Подвійні інтеграли

Визначення: Якщо при прямуванні до нуля кроку розбивки області Δ інтегральні суми $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ мають скінченну границю, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

Властивості подвійного інтеграла.

1)
$$\iint_{\Delta}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$\iint_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \iint_{\Delta} f_3(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

2) $\iint_{\Delta} kf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = k\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

3) Якщо $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то
$$\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_{\Delta_1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{\Delta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

4) Теорема про середнє. Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ дорівнює добутку значення цієї функції в деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.
$$\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = f(x_0, y_0)\cdot S$$

5) Якщо $f(x,y) \ldots 0$ в області Δ, то $\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \ldots 0$.

6) Якщо $f_1(x,y)$ „ $f_2(x,y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ „ $\iint_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

7) $\left|\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|$ „ $\iint_{\Delta}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Обчислення подвійного інтеграла.

Теорема. *Якщо функція f(x, y) неперервна в замкнутій області Δ, обмеженої лініями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), де φ і ψ – неперервні функції і φ „ ψ, тоді*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = -$$
$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

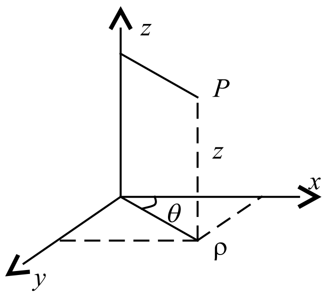
$$\iint_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Потрійний інтеграл

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\sum\sum_{v}\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

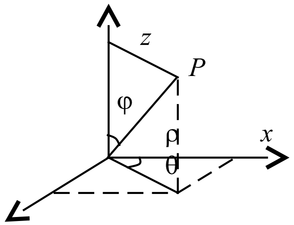
Циліндрична система координат.



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_r F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$\iiint_\tau F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$$

Сферична система координат.



$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_r F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\tau f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

Геометричні й фізичні застосування кратних інтегралів

1) Обчислення площ у декартових координатах.
$$S = \int_a^b\int_{f(x)}^{\varphi(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

2) Обчислення площ у полярних координатах.
$$S = \iint_\tau \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint_\Delta \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

3) Обчислення об'ємів тіл.
$$V = \iint_\Delta z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

4) Обчислення площі кривої поверхні

Якщо поверхня задана рівнянням: $f(x, y, z) = 0$, то площа її поверхні знаходиться за формулою:
$$S = \iint_\Delta \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Якщо поверхня задана в неявному виді, тобто рівнянням $z = \varphi(x, y)$, то площа цієї поверхні обчислюється за формулою:
$$S = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

5)Обчислення моментів інерції площ плоских фігур.

– відносно осі *Ox*: $I_x = \iint_\Delta y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

– відносно осі *Oy*: $I_y = \iint_\Delta x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

– відносно початку координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_\Delta\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ – **полярний момент інерції.**

6) Обчислення центрів ваги площ плоских фігур.
$$x_C = \frac{\iint_\Delta wx\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint_\Delta w\mathrm{d}y\mathrm{d}x};\quad y_C = \frac{\iint_\Delta wy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint_\Delta w\mathrm{d}y\mathrm{d}x};$$

тут *w* – поверхнева щільність.

7) Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійного інтеграла.
$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

при цьому z_1 і z_2 – функції від *x* і *y* або сталі, y_1 і y_2 – функції від *x* або сталі, x_1 і x_2 – сталі.

8) Координати центра ваги тіла.
$$x_C = \frac{\iiint_r wx\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v};\quad y_C = \frac{\iiint_r wy\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v};\quad z_C = \frac{\iiint_r wz\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v};$$

9) Моменти інерції тіла щодо осей координат.
$$I_x = \iiint_r (y^2 + z^2)w\mathrm{d}v; I_y = \iiint_r (x^2 + z^2)w\mathrm{d}v;$$
$$I_z = \iiint_r (x^2 + y^2)w\mathrm{d}v;$$

10) Моменти інерції тіла щодо координатних площин.
$$I_{xy} = \iiint_r z^2 w\mathrm{d}v; I_{xz} = \iiint_r y^2 w\mathrm{d}v; I_{yz} = \iiint_r x^2 w\mathrm{d}v;$$

11) Момент інерції тіла відносно початку координат.
$$I_0 = \iiint_r (x^2 + y^2 + z^2)w\mathrm{d}v;$$

d*v* – елемент об'єму

- у декартових координатах: d*v* = d*x*d*y*d*z*;
- у циліндричних координатах: d*v* = ρdzdφdθ;
- у сферичних координатах: d*v* = ρ^2sinφdρdφdθ.

12) Обчислення маси неоднорідного тіла.
$$M = \iiint_r w\mathrm{d}v;$$

Тепер щільність *w* – величина змінна.