ОСНОВНИЙ КУРС

Вступ

Математичний аналіз – це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи дано у працях І.Ньютона, Г.Лейбніца, Л.Ейлера та інших математиків 17-18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О.Л.Коші.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

У 19-20 ст. методами математичного аналізу почали вивчати складніші математичні об’єкти, ніж функції. Це привело до створення функціонального аналізу та багатьох інших математичних дисциплін.

4.1. Основні поняття про послідовність і функцію

Нехай кожному натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ за деяким законом поставлено у відповідність дійсне число x_n. Тоді кажуть, що цим визначена *послідовність чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ або, коротше, послідовність $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Окремі числа послідовності називають її *елементами*.

Необхідно мати на увазі, що x_n і x_m при $n \neq m$ вважаються відмінними як елементи послідовності, хоча не виключено, що ці числа рівні між собою, тобто $x_n = x_m$.

Приклади послідовностей:

Приклад 1.1. $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}.$

Приклад 1.2. $\left\{\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}, 2\ldots\right\} = \left\{2^{(-1)^n}\right\}.$

Приклад 1.3. $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}.$

Приклад 1.4. $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\} = \{(-1)^n n\}.$

Послідовність $\{x_n\}$ називається *неспадною* (*незростаючою*), якщо $x_k \le x_{k+1}$ $(x_k \ge x_{k+1})$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$. Якщо виконуються строгі нерівності $x_k < x_{k+1}$ $(x_k < x_{k+1})$, то послідовність $\{x_k\}$ називається *строго зростаючою* (*строго спадною*). Послідовності спадні і зростаючі, неспадні і незростаючі називаються *монотонними*.

Приклад 1.5. $\left\{1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$ – незростаюча послідовність.

Приклад 1.6. $\{n^2\}$ – зростаюча послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ *обмежена зверху* (*числом* M), якщо існує число M таке, що $x_k \le M$ для всіх $k = 0, 1, \ldots$. Послідовність $\{x_n\}$ *обмежена знизу* (*числом* m), якщо існує число m таке, що $x_k \ge m$ для всіх $k = 0, 1, \ldots$.

Елементами монотонних послідовностей можна розмістити в ланцюжки $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$. $(x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots)$, звідки видно, що неспадна послідовність обмежена знизу, а незростаюча – зверху.

Візьмемо деяку множину значень величини x, тобто множину точок на числовій осі Ox, позначимо її через E. Кожному значенню x з множини E за деяким правилом поставимо у відповідність одне певне значення іншої величини y. Тоді кажуть, що ця величина y є *функцією* величини x або що величини x і y зв'язані між собою *функціональною залежністю*. При цьому величину x називають *аргументом* функції y, а множину E – *областю визначення* функції y. Значенню аргументу x з області E визначення функції y ми можемо обирати довільно, тому величина x *називається незалежною змінною*. Значення x функції y, коли значення незалежної змінної x уже визначено, ми обирати довільно не можемо, це значення буде строго визначеним саме тим, яке відповідає обраному значенню незалежної змінної. Значення функції залежить від значень, що їх приймає незалежна змінна, і зазвичай змінюються при її зміні. Тому функцію називають ще *залежною змінною*. Величина y називається *функцією* змінної величини x в області визначення E, якщо кожному значенню x з цієї області відповідає одне певне значення величини y.

Областю визначення функції може бути довільна множина точок числової осі, але найчастіше в математичному аналізі та його застосуваннях розглядають лише функції, областями визначення яких є області двох типів:

1) множина точок числової осі що зображають цілі невід'ємні числа, тобто точок $x = 0, x = 1, x = 2, \ x = 3...$, (або деяка частина цієї множини);

2) один або декілька інтервалів (скінченних або нескінченних) числової осі.

Кажуть, що в першому випадку ми маємо *функцію цілочисельного аргументу*, а в другому випадку – *функцію неперервного аргументу*.

Множина значень, які приймає функція y, називається *областю значень функції*.

Задати функцію – це означає вказати область її визначення і правило, за допомогою якого за даним значенням незалежної змінної знаходяться відповідне значення функції. Найважливішими способами задання функції є задання таблицею, формулою і графіком.

1. *Табличне задання*. При цьому способі задання виписується ряд значень незалежної змінної і відповідні їм значення функції. Цей спосіб часто застосовується. Переваги цього способу – для кожного значення незалежної змінної, що наведене в таблиці, можна одразу, без вимірювань і обчислень, знайти відповідне значення функції. Недолік же – неможливість задати функцію повністю (знайдуться такі значення незалежної змінної, які не наведені в таблиці) відсутність наочності.

2. *Аналітичне задання* (*задання формулою*) полягає в тому, що наводиться формула, за допомогою якої по заданим значенням незалежної змінної можна отримати відповідні їм значення функції. При аналітичному заданні функції під областю визначення (якщо немає додаткових умов) розуміють множину значень x, при яких формула, що визначає функцію, має зміст. Аналітичне задання функції – основний спосіб задання в математичному аналізі. Переваги аналітичного способу полягають: в компактності задання; в можливості обчислити значення функції для довільного значення незалежної змінної з області визначення; і саме головне – в можливості застосування до заданої функції апарату математичного аналізу. Незручностями аналітичного способу є недостатня наочність; необхідність виконання обчислень, іноді досить громіздких.

3. *Графічне задання*.

> *Графіком функції* (в системі декартових прямокутних координат) називається множина всіх точок, абсциси яких є значеннями незалежної змінної, а ординати – відповідні їм значення функції.

