{51,75 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{4,5}{7,027} \cdot 0 + \frac{2,674}{3,008} \cdot (-4,826) \right) = \sigma_{adm,t} = 200.$$

З цієї рівності визначаємо допустиму силу $F=31,46 \text{ кН}$.

Умова міцності на стиск у точці $S(4,5; 2,674)$ нижнього перерізу колони (точка найбільш віддалена від нейтральної осі в стиснутій зоні).

Окрім напружень, викликаних силою, в нижньому перерізі колони додатково виникають стискаючі напруження від власної ваги:

$$\sigma = -\gamma \cdot H = -20 \cdot 4,5 \left[\frac{\text{кН}}{\text{м}^3} \text{чМ} \right] = -90 \text{ кПа};$$

$$\sigma_S = \frac{-F}{51,75 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{4,5}{7,027} \cdot 4,5 + \frac{2,674}{3,008} \cdot 2,674 \right) - 90 =$$

$$= \sigma_{adm,c} = -1800.$$

З цієї рівності визначаємо допустиму силу $F=141,39 \text{ кН}$.

З умови міцності на розтяг отримали значення допустимої сили $F=31,46 \text{ кН}$, а з умови міцності на стиск $F=141,39 \text{ кН}$. Обираємо меншу за абсолютним значенням величину сили $F=31,46 \text{ кН}$.

5. Визначаємо напруження в точках R(0; -4,826) та S(4,5; 2,674) від визначеної сили.

У верхньому перерізі:

$$\sigma_R = \frac{-31,46}{51,75 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{4,5}{7,027} \cdot 0 + \frac{2,674}{3,008} \cdot (-4,826) \right) = 200 \text{ кПа};$$

$$\sigma_S = \frac{-31,46}{51,75 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{4,5}{7,027} \cdot 4,5 + \frac{2,674}{3,008} \cdot 2,674 \right) = -380 \text{ кПа}.$$

У нижньому перерізі до напружень від сили додаються напруження від власної ваги:

$$\sigma_R = 200 - 90 = 110 \text{ кПа};$$

$$\sigma_S = -380 - 90 = -470 \text{ кПа}.$$

Будуємо епюри напружень (рис. 2.8).

Задача 3. Розрахунок стержнів на згин із крученням

Загальні зауваження

Якщо зовнішні сили, що діють на стержень, спричиняють у ньому внутрішні силові фактори: $M_K = M_x, M_y, Q_z$, у довільному поперечному перерізі стержня одночасно виникають нормальні напруження від згину та дотичні напруження від кручення та згину.

Стержні круглого поперечного перерізу. У стержні круглого поперечного перерізу нормальні напруження та дотичні напруження від кручення пропорційні відстані від точки до центру ваги перерізу (рис. 2.9). Таким чином, найбільш напруженими будуть точки на поверхні стержня. Оскільки дотичні напруження від згину в цих точках дорівнюють нулю, умова міцності записується таким чином:

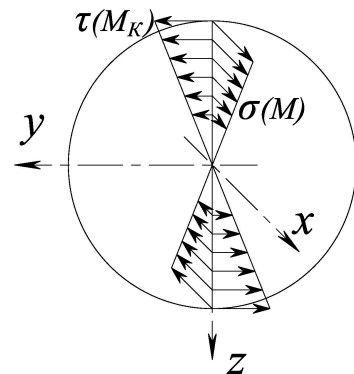


Рис. 2.9

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3z}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\kappa}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де $W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$.

Стержні прямокутного поперечного перерізу. Як видно з епюр напружень (рис. 2.10) у стержні прямокутного перерізу найбільші нормальні та найбільші дотичні напруження виникають не в одній і тій же точці. Відповідно, необхідно записувати умови міцності в двох точках:

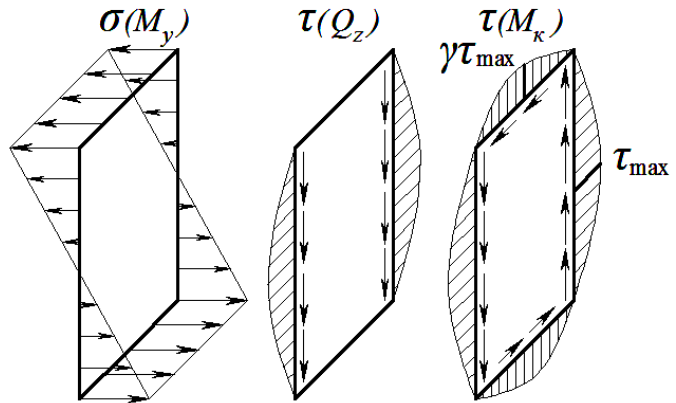


Рис. 2.10

– посередині короткої сторони:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3z}}{W}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_{\kappa}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$, $W_p = \alpha h b^2$, коефіцієнти α , γ визначаються залежно від співвідношення сторін прямокутника (табл. 1);

