## I. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Первісна. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця основних формул інтегрування. Інтегрування частинами та підстановкою.
2. Інтегрування раціональних функцій шляхом розкладу на елементарні дроби. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

## II. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

3. Визначений інтеграл, як границя інтегральних сум, його властивості.
4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца.
5. Обчислення визначеного інтеграла: інтегрування частинами та підстановкою.
6. Застосування інтегралів до обчислення площ плоских фігур, довжин дуг кривих та об’ємів тіл.

## III. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

7. Невласні інтеграли з нескінченними межами. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Основні властивості. Абсолютна та умовна збіжність. Ознаки збіжності.

## IV. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

8. Функції двох змінних. Область визначення. Границя функції. Неперервність.

9. Частинні похідні. Повний диференціал, його зв'язок з частинними похідними. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала.

10. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

11. Неявні функції. Теорема існування. Диференціювання неявних функцій.

12. Екстремум функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови.

## V. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

13. Диференціальні рівняння I порядку. Задача Коші. Теорема існування і єдності розв’язку задачі Коші. Основні типи рівнянь I порядку (із змінними, що розділяються: однорідні; лінійні; Бернулі).

14. Диференціальні рівняння II порядку, що допускають зниження порядку.

15. Лінійні диференціальні рівняння II порядку. Структура загального розв’язку.

16. Лінійні диференціальні рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

17. Метод невизначених коефіцієнтів для диференціальних рівнянь II порядку із правою частиною спеціального виду.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М.. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980, 1984.

2. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970- 1985. – т.1,2.

3. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1978. – т.1,2.

4. Берман Г.В.Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

## НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Означення. Первісною функцією *F(x)* для даної функції *f(x)*, що задана на [*a,b*], називається функція, що задовольняє умові $F'(x) = f(x)$.

Означення. Якщо *F(x)* – первісна для функції *f(x)*, то вираз *F(x)+C*, де *C* – довільна стала, називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Деякі властивості невизначеного інтеграла:

1. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

## Таблиця інтегралів

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$. 1'. $\int du = u + C$; $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

2. $\int \frac{du}{u} = \ell n|u| + C$. 3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

4. $\int e^u du = e^u + C$. 5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

6. $\int \cos u du = \sin u + C$. 7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$.

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$. 9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$.

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$. 11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$. 14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right| + C$.

Обчислення невизначеного інтеграла за допомогою таблиці інтегралів та його основних властивостей називається безпосереднім інтегруванням або табличним інтегруванням.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int e^{3\cos x} \sin x dx$.

Розв’язування. Даний інтеграл можна представити так:

$$\int e^{3\cos x} \sin x dx = \frac{1}{3}\int e^{3\cos x} 3\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x} d(3\cos x) = -\frac{1}{3}\int e^u du = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x} + C$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{x-3}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

Розв’язування. Скористуємося властивостями невизначеного інтеграла:

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} ,$$

а потім застосуємо формули 1 та 12 із таблиці інтегралів:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} dx = \begin{vmatrix} u = 4+x^2 \\ du = 2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = \sqrt{4+x^2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \begin{vmatrix} u = x \\ du = dx,\ a = 2 \end{vmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{2^2+u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{2^2+u^2}\right| = \ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C.$$

Отже

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{4+x^2}} dx = \sqrt{4+x^2} - 3\ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C.$$

Метод інтегрування частинами. Якщо маємо дві неперервні диференційовані функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, то для них справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (1)$$

Корисно знати деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx, \quad \int P(x)\sin kxdx, \quad \int P(x)\cos kxdx,$

де *P(x)* – многочлен, а *k* – деяке число. У цих інтегралах за *u* слід взяти множник *P(x)*. *u = P(x)*.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx,$

$\int P(x)\mathrm{arctg}\, xdx, \int P(x)\mathrm{arcctg}\, xdx,$ де *P(x)* – многочлен. Тут за *u* слід взяти множник $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg}\, x, \mathrm{arcctg}\, x$.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx,$ де *a* і *b* – числа. Після двократного застосування формули інтегрування частинами в правій частині дістанемо заданий інтеграл. Це дає змогу визначити шуканий інтеграл як розв’язок рівняння. Вибір функції *u* довільний.

<u>Приклад 3.</u> Зайти інтеграл $\int\left(x^2+3x-5\right)e^{2x}dx$.

<u>Розв’язування.</u> Користуючись позначеннями формули (1), покладемо $u=x^2+3x-5 \;\; dv=e^{2x}dx$ та знайдемо диференціал $du$ і функцію $v$:

$$\int\left(x^2+3x\right)e^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2+3x-5 \\ dv=e^{2x}dx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du=(2x+3)dx \\ v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+3x-5)-\frac{1}{2}\int\left(2x+3\right)e^{2x}dx.$$

Знов застосуємо формулу інтегрування частинами, поклавши $u=2x+3, \; dv=e^{2x}dx$:

$$\int\left(2x+3\right)e^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=2x+3 \\ dv=e^{2x}dx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du=2dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}(2x+3)-\int\frac{1}{2}e^{2x}2dx=\frac{1}{2}e^{2x}(2x+3)-\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}(2x+3)-\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

Отже

$$\int\left(x^2+3x-5\right)e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+3x-5\right)-\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e^{2x}(2x+3)-\frac{1}{2}e^{2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+3x-5\right)-\frac{1}{4}e^{2x}(2x+3)+\frac{1}{4}e^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+3x-6\right)+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int(6x^5+3x^2-1)\ln x dx.$

Розв'язування. Покладемо $u=\ln x$, маємо

$$\int(6x^5+3x^2-1)\ln x dx=\left|\begin{array}{l|l} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\int(6x^5+3x^2-1)dx & v=x^6+x^3-x \end{array}\right|=$$

$$=(x^6+x^3-x)\ln x-\int\frac{x^6+x^3-x}{x}dx=(x^6+x^3-x)\ln x-\int(x^5+x^2-1)dx=$$

$$=(x^6+x^3-x)\ln x-\frac{x^6}{6}-\frac{x^3}{3}+x+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int e^x\sin 3x dx$.

