ОСНОВНИЙ КУРС

Аналітична геометрія на площині.

Аналітична геометрія – це розділ геометрії, в якому простіші геометричні образи (прямі, площини, лінії і поверхні другого порядку) досліджуються засобами алгебри на основі методу координат. Аналітична геометрія дає нам можливість описувати просторові образи або фігури за допомогою алгебраїчних співвідношень між координатами точок , які належать цим образам або фігурам.

Це необхідно для дослідження властивостей об'єктів розташованих в просторі, на площині через дослідження властивостей функцій – аналітичних образів цих об'єктів. Без таких співвідношень (функція – графічний образ) неможливо було б побудувати графік або зобразити рух на комп'ютері, спрогнозувати погоду по швидкості зміни показників барометра і т.д..

В аналітичній геометрії простішим геометричним образам ставляться у відповідність їх аналітичні еквіваленти – алгебраїчні рівняння. Вивчаючи і аналізуючи ці рівняння одержують інформацію про властивості і про взаємне розташування цих геометричних об'єктів. В основі цих досліджень лежить метод координат.

Метод координат

Декартові прямокутна система координат вперше була введена Декартом в його праці "Геометрія" в 1637 році. Прямокутні системи координат бувають праві і ліві. Їх координатні осі відповідно Ox, Oy, Oz , точка перетину координатних осей називається початком координат, її позначають О. Початок координат точка О має координати $(0;0;0)$ $O(0;0;0)$:

На рисунках 3.1, 3.2 зображено ***ліві системи координат***, а на рис. 3.3, 3.4 зображено ***праві (основні) системи координат***.

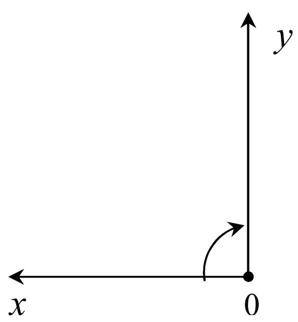

рис. 3.1

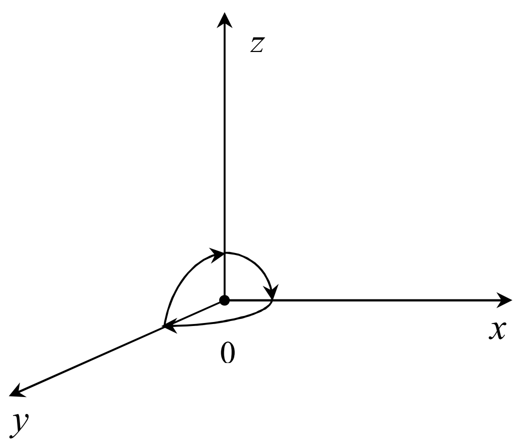

рис. 3.2

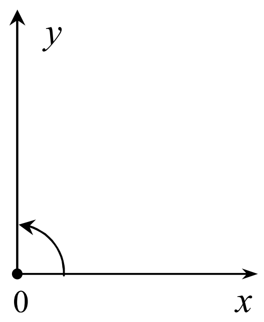

рис. 3.3

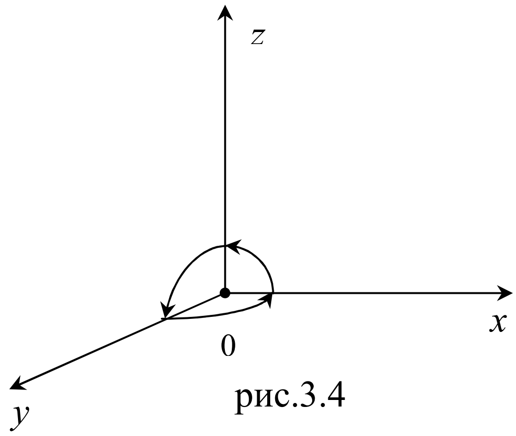

рис.3.4

В правій (основній) системі координат найкоротший оберт від вісі Ox до вісей Oy, Oz виконується проти годинникової стрілки.

Над системою координат можна виконувати перетворення, які пов'язані з паралельним переносом координатних осей та їх поворотом. Якщо початок координат нової системи OXY знаходиться в точці (x_0, y_0) системи Oxy і осі системи OXY повернуто на кут φ, то нові координати пов'язані зі старими такими співвідношеннями

$$\begin{cases} x = x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = y_0 + X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Алгебраїчно рівносильні формули, які виражають "нові" координати через "старі" мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi, \\ Y &= -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Приклад. Скласти формули перетворення координат, які відповідають переносу початку координат в точку $0_1(2;3)$ і повороту осей на кут 45^0.

