4.3. Границя функції. Основні теореми. Важливі границі. Порівняння нескінченно малих

Число A називається границею функції $f(x)$ в точці a, якщо вона визначена в деякому околі a, тобто в деякому інтервалі (c, d), де $c < a < d$, за винятком, можливо, самої точки a, і якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує залежне від нього $\delta > 0$ таке, що для всіх x, що задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Той факт, що A є границею f в точці a записують таким чином:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Інше означення границі функції в точці може бути сформульоване в термінах границь послідовностей.

Число A називається границею функції $f(x)$ в точці a, якщо функція визначена в деякому околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a, і якщо границя послідовності $\{f(x_n)\}$ існує і дорівнює A, яка б не була послідовність $\{x_n\}$, що збігається до a і така, що $x_n \neq a$ для всіх n. Таким чином,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A$$

Тут вважається, як і в інших подібних випадках, що збіжна до a змінна x_n пробігає всі значення, для яких $f(x)$ визначена.

Наведені означення еквівалентні. Дійсно, нехай функція f має границю в розумінні першого означення, і нехай задана змінна x_n, що не дорівнює при будь-якому n числу a і така, що прямує до a. Задамо ε і підберемо δ так, як це обумовлено в першому означенні. Потім підберемо натуральне n_0 так, щоб $|x_n - a| < \delta$ для $n > n_0$. Але тоді

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ для } n > n_0,$$

а це означає, що послідовність чисел $\{f(x_n)\}$ прямує до A. Оскільки ця властивість виконується для будь-якої збіжної до a послідовності $\{x_n\}$, аби лише $x_n \neq a$ і всі x_n належали області визначення функції, то доведено, що з першого означення границі випливає друге.

Навпаки, нехай функція $f(x)$ має границю в розумінні другого означення. Припустимо, що при цьому вона не має границі в розумінні першого означення. Це означає, що існує хоча б одне ε, яке ми позначимо ε_0, для якого не можна підібрати необхідне δ, тобто для будь-якого δ серед x, що задовольняють співвідношенню $0 < |x - a| < \delta$ повинно знайтись хоча б одне $x = x(\delta)$ таке, що для нього $|f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon_0$.

В якості δ ми обираємо всі числа вигляду $\delta = 1/k$ $(k = 1, 2, ...)$ і для кожного з них знаходимо точку $x_k = x(\delta)$, для якої

$$0 < |x_k - a| < 1/k \quad (x_k \neq a) \text{ і}$$

$$|f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, ...).$$

З цих співвідношень видно, що $x_k \to a$ $(x_k \neq a)$, в той час як $f(x_k)$ не прямує до числа A. Таким чином, припущення, що з другого означення границі не випливає перше, приводить до протиріччя.

Еквівалентність двох означень доведена.

Вираз *границя функції в точці* a часто заміняють виразом *границя функції при* x, *що прямує до* a або, коротше, *границя функції при* $x \to a$.

Приклад 3.1. Розглянемо функцію $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Вона визначена для всіх $x \neq 2$. Спробуємо знайти її границю при $x \to 2$. Для будь-якого $x \neq 2$ $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а оскільки при визначенні границі при $x \to 2$ зовсім не приймаються до уваги значення $f(x)$ в точці 2, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2).$$

Ця рівність записана в тому розумінні, що якщо одна з цих границь існує, то існує і інша і дорівнює їй. Таким чином, замість того, щоб обчислювати границю більш складної функції $(x^2 - 4)/(x - 2)$, достатньо обчислити границю більш простої функції $x + 2$. Ця остання при $x \to 2$, очевидно рівна 4. Адже якщо підставити в $x + 2$ замість x довільну змінну x_n, яка прямує до 2, то незалежно від способу прямування її до 2

$$\lim_{x_n \to 2} (x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Обчислення, пов’язані зі знаходженням даної границі, зазвичай розміщаються таким чином:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4.$$