Розв'язування. Покладемо $u=\sin 3x$ або $\left(u=e^x\right)$, одержимо

$$\int e^x\sin 3x dx=\left|\begin{array}{l|l} u=\sin 3x & du=3\cos 3x dx \\ dv=e^x dx & v=\int e^x dx-e^x \end{array}\right|=e^x\sin 3x-3\int\cos 3x dx.$$

До інтеграла $\int e^x\cos 3x dx$ знов застосуємо інтегрування частинами, поклавши $u=\cos 3x$.

Маємо

$$\int e^x\cos 3x dx=\left|\begin{array}{l|l} u=\cos 3x & du=-3\sin 3x dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right|=e^x\cos 3x+3\int e^x\sin 3x dx.$$

Тоді

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3\left(e^x \cos 3x + 3\int e^x \sin 3x dx\right) =$$
$$= e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9\int e^x \sin 3x dx.$$

У правій частині останнього співвідношення знаходиться шуканий інтеграл. Перенесемо його в ліву частину, одержимо

$$(1+9)\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x dx = e^x (\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Шуканий інтеграл

$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{1}{10} e^x (\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

<u>Метод підстановки</u> (заміни змінної). Поклавши замість змінної $x$ неперервну монотонну функцію $\varphi(t)$, яка має неперервну похідну $\varphi(x)$, одержимо співвідношення

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt. \ (2)$$

Заміна змінної допомагає привести даний інтеграл до більш простого інтеграла, який є у таблиці інтегралів або легко обчислюється іншим способом.

<u>Приклад 6</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

<u>Розв'язування.</u> Замість змінної $x$ введемо змінну $t^2$ (щоб не було кореня). Одержимо

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2; \ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{tdt}{t+2} =$$
$$= 2\int \frac{t+2-2}{t+2} dt - 2\int \frac{t+2}{t+2} dt - 4\int \frac{dt}{t+2} = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t+2}$$
$$= 2t - 4\ln|t+2| = 2\sqrt{x} - 4\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + C.$$

<u>Приклад 7</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}$.

<u>Розв'язування.</u> Інтеграл має ірраціональність. Позначимо $x+3+t^6$.

одержимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)} = \left| \begin{matrix} x+3+t,\ \sqrt{x+3}=t^3,\ \sqrt[3]{x+3}=t^2 \\ x=t^6-3,\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} =$$

$$=6\int \frac{t^2}{1+t^2} = 6\left( \int dt - \int \frac{t^2}{1+t^2} \right) = 6t - 6\,\text{arctg}\, t = 6\sqrt[6]{x+3} - 6\,\text{arctg}\,\sqrt[6]{x+3} + C.$$

<u>Приклад 8</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+5x+7}$.

<u>Розв'язування.</u> Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегрального виразу $x^2+5x+7 = x^2+2\cdot\frac{5}{2}x\frac{25}{4}+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ .

Позначимо $\left(x+\frac{5}{2}\right)=u$ . Одержимо

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{matrix} x+\frac{5}{2}=u,\ x=u-\frac{5}{2} \\ dx=du \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\,\text{arctg}\,\frac{2u}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Приклад 9</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$ .

<u>Розв'язування.</u> Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат

$9+6x+-3x^2 = -3\left(x^2-2x-3\right) = 3\left(\left(x-1\right)^2-4\right) = 3\left(4-\left(x-1\right)^2\right)$.

Введемо нову змінну $u=x-1$. Одержимо

$$\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=\begin{vmatrix}u=x-1,\\ x=u+1;\ dx=du\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3(u+1)-5}{\sqrt{4-u^2}}du=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\int\frac{udu}{\sqrt{4-u^2}}-2\int\frac{du}{\sqrt{4-u^2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{d(4-u^2)}{\sqrt{4-u^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{u}{2}=\frac{2}{2\sqrt{3}}2\sqrt{4-u^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{u}{2}=$$

$$=\sqrt{3}\sqrt{4-(x-1)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

<u>Інтегрування раціонального дробу.</u> Раціональний дріб – це функція $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ - многочлен степеня *m*, $Q_n(x)$ - многочлен степеня *n*. Якщо $m<n$, то цей дріб – правильний, а якщо $m>n$ - то неправильний.

Всякий неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу, тобто у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=F(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},\ (3)$$

де $F(x)$ - многочлен, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильний дріб.

Якщо треба проінтегрувати вираз (3), то одержимо суму інтегралів

$$\int\frac{\mathrm{P(x)}}{Q(x)}dx=\int F(x)\,dx+\int\frac{\mathrm{R}(x)}{Q(x)}dx.$$

Многочлен інтегрувати легко. Отже залишається розглянути інтегрування раціонального дробу.

Знаменник дробу $Q(x)$ можна розкласти на множники. Нехай цей розклад має вигляд:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\left(x^2+px+q\right)^m\ \ (4)$$

Дроби виду

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \left(k \geq 1\right), \ \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \left(k \geq 1; \ p^2-4q<0\right) \quad (5)$$

називається елементарними раціональними дробами.

Теорема. Правильний раціональний дріб можна єдиним способом розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \\ + \frac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \quad (6)$$

де $A_i, B_i, M_i, N_i$ - дійсні числа ($i$ = 1,2,…), які треба обчислити методом невизначених коефіцієнтів. Пояснимо цей метод на прикладах.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)} dx$.

Розв’язування. Підінтегральна функція представляє собою правильний дріб. Розкладемо цей дріб на суму елементарних дробів за формулою (6):

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}. \quad (7)$$

Приведемо праву частину тотожності (7) до спільного знаменника. Права та ліва частини (7) матимуть однакові знаменники, які можна відкинути та урівняти тільки чисельники. Маємо

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x+3) + C(x-2)^2. \quad (8)$$

Підставляючи замість $x$ будь-які числові значення в праву та ліву частини тотожності (8) (краще підставляти замість $x$ корені многочлена, що знаходиться в знаменнику підінтегрального дробу). Нехай $x=2, x=-3, x=0$. Підставимо ці значення по черзі в (8) та одержимо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів *A, B, C*:

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 10=5B, \qquad B2, \\ x=-3 & 5=25C, \qquad C=\frac{1}{5}, \\ x=0 & \\ & 2=-6A+3B+4C, \; A\frac{4}{3}. \end{array}$$

Тоді вираз (7) приймає вигляд

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{\frac{4}{5}}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{\frac{1}{5}}{x+3},$$

а шуканий інтеграл дорівнює сумі інтегралів:

$$\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$=\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int\frac{x+4}{x^3+x^2-2}dx$.

