3.5. Пряма лінія в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі.

Пряму L в просторі можна визначити точкою $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, яка належить цій прямій, і направляючим вектором $\vec{q}\{l,\, m,\, n\}$ цієї прямої (рис. 3.28)

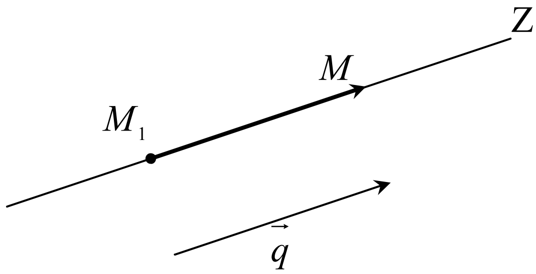

рис. 3.28

Візьмемо на прямій L плинну точку $M(x;\, y;\, z)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M}$ буде мати проекції $\overrightarrow{M_1M}\{x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1\}$. Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{q}$ - колінеарні, А тому їх відповідні проекції пропорційні. Отже, маємо:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (10)$$

Рівняння (10) є канонічним рівнянням прямої в просторі.

Зауваження. У випадку, коли у рівнянні (10) один із знаменників дорівнює нулеві, то відповідний чисельник теж дорівнює нулеві.

Приклад. Визначити положення прямої $\dfrac{x-4}{0} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{4}$.

Розв'язання. Дану пряму задано канонічним рівнянням (10). Так як $l = 0$, то $x - 4 = 0$. Отже, пряма перетинає вісь Ox в точці $x = 4$ і перпендикулярна до цієї вісі.

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Пряму L в просторі можна визначити двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, що належать цій прямій (рис. 3.29)

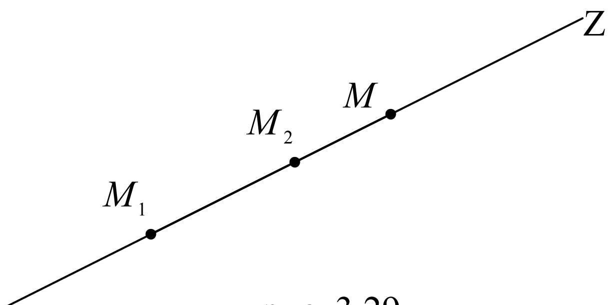

рис. 3.29

Візьмемо на прямій Z плинну точку $M(x;\ y;\ z)$ і побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ - колінеарні, а тому їх відповідні проекції пропорційні.

Отже, маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{11}$$

Рівняння (11) є рівнянням прямої в просторі, яка проходить через дві точки.

Параметричне рівняння прямої

Якщо в рівнянні (10) значення відношень позначити параметром t:

$$\frac{x-x_1}{l}=y;\ \frac{y-y_1}{m}=t;\ \frac{z-z_1}{n}=t,$$

а потім розв'язати одержані рівняння відносно $x,\ y,\ z$, то одержимо:

$$\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt \end{cases} \tag{12}$$

Рівняння (12) називається параметричним рівнянням прямої.

Параметричне рівняння прямої зручно застосовувати в тих випадках, коли потрібно знати точку перетину прямої і площини.

Приклад. Дана пряма $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ і площина $2x+y+z-6=0$. Знайти точку їх перетину.

Розв'язання. *Дану пряму задано канонічним рівнянням. Параметричне рівняння прямої, що відповідає даному канонічному, буде мати вигляд:*

$$x=2+t;\ y=3+t;\ z=4+2t.$$

Підставивши ці вирази в ліву частину даного рівняння площини, ми приходимо до одного рівняння з одним невідомим:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $t=-2$, а значить, координати шуканої точки будуть: $x=1,\ y=2;\ z=2$.

Рівняння прямої, як лінії перетину двох площин.

Пряма L може бути задана, як лінія перетину двох площин (рис. 3.30)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\alpha_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\alpha_2). \end{cases} \qquad (13)$$

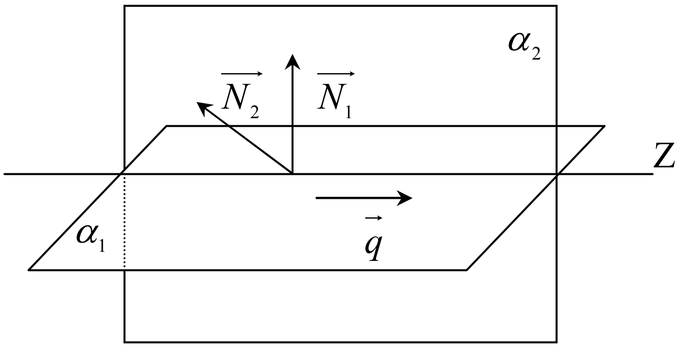

рис. 3.30

Нормальні вектори цих площин будуть мати координати $\overrightarrow{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overrightarrow{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$. Направляючий вектор $\vec{q}$ цієї прямої можна обчислити, як векторний добуток векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$:

$$\vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Для того, щоб від рівняння (13) перейти до канонічного рівняння прямої (10), необхідно крім координат вектора $\vec{q}\{l; m; n\}$, координати точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить цій прямій. Точку M_1 беруть, як перетин даної прямої із однією із координатних площин:

- якщо з площиною xOy, то $z = 0$;
- якщо з площиною xOz, то $y = 0$;
- якщо з площиною yOz, то $x = 0$.