Підкреслимо, що функції $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ і $\varphi(x) = x + 2$ є різними функціями. Перша з них визначена для $x \neq 2$, в той час як друга визначена для всіх x. Одначе при обчисленні границі функції при $x \to 2$ нас зовсім не цікавить, визначені чи не визначені ці функції в самій точці $x = 2$, і оскільки $f(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Приклад 3.2. Функція $\sin(1/x)$ визначена для всіх значень $x \neq 0$ і є непарною. Вона визначена, таким чином, в околі точки $x = 0$, за винятками самої точки $x = 0$. Ця функція не має границі при $x \to 0$, тому що послідовність відмінних від нуля значень $x_k = 2/\pi(2k + 1)$ $(k = 0, 1, ...)$ прямує до нуля і в той же час $f(x_k) = (-1)^k$ не прямує при $k \to \infty$ до жодної границі.

Введемо наступне означення.

> Число A є *границею функції* $f(x)$ *при* x, *що прямує до нескінченності*, якщо $f(x)$ визначена для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > K$ при деякому $K > 0$, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти число $M > K$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > M$.
>
> $$A = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Можна довести, що це означення еквівалентне такому

Число A є *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, якщо функція $f(x)$ визначена для всіх x таких, що $|x| > M$ при деякому M і
$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$
для будь-якої збіжної до ∞ послідовності $\{x_n\}$.

Доведення еквівалентності цих двох означень проводиться за тією ж схемою, що і в розглянутому раніше випадку границі $f(x)$ в скінченній точці a.

Взагалі, багато властивостей границь $f(x)$ при $x \to a$, де a – скінченне число, і при $x \to \infty$ є аналогічними. Можна наводити ці властивості єдиним чином, так що викладення буде одночасно відноситись як до випадку $x \to a$, де a – скінченне число, так і до випадку $x \to \infty$. Для цього під літерою a необхідно розуміти або число (скінченне), або символ ∞. Якщо a є числом, то під околом точки a розуміється інтервал (c, d), що містить в собі точку a. Таким чином:

Околом (*скінченної*) *точки* a називається множина всіх точок x, що задовольняють нерівностям $c < x < d$.

Якщо ж $a = \infty$ (або $+\infty$, або $-\infty$), то

Околом a називається множина всіх x, що задовольняють нерівність
$$|x| > M \text{ (або } x > M, \text{ або } x < -M, M > 0\text{)}.$$

Будемо писати $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, де a може бути скінченним числом або ∞ (або $+\infty$, або $-\infty$), якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі a, за винятком, можливо, самої точки a (ця домовленість необхідна лише у випадку скінченної точки a), і якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий окіл точки a, що для всіх x, які належать до нього і відмінні від a, має місце нерівність
$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означення об'єднує в собі, очевидно, обидва розібраних раніше випадки границі f і коли x прямує до скінченного числа a і коли x прямує до ∞.

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ в точці *зліва* (*справа*), якщо вона визначена на деякому півінтервалі $[a, b)$ (відповідно $(a, b]$) і для неї існує $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = A$ (відповідно $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > 0}} f(x) = A$)

Границю зліва (справа) функції $y = f(x)$ в точці a позначають так: $f(a-0) =$ $= \lim\limits_{x \to a-\varepsilon} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ $(f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+\varepsilon} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x))$.

Рівності $f(a+0) = f(a-0) = A$ еквівалентні існуванню границі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Перейдемо до викладення властивостей функції $f(x)$, що має границю при $x \to a$, де a – число або ∞. Домовимося довільний окіл a позначати символом $\mathrm{U}(a)$. Легко перевірити, що перетин двох околів $\mathrm{U}_1(a)$ і $\mathrm{U}_2(a)$ є знову деяким околом $\mathrm{U}(a)$.

Теорема 3.1. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, де A – скінченне число, то в деякому околі $\mathrm{U}(a)$ функція $f(x)$ обмежена, тобто існує додатне число M таке, що $|f(x)| \le M$ для всіх $x \in \mathrm{U}(a)$, $x \ne a$.