Таблиця 1

h/b	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
α	0,208	0,219	0,228	0,234	0,240	0,246
β	0,140	0,166	0,187	0,204	0,217	0,229
γ	1,00	–	0,865	0,845	–	0,796

– посередині довгої сторони:

$$\tau = \tau(Q_z) + \tau(M_{\kappa}) \leq [\tau],$$

$$\text{де } \tau(Q_z) = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y b}, \quad S_y = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}, \quad I_y = \frac{bh^3}{12};$$

$$\tau(M_K) = \frac{M_K}{W_p} = \frac{M_K}{\alpha hb^2}.$$

Постановка задачі

Для заданої розрахункової схеми ламаного горизонтального стержня, завантаженого вертикальним навантаженням, визначити розміри круглого та прямокутного поперечного перерізу та вертикального прогину перерізу "К".

Вихідні дані

За особистим шифром із дод. 4 вибрати лінійні розміри стержня та величини навантажень, співвідношення довжин сторін для прямокутного перерізу та величину допустимих напружень $[\sigma]$, $[\tau] = 0,6[\sigma]$.

План розв'язання задачі:

- 1) побудувати епюри поперечних сил, згинальних моментів та моментів кручення;
- 2) з умови міцності визначити розміри круглого та прямокутного поперечного перерізу стержня, обрати переріз меншої площі;
- 3) визначити вертикальне переміщення заданої точки "К" з врахуванням жорсткості обраного перерізу.

Приклад 2.3. Для горизонтального ламаного стержня, розрахункова схема якого показана на рис. 2.11, визначити розміри круглого поперечного перерізу та прямокутного із співвідношенням сторін $\frac{h}{b} = 1,4$, обрати переріз меншої площі. Визначити прогин точки "К" з врахуванням жорсткості обраного перерізу. Допустимі напруження $[\sigma] = 80$ МПа, $[\tau] = 0,6 \cdot 80 = 48$ МПа, модуль пружності матеріалу $E = 100$ ГПа, модуль зсуву $G = 0,4E = 40$ ГПа.

1. Креслимо в масштабі розрахункову схему стержня та будуємо епюри внутрішніх зусиль (рис. 2.11).