Розв'язання. Підставляючи у формулу (1) $x_0 = 2;\ y_0 = 3,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$, одержимо вираз старих координат через нові:

$$x = 2 + X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4} = 2 + \frac{X - Y}{\sqrt{2}},$$

$$y = 3 + X\sin\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4} = 3 + \frac{X + Y}{\sqrt{2}}.$$

Звідси (або із формул (2)) одержуються формули, за якими нові координати виражаються через старі:

$$X = \frac{x + y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}};\ Y = -\frac{x + y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Зауваження. Існують формули перетворення просторових систем координат, у яких по трьом кутам Ейлера і напрямкам осей Ox, Oy, Oz однозначно визначаються напрямки осей OX, OY, OZ .

3.1. Простіші задачі аналітичної геометрії

До простіших задач аналітичної геометрії відносяться слідуючи задачі:

1. Обчислити відстань між двома точками, якщо відомі їх координати.
2. Обчислити координат точки, яка ділить даний відрізок у співвідношенні λ, якщо відомі координати кінців цього відрізка.
3. Обчислити площу трикутника, якщо відомо координати його вершин.
4. Перетворення декартових систем координат.

Задача 1. Дано точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Обчислити відстань між точками A і B.

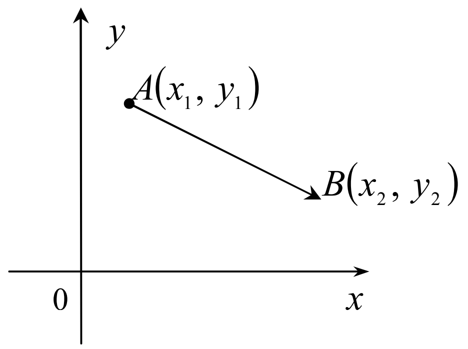

рис. 3.5

Розв'язання. З'єднаємо точки A і B і побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ буде мати координати $\overrightarrow{AB}\{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\}$. Далі, довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислюємо за формулою:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Отже, відстань між точками A і B, тобто довжина відрізка AB, обчислюється за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Аналогічна формула має місце у випадку, коли точки задано в просторі: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Приклад. Обчислити відстань між точками $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(6;2;\ 6)$.

Маємо: $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$.

Задача 2. Обчислити координати точки, яка ділить даний відрізок у співвідношенні λ, якщо відомо координати кінців цього відрізка.

Розв'язання. Нехай початок відрізка точка A має координати $A(x_1, y_1, z_1)$, кінець – точка B має координати $B(x_2, y_2, z_2)$. Існує декілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо розв'язувати її таким чином: нехай відрізок AB зображає собою довжину вектора $\overrightarrow{AB}$`. Точка $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок у співвідношенні λ, може бути розташована на відрізку або його продовженні (рис 3.6).

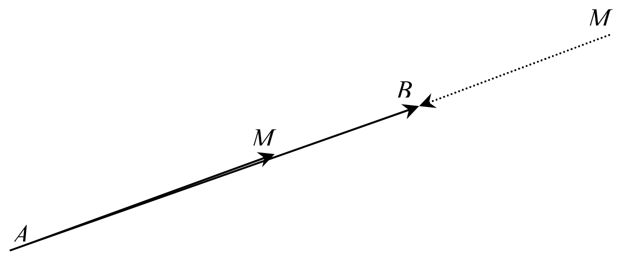

рис. 3.6

Вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ колінеарні, а тому $\frac{\overline{AM}}{\overline{MM}} = \lambda$. У випадку, коли точка M знаходиться на відрізку AB, тобто ділить відрізок AB внутрішнім чином, вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ співнаправлені, тоді $\lambda > 0$. У випадку, коли точка M знаходиться на продовженні відрізка $\overrightarrow{AB}$, тобто ділить відрізок AB зовнішнім чином, вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ протилежно направлені, тоді $\lambda < 0$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MB}$ будуть мати відповідно координати: $\overrightarrow{AM}\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{MB}\{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$. Із колініарності цих векторів слідує пропорційність їх відповідних координат:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda.$$

Одержані співвідношення розв'яжемо відносно x, y, z:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Leftrightarrow x - x_1 \Leftrightarrow \lambda(x_2 - x) \Leftrightarrow x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Формули для y і z мають вигляд: $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить даний відрізок AB у співвідношенні λ, обчислюється за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Одержані формули мають зміст, якщо $\lambda \neq -1$. Із цих формул легко отримати формули для обчислення координат середини відрізка, в цьому випадку $\lambda = 1$ і формули будуть мати вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Отже, координати середини відрізка є середніми арифметичними відповідних координат його кінців.