Доведення. З умови теореми випливає існування околу $\mathrm{U}(a)$ такого, що

$$1 > |f(x) - A| \geq |f(x)| - |A| \quad (x \in \mathrm{U}(a),\, x \neq a).$$

Звідси для вказаних x

$$|f(x)| \leq 1 + |A|,$$

де можна вважати, що $M = 1 + |A|$. Теорема доведена.

Теорема 3.2. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ і $A \neq 0$ – скінченне число, то існує окіл $\mathrm{U}(a)$ такий, що

$$|f(x)| > |A|/2 \quad (x \in \mathrm{U}/\, a),\, x \neq a).$$

Більш того, для вказаних x

$$f(x) > A/2, \text{ якщо } A > 0, \text{ і}$$
$$f(x) < A/2, \text{ якщо } A < 0.$$

Доведення. З умови теореми випливає існування для $\varepsilon = |A|/2$ околу $\mathrm{U}(a)$ такого, що

$$|A|/2 > |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)| \quad (x \in \mathrm{U}(a),\, x \neq a),$$

звідки $|f(x)| > |A|/2$ для вказаних x. Першу з цих нерівностей можна замінити такими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A > 0$ звідси випливає

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

а при $A < 0$ випливає

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

що і треба було довести.

Теорема 3.3. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$ і в деякому околі $\mathrm{U}(a),\, x \neq a,$ $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.

Доведення. Нехай $x_n \to a$, $x_n \neq a$, тоді для достатньо великого n_0 має місце нерівність

$$f_1(x_n) \leq f_2(x_n) \quad (n > n_0)$$

і після переходу до границі нерівність $A_1 \leq A_2$.

Теорема 3.4. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$ (3.1) і в деякому околі $\mathrm{U}(a),\, x \neq a,$

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x),$$

то $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$. (3.2)

Доведення. Нехай $x_n \to a$, $x_n \neq a$, тоді при достатньо великому n_0 для $n > n_0$

$$f_1(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq f_2(x_n).$$

В силу (3.1) існує границя $\varphi(x_n)$, що дорівнює A, оскільки $\{x_n\}$ є довільна збіжна до a послідовність, то виконується (3.2).

Теорема 3.5. (критерій Коші існування границі).

Для того щоб існувала границя (скінченна) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була визначена в околі a, за винятком, можливо, самої точки a, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий окіл $\mathrm{U}(a)$, що, яким б не були точки $x', x'' \in \mathrm{U}(a)$, $x', x'' \neq a$, то

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon.$$

Доведення. Дивись [1].

Теорема 3.6. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, де A і B - скінченні числа. Тоді $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right] = AB$ і за умови, що $B \neq 0$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доведення. Доведемо для прикладу другу рівність. Нехай $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, ...)$; тоді

$$\lim f(x_n) = A, \ \lim \varphi(x_n) = B,$$

але оскільки границя добутку двох змінних, які пробігають послідовності, дорівнює добутку їх границь, то $\lim[f(x_n)\varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = AB$.
Ця рівність доведена для будь-якої змінної $x_n \to a$, $x_n \neq a$, тому $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right] = AB$.

За означенням $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі a, за винятком, можливо, самої точки a, і якщо для будь-якого додатного числа M знайдеться такий окіл $\mathrm{U}(a)$ точки a, що $\left|f(x)\right| > M$ $(x \in \mathrm{U}(a), x \neq a)$.

