ПРОГРАМА. III СЕМЕСТР

I. Ряди

1. Числові ряди. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Дії з рядами. Узагальнений гармонійний ряд. Ряд, що складається із членів геометричної прогресії.
2. Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів: ознаки порівняння; Даламбера; радикальна ознака Коші; інтегральна ознака Коші.
3. Знакозмінні ряди. Знакочергові ряди. Достатня ознака Лейбніца про збіжність знакочергового ряду. Абсолютна і умовна збіжність. Теорема про оцінку залишку знакочергового ряду. Наближене обчислення суми знакочергового ряду.
4. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Інтеграл і радіус збіжності. Розклад функції в степеневі ряди. Застосування степеневих рядів в наближених обчислюваннях.

Ряди Фур'є. Розклад функції в ряди Фур'є.

II. Кратні інтеграли

1. Подвійні та потрійні інтеграли; їх основні властивості.
2. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів в декартових координатах.
3. Застосування кратних інтегралів до обчислення об'ємів та площ.

III. Кратні інтеграли

1. Задачі, що приводять до поняття криволінійних інтегралів. Позначення криволінійних інтегралів першого та другого типу; їх основні властивості.
2. Обчислення криволінійних інтегралів.

I. РЯДИ

1. Числові ряди, Основні поняття

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n,$ де послідовність $U_n = f(n)$ – нескінченна числова послідовність. Вираз

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n. \qquad (1)$$

називається ***числовим рядом***, а числа $U_1, U_2, \ldots, U_n$ – ***членами ряду***: $U_n = f(n)$ – називається ***загальним членом ряду***. Сума перших n членів числового ряду називають n-ою частинною сумою ряду і позначають через S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n. \qquad (2)$$

Ряд (1) називається **збіжним**, якщо послідовність його частинних сум при $n \to \infty$ має скінченну границю:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad (3)$$

Число S називають **сумою ряду.**

Якщо границя частинних сум при $n \to \infty$ не існує або нескінченна, то ряд (1) називають **розбіжним.**

Якщо в ряді (1) $U_1, U_2, \ldots, U_n + \ldots, \quad U_n > 0,$ то такий ряд називається **додатним.**

Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд (1) збіжний, то його загальний член при необмеженому зростанні номера прямує до нуля.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{4}$$

Достатня умова розбіжності ряду: якщо

$$\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0, \tag{5}$$

то ряд розбіжний.

<u>**Приклад** 1.</u> Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n-1}$$

Розв'язання.

Застосуємо необхідну ознаку збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5n - \frac{1}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, даний ряд розбіжний, тому що не виконується необхідна умова збіжності. При цьому виконується достатня умова розбіжності.

Розглянемо деякі числові ряди, які широко використовуються на практиці.

2. Узагальнений гармонійний ряд.

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{6}$$

де α дійсне число, називається **узагальненим гармонійним рядом**. Збіжність цього ряду залежить від значення показника α:

$$\begin{cases} \text{при } \alpha > 1 \quad \text{ряд збіжний;} \\ \text{при } \alpha \le 1 \text{ ряд розбіжний.} \end{cases} \tag{7}$$

При $\alpha = 1$ ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і називається **гармонійним**. Він розбіжний.

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний, оскільки $\alpha = 2 > 1$;

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний, оскільки $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Ряд, що складається із членів геометричної прогресії.

Такий ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} \tag{9}$$

При $|q| < 1$ маємо спадну геометричну прогресію і відповідний ряд збіжний.
При $|q| \ldots 1$ маємо розбіжний ряд.

Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів.

Розглянемо деякі достатні ознаки збіжності додатних рядів.
а) ***ознаки порівняння рядів.***

Теорема 1. (достатня ознака розбіжності).
Нехай маємо два додатних ряди

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \quad , \quad V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

Нехай члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду: U_1 „ V_1, U_2 „ $V_2, \ldots, U_n$ „ $V_n \cdots$ і другий ряд (V) збіжний. Тоді перший ряд (U) також збіжний і його сума не перевищує суми другого ряду.

Теорема 2. (достатня ознака розбіжності).
Маємо ряди $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \quad , \quad V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$
Нехай члени першого ряду (U) не перевищують членів другого ряду (V) : U_1 „ V_1, U_2 „ $V_2, \ldots, U_n$ „ $V_n \cdots$ і ряд (V) розбіжний. Тоді ряд (U) також розбіжний.

Приклад.1 Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{n^n} \ldots \tag{10}$$

Розглянемо допоміжний ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \ldots \tag{11}$$

Цей ряд (11) є рядом з геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$ і збіжний. Оскільки члени ряду (10) не більше відповідних членів ряду (11), за теоремою 1 ряд (10) також збіжний.

Теорема 3. Якщо існує скінченна і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = C = const \neq 0$, то обидва ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^3+2} \cdot (U)$

Розв'язання. Порівняємо цей ряд з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (V)$$

За теоремою 3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)\cdot n^2}{5n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n^2}{5n^3+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-2n}{15n^2}\text{(çà ï ðàâèëî ì Ëîï ³òàëÿ)}=\lim_{n\to\infty}\frac{18n-2}{30n}=\frac{3}{5}=const\neq 0.$$

Оскільки ряд (V) збіжний як узагальнений гармонійний, збіжний і ряд (U).

Звичайно викликає труднощі момент підбору другого ряду за умов використання теорем порівняння. Часто для порівняння підбирають ряди складені з членів геометричної прогресії, або узагальнений гармонійний ряд. Скажімо, якщо n-ий член ряду, що ми досліджуємо, є дробово-раціональною функцію, то ряд (V) підбираємо як узагальнений гармонійний ряд. При цьому, щоб правильно підбирати α, треба від старшого показника знаменника досліджуваного ряду відняти старший показник чисельника.

Так в останньому прикладі: $\alpha=3-1=2$. Тому $V_n=\dfrac{1}{n^2}$.

б) *достатня ознака Даламбера*

Якщо для додатного ряду $U_1+U_2+...+U_n+...$ (1) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=l$, то при $l<1$, ряд збіжний . при $l>1$, ряд розбіжний, при $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{2^n}$

Розв'язання. Використаємо ознаку Даламбера.

$U_n=\dfrac{3n+1}{2^n},\ \ U_{n+1}=\dfrac{3(n+1)+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3n+4}{2^{n+1}}$,

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)\cdot 2^n}{2^{n+1}(3n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3+4/n}{3+1/n}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже ряд збіжний.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{(2n)!}.$$

Розв'язання. За ознакою Даламбера $U_n=\dfrac{5n-1}{(2n)!}$,

$$U_{n+1}=\frac{5(n+1)-1}{\big(2(n+1)\big)!}=\frac{5n+4}{(2n+2)!},\qquad l=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+4)\cdot(2n)!}{(2n+2)!(5n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+4}{5n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=1\cdot 0=0<1$$

Отже ряд збіжний.

в) ***радикальна ознака Коші***

Якщо для додатного числового ряду існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, при $q>1$ ряд розбіжний (при $q=1$ питання про збіжність залишається відкритим).

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{2n}.$$

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші

$$U_n=\left(\frac{3n-1}{2n+2}\right)^{2n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{5n+2}\right)^{2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-1/n}{5+2/n}\right)^{2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{9}{25}<1$$

Отже ряд збіжний.

г) ***інтегральна ознака Коші***

Нехай члени додатного ряду $U_1+U_2+...+U_n+...\quad(1)$ є значеннями при $x=1,2,3,...$ деякої функції $f(x)$ додатної, неперервної, монотонно спадної на інтервалі $1\leqslant x<+\infty,$ так що $U_1=f(1),U_2=f(2),...,U_n=f(n),...$ Тоді, якщо $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ збіжний, то збіжний і ряд (1).

Якщо $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ розбіжний, то розбіжний і ряд (1).

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{25n+9}.$$

Розв'язання. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші:

$$U_n=\frac{n^2}{25n^6+9},\quad f(x)=\frac{x^2}{25x^6+9}$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{25x^6+9}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{x^2\mathrm{d}x}{25x^6+9}=$$

$$=\frac{1}{15}\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{\mathrm{d}(5x^3)}{(5x^3)^2+3^2}=\frac{1}{15}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{5x^3}{3}\Bigg|_1^A\right)=$$

$$=\frac{1}{45}\lim_{A\to\infty}\left(\mathrm{arctg}\frac{5A^3}{3}-\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{45}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\right)=const.$$

Отже, оскільки інтеграл є збіжним, вихідний ряд також є збіжним.

Знакозмінні ряди та їх дослідження

Знакозмінним називається ряд серед членів якого є як додатні, так і від'ємні числа. Наприклад

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}-\frac{1}{49}+...(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot\frac{1}{n^2}+...$$

Частинним випадком знакозмінного ряду і є ряд у якого знаки членів строго чергуються, тобто за кожним додатним членом слідує від'ємний, і за кожним від'ємним слідує додатний.