Розв’язування. Підінтегральна функція представляє собою правильний раціональний дріб. Розкладемо знаменник цього дробу на множники. Дійсним коренем многочлена $Q(x)=x^3+x^2-2$ є число 1.

1. Поділимо многочлен $x^3+2x+2$ на двочлен $x-1$; одержимо многочлен $x^2+2x+2$. Тоді $Q(x)=x^3+x^2-2=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$. Легко перевірити, що квадратний тричлен не має дійсних коренів.

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби за формулою (6) :

$$\frac{x+4}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}. \quad (9)$$

Приведемо до спільного знаменника праву частину рівності (9) і відкинемо знаменники, прирівнюючи чисельники. Одержимо тотожність

$$x+4=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx-Bx-C=$$
$$=x^2(A+B)+x(2A+C-B)+2A-C.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів *A, B, C* прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x* у правій та лівій частинах тотожності:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B,\ A=-B,\ B=-1, \\ x^1 & \left.\begin{array}{l} 1=2A+C-B, \\ 4=2A-C, \end{array}\right\} \Rightarrow 5=4A-B \Rightarrow 5=5A,\ A=1,\ C=-2. \\ x^0 & \end{array}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти *A, B, C* у вираз (9) та проінтегруємо його:

$$\frac{x+4}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x-2}{x^2+2x+2};$$

$$\int\frac{x+4}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}dx=\int\frac{dx}{2}-\int\frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}.$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C_1.$$

Обчислюючи другий інтеграл, спочатку виділимо повний квадрат у знаменнику, а потім зробимо підстановку $x+1=u$. Маємо

$$\int\frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{(x+2)dx}{(x+1)^2+1}=\left|\begin{array}{c} x+1=u,\ x=u-1, \\ dx=du \end{array}\right|=\int\frac{u-1+2}{u^2+1}du=\int\frac{u+1}{u^2+1}du=$$
$$=\int\frac{u\,du}{u^2+1}+\int\frac{du}{u^2+1}= =\frac{1}{2}\int\frac{2u\,du}{u^2+1}+\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right|+\operatorname{arctg}u=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C_2.$$

Тоді

$$\int \frac{x+4}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)} = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C$$, де $C = C_1 + C_2$

Загальне правило інтегрування правильного раціонального дробу.

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, треба:

1) розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;
2) виразити дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ через елементарні дроби;
3) обчислити $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ як суму інтегралів від знайдених елементарних дробів.

Інтегрування деяких тригонометричних функцій. Мова піде про інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \quad (10)$$

де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція від $\sin x$ та $\cos x$.

Інтеграли такого виду можна звести до інтегралів від раціональної функції за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t. \quad (11)$$

Дійсно,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (12)$$

Отже інтеграл (10) після заміни змінної (11), (12) набуває вигляду

$$\int R(\sin x,\,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int R_1(t)dt\,.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}$.

Розв'язування. Скористаємося підстановкою $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ та формулами (12).

Одержимо

$$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}=\left|\begin{array}{l} t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2},\ x=\mathrm{arctg}\,t, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{4t}{1+t^2}-1\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{1-t^2+4t-1-t^2}=2\int\frac{dt}{4t-2t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-2t}-\int\frac{dt}{\left(t-1\right)^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1-1}{x-1+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-2}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}\right|+C.$$

Однак застосування підстановки (11) не завжди доцільне. В окремих випадках можна використати інші, прості методи. Розглянемо деякі з них.

1. Інтеграли виду $\int\sin^n x\cos^m x dx$.

а) Нехай одне з чисел *n* або *m* додатнє та непарне. Метод інтегрування пояснимо на прикладах.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int\sin^2 x\cos^3 x dx$.

Розв'язування. Скористаємося підстановкою

$u=\sin x,\ d(\sin x)=\cos x dx$.

Тоді

$$\int\sin^2 x\cos^3 x dx=\int\sin^2 x\cos^2 x\cos x dx=\int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx=$$

$$\left[u=\sin x, du=\cos x dx\right]=\int u^2\left(1-u^2\right)du=\int u^2 du-\int u^4 du=$$

$$=\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}=\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

б) Нехай обидва показника $n$ і $m$ – парні додатні числа (один з них може дорівнювати нулю). Застосуємо формули

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \ (13)$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язування. Представимо $\cos^4 x$ у вигляді $\left(\cos^2 x\right)$ і скористуємося формулою (13):

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d\left(2x\right) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2. Інтеграли виду $\int \sin mx \sin nxx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \cos nx dx$ обчислюють за допомогою тригонометричних тотожностей:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right);$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(m+n\right)x - \cos\left(m-n\right)x\right); \ (14)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(m+n\right)x + \sin\left(m-n\right)x\right).$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

Розв'язування. Маємо

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(3+5)x + \sin(3-5)x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 3x dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

3. Інтеграли виду $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ можна обчислити застосовуючи підстановку $u = \operatorname{tg} x$, тоді $x = \operatorname{arctg} u,\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}$.

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Розв’язування. Маємо

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = u,\ x = \operatorname{arctg} u \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{u^5}{u^2+1}du = \int \left(u^3 - u + \frac{u}{u^2+1}\right)du = \int u^3 du - \int u du +$$
$$+ \int \frac{u du}{1+u^2} = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + C.$$

## ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку [*a, b*].

Розіб’ємо відрізок [*a, b*] на *n* частинних відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ $(i = 1, 2, ..., n)$. На кожному з частинних відрізків візьмемо довільну точку $C_i$ та розглянемо добуток функції у цій точці $f(C_i)$ на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного частинного відрізку.