Графіком функції зазвичай слугує деяка крива (зокрема, і пряма) лінія. Якщо лінія на координатній площині xOy така, що кожна пряма, яка паралельна осі ординат, має з нею не більше, ніж одну спільну точку, то ця лінія зображає деяку функцію.

Графічне задання функції полягає в заданні графіка цієї функції.

До графіка функції, як і до таблиці, не може бути безпосередньо застосований апарат математичного аналізу, але графік функції поряд з цим недоліком має досить важливу перевагу – наочність, що робить його надзвичайно корисним при вивченні функцій.

Вивчити задану функцію – це означає описати характер її зміни (або її поведінку) при зміні незалежної змінної. При цьому ми всюди (де не обумовлено супротивне) будемо мати на увазі, що незалежна змінна змінюється зростаючи, причому, переходячи від менших значень до більших, вона пробігає всі свої проміжні значення.

Значення x, при якому функція перетворюється на нуль, $f(x)=0$, називається *нулем* функції.

В інтервалі додатного знака функції графік її розміщається над віссю Ox, в інтервалі від'ємного знака функції графік її розміщається під віссю Ox, в нулі функції графік має спільну точку з віссю Ox.

Функція $y=f(x)$ називається *парною*, якщо при зміні знака у будь-якого, значення аргументу значення функції не змінюється: $f(-x)=f(x)$.

Функція $y=f(x)$ називається *непарною*, якщо при зміні знака у довільного значення аргументу зміниться лише знак значення функції, а абсолютна величина цього значення залишиться без зміни: $f(-x)=-f(x)$.

В цих означеннях функції визначені в області, що симетрична відносно початку координат.

Прикладами парних функцій є $y=x^2$, $y=\cos x$, прикладами ж непарних функцій є $y=x^3$, $y=\sin x$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy; графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція може бути ні парною, ні непарною. Наприклад, такі функції $y=x+1$, $y=2x$, $y=3\sin x+2\cos x$.

Функція $y=f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число a, що для будь-якого x виконується рівність: $f(x+a)=f(x)$.

Якщо функція періодична, то мають місце також рівності: $f(x+2a)=f(x)$, $f(x+3a)=f(x)$, $f(x-a)=f(x)$, $f(x+ka)=f(x)$, $k\in z$.

Найменше додатне число a, при якому умова $f(x+a)=f(x)$ виконується, називається *періодом* функції.

Прикладом періодичної функції є $y=\sin x$, її період дорівнює 2π. Якщо періодична функція не визначена в точці x_0, то вона не визначена і у всіх точках x_0+ka, де a – період, $k\in z$. Наприклад, функція $y=\operatorname{tg} x$, період якої дорівнює π, не визначена в точках $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Поведінку періодичної функції достатньо розглянути на довільному інтервалі, довжина якого дорівнює періоду функції. Наприклад, в інтервалі $0\le x\le a$, де a – період. В інших точках осі Ox значення функції отримують простим повторенням значень, що вона їх приймає в відрізку $[0, a]$. Графік періодичної функції отримуємо шляхом повторення частини графіка, що відповідає інтервалу осі Ox, рівному по довжині періоду функції.

Функція називається *зростаючою* на інтервалі, якщо більшим значенням аргументу відповідають більші значення функції; функція називається *спадною*, якщо більшим значенням аргументу відповідають менші значення функції.

Так, наприклад, функція $y = 2^x$ зростає на всій числовій осі, а функція $y = 2^{-x}$ – спадає. Функція $y = x^2$ спадає на інтервалі $(-\infty; 0]$ і зростає на інтервалі $[0; +\infty)$.

Якщо розглядати графік функції зліва направо (що відповідає зростанню аргументу x), то для зростаючої функції графік піднімається вгору, а для спадної – опускається донизу.

Інтервал незалежної змінної, на якому функція зростає, називається *інтервалом зростання*, а інтервал, на якому функція спадає, – *інтервалом спадання*.

Як інтервал зростання, так і інтервал спадання називають *інтервалами монотонності* функції, а функцію на цьому інтервалі – *монотонною функцією*.

Графіки і властивості основних елементарних функцій

Основними елементарними функціями називають такі функції:

1) *степенева функція* $y = x^n$, де n – дійсне число;
2) *показникова функція* $y = a^x$, де a – додане число і $a \neq 1$;
3) *логарифмічна функція* $y = \log_a x$, де основа логарифма a – додатне число і $a \neq 1$;
4) *тригонометричні функції*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
5) *обернені тригонометричні функції*: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Ці функції відомі з курсу середньої школи, ми нагадаємо їх конспективно.

З основних елементарних функцій можна будувати інші функції за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення і ділення) та за допомогою нової операції взяття функції від функції, яку ми зараз розглянемо.

Нехай на деякій множині E значень аргументу x задана функція $u = \varphi(x)$ і G – область значень функції u. Нехай, далі, на множині G задана функція $y = f(u)$. Тоді кожному значенню x з множини E відповідає одне певне значення u з множини G, якому в свою чергу відповідає одне певне значення y. Таким чином, кожному значенню x з множини E відповідає одне певне значення y, тобто y є деяка функція x, позначимо її через $y = F(x)$. Вираз для функції $F(x)$ за допомогою функцій f і φ записують так: $y = F(x) = f(\varphi(x))$.

Кажуть, що $F(x)$ як функція x є складеною функцією, складеною з функцій f і φ, або функцією f від функції φ. Функція $u = \varphi(x)$ називається при цьому проміжною змінною.