Якщо вважати, що $U_1, U_2, ..., U_n$ – абсолютні величини членів ряду. то знакочерговий ряд можна записати так:

$$U_1-U_2+U_3-U_4+...\ (-1)^{n-1}\cdot U_n+... \qquad (12)$$

Для знакочерговий рядів має місце достатня ознака збіжності Лейбніца.

Ознака Лейбніца. Якщо в знакочерговому ряді (12) абсолютні величини членів спадають:

$$U_1>U_2>U_3>...>U_n>...$$

і загальний член ряду прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0,$ то ряд збіжний, а його сума не перевищує першого члена ряду.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n^2+3}. \qquad (13)$$

Розв'язання. Даний ряд є знакочерговим. Оскільки його члени за абсолютною величиною монотонно спадають: $\frac{1}{8}>\frac{2}{25}>\frac{3}{48}>\frac{4}{85}>...$ і загальний член при $n\to\infty$ прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{5+\frac{5}{n^2}}=0,$$

за ознакою Лейбніца ряд збіжний.

Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд, складений із модулів членів.

Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо він збіжний, але не збіжний ряд, складений із модулів його членів.

Перевіримо останній ряд із абсолютними величини даного ряду. Маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+5}$. Застосовуємо до нього ознаку порівняння в граничній формі і порівняємо його з гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Тобто

$U_n=\frac{n}{5n^2+5}$, $V_n=\frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n}{(5n^2+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{5}{n^2}}=\frac{1}{5}=const\neq 0.$$

Отже, оскільки гармонійний ряд розбіжний $(\alpha=1)$, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+5}$.

Це означає, що знакочерговий ряд (13) збіжний лише умовно, оскільки сам ряд збіжний, а ряд складений із модулів його членів розбіжний.

Приклад 2. Перевірити абсолютну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^2}{5^{2n}}. \qquad (14)$$

Застосуємо ознаку Лейбніца і перевіримо збіжність ряду

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5^{2n}}=(\text{за правилом Лопіталя})=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{5^{2n}\cdot\ln 5\cdot 2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{2n}\cdot\ln 5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot 5^{2n}\cdot\ln^2 5}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \text{ряд (14) збіжний.}$$

Тепер розглянемо відповідний даному **додатний** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{5^{2n}} \qquad (15).$$

Перевіримо його збіжність за ознакою Даламбера: $U_n=\frac{(n+1)^2}{5^{2n}}$, $U_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{5^{2n+2}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\cdot 5^{2n}}{5^{2n+2}\cdot(n+1)^2}=\frac{1}{25}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2/n}{1+1/n}\right)^2=\frac{1}{25}<1.$$

ряд (15) збіжний.

Отже ряд (14) збіжний абсолютно.

Зауваження. Якщо збіжний додатний ряд, то знакозмінний ряд члени якого за абсолютною величиною дорівнюють членам вказаного додатного ряду, також збіжний за теоремою порівняння 1. Тому при перевірці знакозмінного ряду на абсолютну збіжність можна почати з дослідження додатного ряду на збіжність. Якщо збіжний **додатний** ряд, то знакозмінний ряд збіжний абсолютно. Якщо ж **додатний** ряд розбіжний, то необхідно застосувати ознаку Лейбніца для перевірки знакочергового ряду. Якщо ряд збіжний, то в цьому випадку він збіжний тільки умовно.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+3)!}. \qquad (16)$$

Розв'язання. Розглянемо додатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+3)!}. \qquad (17)$$

Перевіримо його збіжність за ознаками Даламбера: $U_n=\frac{n}{(n+3)!}$,

$$U_{n+1}=\frac{n+1}{(n+4)!},\quad l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)!}{(n+4)!\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+4)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1/n^2}{1+4/n}=\frac{0}{1}=0<1\Rightarrow \text{ряд (17) збіжний.}$$

Отже ряд (16) збіжний абсолютно.

Теорема (про оцінку залишку знакочергового ряду).

Якщо знакочерговий ряд збіжний за ознакою Лейбніца, то його n-ий залишок за модулем не перевищує першого із відкинутих членів.

Ця властивість дозволяє обчислити наближено з даною точністю суми ряду, замінюючи суму ряду сумою кількох його перших членів.

Похибка при цьому для знакочергового ряду менша абсолютного значення першого із відкинутих членів ряду.

Приклад. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+6}{5^n}$ з точністю $\alpha = 0,01$

.

Розв'язання. Знайдемо значення кількох перших членів ряду і запишемо його у вигляді:
$-1,4 + 0,32 - 0,072 + 0,016 - 0,00352 + 0,000768 - \dots$.

Для обчислення суми ряду заданою точністю досить взяти чотири перших члена, Оскільки $\left|U_5\right| = \left|-0,00352\right| = 0,00352$
Менше заданої похибки $\alpha = 0,01$.

Отже сума заданого ряду S, обчислена з заданою точністю:

$$S \approx -1,4 + 0,32 - 0,072 + 0,016 = -1,136.$$

Функціональні ряди. Степеневі ряди

Вираз

$$U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) + \dots \tag{18}$$

Називається функціональним рядом відносно змінної x. Сукупність всіх значень змінної x, для якої ряд (1) збіжний називається областю збіжності функціонального ряду.

Сума функціонального ряду є функцією змінної x: $S(x)$.

Одним із видів функціонального ряду є степеневий ряд виду:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \tag{19}$$

де $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ –дійсні числа, а $x = x_0$ –центр розкладу. Якщо $x_0 = 0$, то степеневий ряд набуває виду:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{20}$$

Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду. При $\left|x - x_0\right| < R$ ряд (2) збіжний, при $\left|x - x_0\right| > R$ ряд розбіжний, а при $\left|x - x_0\right| = R$ ряд може збігатися і розбігатися. Інтервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, до якого можуть бути приєднанні кінцеві точки, є областю збіжності ряду (19).

Радіус збіжності R може бути знайдено за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{21}$$

Збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності перевіряється окремо.

Приклад 1. Знайти радіус і інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності:

$$a_n = \frac{1}{3n+2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3n+5},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+{}^{5}\!/\!_{n}}{3+{}^{2}\!/\!_{n}} = 1.$$

Перевіримо кінцеві точки інтервалу збіжності, підставляючи по черзі значення $x = \pm 1$ в умову. При $x = -1$ маємо знакочерговий ряд

$$-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+...(-1)^n\frac{1}{3n+2} = 0.$$

Перевіримо його збіжність за ознакою Лейбніца. Члени цього ряду спадають за абсолютною величиною $\frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \frac{1}{11} + ...$ і $\lim_{n\to\infty}\left|U_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2} = 0.$

Отже в точці $x = -1$ ряд збіжний. При $x = 1$ маємо ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{3n+2}+...$$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші: $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{3x+2} =$

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{1}{3}\lim_{A\to\infty}\left(\ln\left|3x+2\right|\Big|_1^A\right) =$$

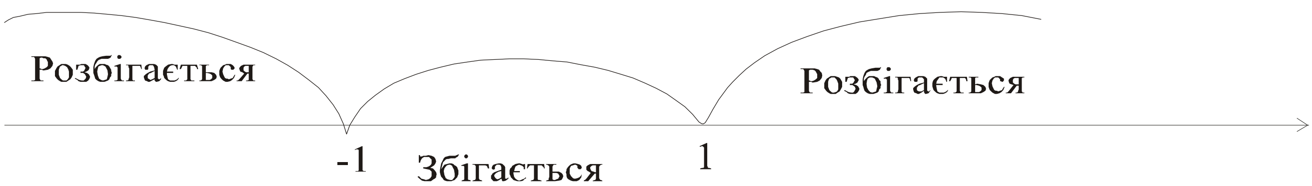
$$= \frac{1}{3}\lim_{A\to\infty}\left(\ln\left|3A+2\right| - \ln 5\right) = \frac{1}{3}\cdot\infty = \infty \Rightarrow$$

ряд розбіжний. Отже в точці $x = 1$ ряд розбіжний.

Остаточно інтервал збіжності визначається нерівністю

$$-1 \le x \le 1.$$

Це можна зобразити графічно.



Приклад 1. Знайти радіус і інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^n}{\sqrt{2n+11}}.$$

Розв'язання. Зробимо підстановку $y = x + 5$, відносно нової змінної ряд буде звичайним степеневим. Знайдемо радіус збіжності:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+11}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+13}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+13}}{\sqrt{2n+11}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+{}^{13}\!/\!_{n}}{2+{}^{11}\!/\!_{n}}} = 1.$$

Тобто ряд збіжний при $-1 < y < 1$. Виконуючи зворотну підстановку, маємо $-1 < x + 5 < 1$, тобто $-6 < x < -4$.
Перевіримо кінці інтервалу, підставляючи $x = -4,\ x = -6$ в умову.

При $x = -6$ маємо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6+5)^n}{\sqrt{2n+11}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+11}}$ його члени за абсолютною величиною спадають : $\frac{1}{\sqrt{13}} > \frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{1}{\sqrt{17}} > \dots,$ а границя $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}} = 0.$
Тому за ознакою Лейбніца при $x = -6$ ряд збіжний.