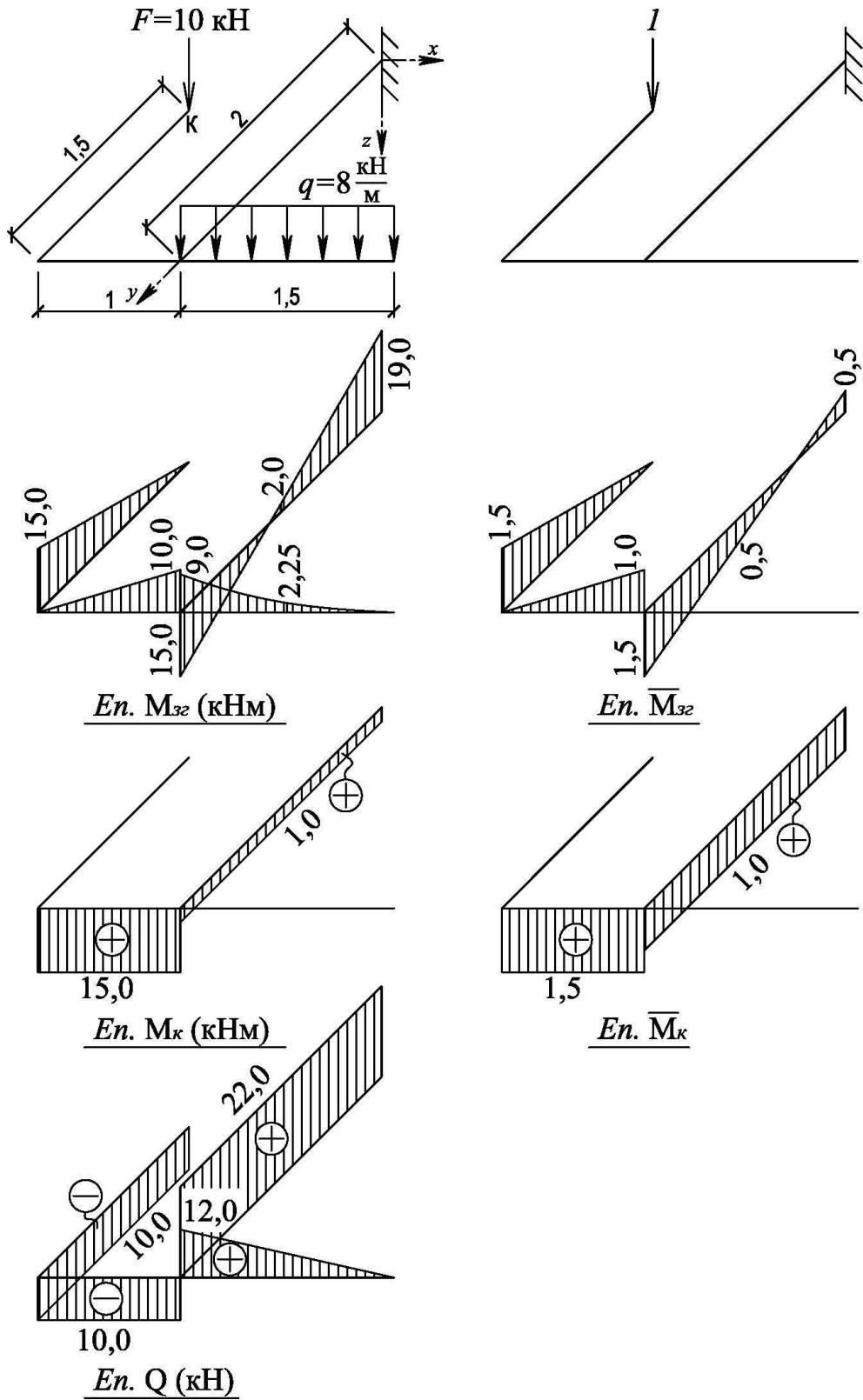


Рис. 2.11

2. Визначаємо небезпечний переріз стержня (за найбільш не вигідним сполученням згинального моменту та моменту кручення):

1) $M_y = 19,0 \text{ кНм}, M_\kappa = 1,0 \text{ кНм}, Q_z = 22 \text{ кН};$

2) $M_y = 10,0 \text{ кНм}, M_\kappa = 15,0 \text{ кНм}, Q_z = 10 \text{ кН}.$

3. Визначаємо розміри поперечного перерізу:

а) з умови міцності для круглого поперечного перерізу:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{32}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_\kappa}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}}\right)^2} \leq [\sigma],$$

– $M_y = 19,0 \text{ кНм}, M_\kappa = 1,0 \text{ кНм}, Q_z = 22 \text{ кН}$

$$\sqrt{\left(\frac{19 \cdot 32}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{1 \cdot 16}{\pi \cdot d^3}\right)^2} \leq 80 \times 10^3,$$

$$d^{\text{н}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(19 \cdot 32)^2 + 4(1 \cdot 16)^2}}{\pi \cdot 80 \times 10^3}} = 0,134 \text{ м} = 13,4 \text{ см}.$$

– $M_y = 10,0 \text{ кНм}, M_\kappa = 15,0 \text{ кНм}, Q_z = 10 \text{ кН}$

$$\sqrt{\left(\frac{10 \cdot 32}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{15 \cdot 16}{\pi \cdot d^3}\right)^2} \leq 80 \times 10^3,$$

$$d^{\text{н}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(10 \cdot 32)^2 + 4(15 \cdot 16)^2}}{\pi \cdot 80 \times 10^3}} = 0,132 \text{ м} = 13,2 \text{ см}.$$

Обираємо розмір перерізу d кратним 0,5 см за більшим з отриманих значень $d = 13,5 \text{ см}.$

б) з умови міцності для прямокутного поперечного перерізу:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{32}}{\frac{b \cdot h^2}{6}}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_\kappa}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma],$$

при співвідношенні сторін прямокутника $\frac{h}{b} = 1,4$, $h = 1,4b$, $\alpha = 0,228$,
 $\gamma = 0,865$ (табл. 1).

$$- M_y = 19,0 \text{ кНм}, M_k = 1,0 \text{ кНм}, Q_z = 22 \text{ кН}$$

$$\sqrt{\left(\frac{19 \cdot 6}{b \cdot (1,4b)^2}\right)^2 + 4\left(\frac{0,865 \cdot 1}{0,228 \cdot 1,4b \cdot b^2}\right)^2} \leq 80 \times 10^3,$$

$$b^H = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\left(\frac{19 \cdot 6}{1,96}\right)^2 + 4\left(\frac{0,865 \cdot 1}{0,228 \cdot 1,4}\right)^2}}{80 \times 10^3}} \cdot 0,09 \text{ м} = 9 \text{ см};$$

$$- M_y = 10,0 \text{ кНм}, M_k = 15,0 \text{ кНм}, Q_z = 10 \text{ кН}$$

$$\sqrt{\left(\frac{10 \cdot 6}{b \cdot (1,4b)^2}\right)^2 + 4\left(\frac{0,865 \cdot 15}{0,228 \cdot 1,4b \cdot b^2}\right)^2} \leq 80 \times 10^3,$$

$$b^H = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\left(\frac{10 \cdot 6}{1,96}\right)^2 + 4\left(\frac{0,865 \cdot 15}{0,228 \cdot 1,4}\right)^2}}{80 \times 10^3}} \cdot 0,103 \text{ м} = 10,3 \text{ см}.$$