Функція називається *алгебраїчною*, якщо її значення можна отримати, виконуючи над незалежною змінною скінченне число алгебраїчних дій: додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником. Функція, що не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*.

Алгебраїчна функція називається *раціональною*, якщо серед дій, що виконуються над незалежною змінною, відсутнє добування кореня. Алгебраїчна функція що не є раціональною, називається *ірраціональною*.

Графіки і властивості основних елементарних функцій

1. *Лінійна функція* $y = ax + b$ $(a, b \in R)$.

$D(f) = R$; $E(f) = R$ (якщо $a \neq 0$) і $E(f) = \{b\}$ (якщо $a = 0$). Функція зростає при $a > 0$, спадає при $a < 0$. Графік функції – пряма лінія.

2. *Квадратична функція* $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $D(f) = R$.

а) $a > 0$

$$E(f) = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty\right).$$

Функція спадає на інтервалі $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, зростає на інтервалі $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Графік функції – парабола з віссю $x = -\frac{b}{2a}$, вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ і вітками, що направлені вгору.

б) $a < 0$

$$E(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Функція зростає на інтервалі $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і спадає на інтервалі $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Графік функції – парабола з віссю $x = -\frac{b}{2a}$, вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ і вітками, що направлені вниз.

3. *Степенева функція* $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$.

а) $\alpha = 2n$, $n \in N$ (рис. 1.1).

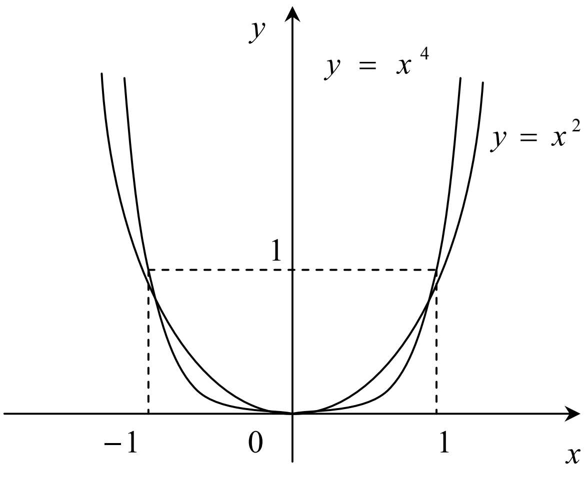
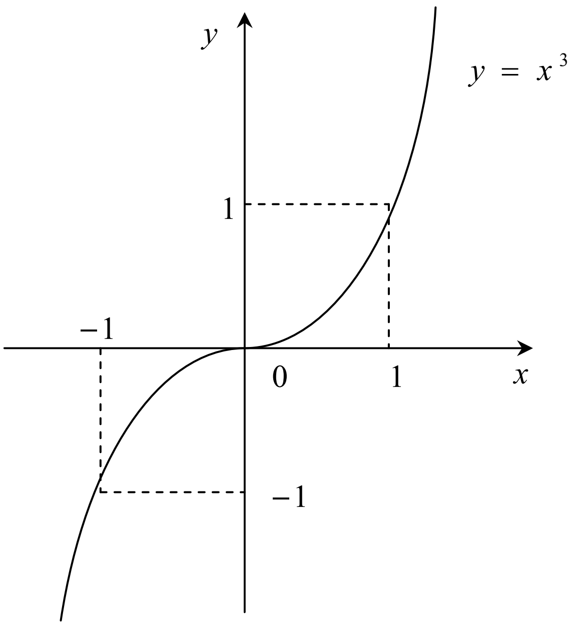


Рис. 1.1.

$y = x^{2n}$,
$D(f) = R$,
$E(f) = [0; +\infty)$

Функція парна, спадає на інтервалі $(-\infty; 0]$, зростає на інтервалі $[0; +\infty)$.

б) $\alpha = 2n-1,\ n \in N$ (рис. 1.2.).



$y = x^{2n-1}$,

$D(f) = R$,

$E(f) = R$.

Функція непарна, зростає.

Рис. 1.2.

в) $\alpha = -2n, n \in N$ (рис. 1.3).

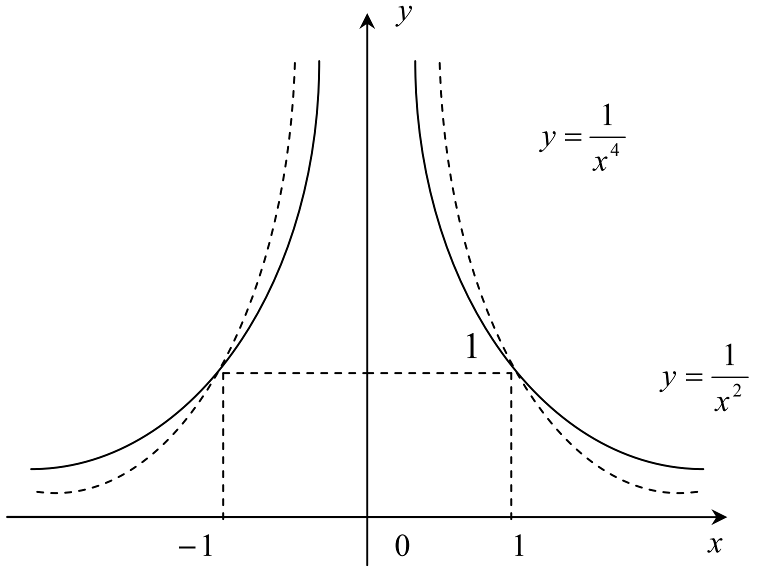


Рис. 1.3.