При $x = -4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+5)^n}{\sqrt{2n+11}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+11}}$.

Перевіримо збіжність цього ряду за ознакою порівняння в граничній формі. Для порівняння візьмемо узагальнений гармонійний ряд $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, який розбіжний, оскільки $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+11}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2+\frac{11}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = const \neq 0.$$

За ознакою порівняння обидва ряди поводяться однаково, отже розбігаються. Таким чином інтервал збіжності степеневого ряду визначається нерівністю $-6 \leq x < -4$.

Відзначимо деякі властивості степеневих рядів всередині їх інтервалів збіжності:

1) два степеневих ряди можна почленно додавати і перемножувати (як багаточлени);
2) степеневий ряд можна почленно множити на спільний множник;
3) степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число разів.

Розклад функцій в степеневі ряди.

Якщо функція визначена в деякому околі точки $x = x_0$ і має в точці x_0 похідні всіх порядків, тоді вона розкладається в степеневий ряд виду

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \qquad (22)$$

який називається **рядом Тейлора** функції $f(x)$ в точці x_0.

При $x_0 = 0$ отримаємо ряд

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dots + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \qquad (23)$$

що називається **рядом Маклорена**.

Наведемо розклад в ряд Маклорена деяких функцій:

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+...+\frac{x^{n}}{n!}+...,\ (-\infty<x<\infty);\qquad (24)$$

$$\sin x=1+\frac{x}{1!}-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-...+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...,(-\infty<x<\infty);\qquad (25)$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}-...+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,(-\infty<x<\infty);\qquad (26)$$

$$(1+x)^{m}=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}x^{n}+...,$$

$(|x|<1)$;

(27)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+...+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}+...,(-1<x \leq 1);\qquad (28)$$

З допомогою розкладу функцій в степеневі ряди, а також використовуючи відомі розклади деяких функцій в ряд Маклорена можна знаходити наближені значення визначених інтегралів, які або не виражаються через елементарні функції, або складні для обчислення. Для оцінки похибки знайдено наближеного значення потрібно оцінити суму відкинутих членів. Якщо даний ряд знакосталий, то ряд складений із відкинутих членів порівнюють з нескінченною спадною геометричною прогресією. У випадку знакозмінного ряду, члени якого задовольняють означі Лейбніца, використовується оцінка $\left|R_{n}\right|<U_{n+1}$, де U_{n+1}–перший із відкинутих членів.

Приклад 1. Обчислити $\int_{0}^{0,5} e^{-t^{2}/2}dt$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд. Для цього в відомому розкладі

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+...+\frac{x^{n}}{n!}+...,$$

замінимо x на $-t^{2}/2$.

$$e^{-t^{2}/2}=1-\frac{t^{2}}{2!}+\frac{t^{4}}{4\cdot 2!}-\frac{t^{6}}{8\cdot 3!}+...+(-1)^{n}\frac{t^{2n}}{2^{n}\cdot n!}+...$$

Тоді

$$\int_{0}^{0,5} e^{-t^{2}/2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{0,5}\left(1-\frac{t^{2}}{2!}+\frac{t^{4}}{4\cdot 2!}-\frac{t^{6}}{8\cdot 3!}+...+(-1)^{n}\frac{t^{2n}}{2^{n}\cdot n!}+...\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\left(t-\frac{t^{3}}{3\cdot 2}+\frac{t^{5}}{5\cdot 4\cdot 2}+...+\frac{(-1)^{n}t^{2n+1}}{(2n+1)2^{n}\cdot n!}+...\right)\Bigg|_{0}^{0,5}=0,5-\frac{1}{3\cdot 2^{4}}+$$

$$+\frac{1}{3\cdot 2^{8}}-\frac{1}{7\cdot 6\cdot 2^{10}}+...$$

Оскільки отриманий ряд знакочерговий і його члени спадають за модулем, то, якщо обмежитись сумою перших трьох членів, похибка при обчисленні інтегралу не перевищить абсолютної величини четвертого члену ряду, тобто,

$$\Delta < \frac{1}{7\cdot 6\cdot 2^{10}} = \frac{1}{21\cdot 2^{11}} = \frac{1}{43005} \approx 0,000023 < 0,0001.$$

Таким чином

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0,5 - \frac{1}{3\cdot 2^4} + \frac{1}{3\cdot 2^8} + ... \approx 0,5 - 0,020833 \approx 0,4792...$$

Приклад 2. Обчислити наближено $\sqrt{37}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Представимо $\sqrt{37}$ у вигляді ряду

$$\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6\sqrt{1+\frac{1}{36}} = 6\left(1+\frac{1}{36}\right)^{1/2}.$$

Для розкладу використаємо біноміальний ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ...,$$

Він збіжний абсолютно для $|x| < 1.$ Тоді $(1+x)^{1/2} =$

$$= 1 + \frac{1/2}{1!}x + \frac{1/2(-1/2)}{2!}x^2 + \frac{1/2(-1/2)(-3/2)}{3!}x^3 + ... = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8^3} + ...$$

підставимо замість $x = 1/36$.

$$\sqrt{37} = 6\left(1+\frac{1}{36}\right)^{1/2} = 6\left(1 + \frac{1}{2\cdot 36} - \frac{1}{8\cdot 36^2} + \frac{1}{16\cdot 36^2} - ...\right) =$$

$$= 6(1 + 0,0139 - 0,0001 + 0,0000035 - ...)$$

щоб забезпечити необхідну точність в 0,001 досить врахувати лише члени ряду, абсолютна величина яких більша за $\frac{1}{6}\cdot 0,001.$

Оскільки $\frac{1}{6}\cdot 0,0000035 \approx 0,0000005,$ то нам досить залишити три перших членів ряду. Тобто

$$\sqrt{37} \approx 6(1 + 0,0139 - 0,0001) = 6\cdot 1,0138 = 6,0828 \approx 6,083.$$

Проміжні обчислення проводимо з точністю до 0,0001, а результат слід округлити до третього знаку після коми.

Ряди Фур'є.

Тригонометричним рядом Фур'є для функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ називається ряд виду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx), \tag{29}$$

коефіцієнти якого, що називаються коефіцієнтами Фур'є, обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \tag{30}$$

Теорема Діріхле. Якщо функція $f(x)$, що задана на проміжку $[-\pi;\pi]$ задовольняє на цьому проміжку умовам Діріхле, тобто:

1) неперервна за виключенням тільки скінченного числа точок розриву першого роду;

2) має скінчену кількість екстремумів,

то ряд Фур’є для цієї функції збіжний на всьому відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$, а сума цього:

а) дорівнює $f(x)$ у всіх точках неперервності даної функції. Що лежить всередині відрізка;

б) дорівнює $\dfrac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$ у всіх точках розриву;

в) дорівнює $\dfrac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$.

Для того, щоб ряд Фур’є збігався саме до цієї функції на всій числовій вісі, треба вважати її періодичною з періодом 2π.

Якщо функція $f(x)$ – парна, тобто $f(-x)=f(x)$, то коефіцієнти Фур’є обчислюють за формулами:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ \ b_n=0. \qquad (31)$$

якщо функція $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x)=-f(x)$, то

$$a_0=0,\ \ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \qquad (32)$$

Таким чином, парна функція розкладається в ряд Фур’є по косинусам, а непарні за синусами.

Якщо $f(x)$ задана на проміжку $\left[-l;l\right]$ і задовольняє на цьому проміжку умовам Діріхле, то вона може бути представлена у вигляді суми ряду Фур’є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (33)$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad (34)$$

Якщо $f(x)$ – парна, то $a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ \ b_n=0. \qquad (35)$$

Якщо $f(x)$ –непарна, то $a_0=0,\ a_n=0,$

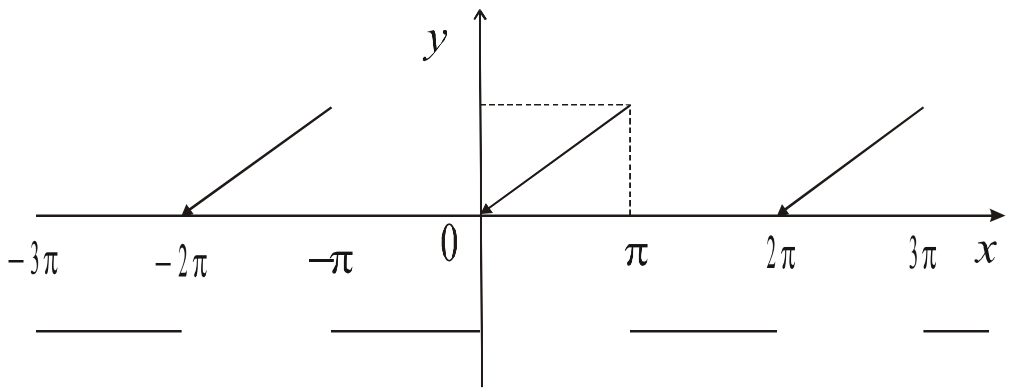
$$b_n=\frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \qquad (36)$$

Якщо $f(x)$ задано на відрізку $\left[0;l\right]$, то для розкладу в ряд Фур’є досить до визначити її на відрізку $\left[-l;0\right]$ довільним чином, а потім розкласти в ряд Фур’є, вважаючи її заданою на відрізку $\left[-l;l\right]$. Найбільш доцільно функцію довизначити так, щоб її значення знаходились в точках відрізку $\left[-l;0\right]$ з умови $f(-x)=f(x)$, або $f(-x)=-f(x)$, тобто зробити її парною або непарною.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, що задана в проміжку $\left[-\pi;\pi\right]$:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi \leqslant x \leqslant 0,\\ \dfrac{x}{3}, & 0<x\leqslant \pi.\end{cases}$$

Розв'язання. Продовжимо періодично $f(x)$ на всю числовому вісь і побудуємо її графік. Ця функція задовольняє умовам теореми Діріхле, отже її можна розкласти в ряд Фур'є.