В любому випадку із рівняння (13) одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими, розв'язавши яку одержимо координати точки M_1.

Приклад. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання Дану пряму задано, як лінію перетину двох площин. Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд: $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$.

Направляючий вектор $\vec{q}$ цієї прямої обчислимо за формулою (14):

$$\vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

За точку M_1 візьмемо точку перетину цієї прямої з площиною yOz, тоді $x = 0$. Одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $y_1 = 2,\ z_1 = 1$. Отже, точка M_1 буде мати координати: $M_1(0;\ 2;\ 1)$ і канонічне рівняння прямої запишеться у вигляді: $\dfrac{x}{-11} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z-1}{13}$.

Зауваження. Існує інший спосіб зведення рівняння (13) до рівняння (10) суть цього способу полягає в такому: в рівнянні (13) x спочатку виражаємо через z, для цього виключаємо y: $x = f(z)$. Потім x виражаємо через y, для цього виключаємо z: $x = \varphi(y)$. Одержуємо рівняння $x = \varphi(y) = f(z)$.

Кут між двома прямими в просторі

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (L_1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad (L_2)$$

Направляючими векторами цих прямих будуть вектори $\overrightarrow{q_1}\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $\overrightarrow{q_2}\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$.

Кут між прямими L_1 і L_2 визначається як кут між направляючими векторами цих прямих.

$$\cos\left(L_1 \,\hat{}\, L_2\right) = \cos\left(\overrightarrow{q_1} \,\hat{}\, \overrightarrow{q_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (15)$$

Із формули (15) одержуємо умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 і L_2:

- якщо $L_1 \perp L_2$, то $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- якщо $L_1 \perp L_2$, то $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Приклад. Знайти косинус гострого кута між прямими:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2},$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}.$$

Розв'язання. Кут між двома прямими визначається за формулою (15), в якій потрібно взяти $l_1=3,\ m_1=-1,\ n_1=2,\ l_2=2,\ m_2=4,\ n_2=-2$.

Підставивши ці значення у формулу (15), одержимо: $\cos\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{21}}$.

3.6. Пряма і площина

Умова належності двох прямих площині

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad (L_1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\quad (L_2)$$

Пряма L_1 визначається точкою $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і направляючим вектором $\overrightarrow{q_1}\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$. Пряма L_2 визначається точкою $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ і направляючим вектором $\overrightarrow{q_2}\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$.

Так як прямі L_1 і L_2 повинні належать площині, то точки M_1 і M_2 повинні належать цій площині, а значить і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$ повинен належати площині. Вектори $\overrightarrow{q_1}$ і $\overrightarrow{q_2}$ паралельні площині, значить вектори $\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{q_1},\ \overrightarrow{q_2}$ будуть компланарними, а значить їх змішаний добуток дорівнює нулеві:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{q_1}\,\overrightarrow{q_2}\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (16)$$

Якщо величини $l_1,\ m_1,\ n_1$ непропорційні величинам $l_2,\ m_2,\ n_2$, то співвідношення (16) є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих в просторі.

Кут між прямою і площиною

Нехай пряму задано канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$, площину – рівнянням загального виду $Ax+By+Cz+D=0$.

Тоді направляючим вектором прямої буде вектор $\vec{q}\{l,\ m,\ n\}$, а нормальним вектором площини буде вектор $\vec{N}\{A,\ B,\ C\}$.

Кутом φ ***між прямою і площиною*** називається любий із двох суміжних кутів, які утворені прямою і її проекцією на цю площину (рис. 3.31)

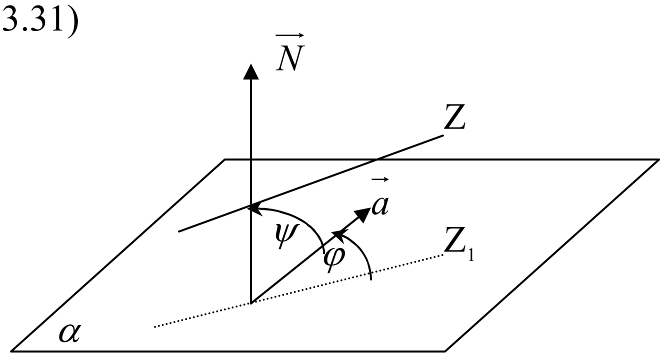

рис. 3.31

Нехай кут ψ - кут між направляючим вектором прямої $\vec{q}$ і нормальним вектором площини $\vec{N}$, $\vec{l_1}$ - проекція прямої l на площину α. Ми можемо вважати, що $\varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, так як синуси суміжних кутів рівні $\sin\varphi = \sin(180^0 - \varphi)$.