Функція, для якої $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, називають нескінченно великою при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ і в деякому околі точки a функція $f(x) > 0$ (відповідно $f(x) < 0$), то ще пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (відповідно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Теорема 3.7. Якщо функція $f(x)$ задовольняє в деякому околі a нерівність

$$\left|f(x)\right| > M > 0,$$

а для функції $\varphi(x)$ має місце

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \ \ (\varphi(x) \neq 0 \text{ для } x \neq a),$$

то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$

Теорема 3.8. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (A – число), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Наслідок. Якщо $\varphi(x) \to 0 \ (x \to a, \varphi(x) \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

і якщо $\varphi(x) \to \infty \ (x \to a, \varphi(x) \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)}=0.$$

Перша визначна границя. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Доведення. Візьмемо круг радіуса 1 (рис. 3.1) і позначимо радіанну міру кута AOD через x, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Порівнюючи площі трикутників AOD, BOD і колового сектора AOD, дістанемо: $S_{\Delta AOD}<S_{секAOD}<S_{\Delta BOD}$, звідки $\dfrac{1}{2}AC\cdot OD<\dfrac{1}{2}OD^2\cdot x<\dfrac{1}{2}OD\cdot BD$ або $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}tgx$. Розділивши останні нерівності на $\dfrac{1}{2}\sin x>0$, дістанемо $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ або $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}1=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то за теоремою (3.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Нехай тепер $x<0$. Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 3.2). Оскільки $f(x)=f(-x)$, то $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Отже $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Друга визначна границя. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Доведення. В силу означення границі функції ми повинні показати, що

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e\quad \forall x_n\to\infty.$$

Якщо $x_n=n$ – натуральне, то це вже доведено. Щоб довести рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,$ достатньо переконатись в тому, що вона виконується в двох випадках: коли $x_n\to+\infty$ і коли $x_n\to-\infty,$ пробігаючи не обов’язково цілі значення.

Нехай x_n – довільна змінна, що прямує до $+\infty$ $(x_n\to+\infty),$ і нехай $[x_n]=k_n$ – ціла частина числа x_n. Тоді $k_n\le x_n<k_n+1\le x_n+1<k_n+2$ і

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2}<e\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^2.$$

При $x_n\to+\infty$ $[x_n]=k_n\to+\infty,$ звідси перший і останній члени ланцюжка нерівностей прямують до e, тому

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}\to e$$

і оскільки при цьому $1+\dfrac{1}{x_n}\to 1,$ то ми довели, що $\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e$ для $x_n\to+\infty.$

Якщо тепер $x_n \to -\infty$, то $x'_n = -x_n \to +\infty$ і $\lim\limits_{x_n \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim\limits_{x'_n \to +\infty}\left(1-\frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n} =$

$= \lim\limits_{x'_n \to +\infty}\left(\frac{x'_n}{x'_n-1}\right)^{x'_n} = \lim\limits_{x'_n \to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right] = e,$ тобто доведено бажане.

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$. Для того, щоб порівняти між собою дві нескінченно малі функції, беруть границю їх відношення.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$ то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

Функція $f(x)$, для якої $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ називається *нескінченно малою при* $x \to a$.

Приклад 3.3. Нехай $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$ $(x \to 0)$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Отже, α – нескінченно мала вищого порядку, ніж β.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$ то $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0,$ то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку.*

Приклад 3.4. Якщо $\alpha(x) = \sin 5x$, $\beta(x) = x$ $(x \to 0)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5.$ Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – одного порядку.

З нулем, розглядуваним в якості нескінченно малої величини, не порівнюють ніяку іншу нескінченно малу величину, оскільки ділення на нуль не виражене. Ми також не порівнюємо дві нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, якщо їх відношення не має границі (скінченної або нескінченної).

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини одного порядку і

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то вони називаються *еквівалентними*. Позначають $\alpha \sim \beta$.

Важливим прикладом еквівалентних нескінченно малих величин є $\sin x$ і x при $x \to 0$.

Існує проста ознака еквівалентності двох нескінченно малих величин.

Теорема 3.9. Для того, щоб нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їх різниця була нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

Доведення. Нехай $\alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x)$. Необхідність ознаки випливає з того, що

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}-1=0,$$

оскільки за умовою $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0.$

Доведемо достатність ознаки. Нехай відомо, що $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0,$ тобто $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0.$ Маємо

$$\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0,$$

звідки випливає, що $\lim\frac{\gamma}{\beta}=0.$

Приклад 3.5. При $n\to\infty$ нескінченно мала $\alpha_n=\frac{n+1}{n^2}$ еквівалентна нескінченно малій $\beta_n=\frac{1}{n},$ оскільки вони відрізняються на нескінченно малу вищого порядку: $\alpha_n-\beta_n=\frac{1}{n^2}.$ Їх відношення прямує до одиниці: $\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{n+1}{n}\to 1.$

В багатьох питаннях можна без будь-якої помилки просто заміняти нескінченно малі їм еквівалентними. Це спирається на теорему.