Знайдемо коефіцієнти Фур'є для $f(x)$ в проміжку $\left[-\pi;\pi\right]$ за формулами (2)

$$a_0=\frac{1}{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(-2)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x}{3}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}(-2x)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{6}\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+2\pi+\frac{\pi^2}{6}-0\right)=2+\frac{\pi}{6}=\frac{12+\pi}{6}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\overbrace{\int\limits_{-\pi}^{0}(-2\cos nx)\,\mathrm{d}x}^{I_1}+\overbrace{\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{x}{3}\cos nx\right)\mathrm{d}x}^{I_2}$$

$$I_1=\int\limits_{-\pi}^{0}(-2\cos nx)\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{-2}{n}(\sin 0+\sin\pi)=0$$

$$I_2=\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{x}{3}\cos nx\right)\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c|c} U=x & \mathrm{d}U=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}V=\cos nx\,\mathrm{d}x & V=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{3n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{3n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0+\frac{1}{3n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{3n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{1}{3n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{(-1)^n-1}{3n^2}.$$

Тоді $a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{3n^2}=\frac{(-1)^n-1}{3n^2\pi}$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\overbrace{\int\limits_{-\pi}^{0}(-2)\sin nx\,\mathrm{d}x}^{I_3} + \overbrace{\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{x}{3}\sin nx\,\mathrm{d}x}^{I_4}\right);$$

$$I_3 = \frac{-2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi n}(\cos 0 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{2\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{n}.$$

$$I_4 = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{x}{3}\sin x\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c|c} U = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = \sin nx\,\mathrm{d}x & V = 1/n\cos nx \end{array}\right) = \frac{-x}{3n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{3n}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{-\pi}{3n}(\cos n\pi - \cos 0) + \frac{1}{3n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{3n}(-1)^n$$

Отже $b_n = \dfrac{\pi}{3n}\cdot(-1)^{n+1}$

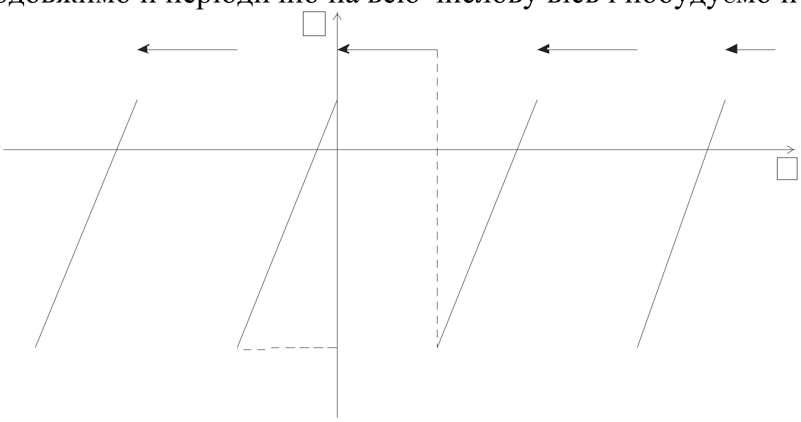
Підставляючи значення a_0, a_n, b_n в формулу (1) отримаємо

$$f(x) = \frac{2+\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{3n^2\pi}\cos nx + \frac{\pi}{3n}(-1)^{n+1}\sin nx\right)$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, що задана на відрізку $[-7;7]$:

$$f(x) = \begin{cases} 3+2x, & \text{ÿêù î} \quad -7 \text{„} \ x \text{„} \ 0 \\ 5, & \text{ÿêù î} \quad 0 < x \text{„} \ 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле. Продовжимо її періодично на всю числову вісь і побудуємо її графік.



Знайдемо коефіцієнти Фур'є для $f(x)$ в проміжку $[-7;7]$ за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\left(\int\limits_{-7}^{0}(3+2x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{7}5\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\left(0-(21+49)+35-0\right) = 9.$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\left(\underbrace{\int_{-7}^{0}(3+2x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x}_{I_1} +\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int_{0}^{7}5\cos\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x}_{I_2}\right) = \frac{1}{7}(I_1 + I_2);$$

$$I_1 = \int_{-7}^{0}(3+2x)\cos\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c|c} U = 3+2x & \mathrm{d}U = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = \cos\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x & V = \frac{7}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{7}\end{array}\right\} =$$

$$= (3+2x)\frac{7}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{7}\Bigg|_{-7}^{0} - \frac{2\cdot 7}{n\pi}\int_{-7}^{0}\sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (3+2x)\frac{7}{n\pi}\cdot(\sin 0 + \sin\pi n) - \frac{14}{n\pi}\left(-\frac{7}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{7}\Bigg|_{-7}^{0} =$$

$$= \frac{98}{n^2\pi^2}\cdot(\cos 0 + \cos\pi n) = \frac{98}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \frac{98}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1});$$

$$I_2 = \int_{0}^{7}5\cos\frac{n\pi x}{7}dx = \frac{5\cdot 7}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{7}\Bigg|_{0}^{7} = \frac{35}{n\pi}\left(\sin\frac{7n\pi}{7} -\right.$$

$$\left.-\sin 0\right) = \frac{35}{n\pi}(\sin\pi n - \sin 0) = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{7}\left(\frac{98}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1} + 0\right) = \frac{14}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1}).$$

Тепер знайдемо b_n :

$$b_n = \frac{1}{7}\left(\underbrace{\int_{-7}^{0}(3+2x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x}_{I_3} + \underbrace{\int_{0}^{7}5\cdot\sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x}_{I_4}\right) = \frac{1}{7}(I_3 + I_4);$$

$$I_3 = \int_{-7}^{0}(3+2x)\sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c|c} U = 3+2x & \mathrm{d}U = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = \sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x & V = \frac{7}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{7}\end{array}\right\} =$$

$$= (3+2x)\frac{7}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{7}\Bigg|_{-7}^{0} - \frac{14}{n\pi}\int_{-7}^{0}\cos\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{n\pi}(3\cos 0 - 11\cos n\pi) +$$

$$+\frac{98}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi n x}{7}\Bigg|_{-7}^{0} = \frac{7}{n\pi}(3-11(-1)^n) + \frac{98}{n^2\pi^2}(\sin 0 + \sin\pi n) =$$

$$= \frac{7}{n\pi}(3-11(-1)^n + 0) = \frac{7}{n\pi}(11(-1)^{n+1} + 3);$$

$$I_4 = \int_{0}^{7}5\sin\frac{n\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = 5\left(\frac{-7}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{7}\Bigg|_{0}^{7} = \frac{-35}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{-35}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{35}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right);$$

$$b_n = \frac{1}{7}(I_3 + I_4) = \frac{1}{7}\left(\frac{7}{n\pi}\left(11(-1)^{n+1} + 3\right) + \frac{35}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(11 \cdot (-1)^{n+1} + 3 + 5\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right) = \frac{1}{n\pi}\left(11 \cdot (-1)^{n+1} + 8 +\right.$$

$$\left.+5(-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(16 \cdot (-1)^{n+1} + 8\right) = \frac{8}{n\pi}\left(2(-1)^{n+1} + 1\right).$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Фур'є:

$$a_n = \frac{14}{n^2\pi^2}(1 + (-1)^{n+1}),\ b_n = \frac{8}{n\pi}(2(-1)^{n+1} + 1);$$

$$a_0 = 9.$$

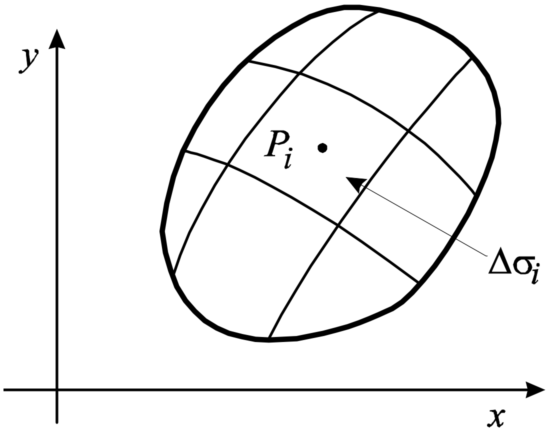
$$f(x) = \frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{14}{n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{7} + \frac{8}{n\pi}\left(2 \cdot (-1)^{n+1} + 1\right)\sin\frac{n\pi x}{7}\right).$$

II. Кратні інтеграли.

1. Подвійні та потрійні інтеграли, їх основні властивості.

