9.1. Загальні поняття про звичайні диференціальні рівняння

Порядок диференціального рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називається таке рівняння, що містить незалежну змінну x, шукану функцію однієї змінної $y = y(x)$ та її похідні або диференціали.

Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної невідомої функції, що входить в це рівняння.

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{9.1}$$

де x - незалежна змінна, $y = y(x)$ - невідома функція, F - відома функція.

Наприклад, рівняння $y'' + xy = \sin 2x$ є рівняння другого порядку, $y''' = e^{-x}$ - рівняння третього порядку, $xdy = (y+1)dx$ - рівняння першого порядку.

Якщо рівняння (9.1.) розв`язати відносно похідної n-го порядку, тобто

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{9.2}$$

то рівняння (9.2.) називається явним диференціальним рівнянням n-го порядку. Надалі будемо розглядати саме такі рівняння.

Загальний і частинний розв`язок диференціального рівняння

Розв`язком рівняння (9.2) на деякому інтервалі $(a;b)$ називається n разів неперервно диференційована на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння в тотожність, тобто

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right), \qquad x \in (a;b).$$

Графік розв`язку диференціального рівняння називається його *інтегральною кривою*.

Знаходження невідомої функції, що входить до диференціального рівняння, називається розв`язуванням або інтегруванням цього рівняння.

Задачею Коші або задачею з початковими умовами для рівняння (9.2) називається задача знаходження розв`язку $y(x)$ цього рівняння, який задовольняє *початковим умовам*:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{9.3}$$

де $x_0 \in (a;b)$, $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - задані дійсні числа.

Зокрема, для рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{9.4}$$

початкова умова має вигляд:

$$y(x_0) = y_0, \tag{9.5}$$

а для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y) \tag{9.6}$$

початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{9.7}$$

Існування та єдність розв`язку задачі Коші (9.2), (9.3) визначається наступною теоремою.

Теорема Коші. Якщо функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$, неперервні в деякій відкритій області $D \subset R^{n+1}$, то для будь-якої точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ з області D існує єдиний розв`язок $y = y(x)$ рівняння (9.2), який задовольняє початкові умови (9.3).

Для рівняння першого порядку (9.4) з умовами (9.5) геометричний зміст теореми Коші такий: через кожну точку $(x_0; y_0) \in D$ проходить єдина інтегральна крива.

Зауважимо, що на відміну від диференціального рівняння першого порядку, єдність розв`язку рівняння (9.2) з умовами (9.3) не означає, що через задану точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива цього рівня. Наприклад, для рівняння (9.6) з умовами (9.7) єдність розв`язку означає, що через точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива цього рівня з кутовим коефіцієнтом $k = y_0'(x_0) = y_0'$. Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншими кутовими коефіцієнтами.

Розглянемо область D, в кожній точці якої задача Коші (9.2), (9.3) має єдиний розв`язок. Введемо поняття загального розв`язку рівняння (9.2).

*Загальним розв`язком рівняння* (9.2) в області $D$ називається такий розв`язок цього рівняння $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, де $c_1, c_2, ..., c_n$ довільні сталі, для яких можна взяти такі єдині сталі $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, ..., $c_n = c_n^0$, що функція $\varphi\left(x_0, c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0\right)$ задовольняє початкові умови.

Якщо загальний розв`язок знаходиться в неявній формі, то його називають *загальним інтегралом* і записують:

$$\varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0.$$

Загальний розв`язок рівняння першого порядку містить одну довільну сталу, записують $y = \varphi(x, c)$; загальний розв`язок рівняння другого порядку містить дві довільні сталі, записують $y = \varphi(x, c_1, c_2)$.

*Частинним розв`язком* диференціального рівняння називають розв`язок, який можна знайти з загального розв`язку цього рівняння при конкретних значеннях $c_1, c_2, ..., c_n$.

Практичні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

1. *Закон природних змін.* Як змінюється кількість населення в залежності від часу. Наприклад, яка буде чисельність населення України через 10 років, якщо щорічно населення зменшується на 2% і в цьому році становить 50 млн?