Приклад. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо відомо координати його вершин.

Розв'язання. Нехай маємо трикутник ABC (рис 3.7), у якого $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $A(x_3, y_3, z_3)$, AK, CD, BF - медіани трикутника, а точка $M(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ - точка їх перетину.

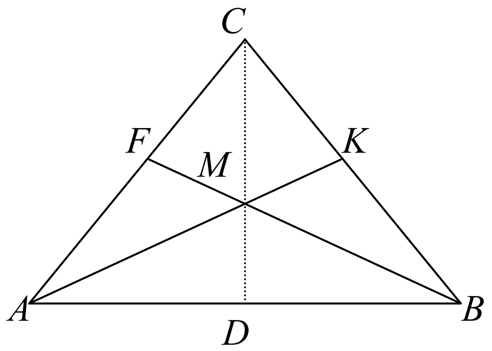

рис. 3.7

Знайдемо координати точки D середини відрізка AB:

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_D = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_D = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Точка M, в якій перетинаються медіани трикутника, ділить відрізок с D у співвідношенні 2:1, рахуючи від точки C, а раз так, то $\frac{CM}{MD} = 2$ і $\lambda = 2$.

Координати точки M обчислюються за відомими формулами:

$$\overline{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2};\ \overline{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2};\ \overline{z} = \frac{z_3 + 2z_D}{1+2}$$

Зупинимось детально на обчисленні $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_3 + 2\frac{x_1 + x}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Аналогічно: $\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; $\overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Координати точки перетину медіан трикутника є середніми арифметичними відповідних координат його вершин. Точка перетину медіан трикутника є центром ваги трикутної пластинки, тобто двомірного трикутника, який не співпадає з центром каркасного трикутника.

Задача 3. Обчислити площу трикутника, якщо відомо координати його вершин.

Розв'язання. Нехай маємо трикутник ABC (рис.3.8), у якого вершини мають координати: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Необхідно виразити площу трикутника ABC через координати його вершин.

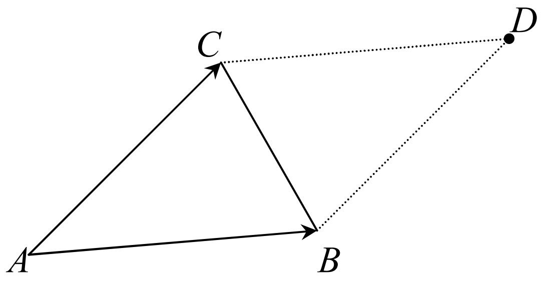

рис. 3.8

Існує декілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо її розв'язувати за допомогою векторів. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ будуть мати координати: $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$, $\overrightarrow{AC}\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$. Відомо, що довжина вектора векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ чисельно дорівнює площі паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі цього паралелограма.

Скористаємось відомими формулами обчислення векторного добутку векторів та обчислення довжини вектора.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\vec{k}\ /$$

Тоді:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}\ .$$

Зауваження. В частинному випадку, коли ΔABC знаходяться на площині xOy: $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, для обчислення його площі користуються формулою:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right|$$

або, переходячи до визначника другого порядку, одержимо формулу:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{matrix}\right\|$$

В наведеній формулі слід відрізняти знак модуля від знаку визначника.

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC, по відомим координатам його вершин $A(1;\,1)$, $B(6;\,4)$, $C(8;\,2)$.

Розв'язання. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ будуть мати координати: $\overrightarrow{AB}\{5;3\}$, $\overrightarrow{AC}\{7;1\}$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 0\\ 7 & 1 & 0\end{vmatrix}=-16\vec{k}\,.$$

Тоді $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{16^2}=8$ (кв.од.)

Аналогічний результат одержимо, якщо скористуємось формулою обчислення площі трикутника, коли його вершини лежать в лощині xOy:
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-7 & -1\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|=8$ (кв.од.)

Зауваження. Формули пов'язані з розв'язком задачі 4 наведено у вступі. Виведення наведених формул носить громіздкий характер, тому ми його опускаємо.

Питання та вправи для самоперевірки.

Питання

1. Які задачі відносяться до простіших задач аналітичної геометрії?
2. Запишіть формулу обчислення довжини відрізка по відомим координатам його кінців, як для випадку площини так і для випадку простору.
3. Запишіть формули координат точки, яка ділить відрізок в даному співвідношенні λ, як для випадку площини так і для випадку простору. При яких значеннях λ дані формули втрачають зміст, чому?
4. В якому випадку точка M ділить відрізок AB внутрішнім чином, а в якому випадку зовнішнім чином? Як це пов'язано зі значенням λ?
5. Як виражаються координати середини відрізка через координати його кінців?
6. Як виражаються координати точки перетину медіан трикутника через координати його вершин?
7. Яку фізичну властивість має точка перетину медіан плоского трикутника?
8. Запишіть формулу обчислення площі трикутника по відомим координатам його вершин. Дайте пояснення цієї формули на основі векторного добутку двох векторів.
9. Які ви знаєте перетворення систем координат? Запишіть формули, які мають відношення до цих перетворень.