Знайдемо суму всіх добутків:

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i. \quad (1)$$

Побудована сума називається інтегральною сумою.

Означення. Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку [*a, b*] називається границя інтегральної суми, якщо вона існує, при $\Delta x_i \to 0,\ n \to \infty$, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i . \quad (2)$$

Числа $a$ і $b$ називаються, відповідно, нижньою та верхньою межами інтегрування.

Геометрично визначений інтеграл представляє площу криволінійної трапеції, обмеженою функцією $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю $ox$ (якщо $f(x) > 0$, рис.1), тобто

$$S = \int_a^b f(x)\,dx . \quad (3)$$

Рис. 1 Рис.2

Якщо $f(x) < 0$, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| . \quad (4)$$

<u>Властивості визначеного інтеграла</u>

1. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$ .

2. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$ .

3. Якщо відрізок інтегрування [*a, b*] розбити на дві частини

[*a, c*] та [c*, b*], то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \ .$$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_c^b f(x)\,dx$ .

5. Якщо на відрізку [*a, b*] дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності

$f(x) \geq \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ \geq \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ .

6. Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x)$ - неперервна на відрізку [*a, b*] , то існує така точка $c$ $(a < c < b)$, що

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Формула Ньютона-Лейбніца. Для обчислення визначеного інтеграла застосовується формула Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \ (5)$$

де $F(x)$ - деяка первісна для функції $f(x)$.

Приклад 1. Обчислити $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2}}$.

Розв'язування. Знайдемо первісну для підінтегральної функції, а потім застосуємо формулу (2). Маємо

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

## Обчислення визначеного інтеграла
## Інтегрування частинами та підстановкою

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad (6)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x=\varphi(x) & a=\varphi(t_1) \\ dx=\varphi'(t)\,dt & b=\varphi(t_2) \end{array}\right] = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,dt. \quad (7)$$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$.

Розв'язування. Застосуємо формулу (6).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right] = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{1}{4\cos 2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi - 0\cos 0\right) + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_2^{11} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$.

Розв'язування. Застосуємо формулу (7).

$$\int_2^{11} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}} = \left[\begin{array}{l|l} x-2=t^2 & x=2,\ t_1=0 \\ x=t^2+2 & x=11,\ t_2=3 \\ dx=2t\,dt & t=\sqrt{x-2} \end{array}\right] = \int_0^3 \frac{t^2+2}{t}2t\,dt = 2\int_0^3 \left(t^2+2\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+2t\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 2\left(\left(\frac{3^3}{3}+2\cdot 3\right)-0\right) = 30.$$

Невласні інтеграли. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,\infty]$. Тоді невласний інтеграл визначається так

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\,. \quad (8)$$

Приклад 4. Обчислити $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$.

Розв'язування. Застосуємо формулу (8).

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2b}\;e^{0}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{-\infty}-1\right)=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

Нехай функція $y=f(x)$ має нескінченний розрив у точці $x=c$, де $c$ $(a\le c\le b)$. Визначений інтеграл від такої функції називається невласним інтегралом від розривної функції та обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,dx\,. \quad (9)$$

Приклад 5. Обчислити $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Розв'язування. Функція $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ має розрив у точці $x = 2$.

Застосовуємо формулу (9).

$$\int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}=\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^2}+\int_2^3\frac{dx}{(x-2)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2-\varepsilon-2}+\frac{1}{0-\varepsilon}\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-2}+\frac{1}{2+\varepsilon-2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\frac{3}{2}\right)=\infty-\frac{3}{2}=\infty.$$

Застосування визначеного інтеграла

Площа плоскої фігури. Якщо криволінійна трапеція обмежена лініями $y=f(x),\ x=a,\ x=b,\ y=0$, то площа обчислюється за формулою

$S=\int_a^b ydx$. (10)

Якщо лінія $y=f(x)$, що обмежує криволінійну трапецію задана параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\left(t_1\le t\le t_2\right)$, то площа обчислюється за формулою

$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$. (11)

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=2x+3$ та $y=x^2$.

Розв'язування. Дана фігура зображена на рис.2. Площу цієї фігури можна представити як різницю двох трапецій. Знайдемо абсциси точок перетину прямої з параболою, для цього розв'яжемо систему $y=x^2, y=2x+3$, звідки $x_1=-1,\ x_2=3$.

Отже маємо межі інтегрування

$$S=S_1-S_2=\int_{-1}^{3}(2x+3)dx-$$

$$-\int_{-1}^{3}x^2dx=\int_{-1}^{3}\left(2x+3-x^2\right)dx=\left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}\ (кв.од)$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=3\cos t,\ y=\sin t$ .

Розв'язування. Схематичний рисунок 3 побудуємо по точках, координати яких обчислимо, надаючи змінній $t$ значення від 0 до $2\pi$. Складемо таблицю значень. В силу симетрії фігури, обчислимо площу її четвертої частини. Застосовуємо формулу (11).

| t | x | y |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 |
| π/2 | 0 | -1 |
| π | -3 | 0 |
| 3π/2 | 0 | -1 |
| 2π | 3 | 0 |

Рис. 3

$$S=4S_1=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t\left(-3\sin t\right)dt=12\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=6\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=6\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)=3\pi\left(кв.од\right).$$

## Довжина дуги лінії

Якщо крива $y=f\left(x\right)$ неперервна та має неперервну похідну на $\left[a,b\right]$, то довжина дуги обчислюється за формулою

$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx$. (12 )

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$, $t_1\le t\le t_2$, то її довжина обчислюється за формулою

$l=\int\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2}dt$. (13)

Приклад 8. Визначити довжину дуги лінії

$x=4\sin t+3\cos t,\ y=3\sin t-4\cos t$, якщо $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язування. Шукану довжину дуги кривої обчислюємо за формулою (13). Знаходимо $x^{'}(t)$ та $y^{'}(t)$:

$x^{'}(t)=4\cos t-3\sin t,\ y^{'}(t)3\cos t+4\sin t.$

Тоді

$$\left(x^{'}(t)\right)^2+\left(y^{'}(t)\right)^2=16\cos^2 t-24\cos t\sin t+9\sin^2 t+9\cos^2 t+24\cos t\sin t+16\sin^2 t=$$
$$=25\cos^2 t+25\sin^2 t=25$$

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25}dt=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=5t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5\pi}{2}.$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції, обмеженою неперервною кривою $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, навколо осі $ox$ обчислюється за формулою

$$V_{ox}=\pi\int_a^b y^2dx\ . \quad (14)$$

Аналогічно обчислюється об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі $oy$:

$$V_{oy}=\pi\int_c^d x^2dy\,. \quad (15)$$

де $x=\varphi(y)$, неперервна на $[c,d]$ крива.