Позначимо через $y(t)$ кількість населення в момент часу t. Тоді швидкість зміни населення є швидкістю зміни функції $y(t)$. Згідно з механічним змістом похідної та умовою задачі маємо:

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}02y.$$

Приєднаємо до цього рівняння початкові умови: в початковий момент чисельність населення становила 50 млн.: $y(0) = 50$. Тобто маємо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -0{,}02y, \\ y(0) = 50. \end{cases}$$

Рівняння достатньо просте. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{y} = -0{,}02dt \quad \text{або} \quad d(\ln y) = d(-0{,}02t).$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятись лише довільною сталою, тобто

$$\ln y = -0{,}02t + c \quad \text{або} \quad y = e^{-0{,}02t+c}.$$

Остання функція показує за яким законом змінюється кількість населення. Використаємо початкові умови і знайдемо значення сталої c:

$$50 = e^c \quad \text{або} \quad c = \ln 50 \approx 3{,}9.$$

Отже численність населення України буде

$$y(10) = e^{-0{,}2+3{,}9} = e^{3{,}7} \approx 40{,}5 \text{ (млн.)}$$

2. *Зростання інвестицій*. Відомо, що швидкість зростання інвестиційного капіталу в будь-який момент часу пропорційна величині капіталу. Треба знайти закон зростання інвестиційного капіталу, враховуючи, що початкові інвестиції дорівнюють K_0.

Побудуємо математичну модель. Позначимо через $K(t)$ - величину інвестиційного капіталу в момент часу t, через r - коефіцієнт пропорційності, який дорівнює узгодженому відсотку неперервного зростання капіталу. Тоді швидкість зміни величини інвестицій дорівнює $\frac{dK}{dt}$. Виходячи з умови задачі, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = rK, \\ K(0) = K_0. \end{cases}$$

Маємо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку. Розв\`язуючи це рівняння аналогічно попередньому, відшукаємо невідому функцію $K(t)$:

$$dK = rKdt \Rightarrow \frac{dK}{K} = rdt \Rightarrow d(\ln K) = d(rt) \Rightarrow \ln K = rt + c \Rightarrow K(t) = e^{rt+c}.$$

Враховуючи початкову умову, знайдемо сталу c:

$$K_0 = e^c \Rightarrow c = \ln K_0.$$

Отже розв\`язком задачі Коші буде функція

$$K(t) = e^{rt+\ln K_0} = e^{\ln K_0} \cdot e^{rt} = K_0 e^{rt}.$$

Виходячи з знайденої функції, можна стверджувати, що інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

9.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними називається диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$N(x)dx + M(y)dy = 0. \tag{9.8}$$

У цьому рівнянні множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y. Знайдемо загальний розв\`язок цього рівняння. Ліву частину рівняння (9.8) можна записати як повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du = N(x)dx + M(y)dy.$$

Тоді рівняння (9.8) буде мати вигляд $du = 0$. Це означає, що функція u є стала. Інтегруючи рівність $du = 0$, одержимо

$$\int N(x)dx + \int M(x)dy = c. \qquad (9.9)$$

Формула (9.9) визначає *загальний інтеграл диференціального рівняння* (9.8), або ще кажуть, що це рівняння *розв`язано в квадратурах*.

Приклад. 1 Знайти загальний розв`язок рівняння

$$\frac{dy}{2y+1} + \sin 2x dx = 0.$$

Розв`язування. Це рівняння з відокремленими змінними, оскільки при dx записана функція, яка залежить тільки від x, а при dy записана функція, яка залежить тільки від y. Загальний інтеграл цього рівняння знайдемо шляхом інтегрування:

$$\int \frac{dy}{2y+1} + \int \sin 2x dx = c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2y+1| - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\ln c \Rightarrow \ln\frac{|2y+1|}{c} = \cos 2x \Rightarrow |2y+1| = ce^{\cos 2x}$$

або $y = \frac{1}{2}\left(\pm ce^{\cos 2x} - 1\right), \quad c > 0$

(тут зручно було сталу c записати у вигляді $\ln c$).