$y = \dfrac{1}{x^{2n}}$,

$D(f) = R \setminus \{0\}$,

$E(f) = (0; +\infty)$.

Функція парна, зростає на інтервалі $(-\infty; 0)$, спадає на інтервалі $(0; +\infty)$.

г) $\alpha = -2n+1, n \in N$ (рис. 1.4).

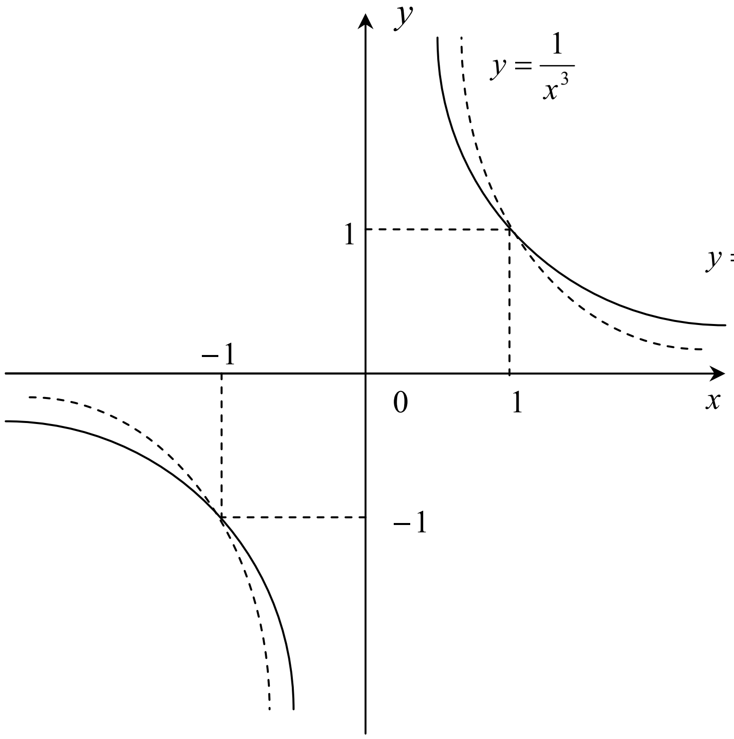


Рис. 1.4

$y = \frac{1}{x^{2n-1}}$,

$D(f) = R \setminus \{0\}$,

$E(f) = R \setminus \{0\}$.

Функція непарна, спадає на інтервалі $(-\infty;\, 0)$ і $(0;\, +\infty)$.

д) $\alpha \notin Z$.

$y = x^{\alpha}$, $D(f) = (0;\, +\infty)$, $E(f) = (0;\, +\infty)$. При деяких значеннях α $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути ширшими.

4. *Показникова функція* $y = a^x\, (a > 0,\, a \neq 1)$ (рис. 1.5).

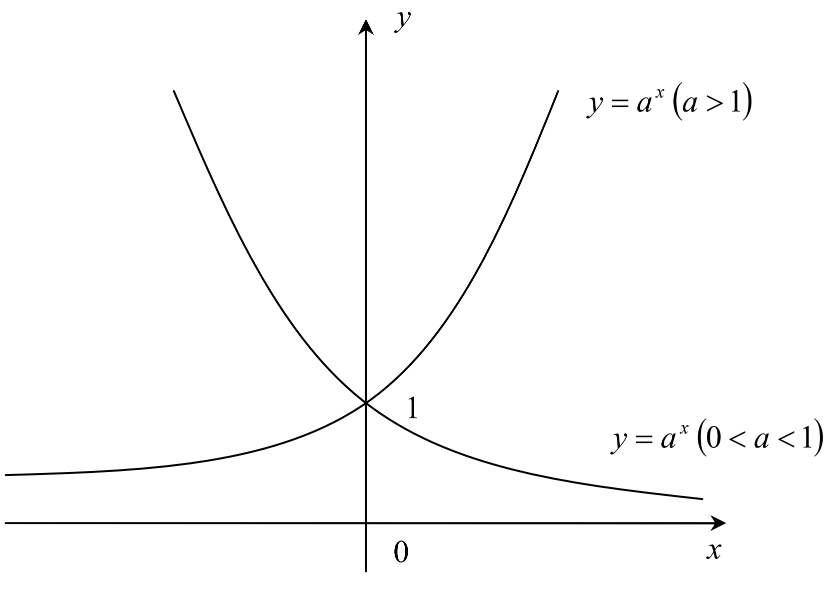


Рис. 1.5.

$D(f) = R,\ E(f) = (0; +\infty)$.

При $0 < a < 1$ функція спадає, при $a > 1$ – зростає.

5. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ (рис. 1.6).