Із рис. 3.31 видно, що $\psi + \varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

Враховуючи ці зауваження, обчислюємо косинус кута ψ:

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Остаточно $$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (17)$$

За формулою (17) обчислюється синус кута між прямою і площиною. В чисельнику стоїть знак модуля, так як $\sin \ge 0$.

Із формули (17) одержуємо умови паралельності і перпендикулярності прямої L і площини α:

- якщо $L \perp \alpha$, то $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$;
- якщо $L \parallel \alpha$, то $Al + Bm + Cn = 0$.

Умова належності прямої площині

Умова належності прямої $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ площині $Ax + By + Cz + D = 0$ виражається двома рівностями:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Пряма визначається точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і направляючим вектором $\vec{q}\{l; m; n\}$.

Із рівняння площини слідує, що її нормальний вектор $\vec{N}$ буде мати координати $\vec{N}\{A; B; C\}$. Перша рівність в умові (18) випливає з вимоги, якщо пряма належить площині, то і точка, яка належить цій прямій, теж належить площині. А раз це так, то координати точки повинні задовольняти рівняння площини: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Вектори $\vec{q}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні, а тому їх скалярний добуток дорівнює нулеві: $Al + Bm + Cn = 0$.

Приклад. Перевірити, що пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ (L) лежить в площині $x + y - z - 6 = 0$ (α).

Розв'язання. В нашій умові $x_1 = 2, y_1 = 3, z_1 = -1, l = 2, m = 1, n = 3$, $A = 1, B = 1, C = -1$.

Перша і друга рівності умови (18) виконуються, а значить пряма L лежить в площині α.

Питання та вправи для самоперевірки

Питання

1. Записати загальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних в цьому рівнянні.
2. Записати рівняння в'язки площин.
3. Вкажіть на особливості в розташуванні площин, які задані неповними рівняннями:
а) $2x - 5y - z = 0$; б) $3y + 5z - 7 = 0$; в) $2x - 14 = 0$; г) $7y + 35 = 0$;
д) $2x - 4y + 5 = 0$; є) $7x = 0$; ж) $4y = 0$.
4. Записати рівняння площини у відрізках і дати геометричне пояснення коефіцієнтів в цьому рівнянні.
5. За допомогою яких алгебраїчних перетворень із загального рівняння площини можна одержати рівняння площини у відрізках?
6. Записати рівняння площини, що проходить через три дані точки. Яка властивість компланарних векторів використовується при одержанні цього рівняння?
7. Записати нормальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.
8. Сформулювати правило, за яким загальне рівняння площини приводиться до нормального виду.
9. Що називається відстанню від точки до площини і за яким правилом вона обчислюється?

10.Що таке відхилення точки від площини? В якому випадку відхилення точки від площини дорівнює відстані точки до площини?
11.Записати формулу косинуса кута між двома площинами. За допомогою яких міркувань із цієї формули можна отримати умови паралельності, перпендикулярності двох площин?
12.Запишіть канонічне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять в це рівняння?
13.Як пояснюється випадок, коли в канонічному рівнянні один із знаменників дорівнює нулеві?
14.Записати рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
15.Параметричне рівняння прямої в просторі. Як можна одержати параметричне рівняння прямої із її канонічного рівняння?
16.Рівняння прямої, як лінії перетину двох площин. Перехід від рівняння прямої, як лінії перетину двох площин до канонічного рівняння.
17.Записати формулу косинуса кута між двома прямими. За допомогою яких міркувань із цієї формули можна одержати умови паралельності, перпендикулярності двох прямих?
18.Записати умову належності двох прямих площині. За допомогою яких міркувань можна одержати цю умову?
19.Записати необхідну і достатню умову перетину двох прямих.
20.Дайте визначення кута між прямою і площиною.
21.Запишіть формулу обчислення синуса кута між прямою і площиною За допомогою яких міркувань із цієї формули можна одержати умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини ?
22.Записати умову належності прямої площині. За допомогою яких міркувань можна одержати ця умова?

Вправи

1.* Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; -3; 2)$ і $B(7; 1; 0)$ і паралельна вісі Ox.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 1; -2)$ і $B(-7; -2; 1)$ і паралельна вісі Oy.

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна площині xOz і проходить через точку $A(2; -3; 4)$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $A(-2; 4; 4)$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -5; 4)$ і через вісь Oy.