3.2. Рівняння лінії на площині. Пряма лінія на площині

Рівняння лінії на площині

> Рівняння $F(x, y) = 0$ називається ***рівнянням лінії*** L в даній системі координат, якщо координати x і y довільної точки площини задовольняють дане рівняння, коли точка належить цій лінії і не задовольняють, коли точка не належить лінії.

Наведене означення дає основу методам аналітичної геометрії, суть яких заключається в слідуючому: лінії, які розглядаються, досліджуються за допомогою аналізу їх рівнянь.

Розглянемо декілька простіших прикладів:

а) $x - y = 0$ - рівняння бісектриси I і II координатних кутів;

б) $x + y = 0$ - рівняння бісектриси II і IV координатних кутів;

в) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$ - це рівняння визначає геометричне місце точок бісектрис координатних кутів;

г) $x^2 + y^2 = 0$ - це рівняння визначає тільки одну точку з координатами $x = 0,\ y = 0$, тобто початок координат;

д) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ - немає ні однієї точки, координати якої задовольняють дане рівняння, значить ніякого геометричного образу на площині дане рівняння не визначає.

Спочатку вивчимо рівняння ліній, які містять x і y в першому степені. Такі лінії мають загальну назву прямих ліній на площині.

Зупинимось на окремих випадках рівнянь прямих ліній на площині.

Пряма лінія з кутовим коефіцієнтом

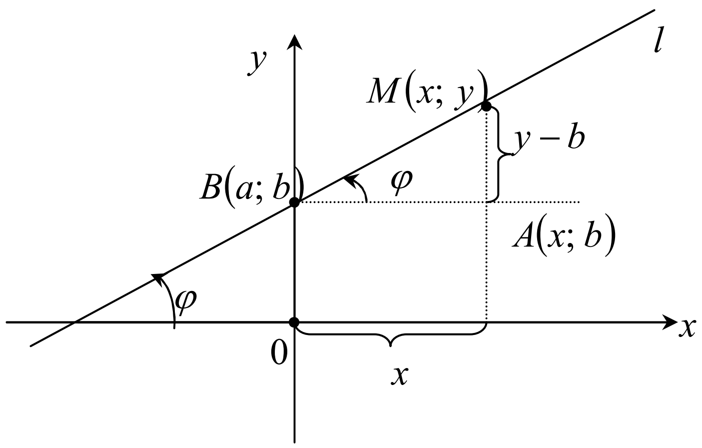

рис. 3.9

Нехай дано пряму l (рис. 3.9), яка утворює з віссю Ox кут φ і перетинає вісь Oy в точці $B(0; b)$. Точка $M(x, y)$, що належить прямій l має плинні координати x і y. Плинні координати цієї точки повинні задовольняти рівняння прямої l.

Кутом нахилу прямої l відносно осі Ox називається кут повороту проти годинникової стрілки осі Ox до співпадання з прямою l.

В нашому випадку це буде кут φ.

Тангенс кута нахилу прямої називається ***кутовим коефіцієнтом*** цієї прямої.

Позначається: $tg\varphi = k$.

Візьмемо на прямій l плинну точку $M(x;\, y)$ і виконаємо побудови згідно рисунку 3.9. Із ΔAMB маємо:

$$tg\varphi = \frac{AM}{AB},\ tg\varphi = \frac{y-b}{x};\ k = \frac{y-b}{x},$$

якщо $x \neq 0$. Далі одержуємо рівняння:

$$y = kx + b \qquad (1)$$

Рівняння (1) називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Кожна пряма, яка не перпендикулярна вісі Ox, може бути записане рівнянням (1). Якщо пряма проходить через початок координат, то її рівняння буде мати вигляд $y = kx$ (рис. 3.10).

Якщо пряма паралельна вісі Ox, то її рівняння буде мати вигляд $y = b$ (рис. 3.11).

Якщо пряма паралельна вісі Oy, то її рівняння буде мати вигляд $x = a$ (рис. 3.12).

