9.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь другого порядку: рівняння, що допускають пониження порядку та лінійні диференціальні рівняння.

Рівняння, що допускають пониження порядку

1. *Рівняння вигляду*

$$y'' = f(x), \tag{9.23}$$

де $f(x)$ - задана неперервна функція на деякому проміжку осі Ox, розв`язується послідовним інтегруванням.

Дійсно, запишемо рівняння (9.23) у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y') = f(x) \text{ або } d(y') = f(x)dx.$$

Інтегруючи його, дістанемо

$$y' = \int f(x)dx + c_1,$$

де c_1 - стала інтегрування. Це рівняння першого порядку.

Інтегруючи його одержимо загальний розв`язок рівняння (9.23):

$$y = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + c_1 x + c_2,$$

де c_1, c_2 - сталі інтегрування.

2. *Рівняння вигляду*

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{9.24}$$

що не містить явно шуканої функції y, зводиться до рівняння першого порядку заміною $y' = z(x)$, де $z(x)$ нова невідома функція.

Дійсно, якщо $y' = z(x)$, то $y'' = z'(x)$ і рівняння (9.24) зводиться до диференціального рівняння першого порядку

$$F(x, z(x), z'(x)) = 0.$$

Якщо для останнього рівняння вдається знайти загальний розв`язок $z = \varphi(x, c_1)$, то використовуючи заміну, маємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = \varphi(x, c_1).$$

Розв`язком цього рівняння, а значить і рівняння (9.24) буде функція y:

$$y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2 .$$

3. *Рівняння вигляду*

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{9.25}$$

що не містить явно аргументу x, зводиться до диференціального рівняння першого порядку заміною $y' = z(y)$.

Дійсно, за правилом диференціювання складної функції $z(y)$, маємо $y'' = z'(y) \cdot y'$ або $y'' = z' \cdot z$. Диференціальне рівняння (9.25) набуде вигляду $F(y, z, z') = 0$. Якщо знайдемо розв`язок останнього рівняння $z = \varphi(y, c_1)$, то з заміни маємо $y' = \varphi(y, c_1)$. Звідси $\dfrac{dy}{\varphi(y, c_1)} = dx$. Інтегруючи, одержимо загальний інтеграл рівняння (9.25):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = x + c_2 ,$$

де c_1, c_2 - сталі інтегрування.

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок рівнянь:

а) $y'' = x^2 + e^{-2x}$; б) $y'' + y' = e^x$; в) $y'' + 2y = 0$.

Розв`язування. а) Дане рівняння є рівнянням виду (9.23). Шляхом послідовного інтегрування рівняння, дістанемо:

$$y' = \int \left(x^2 + e^{-2x}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c_1\right)dx = \frac{x^4}{12} + \frac{1}{4}e^{-2x} + c_1 x + c_2.$$

б) Рівняння не містить явно шуканої функції і є рівнянням виду (9.24). Застосуємо заміну $y' = z(x)$. Тоді $y'' = z'$ і задане рівняння прийме вигляд

$$z' + z = e^x.$$

Це лінійне рівняння. За формулою (9.20) одержимо його загальний розв`язок

$$z(x) = e^{-\int dx}\left(\int e^x e^{\int dx} dx + c_1\right) = e^{-x}\left(\int e^x \cdot e^x \cdot dx + c_1\right) = e^{-x}\left(\int e^{2x} dx + c_1\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^x + c_1 e^{-x}.$$

Підставимо значення знайденої функції $z(x)$ в заміну:

$$y' = \frac{1}{2}e^x + c_1 e^{-x}.$$

Звідси одержимо загальний розв`язок заданого рівняння:

$$y = \int \left(\frac{1}{2}e^x + c_1 e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}e^x - c_1 e^{-x} + c_2.$$

в) Рівняння не містить явно аргументу x і є рівнянням виду (9.25). Зробимо заміну $y' = z(y)$, тоді $y'' = z' \cdot z$ і задане рівняння набере вигляду

$$z' \cdot z + 2y = 0.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $z(y)$. Відокремлюючи змінні, будемо мати

$$\frac{dz}{dy} z = -2y \quad \text{або} \quad zdz = -2ydy.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int zdz = -\int 2ydy \quad \text{або} \quad \frac{z^2}{2} = -y^2 + c_1^2.$$

Знайдемо змінну $z = \pm\sqrt{2c_1^2 - 2y^2}$ і підставимо її у заміну:

$$y' = \pm\sqrt{2c_1^2 - 2y^2}.$$

Це рівняння є теж диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи це рівняння, знайдемо його загальний інтеграл:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2c_1^2 - 2y^2}, \quad \frac{dy}{\sqrt{2c_1^2 - 2y^2}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{2c_1^2 - 2y^2}} = \pm\int dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{y}{c_1} = \pm x + c_2.$$

Питання та вправи для самоперевірки

1. Знайти загальний розв`язок рівняння:

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Відповідь: $y = c_1 x + c_2 - \ln|\cos x|$

2. Розв`язати рівняння:

$$y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

Відповідь: $y^3 + c_1 y + c_2 = 3x$.