> ***Теорема 3.10.*** Границя відношення нескінченно малих величин не зміниться, якщо замінити їх еквівалентними нескінченно малими величинами.

Доведення. Нехай $\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'.$ Тоді

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\beta}=1\cdot\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot 1=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Отже, знаходячи границі відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ нескінченно малих величин α і $\beta,$ можна відкидати і в чисельнику і в знаменнику нескінченно малі доданки вищих порядків, оскільки за доведеним вище це рівносильно заміні нескінченно малих величин α і β еквівалентними величинами.

При знаходженні границь функцій особливе значення має знаходження границь відношень двох нескінченно малих величин. Розглянемо декілька важливих прикладів.

Приклад 3.6. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}.$ Домножимо чисельник і знаменник заданого дробу на $\sqrt{1+x}-1;$ отримаємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+1)}.$

Остання функція неперервна при $x=0,$ і отже, $\lim\limits_{x\to 0}=\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+1)}=1.$

Отже, нескінченно малі величини $\sqrt{1+x}-1$ і $\frac{1}{2}x$ еквівалентні: $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x.$

Приклад 3.7. Знайдемо $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}$. Зрозуміло, що ми маємо границю відношення двох нескінченно малих величин. За допомогою перетворень знаходимо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $1-\cos\alpha$ при $\alpha\to 0$ є нескінченно мала величина того ж порядку, що і α^2.

Приклад 3.7. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$. В цьому прикладі треба знайти також границю відношення двох нескінченно малих величин. Виконаємо такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}==\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right].$$

Але границя в квадратних дужках існує і дорівнює числу e, в чому можна переконатись, якщо позначити $x=\frac{1}{z}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$

Отриманий результат демонструє, що при $x\to 0$ функції $\log_a(1+x)$ і x є нескінченно малими величинами одного порядку.

Приклад 3.8. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$. Тут маємо знову границю відношення двох нескінченно малих величин, оскільки $a^x\to 1$ при $x\to 0$.

Замінимо $a^x-1=z$, тоді при $x\to 0$ і $z\to 0$. Логарифмуючи обидві частини рівняння $a^x=1+z$ за основою a, знаходимо $x=\log_a(1+z)$. А, отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=$ $=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+z)}{z}}$. На основі прикладу 3.7: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$

Таким чином, нескінченно мала при $x\to 0$ величина a^x-1 одного порядку з x.

При знаходженні границь відношення нескінченно малих величин доцільно користуватись еквівалентними нескінченно малими.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$,	$a^{\alpha(x)}-1\sim a^x(x)\ln a$,
$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$,	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$,
$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\log_a e$,
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$,
$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}$,	$\sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{2}\alpha(x)$,

якщо $\lim\limits_{x\to b}\alpha(x)=0.$

Границя функції не залежить від того, визначена функція в граничній точці чи ні. Але на практиці при обчисленні границь елементарних функцій ця обставина має суттєве значення.

а) Якщо функція є елементарною і якщо граничне значення аргументу належить області визначення, то обчислення границі функції зводиться до простої підстановки граничного значення аргументу:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Приклад 3.10. Знайти границю функції

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+4 \quad \text{при } x\to -3.$$

Розв'язання. Задана функція є елементарною, вона визначена в граничній точці, тому знаходимо границю функції як її частинне значення в граничній точці:

$$\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)=(-3)^3-5\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)+4=-74.$$

б) Якщо аргумент прямує до нескінченності або до числа, що не належить області визначення функції, то в кожному випадку знаходження границі функції необхідне спеціальне дослідження.