Приклад 9. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2x^2$ та $y=x^2+1$, навколо осі $oy$.

Розв'язування. На рис. 4 видно, що шуканий об'єм $V$ дорівнює різниці двох об'ємів, одержаних обертанням навколо осі $oy$ криволінійних трапецій $OBO_1$ та $ABO_1$. Кожен із цих об'ємів обчислюється за формулою $V=\pi\int_a^b x^2dy$.

Межі інтегрування – це точки перетину парабол $y=2x^2$, $y=x^2+1$. Розв'язуючи систему, знаходимо точку *B(1,2).*

Отже

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^2 \frac{y}{2}dy - \pi\int_0^2 (y-1)\,dy = \frac{\pi}{4}y^2\Big|_0^2 - \frac{\pi(y-1)^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\text{куб.од}).$$

## ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Означення. Змінна величина $Z$ називається функцією двох незалежних змінних $x$ та $y$, якщо кожній парі значень $(x, y)$ із множини $D$ відповідає одне конкретне значення $Z$.

Означення. Множина $D$ називається областю визначення функції $Z$, а змінні $x$ та $y$ - її аргументами.

Позначення функцією двох змінних: $Z = f(x, y)$, $Z = Z(x, y)$, $Z = \varphi(x, y)$ та інше.

Рівняння $Z = f(x, y)$ геометрично представляє собою деяку поверхню. Пара значень $(x, y)$ визначає точку $P(x, y) \in D$, а $Z(x, y)$ $M(x, y, z)$ на цій поверхні. Тому значення $Z$ залежить від положення точки P. Z = Z(P).

Границя функції $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$, якщо різниця $f(P) - A$ є нескінченно малою при будь-якому способі наближення $P$ до $P_0$.

Якщо задана функція $Z = Z(x, y)$ та точка $P(x, y) \in D$, то частинні прирости по $x$, $y$ та повний приріст функції визначаються рівностями:

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$\Delta_y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$;

$\Delta Z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$.

Функція $f(x, y)$ називається неперервною в точці, якщо $\lim \Delta Z = 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Означення. Якщо існує кінцева границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x},$$

то вона називається частинною похідною функції $Z = f(x, y)$ по змінній $x$ і позначається одним із символів: $f_x^{'},\ Z_x^{'},\ \frac{dz}{dx}, \frac{df}{dx}$.

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній $y$.

Частинна похідна знаходиться за правилами диференціювання функції однієї змінної, причому інші змінні вважаються у цьому випадку сталими.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції

$$u = 4x^3 y + 5x^2 z^2 - 3z^4 + 2y.$$

Розв’язування.

$$\frac{du}{dx} = 12x^2 y + 10xz^2;\ \frac{du}{dy} = 4x^3 + 2;\ \frac{du}{dz} = 10x^2 z - 12z^3.$$

Означення. Похідна скалярного поля $u = u(x, y, z)$ за напрямком $l$, заданому вектором $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, визначається за формулою

$$\frac{du}{dl} = \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma,$$

де

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

Величина $\frac{du}{dl}$ визначає швидкість змінювання поля в точці $M$, а її знак – зростання або спадання поля.

Означення. Градієнтом скалярного поля називається вектор, що визначається формулою

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{du}{dx}\vec{i} + \frac{du}{dy}\vec{j} + \frac{du}{dz}\vec{k}.$$

Градієнт – це вектор швидкості найбільшого змінювання поля $u$.

Приклад 2. Нехай

$$u = x^2 + y^3 + 2z^2 x,\ A(1,-1,2),$$
$$\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Знайти: 1) $\frac{du}{dl}$ у точці $A$;

2) $\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_A$.

Розв'язування. 1) Знаходимо похідну за напрямком:

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2z^2;\ \ \frac{du}{dx}\Big|_A = 2\cdot 1 + 2\cdot 2^2 = 10;$$

$$\frac{du}{dy} = 3y^2;\ \ \frac{du}{dy}\Big|_A = 3\cdot(-1)^2 = 3;$$

$$\frac{du}{dz} = 4zx;\ \ \frac{du}{dz}\Big|_A = 4\cdot 2\cdot 1 = 8;$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3};\ \cos\beta = -\frac{2}{3};\ \cos\gamma = \frac{1}{3};$$

$$\frac{du}{dl} = 10\cdot\frac{2}{3} + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 8\cdot\frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

2) Знаходимо градієнт поля в точці $A$:

$$\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_A = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}.$$

## ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Необхідною умовою існування екстремуму функції двох змінних $Z = f\left(x, y\right)$ є те, що в точках екстремуму частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю:

$$\frac{dz}{dx} = 0; \frac{dz}{dy} = 0.$$

Точки, в яких перші похідні дорівнюють нулю, називаються критичними. Кожну критичну точку необхідно перевірити на екстремум з допомогою достатніх умов.

Означення. Нехай $M_0\left(x_0, y_0\right)$ - критична точка функції і

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Тоді:

якщо $AC - B^2 > 0, \ A > 0,$ то $f\left(x_0, y_0\right) = Z_{\min}$;

якщо $AC - B^2 > 0, \ A < 0,$ то $f\left(x_0, y_0\right) = Z_{\max}$;

якщо $AC - B^2 < 0,$ то екстремуму немає;

якщо $AC - B^2 = 0,$ то необхідно провести додаткове дослідження (екстремум може бути, а може і не бути).