Нехай в обмеженій замкненій області σ площини $x0y$ визначена функція $f(x;y)$. Розіб'ємо область σ довільно на n малих $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ так, щоб сума їх площ дорівнювала площі всієї області σ, тобто $\sigma \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$ (рис.1).

Оберемо на кожній малій $\Delta\sigma_i$ довільну точку $P_i(x_i, y_i)$



та обчислимо функцію $f(x, y)$ в цій точці. Складемо суму добутків:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + f(x_n, y_n) \cdot \sigma_n \qquad (1)$$

Сума (1) називається **інтегральною сумою** для функції $f(x, y)$ по області σ.

Нехай тепер $n \to \infty$, а кожна з малих $\Delta\sigma_i$ стягується в точку.

Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області σ називається границя інтегральної суми

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} (x, y)\mathrm{d}\sigma\ , \qquad (2)$$

де $\mathrm{d}\sigma$ – диференціал (елемент) площі.

Потрійний інтеграл вводиться аналогічно подвійному. Нехай неперервна функція трьох змінних $f(x,y,z)$ визначена в обмеженій замкненій області V. Розіб’ємо область V довільно на n малих областей $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots \Delta V_n$ так, щоб сума їх об’ємів дорівнювала об’єму всієї області V, тобто $V = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Delta V_i$. Обравши в кожній малій області довільну точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ та обчисливши $f(x_i, y_i, z_i)$, складаємо інтегральну суму для функції $f(x,y,z)$ по області V.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = f(x_1, y_1, z_1)\Delta V_1 + \ldots + f(x_n, y_n, z_n)\Delta V_n \qquad (3)$$

Нехай тепер $n \to \infty$, а кожна з малих областей ΔV_i стягується в точку.

Потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області V називається границя інтегральної суми

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V\ , \qquad (4)$$

де $\mathrm{d}V$ –диференціал об’єму.

Основні властивості подвійних та потрійних інтегралів аналогічні.

1. Сталий множник K можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint\limits_{\sigma} K \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = K \cdot \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ ; \qquad (5)$$

$$\iiint\limits_V K \cdot f(x,y.z)\mathrm{d}V = K \cdot \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V\ . \qquad (5’)$$

2. Інтеграл від суми функції дорівнює сумі інтегралів доданків:

$$\iint\limits_{\sigma} \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right) \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\sigma} f_1(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\sigma} f_2(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$
$$\iiint\limits_V \left(f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)\right) \mathrm{d}V = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_V f_2(x,y.z)\mathrm{d}V.$$
(6)

3. Якщо область інтегрування розбито на декілька частин (наприклад $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,\quad V = V_1 + V_2$), то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_{V_2} f(x,y.z)\mathrm{d}V. \qquad (7)$$

4. Якщо в області інтегрування $f_1(x,y) \ldots f_2(x,y)$ (або $f_1(x,y,z) \ldots f_2(x,y,z)$), то

$$\iint\limits_{\sigma} f_1(x,y)\mathrm{d}\sigma \ldots \iint\limits_{\sigma} f_2(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$
$$\iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}V \ldots \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}V \qquad (8)$$

5. Нехай m та M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x,y)$ в області σ. Тоді

$$mS \le \iiint\limits_{\sigma} (x,y)\mathrm{d}\sigma \le MS, \tag{9}$$

де S – площа області σ.

Для потрійного інтеграла

$$mV \le \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}V \le MV, \tag{9'}$$

де V – об'єм області V.

6. Теорема про середнє значення функції в області записується так:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = S \cdot f(x_0,y_0); \tag{10}$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z) = V \cdot f(x_0,y_0,z_0), \tag{10'}$$

де $f(x_0,y_0)$ – деяке значення функції $f(x,y)$ в області σ ($f(x_0,y_0,z_0)$ в області V).

2. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів в декартових координатах

Диференціал площі в декартових координатах $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Тому подвійний інтеграл дорівнює

$$I = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Існують два основних види області інтегрування σ.

1. Нехай область σ правильна в напрямку всієї Oy. тобто обмежена лініями $x = a, x = b (a < b),\ y = f_1(x),\ y = f_2(x)$

Тоді

$$I = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\ . \tag{12}$$

Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл $\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$, де x вважається сталою.

2. Якщо область σ правильна в напрямку всієї Oy, тобто обмежена лініями $y = c,\ y = d\ (c < d), x = \phi_1(y), x = \phi_2(y)$ (рис.3), то

$$I = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{13}$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла $\int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ змінна y вважається сталою.

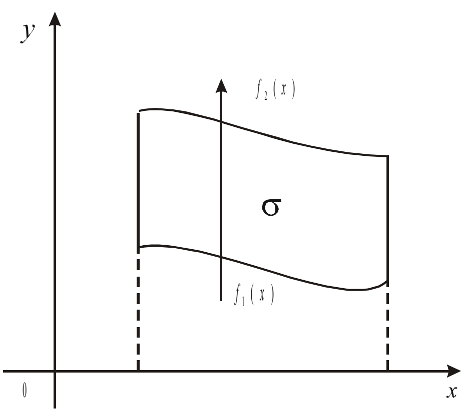


Рис.2

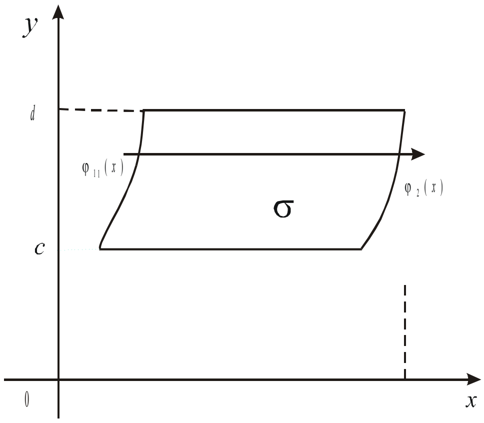


Рис.3

Таким чином, обчислення подвійного інтеграла в обох випадках зводиться до повторного інтегрування. Перехід від (12) до (13), або навпаки називається **зміною порядку інтегрування**.

Диференціал об'єму в декартових координатах $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, тому потрійний інтеграл можна записати

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \qquad (14)$$

Нехай область V обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x,y)$, згори – поверхнею $z = z_2(x,y)\big(z_1(x,y) \le z_2(x,y)\big)$; область V проектується на площину xOy в область σ, правильну в напрямку вісі Oy. Тоді

$$I = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad (15)$$

Якщо область V проектується на площину $x0y$ в область σ, правильну в напрямку вісі Ox то

$$I = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \mathrm{d}x \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\,. \qquad (16)$$

Таким чином. обчислювання інтегралу зводиться до триразового інтегрування. В потрійному інтегралі порядок інтегрування може бути іншим.

Приклад 1. Побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування: $I = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{2+x} f(x,y)\mathrm{d}y\,.$

Розв'язання. Область інтегрування σ обмежена лініями $x=-2,\ x=\sqrt{4-x},\ y=2+x$ (рис.4). Представимо область σ у вигляді двох областей $\sigma_1+\sigma_2$. Області обмежені зліва та справа σ_1–дугами кола $x=\pm\sqrt{4-y^2}\,(-2 \le y<0)$, а область σ_2 – прямими $x=y-2$ та $x=2\ (0 \le y \le 4)$.