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$N_1(x)M_1(y)dx + N_2(x)M_2(y)dy = 0. \qquad (9.10)$$

Будемо вважати, що $M_1(y)N_2(x) \neq 0$. Для відокремлення змінних у рівнянні (9.10) поділимо обидві його частини на функцію $M_1(y)N_2(x)$:

$$\frac{N_1(x)M_1(y)}{M_1(y)N_2(x)}dx + \frac{N_2(x)M_2(y)}{M_1(y)N_2(x)}dy = 0$$

або

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx + \frac{M_2(y)}{M_1(y)}dy = 0.$$

Проінтегрувавши обидві частини останнього рівняння матимемо загальний інтеграл рівняння (9.10):

$$\int \frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx + \int \frac{M_2(y)}{M_1(y)}dy = c. \qquad (9.11)$$

Легко пересвідчитись в тому, що рівняння

$$y' = f(x)\varphi(y)$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Приклад.2 Розв`язати задачу Коші:

$$\begin{cases} \left(4x + xy^2\right)dx - \left(2y + yx^2\right)dy = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Розв`язування. Рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки його можна записати у вигляді

$$x\left(4 + y^2\right)dx - y\left(2 + x^2\right)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на $\left(4 + y^2\right)\left(2 + x^2\right) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{2 + x^2}dx - \frac{y}{\left(4 + y^2\right)}dy = 0.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int \frac{x}{2+x^2}dx - \int \frac{y}{4+y^2}dy = c \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}\ln\left(2+x^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(4+y^2\right) = \frac{1}{2}\ln c,$$

Потенціюючи останній вираз, дістанемо загальний інтеграл:

$$\frac{2+x^2}{4+y^2} = c, \;\; c > 0.$$

Сталу c визначимо з початкової умови. Для цього в загальний інтеграл рівняння замість x підставимо 0, а замість y підставимо 2. Маємо $c = \frac{1}{4}$. Підставивши знайдену сталу в загальний інтеграл, дістанемо частинний інтеграл: $\frac{2+x^2}{4+y^2} = \frac{1}{4}$.

Якщо розв`язати цю рівність відносно $y$, то одержимо частинний розв`язок задачі Коші:

$$y = \pm 2\sqrt{1+x^2}.$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна звести до вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.12}$$

Покажемо, що рівняння (9.12) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними шляхом підстановки

$$u = \frac{y}{x}, \tag{9.13}$$

де $u = u(x)$ нова невідома функція.

Дійсно, з рівності (9.13) знайдемо:

$$y = x \cdot u(x) \;\; \text{і} \;\; y' = u(x) + xu'(x).$$

Підставимо вираз функції y і y' в рівняння (9.12):

$$u(x) + xu'(x) = f\left(\frac{xu(x)}{x}\right) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \;\; \left(f(u) - u \neq 0\right).$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Проінтегрувавши його, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Підставляючи після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$, знайдемо загальний інтеграл рівняння (9.12).

Приклад 3. Розв`язати рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

Розв`язування. Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку, оскільки його можна записати у вигляді

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Застосувавши підстановку $y = x \cdot u(x)$ і $y' = u(x) + xu'(x)$, дістанемо:

$$u + xu' = 1 + u^2 \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u^2 - u + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2 - u + 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2 - u + 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x| + \ln c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right)2}{\sqrt{3}} = \ln|cx| \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\frac{y}{x} - 1}{\sqrt{3}} = \ln|cx|, \ c > 0.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, у яке невідома функція y та її похідна y' входять у першому степені.

Таке рівняння можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (9.14)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ - задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Розв`язок цього рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій:

$$y = u(x) \cdot \upsilon(x). \qquad (9.15)$$

Причому одну з цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівнянню (9.14).