Розглянемо випадки знаходження границі функції:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 1^\infty.$$

Випадок 1. Функція є відношення двох нескінченно малих величин $\left(\text{випадок}\,\dfrac{0}{0}\right)$, якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Приклад 3.11. Знайти границі:

$$\text{а) }\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5};\ \text{ б) }\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}.$$

Розв'язання. Спочатку переконуємося, що границю функції неможливо знайти безпосередньо підстановкою, тобто при вказаній зміні аргументу функція є відношенням двох нескінченно малих величин; потім здійснюємо перетворення, щоб скоротити дріб на множник, який прямує до нуля.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$. Розкладаємо чисельник і знаменник дробу на множники, як квадратні тричлени, за формулою

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1 і x_2 – корені тричлена. Скорочуємо дріб на $(x-5)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}.$$

б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$. Розкладаємо чисельник і знаменник на множники, скорочуємо дріб на $1+\cos x$:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 3.12. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. З'ясуємо спочатку, що при вказаній зміні аргументу задана функція є відношенням двох нескінченно малих величин. Потім перетворюємо дріб так, щоб скоротити його на множник, який прямує до нуля.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$. Позбавляємося ірраціональності в чисельнику шляхом множення чисельника і знаменника на $1+\sqrt{x+1}$, скорочуємо дріб на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$. Домножуємо чисельник і знаменник на $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$, скорочуємо дріб на $1-x$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 3.13. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

Розв'язання. З'ясуємо, що задана функція не визначена в граничній точці: при заданому значенні аргументу функція є відношенням двох нескінченно малих величин. Після цього перетворюємо функцію так, щоб використати *першу визначну границю* та її наслідки:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1=2.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$. Щоб використати першу визначну границю, зробимо заміну змінної: $1-x=t.$ Тоді при $x\to 1$ буде $t\to 0$ і

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$. За допомогою підстановки $\operatorname{arctg}(x+2)=y,$ отримуємо $x+2=\operatorname{tg}y,\ \ y\to 0$, якщо $x\to -2$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\lim_{y\to0}\frac{(\operatorname{tg}y-2)^2-4}{y}=\lim_{y\to0}\frac{(\operatorname{tg}x-4)\operatorname{tg}y}{y}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}y-4}{\cos y}\cdot\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=-4\cdot1=-4.$$

Випадок 2. Функція $f(x)$ є відношенням двох нескінченно великих величин (випадок $\frac{\infty}{\infty}$), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Приклад 3.14. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+...+2n}{1+3+...+(2n+1)}$.

Розв'язання. Впевнившись, що має місце випадок $\frac{\infty}{\infty}$, перетворюємо функцію.

а) Ділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$ на x^2 (найвища степінь), маємо:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}$, так як при $x\to\infty$ величини $\frac{1}{x^2}$ і $\frac{1}{x}$ є нескінченно малими.

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Цю задачу можна розв'язати тим же способом, що і попередню. Ділячи чисельник і знаменник на x, отримуємо:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-1}=-1.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$. Домножаючи чисельник і знаменник дробу на 7^{-x}, отримуємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7^{-x}+7^2}{3\cdot7^{-x}-1}=\frac{0+49}{0-1}=-49,\text{ так як }\lim_{x\to+\infty}7^{-x}=7^{-\infty}=0.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+...+2n}{1+3+...+(2n+1)}$. Тут чисельник дробу є сума n членів арифметичної прогресії, а знаменник – сума $(n+1)$ члена іншої арифметичної прогресії. Перетворюючи їх за відомою формулою, отримуємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+4+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}n}{\frac{1+2n+1}{2}(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}=1}.$$

Випадок 3. Функція $f(x)$ є добутком нескінченно малої та нескінченно великої величин (випадок $0\cdot\infty$), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Цей випадок знаходження границі функції зводиться шляхом перетворення функції до одного з двох розглянутих випадків, тобто до випадку $\frac{0}{0}$ або до випадку $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад 3.15. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{arctg} x$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3}{4}\pi+x\right)$.