Тоді $I = \int\limits_{-2}^{0}\mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^4 \mathrm{d}y \int\limits_{y-2}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$

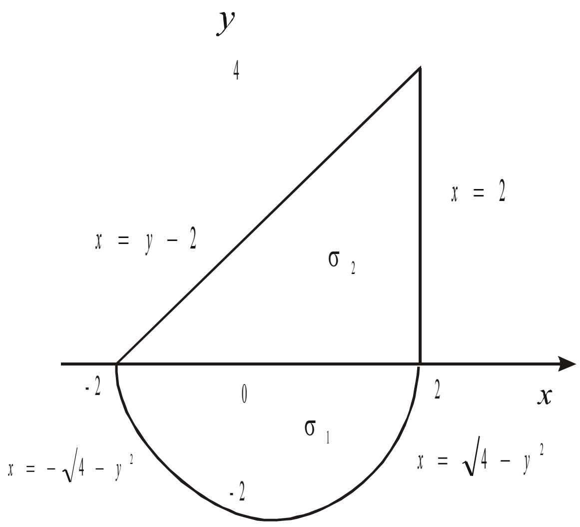


Рис.4

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma}\frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

Якщо область σ обмежена прямими $x=2\,,y=x$ та гіперболою $xy=1$

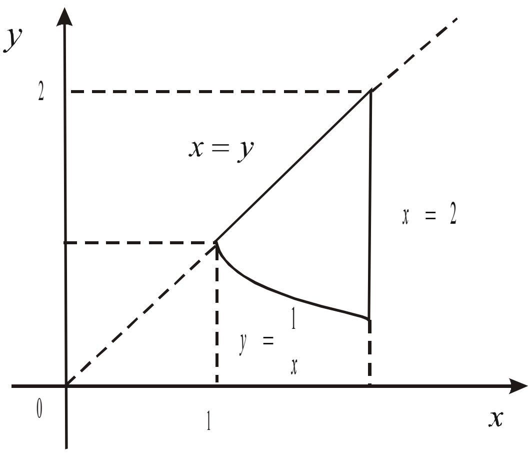


Рис.5

Розв'язання. Область σ зображено на рис.5. Зведемо подвійний інтеграл до повторного:

$$I=\int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y=\int\limits_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int\limits_{1}^{2}x^2\left(\frac{1}{-y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x}\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{1}^{2}x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}=2\frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_{V}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ якщо область V обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

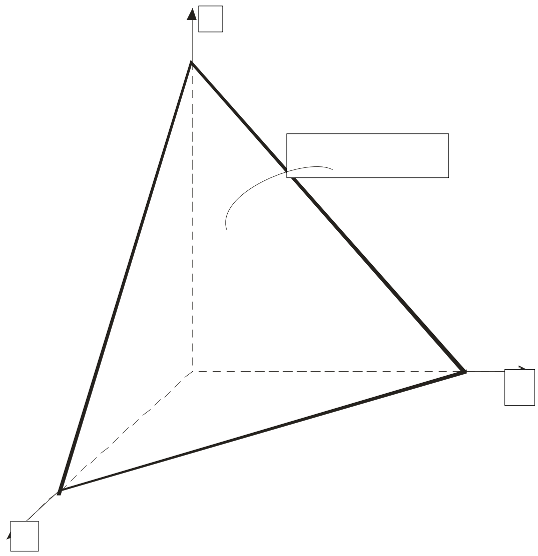


Рис.6

Розв'язання. Зобразимо область V (рис. 6) та представимо потрійний інтеграл у вигляді трикратного

$$I = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Знаходимо інтеграли: внутрішній

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y = \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2};$$

зовнішній $I = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$

Застосування кратних інтегралів для обчислення об'ємів та площ.

1. Об'єм. Нехай задано циліндричне тіло, обмежене поверхнею $z = f(x,y) > 0$, циліндричною поверхнею з висотою H та твірними, паралельними до вісі Oz та областю σ в площині xOy. Його об'єм

$$V = \iint_\sigma f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{20}$$

Об'єм тіла, що займає в просторі область V

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{21}$$

2. Площі. Площа плоскої фігури, обмеженої областю σ в декартових координатах

$$S = \iint_\sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{22}$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах

$$S = \iint_\sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{23}$$

Приклад 5. За допомогою подвійного інтегралу обчислити в декартових координатах площу плоскої фігури. Побудувати область інтегрування. Фігура обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = x$, $x = 2$.

Розв'язання. Знаходимо точки перетину кривих. Для цього розв'язуємо системи

$$\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = -x. \end{cases} \cup \begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = 2. \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x; \\ x = 2. \end{cases}$$

Одержуємо: $O(0,0),\ A(2,0),\ B(2,-2)$

Шукану область інтегрування зобразимо на рис. 7. Із рисунка бачимо, що внутрішнє інтегрування краще проводити по y.

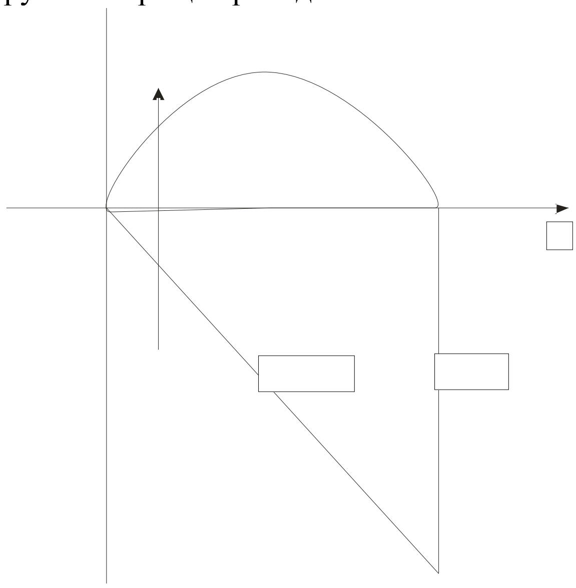


Рис. 7

Тому:

$$S = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}y = \int_0^2 y\Big|_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \left(2x - x^2 + x\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 3 \cdot 2 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \textit{ кв.од.}$$

Приклад.6. За допомогою потрійного інтегралу обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ координатними площинами та площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого потрібно обчислити, зображено на рис. 8. Воно являє собою циліндричне тіло, обмежене згори поверхнею параболоїда $z = x^2 + y^2$, знизу – площиною xOy, спереду – площиною $x + y = 1,$ ліворуч – площиною xOz $(y = 0)$, позаду – площиною yOz $(x = 0)$. Областю інтегрування D на площині xOy є прямокутний трикутник (рис.8).

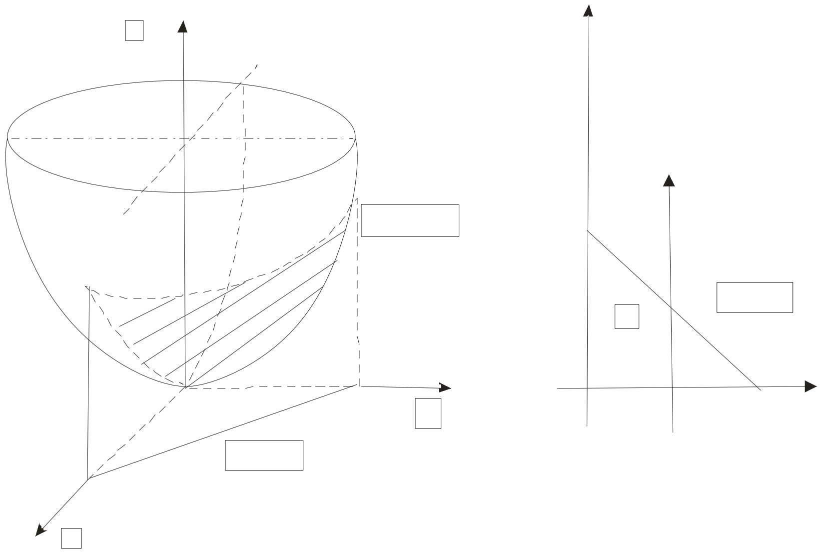


Рис.8

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{x^2+y^2-1} \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} z|_0^{x^2+y^2-1} \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right)\Bigg|_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{12}(1-x)^4\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

III. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Криволінійні інтеграли першого типу.

Розглянемо просторову криву L, обмежену точками A та B, та визначену на ній неперервну функцію $u = f(M) = f(x, y, z)$, де $M(x, y, z)$ – точка кривої (рис.1). Дугу AB розіб'ємо точками $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на n елементарних дуг: $M_{i-1}M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \ldots, \Delta\ell_n$.

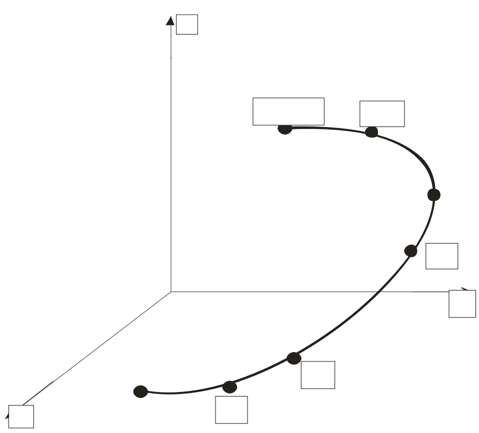


Рис.1

На кожній з елементарних дуг $\breve{M}_{i-1}\breve{M}_i$ візьмемо довільну т. $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і складемо суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\ell_i, \qquad (1)$$

яка називається **інтегральною сумою** по кривій L функції $f(x, y, z)$.

Означення. *Криволінійними інтегралами першого типу* від функції $f(x, y, z)$ по кривій L називається границя інтегральної суми (1) при $n \to \infty$ та $\max \Delta\ell_i \to 0$:

$$\int_L f(x, y, z)\,\mathrm{d}l = \lim_{\max \Delta\ell_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\ell_i \qquad (2)$$

Якщо крива L повністю належить площині xOy, то функція $f(M)$ від координати z не залежить. Тому за означенням

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}l = \lim_{\max \Delta\ell_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta\ell_i \qquad (3)$$

Якщо підінтегральну функцію $f = f(M) > 0$ розглядати як лінійну густину кривої L, то криволінійний інтеграл першого типу є маса кривої L.