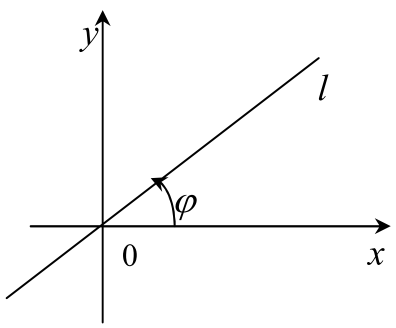

рис. 3.10

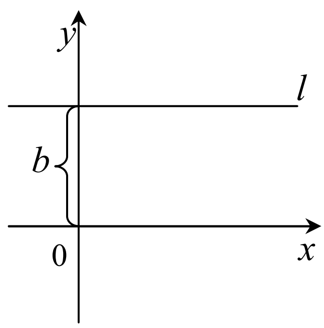

рис. 3.11

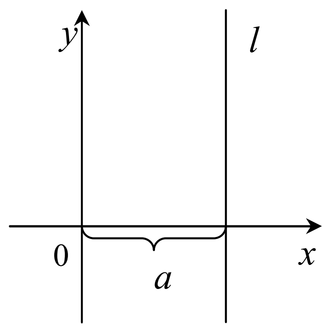

рис. 3.12

Рівняння вісі Ox буде мати вигляд: $y = 0$, рівняння вісі Oy $-$ $x = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку

Нехай пряма l визначається точкою $M_1(x_1,\ y_1)$ і напрямком, який задається кутом нахилу φ або кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi$ (рис. 3.13).

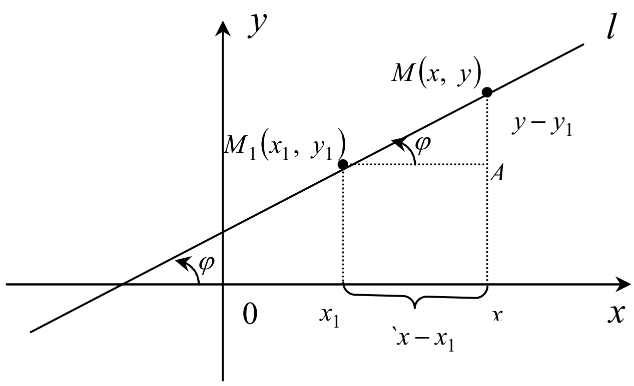

рис. 3.13

Візьмемо на прямій l плинну точку $M(x,\ y)$ і виконаємо побудови згідно рис. 3.13.

Із ΔAMM_1 маємо: $tg\varphi = \dfrac{AM}{AM_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = k$, звідси одержуємо:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ належать прямій l (рис. 3.14).

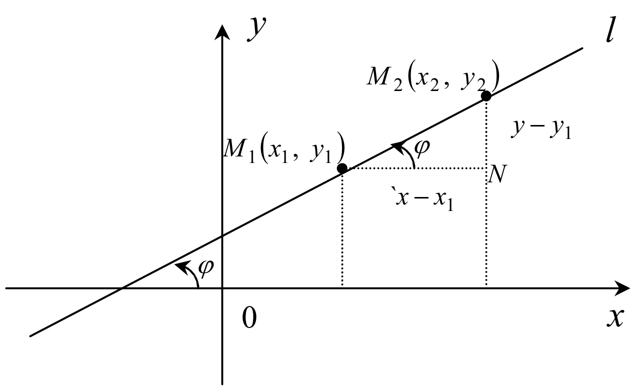

рис. 3.14

Виконуємо побудову згідно рис. 14 і позначимо кут нахилу прямої l через φ.

Із ΔM_1NM_1 маємо:

$$tg\varphi = \frac{NM_2}{M_1N} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

Підставимо значення кутового коефіцієнта в рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ в даному напрямку:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Поділивши обидві частини одержаного рівняння на $y_2 - y_1$ $(y_2 \neq y_1)$, отримаємо рівняння:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (3)$$

Рівняння (3) називається рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;2)$ і $B(2;1)$.

Розв'язання. Згідно рівняння (3), припускаючи в ньому, що $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ x_2 = 2,\ y_2 = 1$, одержимо:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}$$

після відповідних спрощень одержуємо рівняння шуканої прямої у вигляді $x + 3y - 5 = 0$.

Загальне рівняння прямої

Теорема. Рівняння $Ax + By + C = 0$ (A) визначає пряму лінію на площині.

Доведення. Якщо $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то рівняння (4) має ненульовий розв'язок, тобто існує точка $M_0(x_0, y_0)$, така що

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \ (B)$$

Віднімемо від рівняння (A) почленно рівняння (B), одержимо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (C)$$

Рівняння (C) еквівалентно рівнянню (A). Доведемо, що рівняння (C) визначає пряму лінію. Пряму лінію можна задати точкою, що належить цій прямій і вектором перпендикулярним до цієї прямої. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій l, а вектор $\vec{n}\{A, B\}$ перпендикулярний даній прямій (рис.3.15).