Приклад 3. Знайти екстремум функції: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Перевіримо необхідну умову існування екстремуму:

$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$, Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо критичну точку $M_0$ (-4;1).

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Таким чином, $A=2,\ B=-1,\ C=2,\ AC-B^2=2\cdot 2-(-1)^2=4-1=3>0$.

Отже функція має екстремум у точці $M_0^3$ . Так як $A=2>0$ , то у цій точці маємо мінімум.

$Z(M_0)=Z_{\min}=(-4)^2\cdot 1+1^2+9(-4)-6\cdot 1+20=-1$ .

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення. Рівняння, що включає в себе незалежну змінну $x$ , шукану функцію $y$ і похідні від $y$ по $x$, називають диференціальними рівняннями.

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що в нього входить. Степенем диференціального рівняння називають порядок показника степені при найвищій похідній.

Наприклад, $y'=x+y$ - рівняння I порядку, I степені.

$\left(y''\right)^3+\left(y'\right)^3=xy$ - рівняння II порядку, III степені.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння називають будь-яку функцію $y=\varphi(x)$, що будучи підставлена в рівняння, перетворить його на тотожність.

Розрізняють загальні і частинні розв'язки диференціального рівняння. Загальний розв'язок містить стільки довільних сталих, скільки відповідають порядку рівняння. Частинні розв'язки отримують із загального при конкретних значеннях довільних сталих.

Розглянемо геометричну задачу, що приводить до поняття диференціального рівняння. Необхідно на площині $xoy$ знайти криву, що у кожній своїй точці має дотичну, що утворює з додатним напрямком осі $ox$ кут, тангенс якого дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Нехай $M(x,y)$ - довільна точка кривої (рис.6). За умовою $\operatorname{tg}\alpha = 2x$.

Але $\operatorname{tg}\alpha = y'(M)$. Тому $y'(M) = 2x$ або $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Це шукане диференціальне рівняння. Його загальний розв'язок $y = x^2 + C$. Частинними розв'язками рівняння будуть функції $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$ і т. інше.

Геометрично кожний частинний розв'язок на площині $xoy$ представляє деяку криву, що називається інтегральною кривою. Загальний розв'язок рівняння дає родину інтегральних кривих, що залежить від параметра $C$ (рис.7).

рис.7

Для того, щоб із загального розв'язку виділити частинний, необхідно задати точку $M(x_0, y_0)$ через яку проходить задана інтегральна крива, тобто задати умову, що при $x = x_0,\ y = y_0$ або $y(x_0) = y_0$.

Ці умови називають початковими умовами Коші. Наприклад, необхідно знайти частинний розв'язок рівняння $y' = 2x$, що задовольняє умовам $y(0) = 2$. Маємо: $y = x^2 + C,\ 2 = C,\ y = x^2 + 2$ - частинний розв'язок.

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ПОРЯДКУ І СТЕПЕНЯ

Загальний вид диференціального рівняння І порядку

$$F(x, y, y') = 0.$$

Таке рівняння, при умові, що його можна розв'язати відносно $y'$, має вид: $y' = f(x, y)$. Його загальний розв'язок містить одну довільну сталу $y = \varphi(x, C)$.

Для рівняння $y' = f(x, y)$ справедлива теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial t}{\partial x}$ неперервні в околі деякої точки $M(x_0, y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, що задовольняє умові, що при $x = x_0,\ y = y_0$.

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь І порядку.

### Рівняння із змінними, що розділяються.

Таке рівняння можна представити у виді

$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (1)

Загальний розв'язок такого рівняння можна отримати, якщо розділити змінні, тобто $dy = f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx$, або $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$.

Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1), тобто

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' x^3 = 2y$.

Розв'язування. Замінимо $y'$ на $\dfrac{dy}{dx}$ і розділимо змінні.

$$\frac{dy}{dx}\cdot x^3 = 2y,\ \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x^3}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння.

$\int \dfrac{dy}{y} = 2\int \dfrac{dx}{x^3},\ \ln y = 2\cdot\dfrac{x^{-2}}{-2} + C,\ \ln y = C - \dfrac{1}{x^2}$ - загальний розв'язок рівняння.

## ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння I порядку називається однорідним, якщо його можна представити у виді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

Якщо застосувати заміну змінної $\dfrac{y}{x} = t$ або $y = tx,\ y' = t + t' x$, то отримаємо рівняння із змінними, що розділяються.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$$

Розв'язування. Поділимо всі члени рівняння на $x$:

$y'\cos\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1$ і зробимо заміни змінних $t=\frac{y}{x}$ , $y=tx,$ $y'=t+t'x$.

Одержимо $\left(t+t'x\right)\cos t=t\cos t-1$.

Після елементарних перетворень будемо мати

$t'x\cos t=-1,$ $\frac{dt}{dx}\cdot x\cos t=-1,$ $\cos tdt=-\frac{dx}{x}$. Проінтегруємо:

$\int\cos tdt=-\int\frac{dx}{x},$ $\sin t=C-\ln|x|$.

Повернемось до старих змінних:

$\sin\frac{y}{x}=C-\ln|x|$ - загальний розв'язок.

## ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ І ПОРЯДКУ

Означення. Диференціальне рівняння І порядку називається лінійним, якщо його можна представити у виді

$y'+P(x)y=Q(x)$, (3)

де $P(x), Q(x)$ - задані функції.

Загальний інтеграл рівняння (3) можна знайти, якщо замість $y$ підставити добуток двох функцій $u=u(x),$ $v=v(x)$, тобто

$y=uv$ $i$ $y'=u'v+uv'$. (4)

Розглянемо на прикладі спосіб знаходження цих функцій.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$y'-\frac{3y}{x}=x$.

Розв'язування. Зробимо заміну змінних (4).

$u'v+uv'-\frac{3uv}{x}=x,$

$u'v+u\left(v'-\frac{3uv}{x}\right)=x$ .

Нехай функції $u$ $i$ $v$ будуть такими, що вираз $v' - \frac{3uv}{x} = 0$. Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь $v' - \frac{3uv}{x} = 0,\ u'v = x$.