6.* Знайти відрізки, які відтинає площина $x - 10y + 2z = 0$ на координатних осях.

7. Рівняння площини $3x - 4y + 5z - 24 = 0$ записати у вигляді рівняння площини у відрізках.

1. Привести до нормального виду рівняння площини $2x+9y-6z+33=0$.

2. Знайти відстань від точки $A(3;4;-1)$ до площини $2x+11y+10z-10=0$.

10*. Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$, $2x-3y+6z+28=0$.

11. Знайти косинус гострого кута між площинами $5x-3y+5x+5=0$ і $x-2y+3z-5=0$.

12.Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$.

13.* Записати в канонічному вигляді рівняння прямої: $\begin{cases} 2x+3y+2z+8=0, \\ x-\ y-\ z-9=0. \end{cases}$

14.* Знайти косинуси кутів, які пряма $\begin{cases} 5x+3y-4z+2=0, \\ x+\ y+\ z-1=0 \end{cases}$ утворює з координатними осями.

15. Знайти косинус гострого кута між прямими:
$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

16. Через точку $A(5;1;2)$ провести пряму, яка паралельна вісі Oz.

1. Через точку $A(3;-2;-1)$ провести пряму, яка паралельна прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{5}$.

2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;0;4)$ і $B(-1;-2;3)$.

3. Знайти синус гострого кута між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ і площиною $2x+y-z=0$.

20.* Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(2;-4;-2)$ перпендикулярно прямій $\begin{cases} x-4y+5z-1=0, \\ 2x+\ y+\ 3=0. \end{cases}$

21. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $3x-y-5z-8=0$, який проходить через точку $A(1;-1;2)$.

22.* Знайти рівняння перпендикуляра до площини $x+3y-4z-13=0$, який проходить через точку $A(2;-1;3)$ і визначити координати основи цього перпендикуляра.

23. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$ і площини $2x-3y+z-3=0$.

24. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3;1;-2)$ і пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{2}$.

25.Знайти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$.

Відповіді

1. $y+2z-1=0$. Дана пряма паралельна вісі Ox, тому її рівняння шукаємо у вигляді $By+Cz+D=0$. Точки A і B належать шуканій площині, а тому їх координати повинні задовольняти рівняння площини. Одержуємо систему рівнянь: $\begin{cases}-3B+2C+D=0,\\ B+D=0,\end{cases}$ при розв'язанні якої B і C виражаємо через D.

2. $x+3z+4=0$.

3. $y+3=0$.

4. $2x+y=0$.

5. $2x-z=0$.

4. У рівнянні площини $D=0$, то дана площина проходить через початок координат і не перетинає координатних осей.

5. $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{\frac{24}{5}}=1$.

6. $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$.

7. $d=2$.

8. $d=6$. Розв'язок задачі зводимо до знаходження відстані точки, яка належить одній із паралельних прямих, до другої прямої. За таку точку можна взяти точку $M(7;\ 0;\ 0)$, яка належить першій прямій.

9. $\cos\varphi=\frac{26}{\sqrt{826}}$.

10.$15x-5y-14z-14=0$.

11.$\frac{x-\frac{19}{5}}{-1}=\frac{y+\frac{26}{5}}{4}=\frac{z}{-5}$.

12.$\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{134}};\cos\beta=\frac{-9}{\sqrt{134}};\ \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{134}}$.

Визначаємо направляючий вектор даної прямої $\overline{q}=7\overline{i}-9\overline{j}+2\overline{k}$. Координати одиничного направляючого вектора і будуть косинусами кутів, які пряма утворює з координатними осями.

13. $\cos(\ell_1 \hat{} \ell_2) = \dfrac{28}{\sqrt{798}}$.

14. $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$

15. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{5}$.

16. $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

17. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

18. $5x - 10y - 9z - 68 = 0$. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Координатами нормального вектора цієї площини будуть $\overline{N}\{A, B, C\}$. За умовою площина перпендикулярна прямій, а тому нормальний вектор площини буде колінеарним направляючому вектору прямої $\overline{q}$. Відповідні координати колінеарних векторів пропорційні. Маємо $\overline{q} = -5\overline{i} + 10\overline{j} + 9k$, отже $A = -5,\ B = 10,\ C = 9$.

19. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-5}$.

20. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-4}$, $P\left(\dfrac{35}{13}; \dfrac{14}{13}; -\dfrac{23}{13}\right)$. Для знаходження координат основи перпендикуляра, рівняння перпендикуляра записуємо в параметричному вигляді: $x = t + 2,\ \ y = 3t - 1,\ z = -4t + 1$. Визначаємо значення параметру t, для цього x, y, z підставляємо у рівняння площини, одержуємо $t = \dfrac{9}{13}$.

21. $A(2; 0; -1)$.

22. $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

23. $4x + 13y - z - 5 = 0$.