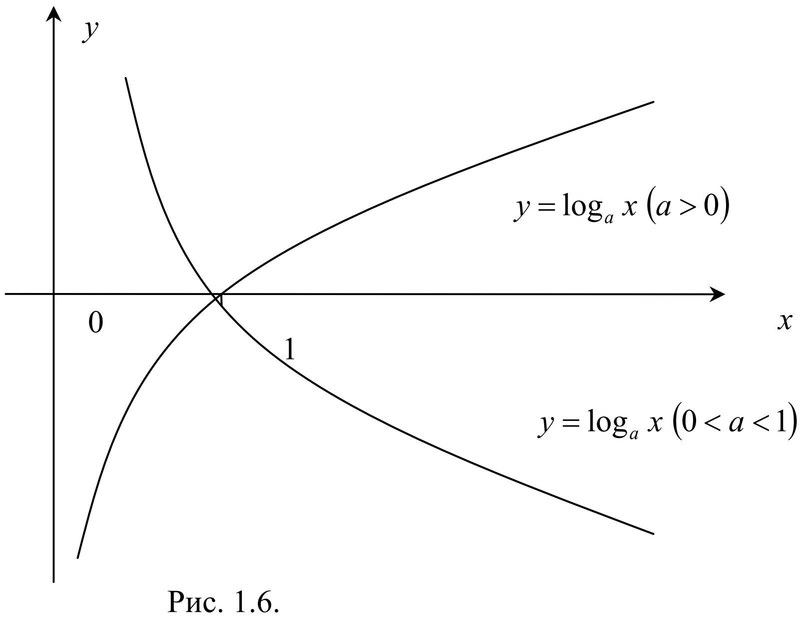


Рис. 1.6.

$D(f) = (0; +\infty)$,

$E(f) = R$.

При $0 < a < 1$ функція спадає, при $a > 1$ – зростає.

6. *Тригонометричні функції.*

а) $y = \sin x$ (рис. 1.7).

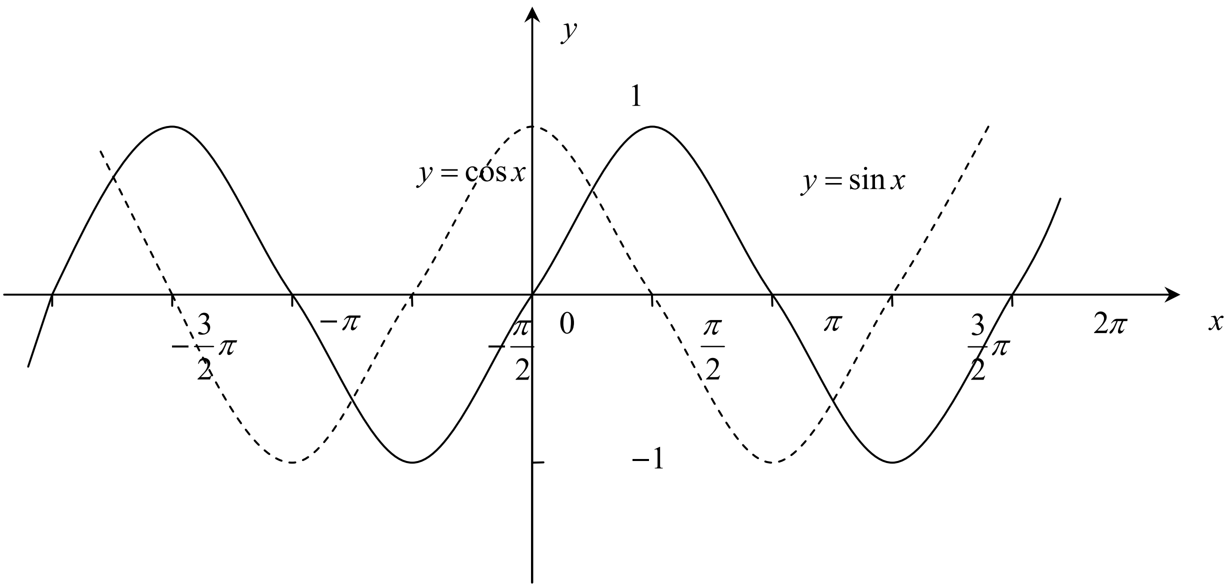


Рис. 1.7.

$D(f)=R,$

$E(f)=[-1;1].$

Функція непарна.

Період $T=2\pi.$

На кожному з інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z,$ функція зростає, на $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3}{2}\pi+2\pi k\right), k\in Z,$ – спадає.

б) $y=\cos x$ (рис. 1.7).

$D(f)=R, E(f)=[-1,1].$

Функція парна. Період $T=2\pi.$

На кожному з інтервалів $(2\pi k, \pi+2\pi k), k\in Z,$ функція спадає, на $(\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k), k\in Z,$ зростає.

в) $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 1.8).

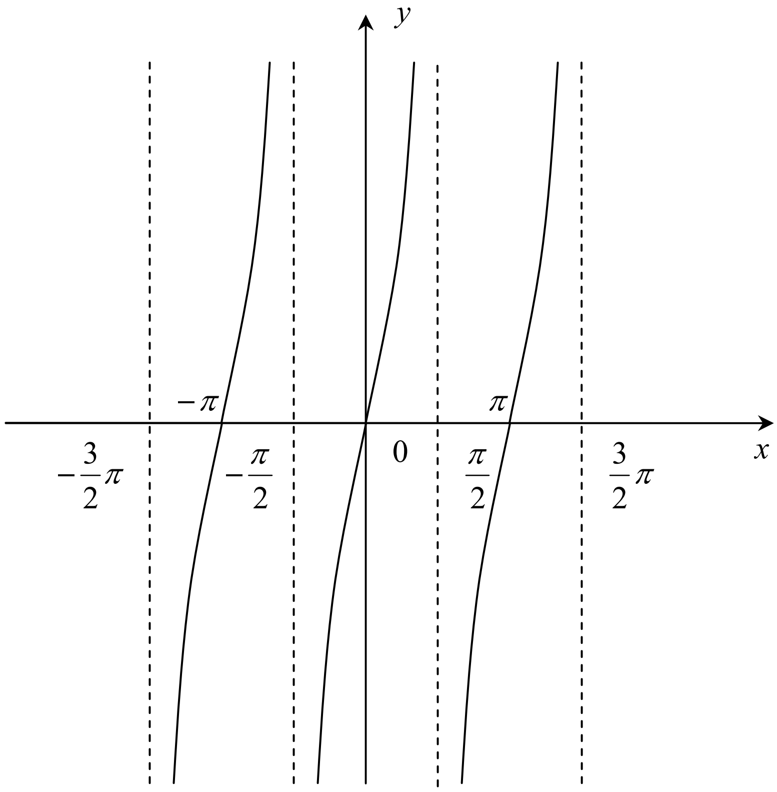


Рис. 1.8.