Розв’яжемо перше рівняння системи, що представляє собою рівняння із змінними, що розділяються.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x},\ \frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x},\ \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування маємо

$$\ln|v| = 3\ln|x|,\ v = x^3.$$

Підставимо це значення $v$ у друге рівняння системи

$$u'x^3 = x,\ \frac{du}{dx}\cdot x^2 - 1,\ du = \frac{dx}{x^2}.$$

Після інтегрування знаходимо $u$: $u = -\frac{1}{x} + C$.

Загальний розв’язок рівняння:

$$y = uv = x^3\left(C - \frac{1}{x}\right),\ y = Cx^3 - x^2.$$

Аналогічно лінійному розв’язується рівняння Бернулі, що має вид

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n.$$

## ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІІ ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x),\ (5)$$

де $p, q - \mathrm{const}$, називається неоднорідним лінійним рівнянням ІІ порядку із сталими коефіцієнтами.

Якщо права частина рівняння (5) дорівнює нулю, то маємо однорідне рівняння

$y'' + py' + qy = 0$ . (6)

Існує теорема про структуру загального розв'язку лінійного рівняння без правої частини. Якщо $y_1$ *і* $y_2$ - розв'язки рівняння (5) такі, що їх відношення не дорівнює сталій величині $\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \neq \mathrm{const}$, то лінійна комбінація цих функцій

$$y C_1 y_1 + C_2 y_2$$

є загальним розв'язком рівняння.

Для того, щоб з'ясувати який вид будуть мати функції: $y_1$ *і* $y_2$ , необхідно скласти зване характеристичне рівняння. Воно утвориться із рівняння (6), якщо в ньому замінити $y$ одиницею, а кожну похідну шуканої функції $y'$ *і* $y''$ величиною $k$ в степені, рівній порядку похідної.

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (7)$$

У залежності від коренів цього квадратного рівняння маємо три можливих випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні $\left(k_1 \neq k_2\right)$, то загальний розв'язок рівняння (6) має вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (8)$$

де $C_1, C_2$ - довільні сталі.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2$.

У цьому випадку маємо:

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{k_1 x} \quad (9)$$

3. Корені характеристичного рівняння комплексні, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку маємо:

$$y = e^{dx}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) \quad (10)$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Розв’язування. Складемо характеристичне рівняння : $k^2-4k+3=0$. Корені цього рівняння знаходимо за формулами Вієта: $k_1k_2=3,\ k_1+k_2=4$. Отже, $k_1=3,\ \ k_2=1$. Це дійсні різні корені. Тому

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''-4y'+4y=0$.

Розв’язування. $k^2-4k+4=0$, $k_1=k_2=2$.

Корені дійсні, рівні: $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{2x}$.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''-4y'+13y=0$.

Розв’язування. $k^2-4k+13=0$, $k_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-46}}{2}$ ,

$k_{1,2}=2\pm3i$ - комплексні корені.

$$y=e^{2x}\left(C_1\cos3x+C_2\sin3x\right).$$

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння II порядку (5):

$$y''+py'+qy=f(x)$$

Розв’язати таке рівняння можна або методом варіації, або, якщо це дозволяє права частина рівняння, методом невизначених коефіцієнтів.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВЯЗУВАННЯ

### Тема: „Невизначений та визначений інтеграли”

1 – 10. Знайти невизначений інтеграл.

1. а) $\int\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{\cos^2x}dx$; б) ; в) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int\dfrac{(5x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$.

2. а) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int\left(x^2+1\right)e^{5x}dx$; в) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\int\dfrac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}$.

3. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int \left(x^2+3\right)3^x dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$; г) $\int \frac{(3x-4)dx}{9x^2+6x+3}$.

4. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$; в) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$; г) $\int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

5. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; б) $\int \sqrt{x}\ln xdx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; г) $\int \frac{(7-3x)dx}{2x^2-3x+1}$.

6. а) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int x\arcsin xdx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-2}$; г) $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+4x+8}$.

7. а) $\int e^{3\cos x}\sin xdx$ ; б) $\int e^{2x}\cos xdx$; в) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}}dx$; г) $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$.

8. а) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$; б) $\int e^{4x}x^2dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5x-1}}$; г) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+3x+4}$.

9. а) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$; б) $\int 4^x\sin xdx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+2}$; г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

10. $\int \frac{(2\ln x+3)^3\,dx}{x}$; б) $\int x^2\cos 2xdx$; в) $\int \frac{2-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; г) $\int \frac{(x-7)dx}{x^2+4x+13}$.

**11 – 20. Знайти невизначені інтеграли**.

11. а) $\int \sin^4 xdx$; б) $\int \frac{dx}{2+2\cos x-\sin x}$;

12. а) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+3}$;

13. а) $\int \sin x\cos 3xdx$; б) $\int \frac{dx}{2\cos x-\sin x-2}$;

14. а) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

15. а) $\int \cos x\cos 3xdx$; б) $\int \frac{dx}{2+3\sin x}$;

16. а) $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$;

17. а) $\int \mathrm{tg}^5 x dx$; б) $\int \frac{dx}{9-8\sin x}$;

18. а) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}$;

19. а) $\int \cos^6 x dx$; б) $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$;

20. а) $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$; б) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$;

**21 – 30. Обчислити визначені та невласні інтеграли**.

21. а) $\int\limits_0^1 \ln(x+1) dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$;

22. а) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

23. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$;

24. а) $\int\limits_0^1 x \,\mathrm{arctg}\, x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$;

25. а) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{1x}}$; б) $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x} dx$;

26. ) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; б) $\int\limits_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

27. а) $\int\limits_0^1 e^{-x} dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} dx$;

28. а) $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+3}$;

29. а) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

30. а) $\int_0^3 \ln(x+3)dx$; б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$;

**31 – 40. Обчислити площу фігури, обмежену лініями. Зробити схематичні рисунки.**

31. а) $y=x^2+7x,\ y=4x+4$.

32. а) $xy=7,\ x+y=8$.

33. а) $y=x^2+4x,\ y=7x+4$.

34. а) $y=x^2-3x,\ y=-2x$ .

35. а) $x^2-3y=4,\ x^2+y=8$.