Розв'язання. З'ясовуємо, що при вказаній зміні аргументу функція є добутком нескінченно малої і нескінченно великої величин, перетворюємо її до дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або нескінченності.

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{arcctg} x$. Виконуємо заміну $\operatorname{arctg} x=\alpha$, маємо $x=\operatorname{ctg}\alpha$,

$$\lim_{x\to +\infty} x\operatorname{arcctg} x=\lim_{\alpha\to +0}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3}{4}\pi+x\right)$. За допомогою заміни $\dfrac{\pi}{4}-x=t$, отримуємо

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)=\lim_{t\to 0}t\operatorname{cosec}(\pi-t)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

Випадок 4. Функція $f(x)$ є різницею двох додатних нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Цей випадок знаходження границі функції можна звести до випадку $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ шляхом перетворення функції до вигляду дробу.

Приклад 3.16. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Розв'язання. Аналізуючи умову задачі, робимо висновок, що при зазначеній поведінці аргументу функція є різницею двох додатних нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Після цього перетворюємо задану функцію до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямує до нуля або до нескінченності.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$. Здійснюємо віднімання дробів і отриманий в результаті дріб скорочуємо на $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$. Розглядаючи задану функцію як дробову зі знаменником, що дорівнює одиниці, позбавимося від ірраціональності в чисельнику, і розділимо чисельник і знаменник дробу на x:

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}.$$

Випадок 5. Функція $f(x)$ є степінь, основа якої прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (випадок 1^∞), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

В цьому випадку для знаходження границі функції використовується *друга визначна границя* і її наслідки:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx} = e^{kn}.$$

Приклад 3.17. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Розв'язання. Переконуємось спочатку, що при вказаній зміні аргументу функція є степінь, основа якої прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (випадок 1^∞), далі перетворюємо функцію так, щоб використати другу визначну границю.

а) Виділивши цілу частину дробу $\left(\frac{t-3}{t+2}\right)$, виконуємо заміну $-\frac{5}{t+2} = x$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-10}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x)^{-3} = e^{-10}\cdot 1 = e^{-10}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$. Робимо заміну $-2x=\alpha$. Тоді $\alpha\to 0$, якщо $x\to\frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x} = \lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}} = e^{-1}, \text{ так як } \lim_{\alpha\to 0}\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2} = 1.$$

Приклад 3.18. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg}5x)^2}$.

Розв'язання. Скористуємось еквівалентністю нескінченно малих величин. $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg}x\sim x$, $\operatorname{arctg}x\sim x$ при $x\to 0$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} = 36$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg}5x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{5x}\cdot\frac{2x}{5x} = \frac{2}{25}$.

Питання і вправи для самоперевірки

1. Що таке границя функції $y=f(x)$ при $x\to x_0$? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.

2. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, що має границю при $x \to x_0$; не має границі при $x \to x_0$.

3. Що таке границя функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$? при $x \to -\infty$? Наведіть означення за допомогою нерівностей. Приведіть геометричну ілюстрацію.

4. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, яка має границю при $x \to \infty$; не має границі при $x \to \infty$.

5. Яка функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.

6. Що означають записи:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty?$$

Дайте пояснення словами і означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричні ілюстрації.

7. Наведіть приклад необмеженої, але не нескінченно великої величини.

8. Який найпростіший зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами?

9. Сформулюйте і доведіть правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.

10. Сформулюйте і доведіть ознаку існування границі функції, що обмежена двома функціями, які мають одну і ту ж границю.

11. Виведіть першу визначну границю.

12. Виведіть другу визначну границю.

13. Що означає порівняти дві нескінченно малі величини? В якому випадку одна з них буде вищого порядку, ніж інша?

14. Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними? Наведіть необхідну і достатньою умову еквівалентності.

15. Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих величин/

16. Знайдіть границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}$; в) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

17. Знайдіть границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.