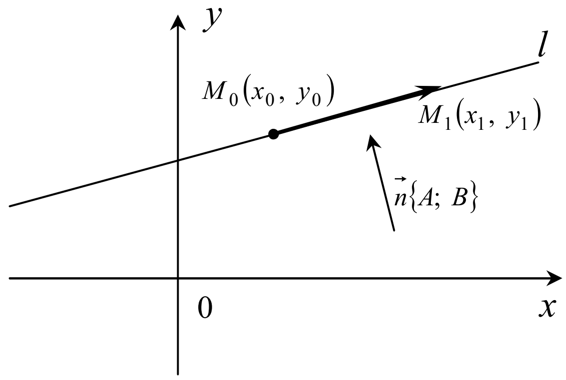

рис. 3.15

Візьмемо на прямій l плинну точку $M(x, y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0\}$. Дійсно, якщо точка $M_0(x_0,\ y_0)$ належить прямій l, то її координати задовольняють рівняння (C), а значить вектори $\vec{n}\{A;\ B\}$ і $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0\}$ взаємно перпендикулярні. Із перпендикулярності векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ слідує: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, тобто одержали рівняння (C).

Якщо точка не належить прямій l, то її координати не задовольняють рівняння (C), а значить вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярні і їх скалярний добуток відмінний від нуля.

Отже рівняння (C), а в силу еквівалентності і рівняння (A), будуть рівняннями прямої на площині.

Рівняння (A) називається загальним рівнянням прямої на площині:

$$Ax+By+C=0 \qquad (4)$$

Зауваження. Вектор $\vec{n}\{A;\ B\}$ називається нормальним вектором прямої $Ax+By+C=0$.

Дослідження загального рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої має вигляд (4). Вивчемо, яке положення займає пряма лінія по відношенню до координатних осей, коли один або два коефіцієнта рівняння (4) дорівнює нулеві.

а) $C=0$, тоді $Ax+By=0$ - рівняння прямої, яка проходить через початок координат;

б) $A=0$, тоді $By+C=0 \Rightarrow y=-\dfrac{C}{B}$ - рівняння прямої паралельній вісі Ox;

в) $B=0$, тоді $Ax+C=0 \Rightarrow x=-\dfrac{C}{A}$ - рівняння прямої паралельній вісі Oy;

г) $C=0, B=0, A\neq 0$, тоді $Ax=0 \Rightarrow x=0$ - рівняння вісі Oy (пряма співпадає з віссю Oy);
д) $C=0, A=0, B\neq 0$, тоді $By=0 \Rightarrow y=0$ - рівняння вісі Ox (пряма співпадає з віссю Ox);
є) $A=0, B=0$ звідси слідує, що $C=0$, одержуємо тотожність $0x+0y+0=0$. В цьому випадку ми не маємо певної лінії.

Рівняння прямої у відрізках

Повна назва цього типу рівняння прямої така: рівняння прямої у відрізках, які вона відтинає на координатних осях. Розглянемо пряму l (рис.3.16), яка не проходить через початок координат і перетинає координат вісі.

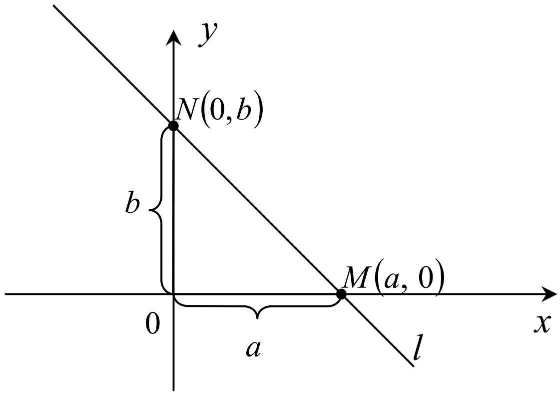

рис. 3.16

Візьмемо рівняння цієї прямої в загальному вигляді $Ax+By+C=0$ (4)

Так як пряма перетинає координатні осі, то $A\neq 0, \mathbf{B}\neq 0$, так як вона не проходить через початок координат, то $C\neq 0$.

Нехай пряма l перетинає вісь Ox в точці $M(a;\, 0)$, вісь Oy - в точці $N(0;\, b)$.