3*. Розв`язати задачу Коші:

$$y'' x \ln x = y', \qquad y(e) = 1,\ y'(e) = 1.$$

Відповідь: $y = x(\ln x - 1) + 1$.

В заданому рівнянні відсутня функція y, тобто це рівняння є рівнянням другого типу. Зробимо заміну $y' = z(x)$, де $z(x)$ нова невідома функція. Тоді $y'' = z'(x)$ і задане рівняння прийме вигляд: $z' x \ln x = z$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні будемо мати:

$$\frac{dz}{dx} x \ln x = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x}.$$

Проінтегруємо останнє рівняння

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x \ln x} \Rightarrow \ln|z| + \ln|c| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} \Rightarrow \ln c|z| = \ln|\ln x|, c > 0.$$

Потенціюючи маємо $cz = \ln x$.

Підставимо замість z його значення і будемо мати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$cy' = \ln x.$$

З початкових умов знайдемо сталу c: $c \cdot 1 = \ln e \Rightarrow c = 1$. Рівняння набуде вигляду

$$y' = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x \Rightarrow dy = \ln x dx.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int dy = \int \ln x dx \Rightarrow y = \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c_1.$$

З початкових умов знайдемо сталу c_1:

$$1 = e \ln e - e + c_1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Тоді розв`язком задачі Коші буде функція

$y = x \ln x - x + 1 = x(\ln x - 1) + 1$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним однорідним рівнянням*, якщо воно має вигляд:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0, \tag{9.26}$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$ - задані та неперервні функції на деякому інтервалі $(a; b)$.

Встановимо деякі властивості його розв`язків.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв`язки рівняння (9.26), то його розв`язком є також функція

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{9.27}$$

де c_1, c_2 - довільні сталі.

Доведення. Підставивши функцію $y(x)$ в рівняння (9.26), матимемо:

$$\left(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)\right)'' + a_1\left(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)\right)' + a_2\left(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)\right)=$$
$$=c_1\left(y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\right)+c_2\left(y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\right).$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв`язки рівняння (9.26), то вирази в дужках обертаються в нуль, а це означає, що функція

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

є розв`язком рівняння (9.26).

Функція (9.27) є розв`язком рівняння (9.26) і містить дві довільні сталі, тому виникає питання: чи не є цей розв`язок загальним розв`язком цього рівняння. Щоб відповісти на це питання, введемо деякі додаткові поняття.

Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними* на проміжку $(a;b)$, якщо існує таке стале число λ, що для всіх $x \in (a;b)$ виконується рівність $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda$.

Якщо ж $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними*.

Наприклад, функції $y_1(x)=e^x$ і $y_2=e^{2x}$ є лінійно незалежними, оскільки $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{1}{e^x} \neq const$; а функції $y_1(x)=\sin x$ і $y_2(x)=2\sin x$ є лінійно залежними, оскільки $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{1}{2}$.

Визначником Вронського або вронскіаном називається функціональний визначник виду

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Наведемо деякі властивості вронскіана для функції y_1 і y_2.

***Властивість** 1*. Якщо диференційовані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні на проміжку $(a;b)$, то вронскіан цих функцій на проміжку $(a;b)$ тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні, то виходячи з означення маємо $y_1(x)=\lambda y_2(x)$. Тому для будь-якого $x \in (a;b)$ має місце рівність

$$W(x)=\begin{vmatrix} \lambda y_2(x) & y_2(x) \\ \lambda y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_2(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=0.$$

***Властивість** 2*. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - лінійно незалежні розв`язки рівняння (9.26) на проміжку $(a;b)$, то вронскіан цих функцій в жодній точці цього проміжку не дорівнює нулю.

Тепер вже можемо відповісти на питання за яких умов функція (9.27) буде загальним розв`язком рівняння (9.26).

Теорема (Про структуру загального розв`язку однорідного рівняння). Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - два лінійно незалежні на проміжку $(a;b)$ розв`язки рівняння (9.26), то функція

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x) \qquad (9.27)$$

є його загальним розв`язком, де c_1, c_2 - довільні сталі.

Доведення. Виходячи з теореми , функція (9.27) є розв`язком рівняння (9.26). Доведемо, що цей розв`язок є загальним розв`язком. Для цього покажемо, що з нього можна виділити такий єдиний частинний розв`язок, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x) = y'_0 \qquad x_0 \in (a;b).$$

Підставимо початкові умови в рівність (9.27), дістанемо систему двох алгебраїчних рівнянь відносно двох невідомих сталих c_1 і c_2:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0, \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи не дорівнює нулю, оскільки є визначником Вронського лінійно незалежних розв`язків рівняння (9.26) в точці x_0 (властивість 2).

