Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, \quad \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), \quad \text{при} \quad x < 0 \end{cases}.$

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}; \quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}.$

Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, \quad \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), \quad \text{при} \quad x < 0 \end{cases}.$

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}; \quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}.$

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}.$

Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

Логарифмічна похідна

Розгляньмо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, \quad \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), \quad \text{при} \quad x < 0 \end{cases}.$

Маємо: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}; \quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}.$

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}.$

З огляду на отриманий результат, можна записати

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

Логарифмічне диференціювання

Логарифмічне диференціювання: спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Логарифмічне диференціювання: спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b;$$

Властивості натурального логарифма

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b;$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b;$$

$$\ln a^b = b \ln a.$$

Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

Розв'язання

- Візьмемо натуральний логарифм від обох частин виразу для f. Маємо:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} =$$

Логарифмічне диференціювання: Приклад

Знайти похідну від функції $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

Розв'язання

- Візьмемо натуральний логарифм від обох частин виразу для f. Маємо:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2-1).$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за x:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за x:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x.$$

- Користуємося формулою логарифмічного диференцювання:

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) =$$

- Диференціюємо обидві частини виразу за x:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{4}(\ln(x^2+1))' - \frac{1}{4}(\ln(x^2-1))' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x.$$

- Користуємося формулою логарифмічного диференцювання:

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \left[\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2-1)} \right].$$

Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.

Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці x, $f(x) > 0$.

Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці x, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Похідна показниково-степеневої функції

- Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.
- Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці x, $f(x) > 0$.
- Знайдемо похідну функції $y = u^v$.

Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

Розв'язування

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x \cos x$.

Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

Розв'язування

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x \cos x$. Похідні цих функцій:

$$u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x.$$

Похідна показниково-степеневої функції: Приклад

Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

Розв'язування

Маємо: $u = x^2 + 3x; v = x \cos x$. Похідні цих функцій:

$$u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x.$$

За отриманою вище формулою

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) +$$

$$+ (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

Функції, які задано неявним чином

Означення

Якщо змінна x і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

то функцію $y(x)$ називають *заданою неявним чином.*

Функції, які задано неявним чином

Означення

Якщо змінна x і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням
$$F(x, y) = 0,$$
то функцію $y(x)$ називають *заданою неявним чином.*

Приклад

$$y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

Диференціювання функції, заданої неявним чином

Диференціювання функції, заданої неявним чином, виконують у два кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.

Диференціювання функції, заданої неявним чином

Диференціювання функції, заданої неявним чином, виконують у два кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.

Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції y, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції y, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

Розв'язування

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції y, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

Розв'язування

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Звідки

$$y'(3y^2 - 3x\cos xy) = 3y\cos xy - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Диференціювання функції, заданої неявним чином: Приклад

Знайти похідну функції y, якщо $y^3 - 3\sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$.

Розв'язування

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$3y^2 \cdot y' - 3\cos xy \cdot (y + xy') + \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Звідки

$$y'(3y^2 - 3x\cos xy) = 3y\cos xy - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тому

$$y' = \frac{3y\cos xy - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(3y^2 - 3x\cos xy)}.$$

Домашнє завдання

Знайти похідні таких функцій:

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{x+12}}{\sqrt[4]{3x^2-1}}$;
2. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)}$;
3. $f(x) = (3x^2-1)^{\ln(4-x)}$.

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$\cos y - 3y^2x + 4e^{3x} = 0.$$