З рівності (9.15) знайдемо y':

$$y' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon' \qquad (9.16)$$

Підставимо вирази y і y' (9.15) і (9.16) у задане рівняння (9.14). Дістанемо

$$u'\upsilon + u\upsilon' + p(x)u\upsilon = q(x) \text{ або}$$

$$u'\upsilon + (\upsilon' + p(x)\upsilon)u = q(x). \qquad (9.17)$$

Користуючись довільністю у виборі, наприклад, функції $\upsilon = \upsilon(x)$, визначимо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$\upsilon' + p(x)\upsilon = 0 \text{ або } \frac{d\upsilon}{dx} + p(x)\upsilon = 0.$$

Відокремлюючи змінні в останньому рівнянні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв`язок:

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -p(x)\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int p(x)dx + \ln c \Rightarrow \ln|\upsilon| = -\int p(x)dx + \ln c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\upsilon}{c}\right| = -\int p(x)dx \Rightarrow \upsilon = ce^{-\int p(x)dx}, \quad c > 0.$$

Нам достатньо взяти за υ будь-який частинний розв`язок рівняння. Тому покладемо $c = 1$, тоді

$$\upsilon = e^{-\int p(x)dx}. \qquad (9.18)$$

Підставимо знайдену функцію υ у рівняння (9.17). Одержимо:

$$\upsilon\frac{du}{dx} = q(x) \Rightarrow du = \frac{q(x)}{\upsilon}dx \Rightarrow du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знайдемо функцію $u = u(x)$:

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + c. \qquad (9.19)$$

Підстановка знайдених функцій (9.18) і (9.19) у заміну (9.15) дає загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння (9.14) у вигляді формули:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right). \qquad (9.20)$$

Слід відмітити, що знаходження загального розв`язку лінійного диференціального рівняння за формулою (9.20) значно спрощує розв`язання таких рівнянь. Якщо ж користуватися підстановкою Бернуллі (9.15), то кожного разу прийдеться виводити цю формулу.

Приклад 4. Знайти розв`язок рівняння

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,$$

який задовольняє умову $y(1)=0$.

Розв`язування. Це рівняння є лінійним рівнянням, причому $p(x)=-\frac{2}{x+1}$; $q(x)=(x+1)^3$.

За формулою (9.20) знаходимо

$$y=e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx}\left(\int (x+1)^3 e^{\int -\frac{2}{x+1}dx}dx+c\right)=e^{2\ln|x+1|}\left(\int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|}dx+c\right)=$$

$$=(x+1)^2\left(\int (x+1)^3\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx+c\right)=(x+1)^2\left(\int (x+1)dx+c\right)=(x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+c\right)=$$

$$=\frac{(x+1)^4}{2}+c(x+1)^2.$$

Тут ми використали основну логарифмічну тотожність

$$e^{\ln u}=u \text{ і } e^{-\ln u}=\frac{1}{u}.$$

Отже, загальний розв`язок заданого рівняння має вигляд:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+c(x+1)^2.$$

Знайдемо тепер значення сталої c, при якому частинний розв`язок задовольняє початкову умову. Для цього в загальний розв`язок замість x підставимо 1, а замість y підставимо 0. Будемо мати:

$$0=\frac{2^4}{2}+c\cdot 2^2 \Rightarrow c=-2.$$

Отже, шуканий частинний розв`язок має вигляд $y=\frac{(x+1)^4}{2}-2(x+1)^2$.

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}, \qquad (9.21)$$

де $p(x)$, $q(x)$ - задані і неперервні функції на деякому проміжку, а α - дійсне число, причому $\alpha\neq 0;1$.

Неважко помітити, що при $\alpha=0$ або $\alpha=1$ маємо лінійне рівняння.