Тому дана система має єдиний розв`язок:

$$c_1 = c_1^0; \quad c_2 = c_2^0.$$

А розв`язок $y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ є тим частинним розв`язком, який задовольняє початкові умови.

Зауважимо, що не всяке диференціальне рівняння другого порядку розв`язується в квадратурах. Але, якщо відомий один частинний розв`язок $y_1(x)$ рівняння (9.26), то другий його частинний розв`язок $y_2(x)$, лінійно незалежний з $y_1(x)$, знаходяться за формулою

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx. \qquad (9.28)$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

Якщо в рівнянні (9.26) коефіцієнти a_1 і a_2 дійсні числа, то таке рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням із сталими коефіцієнтами*, воно має вигляд:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (9.29)$$

де a_1, a_2 - дійсні числа.

Частинні розв`язки рівняння (9.29) будемо шукати у вигляді функції, похідні якої відрізняються сталими множниками від самої функції. Такою функцією є функція $y = e^{kx}$, де $k$ - стала. Стала $k$ знаходиться з умови, що функція $y = e^{kx}$ є розв`язком рівняння (9.29).

Для функції $y = e^{kx}$ маємо:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 x^{kx}.$$

Підставимо функцію e^{kx} і її похідні в рівняння (9.29) і отримаємо рівняння для знаходження числа k:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (9.30)$$

Рівняння (9.30) називається *характеристичним рівнянням*. Позначимо корені цього рівняння через k_1 і k_2. Можливі такі випадки:

1. k_1 і k_2 - дійсні і різні числа: $k_1 \neq k_2$;
2. k_1 і k_2. – дійсні і рівні числа: $k_1 = k_2$;
3. k_1 і k_2. – комплексно-спряжені числа: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Розглянемо кожний випадок.

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні*: $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку частинними розв`язками рівняння (9.29) є функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$. Ці функції лінійно незалежні, оскільки
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$$
Згідно теореми загальний розв`язок рівняння (9.29) знаходиться за формулою
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$
2. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні*: $k_1 = k_2$. Тоді один частинний розв`язок рівняння є $y_1 = e^{k_1 x}$, а другий його частинний розв`язок y_2, лінійно незалежний з y_1 знайдемо за формулою (9.28):
$$y_2 = e^{k_1 x} \int \frac{1}{\left(e^{k_1 x}\right)^2} e^{-\int a_1 dx} dx = e^{k_1 x} \int \frac{1}{e^{2k_1 x}} \cdot e^{-a_1 x} dx = \left| \begin{array}{l} \textit{За теоремою Вієта}: \\ k_1 + k_2 = -a_1 \Rightarrow 2k_1 = -a_1 \end{array} \right| =$$
$$= e^{k_1 x} \int \frac{1}{e^{2k_1 x}} \cdot e^{2k_1 x} dx = e^{k_1 x} \int dx = x e^{k_1 x}.$$
Значить, загальний розв`язок у цьому випадку знаходиться за формулою:
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}.$$
3. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. В цьому випадку загальний розв`язок рівняння (9.29) має вигляд:
$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right).$$
з доведенням цієї формули можна познайомитись у [3, с. 70]
Зробимо остаточний висновок у вигляді таблиці.

Корені характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$	Загальний розв`язок рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$
1. $k_1 \neq k_2$ (дійсні, різні)	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
2. $k_1 = k_2$ (дійсні, рівні)	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$
3. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (комплексно-спряжені)	$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right)$.

Приклад 2. Знайти загальний розв`язок рівняння
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$
*Розв`язування*. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені: $k_1 = 2;\ k_2 = 3.$ Оскільки $k_1 \neq k_2$, то загальний розв`язок цього рівняння має вигляд:
$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$
Приклад 3. Знайти частинний розв`язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
*Розв`язування*. Знайдемо спочатку загальний розв`язок цього рівняння. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$. Оскільки ці корені рівні, то загальний розв`язок цього рівняння має вигляд:
$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$
Скористаємося початковими умовами для знаходження сталих c_1 і c_2. Для цього знайдемо:
$$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x.$$

Підставляючи в функції y і y' замість x 0, а замість y і y' їх значення з початкових умов, будемо мати систему

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1, \\ c_1 e^0 + c_2 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 + c_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Шуканий розв`язок заданого рівняння має вигляд:

$$y = e^x + xe^x.$$

Приклад 4. Розв`язати рівняння

$$y'' + 4y = 0.$$

*Розв`язування*. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \pm 2i$ $\left(\alpha = 0; \beta = 2\right)$. Загальний розв`язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{0x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$