Обираємо розміри перерізу кратними 0,5 см за більшим з отриманих значень: $b = 10,5 \text{ см}$, $h = 1,4 \cdot 10,5 = 14,7 \approx 14,5 \text{ см}$.
 Оскільки визначені розміри перерізу менші за необхідні, перевіряємо напруження:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{10}{\frac{10,5 \cdot 14,5^2}{6} \times 10^{-6}}\right)^2 + 4\left(0,865 \cdot \frac{15}{0,228 \cdot 14,5 \cdot 10,5^2 \times 10^{-6}}\right)^2} =$$

$$= 86 \times 10^3 \text{ кПа} = 86 \text{ МПа},$$

перенапруження: $\Delta = \frac{86 - 80}{80} \cdot 100\% = 7,5\% > 5\%$, отже, розміри

перерізу недостатні, остаточно обираємо $b = 10,5 \text{ см}$, $h = 15 \text{ см}$.

Перевіряємо напруження посередині довгої сторони перерізу:

$$\tau = \tau(Q_z) + \tau(M_K) = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y b} + \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau],$$

$$\text{де } S_y = \frac{10,5 \cdot 15^2}{8} = 295,3 \text{ см}^3, \quad I_y = \frac{10,5 \cdot 15^3}{12} = 2953,1 \text{ см}^4,$$

$$W_p = \alpha h b^2 = 0,228 \cdot 15 \cdot 10,5^2 = 377,1 \text{ см}^3,$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{10 \times 10^{-3} \cdot 295,3 \times 10^{-6}}{2953,1 \times 10^{-8} \cdot 10,5 \times 10^{-2}} + \frac{15 \times 10^{-3}}{377,1 \times 10^{-6}} = 1 + 39,8 = \\ &= 40,8 \text{ МПа} < [\tau] = 48 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Площа круглого поперечного перерізу:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 13,5^2}{4} = 143,14 \text{ см}^2,$$

площа прямокутного поперечного перерізу:

$$A = b \cdot h = 10,5 \cdot 15 = 157,5 \text{ см}^2.$$

Оскільки площа круглого перерізу менша, остаточно обираємо круглий поперечний переріз діаметром $d = 13,5$ см.

4. Визначаємо прогин точки "К" методом Мора. У точці "К" прикладаємо одиничну вертикальну силу і будуємо епюри моментів (рис. 2.11).

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{3z} \bar{M}_{3z}}{EI} dx + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_K \bar{M}_K}{GI_p} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{2}{6} \cdot (1,5 \cdot 15 + 4 \cdot 0,5 \cdot (-2) + 19 \cdot 0,5) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{GI_p} (1 \cdot 1,5 \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{23,92}{EI} + \frac{24,5}{GI_p}. \end{aligned}$$

Жорсткість перерізу:

$$EI = 1 \times 10^8 \cdot \frac{\pi \cdot 13,5^4}{64} \times 10^{-8} = 1630 \text{ кНм}^2,$$