36. а) $y^2-3x=14,\ y^2+2x=4$.

37. а) $y=9-x^2,\ y=x^2-3x$.

38. а) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=5$.

39. а) $y=x^2,\ y=2-x^2$.

40. а) $y^2=1-x,\ x=-3$.

**41 – 50. Обчислити довжину дуги кривої**.

41. $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t),\ 0\le t\le 2\pi$.

42. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

43. $x=e^t(\cos t+\sin t),\ y=e^t(\cos t-\sin t),\ 0\le t\le 1$.

44. $x=2\sin t-6\cos t,\ y=6\sin t-6\cos t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

45. $x=4(\cos t+t\sin t),\ y=4(\sin t-t\cos t),\ 0\le t\le 2$.

46. $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le\pi$.

47. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

48. $x=5\sin t+2\sqrt{6}\cos t,\ y=2\sqrt{6}\sin t-5\cos t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

49. $x=t^2,\ y=t-\dfrac{1}{3}\cdot t^3,\ 0\le t\le 1$.

50. $x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t),\ 0\le t\le\pi$.

**51 – 60. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями. У парних варіантах вісь обертання $oy$, у непарних $ox$. Зробити схематичний рисунок.**

51. $y=e^x$ , $y=1,\ x=\ln 2$. 52. $x=\sqrt{y},\ y=2$.

53. $y=\ln x,\ y=0,\ x=e^2$. 54. $y=4x^2,\ y=4x$.

55. $y=\sin x,\ y=2\sin x,\ 0<x<2\pi$. 56. $x=\sqrt{y},\ x=2\sqrt{y},\ y=1$.

57. $y=e^{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=2$. 58. $x=\sqrt{y},\ x=3\sqrt{y},\ y=2$.

59. $y^2=5-x,\ x=1$. 60. $y=9x^2,\ y=9x$.

## Тема: ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

61. Дана функція $z=e^{-\cos(ax-y)}$.

Показати, що $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

62. Дана функція $z=\ln\left(x^2+y^2+2y+1\right)$.

Показати, що - $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

63. Дана функція $z=\sin^2\left(y-ax\right)$.

Показати, що $a^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

64. Дана функція $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Показати, що $x^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$.

65. Дана функція $z=\frac{x}{y}$.

Показати, що $x^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ =0$.

66. Дана функція $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

67. Дана функція $z=\arcsin\sqrt{\frac{y-x}{y}}$.

Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ .

68. Дана функція $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

69. Дана функція $z=x^y$.

Показати, що $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+y\ln x\right)\frac{\partial z}{\partial x}$.

70. Дана функція $z=2^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$.

Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

**71-80. Задана функція $z=f\left(x,y\right)$, точка $A$ і вектор $\vec{a}$.**

Необхідно знайти:

1) $\operatorname{grad} z$ у точці $A$;

2) похідну у точці $A$ за напрямком вектора $\vec{a}$.

71. $z=5x^2+6xy,\ A\left(2;1\right),\ \vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

72. $z=\ln(5x+3y,\ A\left(2;2\right),\ \vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

73. $z=\operatorname{arctg}\left(xy^2\right),\ A\left(2;1\right),\ \vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

74. $z=2x^3y+3x^2y^2,\ A\left(1;-2\right),\ \vec{a}=6\vec{i}-3\vec{j}$.

75. $z=2x^4+8x^2y^3,\ A\left(2;-1\right),\ \vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{j}$.

76. $z=\ln(2x^2+y^3),\ A\left(3;-1\right),\ \vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$.

77. $z=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y^2}\right),\ A\left(3;1\right),\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$.

78. $z=2x^2+3xy+4y^2,\ A\left(2;-2\right),\ \vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}$.

79. $z=\ln(3x^2+5y^3),\ A\left(2;3\right),\ \vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$.

80. $z=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right),\ A\left(1;2\right),\ \vec{a}=-12\vec{i}-5\vec{j}$.

**81 – 90. Знайти екстремуми функцій**:

81. $z=3xy-x^3-27y^3+11$ 86. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$

82. $z=8x^3+2\sqrt{2}\,y^3-6xy+1$ 87. $z=6xy-x^3-y^3+4$

83. $z = x^3 - 27y^3 - 3xy + 2$ 88. $z = 6xy - x^3 - 8y^3 + 2$

84. $z = 6xy - 2\sqrt{2}\,y^3 - 8x^3 + 2$ 89. $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 3$

85. $z = 27x^3 + y^3 - 3xy + 5$ 90. $z = 24x^3 + 3y^3 - 6xy + 5$

## Тема: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**91 – 100. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь I порядку**.

91. а) $2xy' = 1 - y^2$; б) $xy' = y - 2\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

92. а) $xyy' = \sqrt{y^2 + 1}$; б) $xy' = y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

93. а) $xy' = y^2 - y$; б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$ .

94. а) $(1 - x^2)y' = 2xy$; б) $x^2 y' = y^2 - 8yx + 20x^2$ .

95. а) $(1 - x^2)y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$ ; б) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$ .

96. а) $(x^2 + 1)yy' = \sqrt{3 + y^2}$ ; б) $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$.

97. а) $\sqrt{2 - x^2}\,y' = 2x(y^2 + 1)$; б) $x^2 y' = y^2 - 11yx + 20x^2$ .

98. а) $(4 + x^2)yy' = \sqrt{2 + y}^{\,2}$; б) $xy' = y + x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

99. а) $\sqrt{1 - x^2}\,yy' = \left(4 + y^2\right)$; б) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$ .

100. а) $2xyy' = \sqrt{5 - y^2}$ ; б) $x^2 y' = y^2 + 7yx + 5x^2$.

**101 – 110. Знайти загальний і частинний розв'язок диференціального рівняння**

101. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x\left(x+1\right)^2, \quad y\left(0\right) = 2$.

102. $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(0) = 3.$

103. $y' + \dfrac{y}{x+2} = x(x+2), \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

104. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$

105. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}.$

106. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

107. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

108. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}.$

109. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{3e^x}{x}, \quad y(1) = e.$

110. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$