Точка $M(a;\, 0)$ належить прямій, значить координати цієї токи задовольняють рівняння (4), маємо $Bb+C=0$ звідки $B=-\dfrac{C}{a}$. Підставляючи значення A і B в рівняння (4), одержимо:

$$-\frac{C}{a}x-\frac{C}{b}y+C=0$$

Поділимо обидві частини одержаного рівняння на $-C\neq 0$, після цього будемо мати рівняння:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається рівнянням прямої у відрізках.

Приклад. Загальне рівняння прямої $2x+4y-1=0$. Записати у вигляді рівняння прямої у відрізках.

Розв'язання. Нехай точки $M(a;\,0)$ і $N(0;\,b)$ є відповідно точки перетину прямої з координатними осями Ox і Oy. Для обчислення координат a і b цих точок підставимо координати точок у рівняння прямої.

Маємо:

$$2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2};$$

$$4b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{4}.$$

Підставивши значення a і b в рівняння (5), одержимо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{4}}=1$$

Канонічне рівняння прямої

Нами було доведено, що пряма, яка визначається загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, ортогонально до вектора $\vec{n}\{A;\,B\}$, який називається нормальним вектором прямої. Любий ненульовий вектор, який колінеарний даній прямій називається направляючим вектором цієї прямої.

Задача. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1,\,y_1)$ і має направляючий вектор $\vec{q}\{l;\,m\}$ (рис. 3.17).

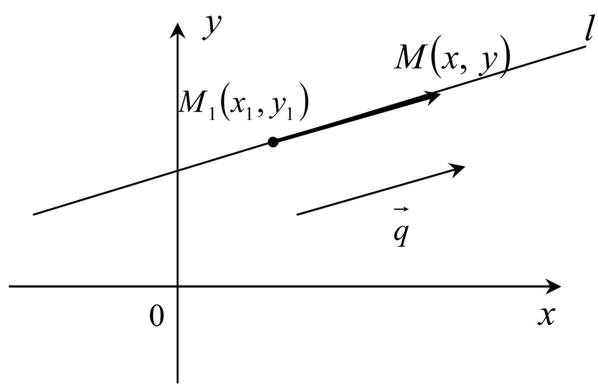

рис. 3.17

Розв'язання. Візьмемо на прямій l плинну точку $M(x;\,y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\;y-y_1\}$ буде колінеарним направляючому вектору $\vec{q}\{l;\,m\}$, а раз так, то їх відповідні проекції пропорційні. З пропорційності їх проекцій одержуємо рівняння:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \qquad (6)$$

Рівняння (6) називається канонічним рівняння прямої. Канонічне з грецької мови означає типове, традиційне.

Приклад. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;\ -2)$ і має направляючий вектор $\vec{q}\{5;\ 7\}$.

Розв'язання. Скористуємося рівнянням (6). В нашому випадку $x_1 = 3,\ y_1 = -2,\ l = 5,\ m = 7$. Підставляючи ці значення в рівняння (6), одержимо:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{7}.$$

Параметричне рівняння прямої

Параметричне рівняння прямої одержується із канонічного рівняння прямої (6). Для цього в рівнянні (6) значення відношень позначають параметром t: $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = t$.

Далі записують систему: $\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = t, \\ \dfrac{y - y_1}{m} = t. \end{cases}$

Якщо кожне рівняння одержаної системи розв'язати відповідно відносно x і y, то одержимо:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt \end{cases} \qquad (7)$$

Рівняння (7) називається параметричним рівнянням прямої. Якщо t - час, то параметричне рівняння визначає закон руху матеріальної точки по прямій лінії з постійною швидкістю $v = \sqrt{l^2 + m^2}$, тобто рух відбувається по інерції.

Нормальне рівняння прямої

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (8)$$

Тут p - довжина перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю пряму, α - кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямом вісі Ox. Відраховується цей кут від осі Ox проти годинникової стрілки. $\cos\alpha, \sin\alpha$ - координати одиничного вектора нормалі цієї прямої $\vec{n}\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. Для приведення загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ (4) до нормального виду необхідно обидві частини його помножити на нормуючий множник:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9)$$

Знак нормуючого множника береться протилежний знаку вільного члена C загального рівняння прямої (4).

Приклад 1. Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 12 = 0$. Записати в нормальному вигляді.

Розв'язання. Щоб привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду, обидві частини його слід помножити на нормуючий множник (9). Знак нормуючого множника береться протилежним знаку вільного члена в загальному рівнянні прямої. В нашому випадку вільний член в загальному рівнянні прямої дорівнює +12, отже нормуючий множник беремо зі знаком мінус. Далі $A = 4;\ B = -3$, отже

$$M = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}$$

Помноживши на $-\frac{1}{5}$ обидві частини рівняння $4x - 3y + 12 = 0$ приведемо його до нормального виду і одержимо:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

Зауваження. Необхідно запам'ятати, що в нормальному рівнянні прямої сума квадратів коефіцієнтів при плинних координатах повинна дорівнювати одиниці, а вільний член повинен бути від'ємним.