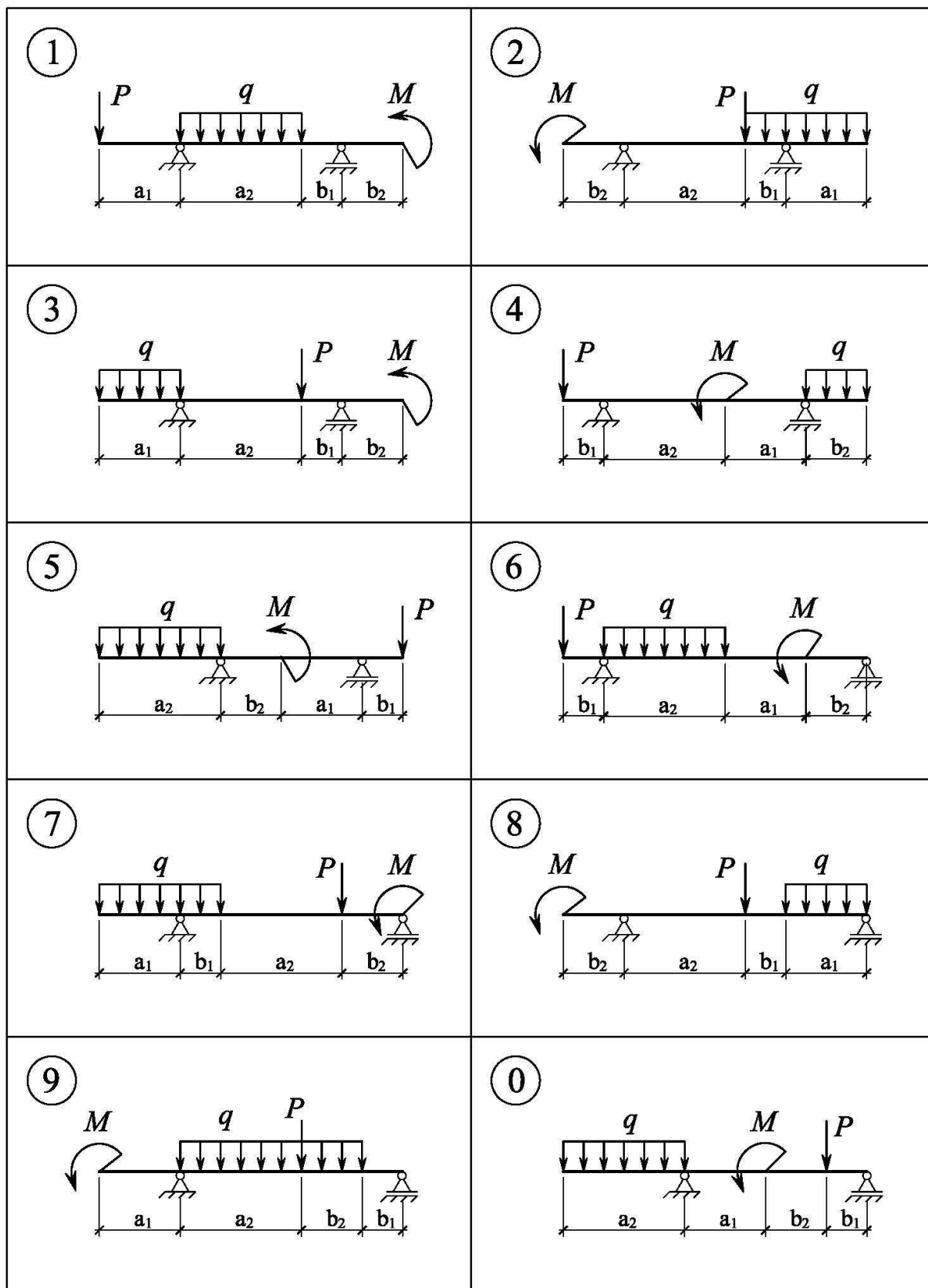
$$GI_p = 0,4 \times 10^8 \cdot \frac{\pi \cdot 13,5^4}{32} \times 10^{-8} = 1304 \text{ кНм}^2.$$

Прогин точки "К":

$$\Delta_K = \frac{23,92}{EI} + \frac{24,5}{GI_p} = \frac{23,92}{1630} + \frac{24,5}{1304} = 0,033 \text{ м.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Опір* матеріалів: підручник / Л. Т. Шкельов, А. М. Станкевич, Д. В. Пошивач. – К.: ЗАТ "Віпол", 2011. – 456 с.
2. *Опір* матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко – К.: Вища шк., 1993. – 654 с.
3. *Опір* матеріалів з основами теорії пружності: навчальний посібник у двох частинах, п'яти книгах / за ред. В. Г. Піскунова – К.: Вища школа, 1994 – 1995.
Ч – I, кн. 1: Загальні основи курсу – 1994. – 205 с.
Ч – I, кн. 2: Опір бруса – 1994. – 335 с.
Ч – II, кн. 4: Приклади і задачі – 1995. – 304 с.
4. *Справочник* по сопротивлению материалов / С. П. Фесик. – [2-е изд.] – К.: Будівельник, 1982. – 367 с.