Припустимо, що $y\neq 0$ і $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$. Поділивши обидві частини рівняння на y^{α}, матимемо рівняння виду:

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x). \qquad (9.22)$$

Зробимо заміну $z=y^{1-\alpha}$. Тоді $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ і рівняння (9.22) зводиться до лінійного рівняння відносно нової функції z:

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)z=q(x) \text{ або } z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x).$$

Загальний розв`язок цього рівняння знайдено за формулою (9.20):

$$z = e^{-\int (1-\alpha)p(x)dx}\left((1-\alpha)\int q(x)e^{\int (1-\alpha)p(x)dx}dx + c\right).$$

Тоді загальний інтеграл рівняння Бернуллі має вигляд:

$$e^{-\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)}\left((1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + c\right) = y^{1-\alpha}.$$

Приклад 5. Розв\`язати рівняння

$$y' + \frac{1}{x}y = -xy^2,$$

Розв\`язування. Це рівняння є рівнянням Бернуллі з $\alpha = 2,\ p(x) = \frac{1}{x}$ і $q(x) = -x$. Поділимо обидві частини цього рівняння на y^2, одержимо:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -x.$$

Зробимо заміну $z = y^{-1}$, тоді $z' = -y^{-2}y'$ і рівняння прийме вигляд

$$-z' + \frac{1}{x}z = -x \quad \text{або} \quad z' - \frac{1}{x}z = x.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції z. За формулою (9.20) знайдемо його загальний розв\`язок:

$$z = e^{-\int -\frac{dx}{x}}\left(\int xe^{-\int \frac{dx}{x}}dx + c\right) = e^{\ln|x|}\left(\int xe^{-\ln|x|}dx + c\right) = |x|\left(\pm\int dx + c\right) = |x|(\pm x + c) = x^2 + c|x|.$$

Підставляючи знайдену функцію z в заміну $z = y^{-1}$, знайдемо загальний інтеграл, а потім і загальний розв\`язок заданого рівняння:

$$x^2 + c|x| = y^{-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 + c|x| \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + c|x|}.$$

Питання та вправи для самоперевірки

1. Знайти загальний розв\`язок рівняння

$$\left(1 + x^2\right)y' + 1 + y^2 = 0.$$

Відповідь: $y = \dfrac{c - x}{1 + cx}$.

2. Розв\`язати рівняння

$$y' - xy = -y^3e^{-x^2}.$$

Відповідь: $y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{c + 2x}$.

3*. Знайти частинний розв\`язок рівняння:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x},\ \textit{якщо}\ y(-1) = 1.$$

Відповідь: $y = \dfrac{2x}{1 - 3x^2}$.

Задане рівняння є однорідним рівнянням першого порядку, оскільки права частина його є функцією відношення $\frac{y}{x}$. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = t$, де $t = t(x)$ - нова невідома функція. Тоді: $y = tx$ і $y' = t'x + t$. Підставимо вирази y і y' в задане рівняння: $t'x + t = t^2 - t$. Звідки $t'x = t^2 - 2t$ або $\frac{dt}{dx}x = t^2 - 2t$.

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо його:

$$\frac{dt}{t^2 - 2t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{t(t-2)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{(t-2)-t}{t(t-2)}dt = \ln|x| + \ln c,\ c > 0.$$

Поділимо кожний з двох доданків чисельника підінтегрального виразу зліва на знаменник і проінтегруємо отримані елементарні дроби. Маємо:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-2} = \ln c \cdot |x| \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|t-2| = \ln c \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right| = \ln c \cdot |x| \Rightarrow \ln\sqrt{\frac{t-2}{t}} = \ln c \cdot |x|.$$

Потенціюючи обидві частини останньої рівності, будемо мати

$$\sqrt{\frac{t-2}{t}} = c|x|.$$

Підставимо замість t його значення і одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\sqrt{\frac{y-2x}{y}} = c|x| \Rightarrow \frac{y-2x}{y} = c^2x^2.$$

Сталу c знайдемо з початкових умов. Для цього замість x і y у загальний інтеграл підставимо $x = -1$ і $y = 1$:

$$\frac{1+2}{1} = c^2 \Rightarrow c^2 = 3.$$

Частинний інтеграл набирає вигляд:

$$\frac{y-2x}{y} = 3x^2.$$

Розв`язуючи це рівняння відносно $y$ маємо частинний розв`язок рівняння:

$$y = \frac{2x}{1-3x^2}.$$