$D(f) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \middle| k \in Z \right\}.$

$E(f) = R.$

Функція непарна.

Період $T = \pi.$

Функція зростає на кожному з інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z.$

г) $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 1.9).

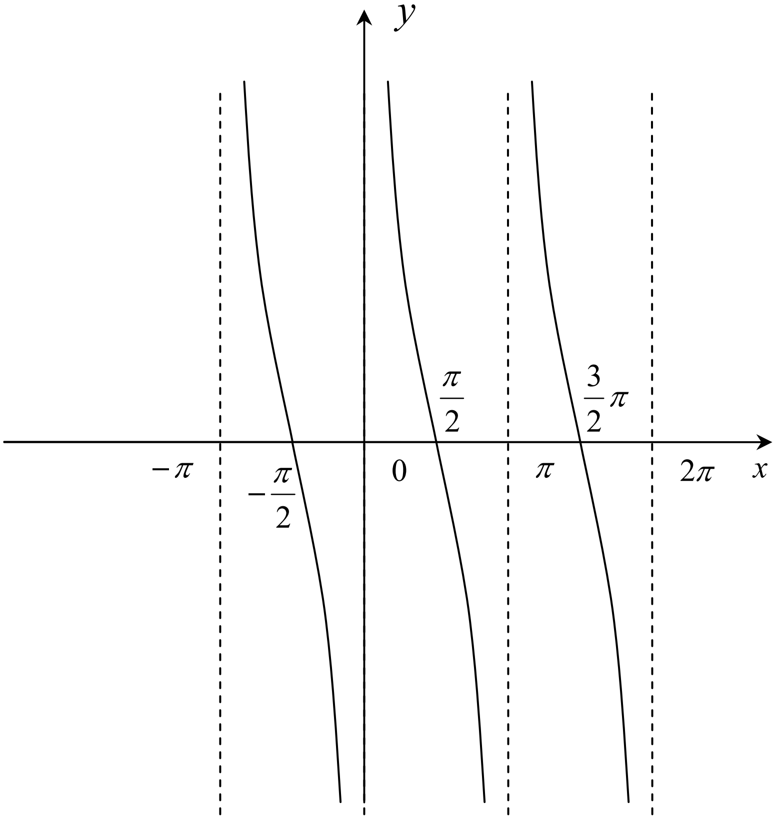


Рис. 1.9.

$D(f) = R \setminus \{\pi k | k \in Z\}$,

$E(f) = R$.

Функція непарна.

Період $T = \pi$.

Функція спадає на кожному з інтервалів $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

7. *Обернені тригонометричні функції*

а) $y = \arcsin x$ (рис. 1.10).

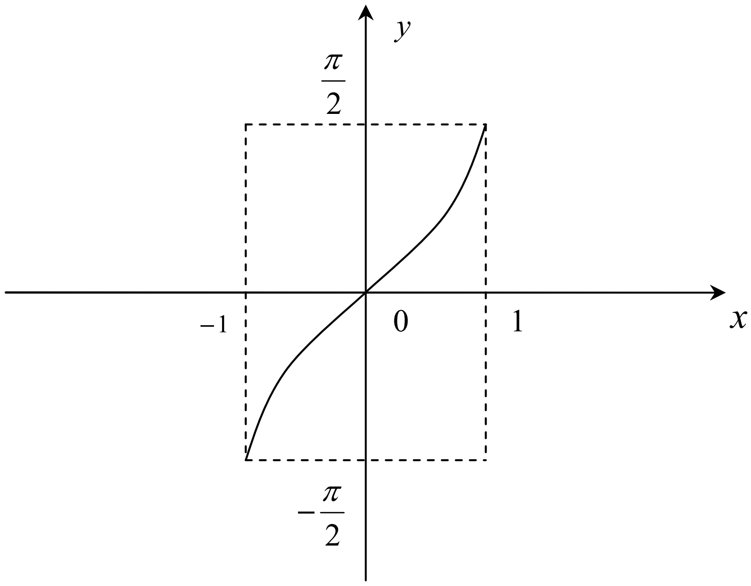


Рис. 1.10

$D(f) = [-1, 1]$,

$E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція непарна. зростає.

б) $y = \arccos x$ (рис. 1.11).

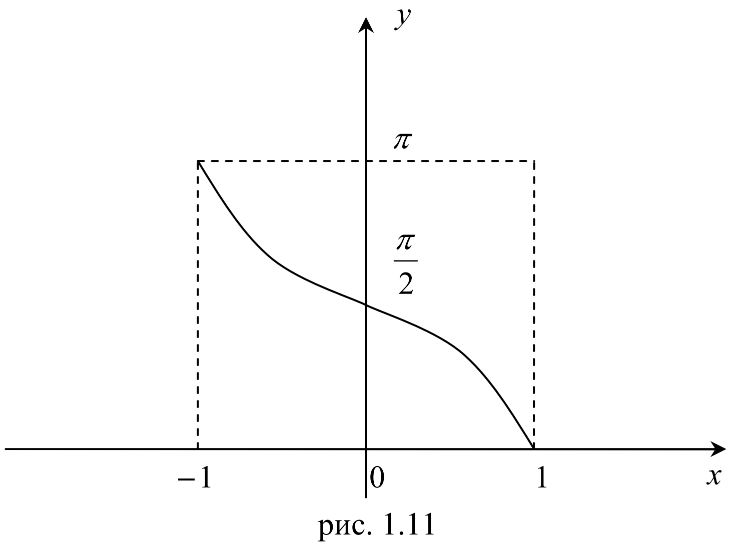


рис. 1.11

$D(f) = [-1; 1]$,

$E(f) = [0, \pi]$.