2. Обчислення криволінійних інтегралів першого типу

1. Якщо L задана параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \qquad (4)$$

то

$$\int_L f(x, y, z)\,\mathrm{d}l = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \qquad (5)$$

2. Якщо крива L належить площині xOy, то

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}l = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (6)$$

3. Для плоскої кривої, заданої рівнянням $y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,

маємо $\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\mathrm{d}x,$ тому

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}l = \int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x. \qquad (7)$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L xy\,\mathrm{d}l$, де L – дуга кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ обмежена точками, для яких $t = 0;\ t = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Знаходимо $x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t, z' = b,$

$\mathrm{d}l = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t.$

Отже,

$$\int_L xy\,\mathrm{d}l = \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\sin t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_L x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої $y=\ln x$ між точками $x=1$ та $x=4$.

Розв'язання. Знайдемо $y'=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Тоді

$$\int_L x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}l = \int_1^4 x\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^4\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left.\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^4 = 4-1+\frac{4^3}{3}-\frac{1}{3}=24.$$

2. Криволінійні інтеграли другого типу

Нехай вздовж кривої (AB) задана деяка функція $f(x,y)$ (рис.2).

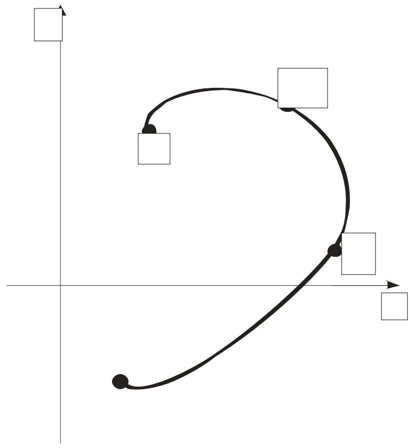


Рис.2

Розіб'ємо криву (AB) на n елементарних дуг. Візьмемо на кривій A_iA_{i-1} по довільній точці $M_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ та обчислимо в ній значення функції $f(M_i)=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$. Помножимо значення функції на величину проекції цієї дуги. Наприклад, на вісі Ox, тобто на $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$. Складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta x_i. \tag{8}$$

Означення. Криволінійними інтегралом другого типу по координаті x від функції $f(x,y)$ називається границя інтегральної суми (8) при $n\to\infty$ та $\max\Delta x_i\to 0$:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta x_i. \qquad (9)$$

Аналогічно визнається криволінійний інтеграл другого типу по координаті y:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta y_i. \qquad (10)$$

Якщо вздовж кривої (AB) визначені дві функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$, а також існують інтеграли $\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}x$ та $\int\limits_{(AB)} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$,то їх суму називають криволінійним інтегралом другого типу по координатах.

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{(AB)} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (11)$$

Аналогічно можна ввести поняття криволінійного інтеграла другого типу, що буде розповсюджуватись на просторову криву (AB), тоді він буде мати вигляд

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z. \qquad (12)$$

Якщо $\vec{F} = \{P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\}$ – змінна сила, під дією якої точка її прикладення переміщується вздовж кривої (AB), то криволінійний інтеграл другого типу є робота змінної сили вздовж шляху інтегрування.

4.Обчислення криволінійних інтегралів другого типу

1.Якщо (AB) задана параметричними рівняннями
$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ \ (t_1 \le t \le t_2),$
то $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt,\ \ dz = z'(t)dt.$

Отже $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$

$$= \int\limits_{(AB)} P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \\ + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt. \qquad (13)$$

2. Якщо крива (AB) належить площині $x0y$,то

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\ = \int\limits_{(AB)} \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad (14)$$

3. Для плоскої кривої, заданої рівнянням $y = y(x)(a \leq x \leq b)$, маємо $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$, тому

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \big(P(x,y(x) + Q(x,y(x)y'(x)\big)\,\mathrm{d}x. \qquad (15)$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл
$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y.$$
за таким и кривими, що з'єднують точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$:
а) пряма $y=x$ б) парабола $y=x^2$ в) кубічна парабола $y=x^3$.

Розв'язання.
а) $y=x,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x;$
$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(x^2+x^2+2xx\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3};$$
б) $y=x^2,\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x;$
$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(x^2+x^4+4x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3};$$
в) $y=x^3,\mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x;$
$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(x^2+x^6+6x^6\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_{AB}x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+(x+y-1)\,\mathrm{d}z,$ де (AB)– відрізок прямої від точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,3,4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої (AB):
$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3},$ або $y=2x-1,\ z=3x-2$.
Знаходимо $\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}z=3\,\mathrm{d}x.$ Отже
$$\int\limits_{AB}xdx+ydy+(x+y-1)\,\mathrm{d}z=\int\limits_1^2\left(x+(2x-1)\cdot2+(x+2x-2)\cdot3\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\int\limits_1^2(14x-8)\,\mathrm{d}x=\left(7x^2-8x\right)\Big|_1^2=7(4-1)-8(2-1)=13.$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(AB)}y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y,$ де $(AB):\ x=4\cos t,\ y=3\sin t, t\in[0,\pi]$.

Розв'язання. Знаходимо $\mathrm{d}x=-4\sin t\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y=3\cos t\,\mathrm{d}t.$

Отже $\int\limits_{(AB)}y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int\limits_0^\pi\left(9\sin^2t\cdot(-4\sin t)+16\cos^2t\cdot3\cos t\right)\mathrm{d}t=$
$$=\int\limits_0^\pi\left(-36\sin^3t+48\cos^3t\right)\mathrm{d}t=-36\int\limits_0^\pi\sin^3t\,\mathrm{d}t+48\int\limits_0^\pi\cos^3t\,\mathrm{d}t=$$
$$=36I_1+48I_2=-36\cdot\frac{4}{3}+48\cdot0=-48.$$
$$I_1=\int\limits_0^\pi\sin^3t\,\mathrm{d}t=-\int\limits_0^\pi\left(1-\cos^2t\right)\mathrm{d}(\cos t)=-\left(\cos t-\frac{\cos^3t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$= 1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3};$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}(\sin t)=\left.\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right|_0^{\pi}=0$$

Завдання для самостійного розв`язку

Тема "Ряди"

1-10. Дослідити ряди на збіжність:

1.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{10n+3}$;

2.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{100n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{6n^2-1}$;

3.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+2}$;

4.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{4n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{2n^2+1}$;

5.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+30}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$;

6.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{200n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{27n^3+1}}$;

7.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{n+3}$;

8.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{7n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{n+5}$;

9.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4n+5}{n+40}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2-1}$;

10.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{\sqrt{25n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n+1}}{5n-2}$.

11-20. Дослідити ряди на збіжність:

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{2^n\sqrt{n+1}}$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{3n^2+1}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n\cdot 3^n}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{(2n)!}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100n^2+1}$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2^{2n}\cdot\sqrt{n}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+1)\cdot n^2}{5^n}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{(2n+1)!}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{10n^2+1}$.

21-30. а) б). Встановити абсолютну чи умовну збіжність знакозмінних рядів:

21.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^2}{(4n^2+1)^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n\sqrt{n+1}}{3n}$;

22.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+3}{2^n\cdot\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3\sqrt{4n+1}}$;

23.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n^4+1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{2n^4+1}}$;

24.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{3^n(n+3)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2}{n^3+8}$;

25.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n}{5n^3+2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{7n^2+1}}$;

26.а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2}{5^{n+1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n^2-1}$;

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{(n+1)\cdot 3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$;

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+3)^3}{2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$;

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n^2+3}$;

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(3n-2)^3}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

31-40. Знайти область збіжності степеневого ряду

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot x^n}{5n+3}$;

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+3}}{n+1}\ x^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{5n^2+1}x^n$;

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3n+4}\ x^n$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)^3}x^n$;

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+4)\cdot 3^n}\ x^n$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{\sqrt{n^2+3}}x^n$;

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(3n+1)^3}\ x^n$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^{n+1}}x^n$;

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{\sqrt{n+4}}\ x^{n+1}$

41-50. Скориставшись відповідним рядом, знайти:

а) наближене числове значення з вказаною точністю α;

б) наближене значення інтегралу з вказаною точністю β.

41. а) $\sqrt[4]{19}, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}\,\mathrm{d}x, \ \beta = 10^{-4}$.

42. а) $\sqrt[3]{e}, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{0,2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}, \ \beta = 10^{-4}$.

43. а) $\sin 4^\circ, \quad \alpha = 10^{-4}$; б) $\int\limits_0^{0,5} x \cdot \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x, \ \beta = 10^{-4}$.

44. а) $\sqrt[5]{246}, \quad \alpha = 10^{-2}$; б) $\int\limits_0^{0,5} \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-3}$.

45. а) $\sqrt{34}, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{1/8} \frac{\sin 4x}{x}\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-4}$.

46. а) $e^{-2}, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-\cos 3x}{x}\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-3}$.