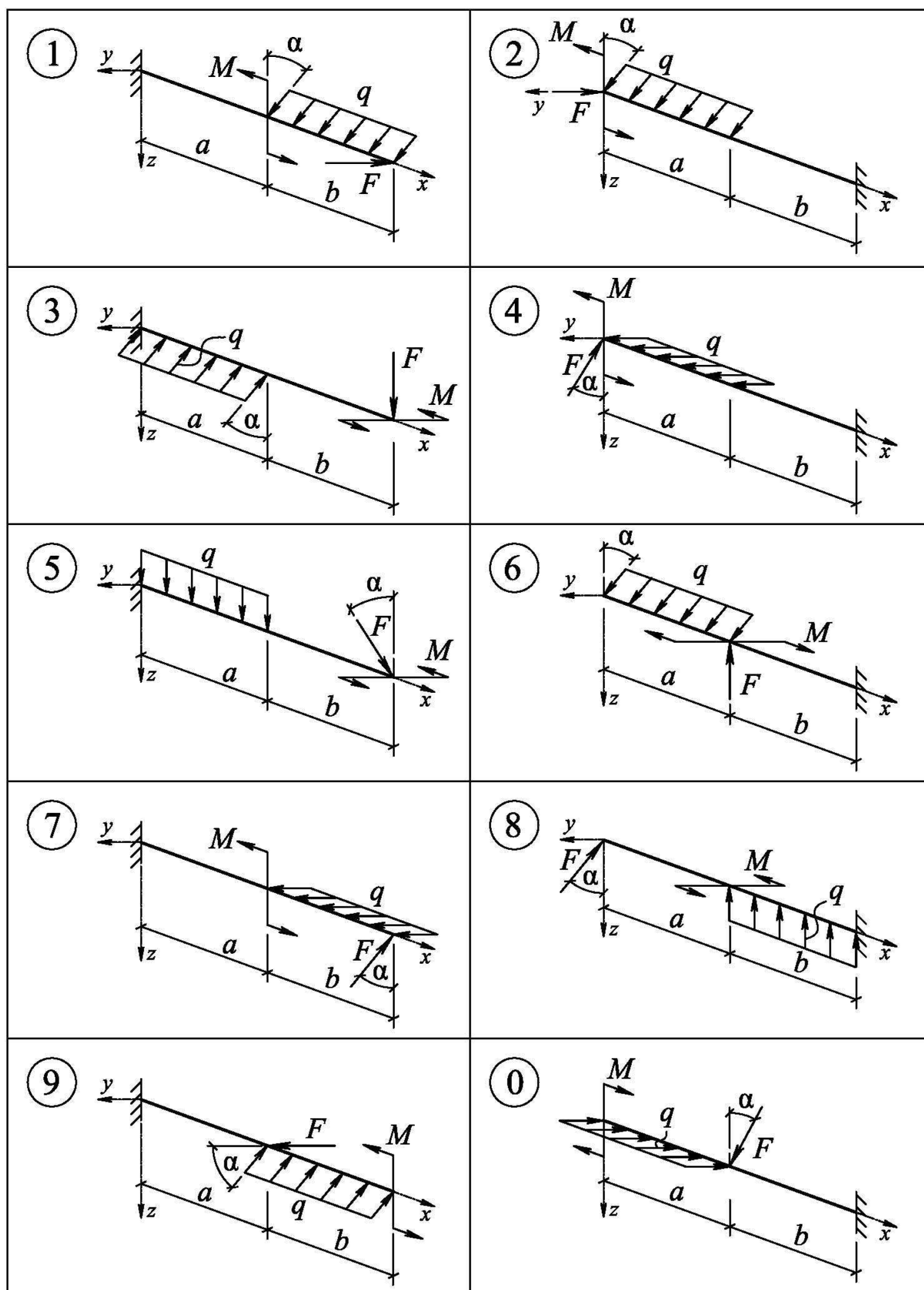


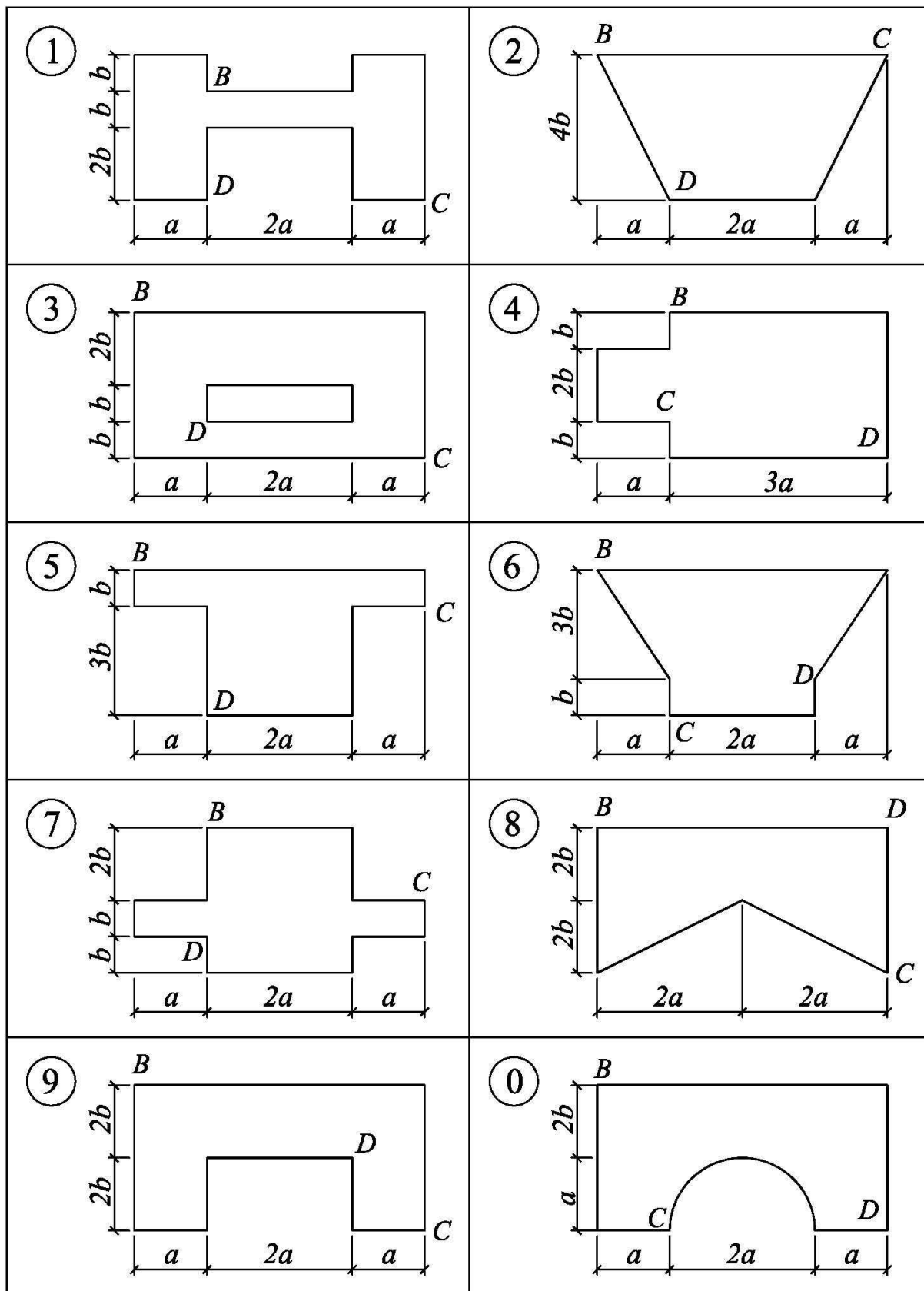
Закінчення дод. 1

Цифра шифру	Перша цифра			Друга цифра		Третя цифра		
	$a_1, \text{ м}$	$b_1, \text{ м}$	$P, \text{ кН}$	$a_2, \text{ м}$	$M, \text{ кНм}$	$b_2, \text{ м}$	$q, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	номер схеми
1	1,0	2,5	14	3	11	1,5	7	1
2	1,25	1,75	17	2	21	2	6	2
3	1,5	2,25	11	4	13	2,5	8	3
4	1,75	1,5	13	3	19	1,5	7	4
5	2,0	1,25	10	4	15	2	4	5
6	1,0	1,5	16	2	10	2,5	5	6
7	1,25	2,5	15	2	23	1,5	6	7
8	1,5	2,5	21	3	17	2	5	8
9	1,75	2,0	12	4	20	2,5	8	9
0	2,0	1,5	19	3	18	1,5	7	0

Додаток 2

Цифра шифру	Перша цифра			Друга цифра		Третя цифра		
	$q, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$P, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$	$\frac{h}{b} \left(\frac{b}{h} \right)$	$\alpha, \text{ град}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	номер схеми
1	1,5	1,8	2,4	1,2	30	1,0	1,5	1
2	1,8	2,2	2,6	1,4	45	1,2	1,4	2
3	2,0	2,5	1,8	1,6	60	1,3	1,2	3
4	1,6	2,4	2,0	1,8	30	1,4	1,0	4
5	1,4	2,0	1,6	2,0	45	1,5	0,8	5
6	2,0	1,6	2,2	1,5	60	1,4	1,0	6
7	2,2	1,8	2,5	2,2	30	1,3	1,1	7
8	1,8	2,0	1,5	1,6	45	1,2	1,4	8
9	1,5	2,6	1,0	2,0	60	1,4	1,3	9
0	2,2	1,6	1,8	1,8	30	1,1	1,2	0