Функція спадає.

в) $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 1.12).

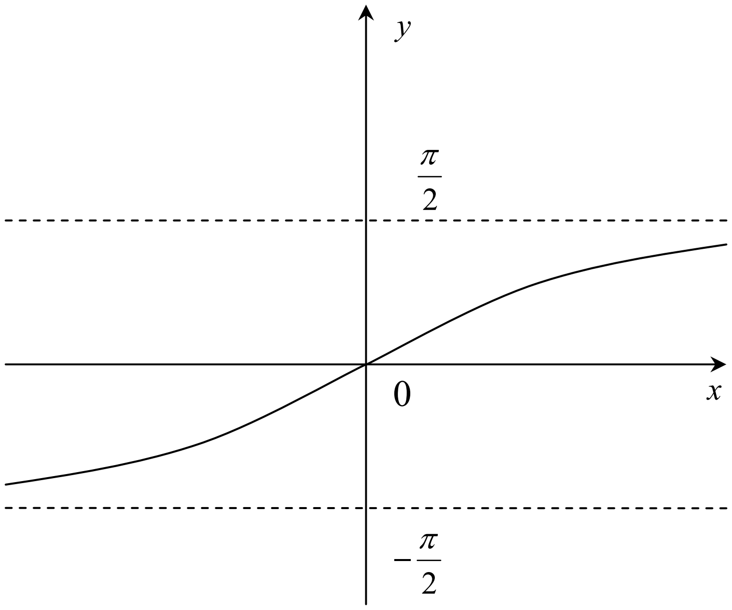


рис. 1.12

$D(f) = R,\ E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Функція непарна, зростає.

г) $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 1.13).

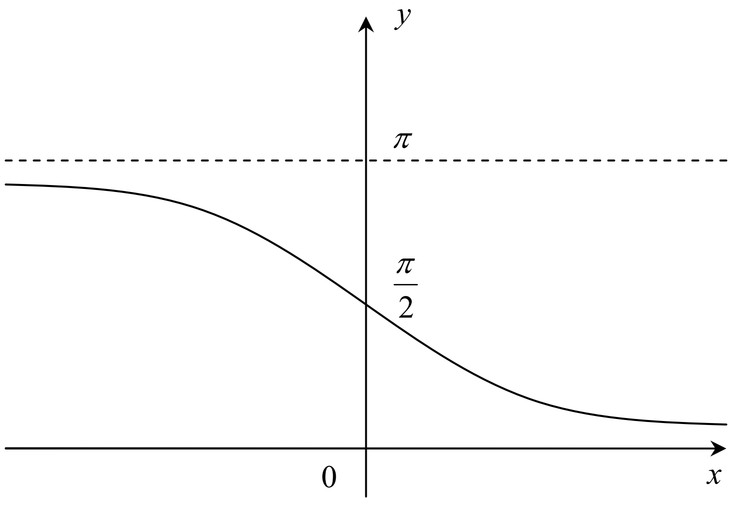


рис. 1.13

$D(f) = (-\infty; +\infty),\ E(f) = (0, \pi).$

Функція спадає.

8. *Гіперболічні функції*

а) Синус гіперболічний $y = \operatorname{sh} x$ (рис. 1.14)

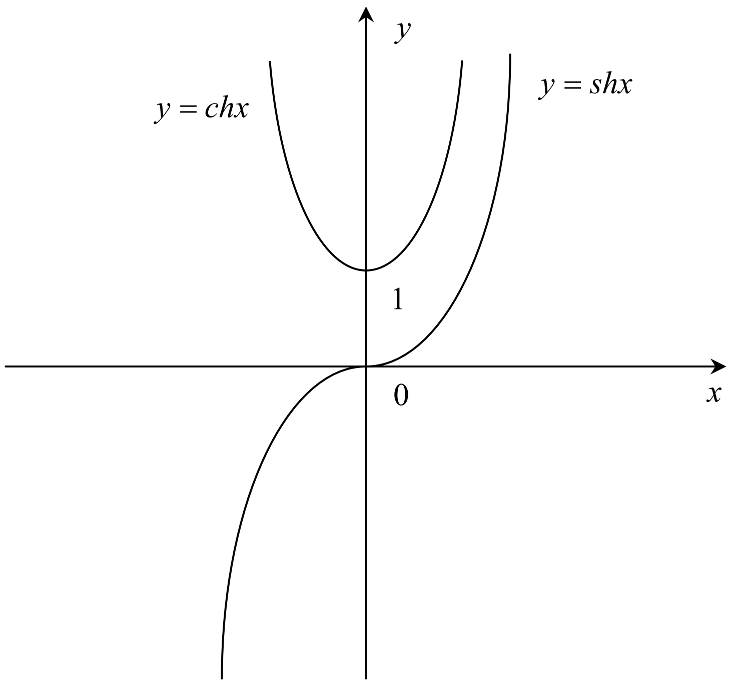


рис. 1.14

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$D(f) = R,$

$E(f) = R.$

Функція непарна, зростає.