47. а) $-\cos 2^\circ, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-4}$.

48. а) $\sqrt[4]{84}, \quad \alpha = 10^{-2}$; б) $\int\limits_0^{0,2} \sin(4x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-4}$.

49. а) $\frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \alpha = 10^{-3}$; б) $\int\limits_0^{0,2} \left(27+\sin x^3\right)\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-3}$.

50. а) $\sqrt[7]{132}, \quad \alpha = 10^{-2}$; б) $\int\limits_0^{0,2} e^{-x^2/4}\,\mathrm{d}x, \quad \beta = 10^{-4}$.

51-60. Розкласти в ряд Фур`є задану функцію на вказаному проміжку:

а) на проміжку $[-\pi, \pi]$,

б) на проміжку $[-l, l]$

51. а) $f(x) = \begin{cases} 2+x, & -\pi \le x \le 0, \\ 4, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}+4, & -3 \le x < 0; \\ 6, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

52. а) $f(x) = \begin{cases} -10, & -\pi \le x \le 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3, & -10 \le x < 0; \\ \frac{x}{2}-2, & 0 \le x \le 10. \end{cases}$

53. а) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0, \\ 8, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3+\frac{x}{4}, & -4 \le x < 0; \\ 7, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$

54. а) $f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi \le x \le 0, \\ 3x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 5, & -9 \le x < 0; \\ 3x+5, & 0 \le x \le 9. \end{cases}$

55. а) $f(x) = \begin{cases} 4+x, & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}+3, & -8 \le x < 0; \\ 2, & 0 \le x \le 8. \end{cases}$

56. а) $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi \le x \le 0,\\ 4x, & 0<x\le \pi .\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-2, & -7\le x<0;\\ \dfrac{x}{7}+4, & 0\le x\le 7 .\end{cases}$

57. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{5}, & -\pi \le x \le 0,\\ 7, & 0<x\le \pi .\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -3\le x<0;\\ 4, & 0\le x\le 3 .\end{cases}$

58. а) $f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi \le x \le 0,\\ x+2, & 0<x\le \pi .\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-4, & -6\le x<0;\\ 3x+1, & 0\le x\le 6 .\end{cases}$

59. а) $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi \le x \le 0,\\ -1, & 0<x\le \pi .\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{5}x, & -4\le x<0;\\ 5, & 0\le x\le 4 .\end{cases}$

60. а) $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi \le x \le 0,\\ \dfrac{x}{7}, & 0<x\le \pi .\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-3, & -10\le x<0;\\ 6, & 0\le x\le 10 .\end{cases}$

Тема. Кратні та криволінійні інтеграли

61-70. Побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування:

61. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{-4-4y}^{-8y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x;$ 62. $\int\limits_{-10}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{-8x^3}^{6-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$

63. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$ 64. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$

65. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-2x-6}^{8x^3} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$ 66. $\int\limits_{0}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$

67. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$ 68. $\int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$

69. $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$ 70. $\int\limits_{0}^{3} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y;$

71-80. За допомогою подвійного інтеграла обчислити в декартових координатах площу фігури обмеженої лініями:

71. $y=x^2-4x,\ x+y-4=0.$ 72. $y=x^2+4, \quad y=x+4.$

73. $y=1-x, \quad x=-3.$ 74. $y=x^2-5x, \quad 3x+2-y=0.$

75. $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x.$ 76. $y=x^2+4x, \quad y=0.$

77. $y=4x^2+5x, \quad y=2x+1.$ 78. $y=-9x-2, \quad y=x^2-2x+4.$

79. $y=2x+7, \quad y=6x^2-9x-8.$ 80. $y=x^2-3x+2, \quad y=3x-3.$

81-90. Перейти до полярних координат і за допомогою подвійного інтеграла обчислити площу області, яка обмежена заданою лінією

81. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2.$

82. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4x^2.$

83. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2.$

84. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(7x^2+5y^2\right).$

85. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(5x^3+3y^2\right).$

86. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(2x^2+3y^2\right).$

87. $x^4=a^2\left(x^3-y^2\right).$

88. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right).$

89. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-4y^2\right).$

90. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2.$

91-100.Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об`єм тіла, що обмежене вказаними поверхнями. Зробити рисунок тіла та його проекції на площину:

91. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad z=4-y^2,\quad 3x+4y=12.$

92. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 3x+2z=6,\quad 3x+4y=12.$

93. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 6x+3y+27=6,\quad y=1.$

94. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad z=9-x^2,\quad x+2y=4.$

95. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 3x+2z=6,\quad 2x+3y=6.$

96. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad z=1-y^2,\quad 2x+3y=6.$

97. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 2x+z=2,\quad 2x+3y=6.$

98. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 3x+2y+3z=6,\quad y=2.$

99. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad z=4-x^2,\quad x+y=3.$

100. $x=0,\ y=0,\quad z=0,\quad 2x+z=4,\quad x+2y=4.$

101-110.Обчислити криволінійні інтеграли першого типу.

101. $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+y^2}},$ де L – відрізок прямої $x-2y=4,$ що з'єднує точки $A(0,-2)$ та $B(4,0).$

102. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої
$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases},\quad (0\le t\le 2\pi).$$

103. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x}}\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої $y^2=\frac{4}{9}x^3$ від точки $A(3,2\sqrt{3})$ до точки $B(8,\frac{32}{3}\sqrt{2}).$

104. $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}l}{x^2+y^2+z^2},$ де L – дуга кривої $x=2\cos t,$ $y=2\sin t,\ z=3t\ (0\le t\le \frac{\pi}{2}).$

105. $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}l}{x-y},$ де L – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2,$ що з'єднує точки $A(0,-2)$ та $B(4,0).$

106. $\int\limits_L z\,\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої $x = t\cos t,$ $y = t\sin t,\ z = t\ (0 \leq t \leq \pi).$

107. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t)\quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

108. $\int\limits_L xy\,\mathrm{d}l,$ де L – контур прямокутника з вершинами $A(0,0),\ B(4,0),\ C(4,2),\ D(0,2).$

109. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}l,$ де L – дуга кривої $x = a\cos t,$ $y = a\sin t,\ (0 \leq t \leq \pi).$

110. $\int\limits_L \dfrac{\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}},$ де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ та $A(2,4).$

111-120.Обчислити криволінійні інтеграли другого типу .

111. $\int\limits_{AB} (1 + x)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$ де AB – дуга кривої $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,$ $A(0,2),\ B(2,0).$

112. $\int\limits_{AB} x\,\mathrm{d}y - (y - 1)\mathrm{d}x,$ де AB – дуга кривої $x = \cos t,\ y = \sin t,$ $A(1,0),\ B(0,1).$

113. $\int\limits_{AB} xy\,\mathrm{d}x + \dfrac{y}{x}\mathrm{d}y,$ де AB – ламана $ACB,$ що з'єднує точки $A(1,2),\ C(5,2),\ B(5,4).$

114. $\int\limits_{AB} \left(\dfrac{x}{y} - 2\right)\mathrm{d}x - x^2y\,\mathrm{d}y,$ де AB – ламана $ACB,$ що з`єднує точки $A(2,1),\ C(2,4),\ B(3,4).$

115. $\int\limits_{AB} (x - 2y)\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y}\mathrm{d}y,$ де AB – дуга кривої $y = x^3,\ A(1,1),\ B(2,4).$

116. $\int\limits_{AB} xy\,\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y,$ де AB – дуга кривої $y = \dfrac{1}{x},$ $A\left(\dfrac{1}{2}, 2\right),\ B\left(3, \dfrac{1}{3}\right).$

117. $\int\limits_{AB} \left(\dfrac{x}{y} + 1\right)\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y,$ де AB – ламана $ACB,$ що з'єднує точки $A(1,4),\ C(1,2),\ B(5,2).$

118. $\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}x - \left(\frac{y}{x} - 2\right)\mathrm{d}y,$ де AB – ламана $ACB,$ що з`єднує точки $A(1,5),\ \ C(4,5),\ \ B(4,2).$

119. $\int\limits_{AB} y^2\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y,$ де AB – дуга кривої $y = \cos x,$ $A(0,1),\ B\left(\frac{\pi}{2},0\right).$

120. $\int\limits_{AB} \frac{y}{x}\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y,$ де AB – дуга кривої $y = x^3,$ $A(-1,-1),\ B(2,8).$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С., Никольский С.М., Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. – М., 1981.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П., Краткий курс высшей математики. –М. 1975.
3. Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2, –М., 1985.
4. Щипачов В.С., Высшая математика. – М., 1985.
5. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. М., Шумов А.С., Краткий курс высшей математики. Т. 2, – М., 1978.
6. Данко П. Е., Попов А.Г. , Кожевникова Н.С., Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2, – М., 1980.
7. Запорожец Г.И., Руководство к решению задач по математическому анализу. – М., 1966.
8. Минорский В.П., Сборник задач по высшей математике. – М., 1978.
9. Подольский В.А., Суходский А.Н., Сборник задач по математике. М., 1978.