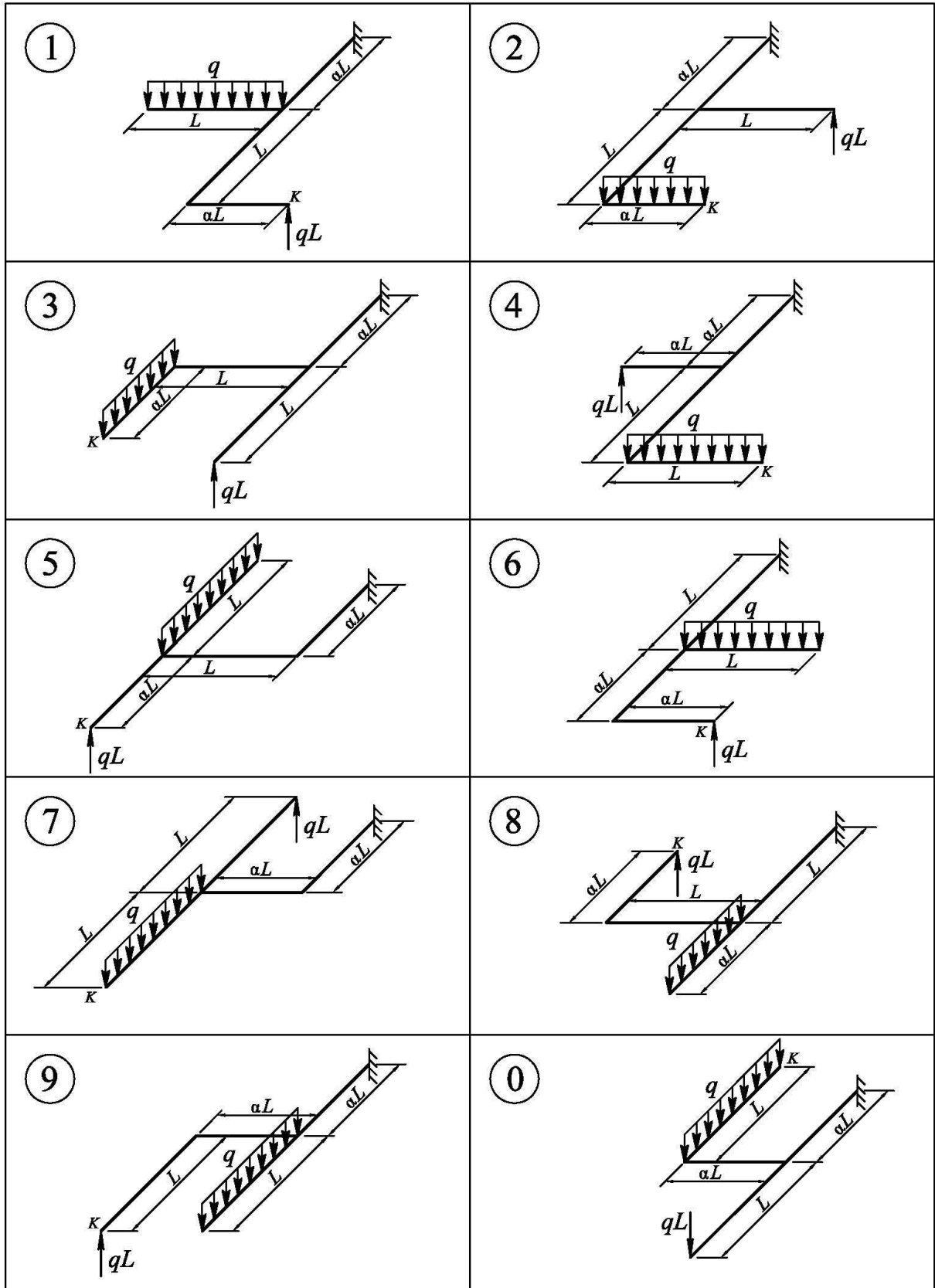


Закінчення дод. 3

Цифра шифру	Перша цифра			Друга цифра				Третя цифра
	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$H, \text{ м}$	$\gamma, \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$	$\sigma_{adm,t}, \text{ кПа}$	$\sigma_{adm,c}, \text{ кПа}$	точка прикл. сили	номер схеми
1	0,2	0,3	4,0	17	150	2000	<i>B</i>	1
2	0,25	0,2	3,5	18	200	1400	<i>C</i>	2
3	0,3	0,15	5,0	20	140	1800	<i>D</i>	3
4	0,15	0,3	4,5	22	180	1600	<i>B</i>	4
5	0,2	0,25	6,0	25	220	1500	<i>C</i>	5
6	0,25	0,15	4,0	19	190	1800	<i>D</i>	6
7	0,3	0,2	3,5	18	120	1600	<i>B</i>	7
8	0,15	0,25	5,5	17	170	2000	<i>C</i>	8
9	0,2	0,15	6,0	20	100	1400	<i>D</i>	9
0	0,25	0,3	4,5	25	230	1500	<i>B</i>	0

Додаток 4

Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра		Третя цифра
	$q, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$L, \text{ м}$	σ_{adm}	α	номер схеми
1	2,5	1,8	80	0,5	1
2	3,0	1,9	90	0,6	2
3	2,0	1,5	100	0,7	3
4	3,5	1,4	85	0,8	4
5	4,0	1,3	95	0,5	5
6	2,0	1,2	100	0,6	6
7	3,5	1,0	80	0,7	7
8	2,5	2,0	95	0,8	8
9	3,0	1,6	85	0,5	9
0	4,0	1,7	90	0,6	0



Навчально-методичне видання

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Повний розрахунок прокатної балки Складний опір

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.06.0101 „Будівництво”

Укладачі: **СТАНКЕВИЧ** Анатолій Миколайович
ЖУПАНЕНКО Ірина Вячеславівна
ЛЕВКІВСЬКИЙ Дмитро Володимирович

Комп'ютерне верстання *Ю.Г. Томащука*

Підписано до друку .2013. Формат 60 × 84 1/ 16
Ум. друк. арк. 3,02. Обл.-вид. арк. 3,25.
Тираж 50 прим. Вид. № 112/III-13. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Надруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.