б) Косинус гіперболічний $y = \operatorname{ch} x$ (рис. 1.15).

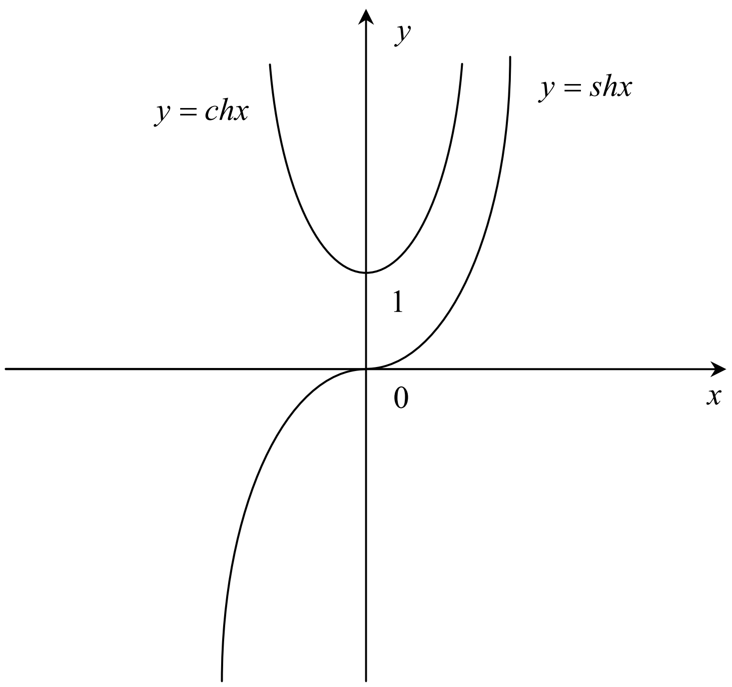


рис. 1.15

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ D(f) = R,\ E(f) = [1; +\infty).$$

Функція парна, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на $[0; +\infty)$.

в) Тангенс гіперболічний $y = \operatorname{th} x$ (рис. 1.16).

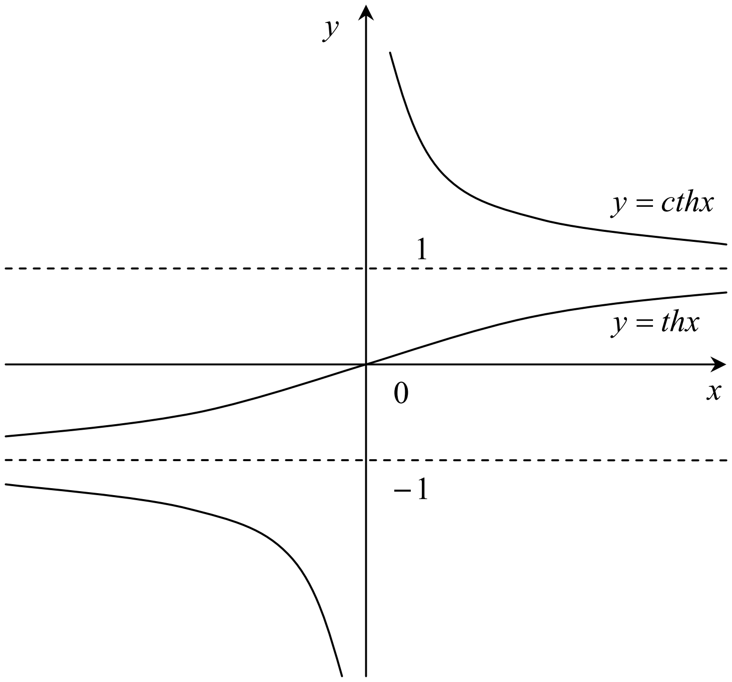


рис .1.16

$y = \operatorname{th} x,$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$D(f) = R,$

$E(f) = (-1; 1).$

Функція непарна, зростає.

г) Котангенс гіперболічний $y = \operatorname{cth} x$ (рис. 1.16).

$y = \operatorname{cth} x,$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\ D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) = R \setminus (-1, 1).$$

Функція непарна, спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Питання і вправи для самоперевірки

1. Що називається функцією однієї незалежної змінної? Областю визначення функції? Областю значень функції?
2. Наведіть приклади функцій цілочисельного аргументу.
3. Що називається графіком функції в системі декартових координат?
4. Що означає задати функцію? Визначити табличне, аналітичне і графічне задання функції. Описати особливості, переваги і недоліки кожного з цих способів.
5. Яка функція називається складеною? Наведіть приклади складених функцій.
6. Яка функція називається елементарною?

7. Дайте означення алгебраїчної, раціональної, ірраціональної і трансцендентної функцій.
8. Що називається нулем функції?
9. Яка функція називається парною, непарною?
10. Яка функція називається періодичною? Що таке період функції?
11. Яка функція називається зростаючою (спадною) на інтервалі?
12. Що називається інтервалом монотонності функції?
13. Накресліть графіки степеневих функцій для різних показників степеня і опишіть поведінку цих функцій.
14. Накресліть графіки показникових функцій при різних основах і опишіть поведінку цих функцій.
15. Накресліть графіки тригонометричних функцій і опишіть поведінку цих функцій.
16. Накресліть графіки обернених тригонометричних функцій і опишіть поведінку цих функцій.
17. Визначити гіперболічні функції, накреслити їх графіки і описати поведінку цих функцій.