Приклад 2. Чи буде дане рівняння прямої $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$ рівнянням прямої в нормальному вигляді?

Розв'язання. Перевіримо виконання вимог відносно рівняння прямої в нормальному вигляді:

а) сума квадратів коефіцієнтів при плинних координатах повинна дорівнювати одиниці, маємо $\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1;$

б) вільний член повинен бути від'ємним, маємо $p = -3$.

Отже, дане рівняння є рівнянням прямої в нормальному вигляді.

Побудова прямої лінії по її рівнянню

Пряма визначена, якщо відомо дві точки, що належать їй. Для того, щоб побудувати пряму по її рівнянню, потрібно, користуючись цим рівнянням, найти координати двох її точок. Необхідно пам'ятати, що якщо точка належить прямій, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто при підстановці їх в рівняння одержуємо вірну числову рівність.

1. Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0, C \neq 0$, то для її побудови простіше всього визначити точки перетину прямої з координатними осями.

Приклад. Побудувати пряму $2x + y - 6 = 0$.

Розв'язання. Пряма $2x + y - 6 = 0$ перетинає вісь Ox в точці $A(3; 0)$. Дійсно, взявши в цьому рівнянні $y = 0$, одержимо для визначення x рівняння $2x - 6 = 0$, звідки $x = 3$. Взявши в рівнянні прямої $x = 0$, одержимо для визначення у рівнянні $y - 6 = 0$, звідки $y = 6$. Отже, пряма перетинає вісь Oy в точці $B(0; 6)$. По точкам $A(3; 0)$ і $B(0;\ 6)$ будуємо пряму (рис. 3.18).

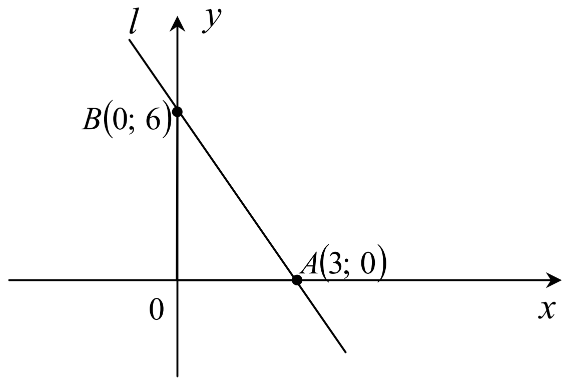

рис. 3.18

2. Якщо пряма задана рівнянням $Ax + By = 0, C = 0$, то дана пряма проходить через початок координат. Другу точку визначаємо, взявши, наприклад $x = a$. Тоді для визначення у одержимо рівняння $Aa + By = 0,\ y = \dfrac{-A \cdot a}{B}$. Значить пряма $Ax + By = 0$ проходить через точки з координатами $(0;\ 0)$ $\left(a; -\dfrac{Aa}{\mathbf{B}}\right)$.

Приклад. Побудувати пряму $2x - 4y = 0$.

Розв'язання. Дана пряма проходить через початок координат, так як $C = 0$. Обчислюємо координати другої точки для цього візьмемо $x = 2$. Тоді для визначення у одержуємо рівняння $2 \cdot 2 - y = 0 \Rightarrow y = 1$. Отже, пряма $2x - 4y = 0$ проходить через точки $O(0;\ 0)$ і $A(2; 1)$. По одержаним точкам будуємо пряму (рис. 3.19).

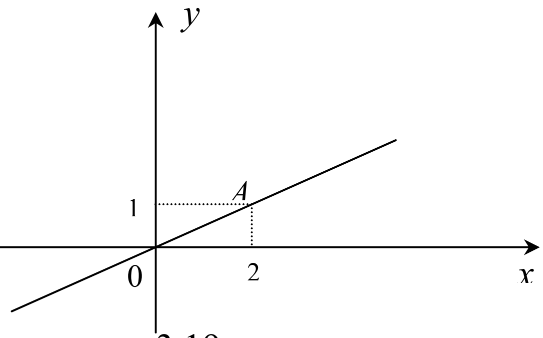

рис. 3.19

3. Якщо пряму задано рівнянням $y = kx + b$ з кутовим коефіцієнтом, то з цього рівняння відома величина відрізка b, який відтинає пряма на осі ординат і для побудови прямої залишається визначити координати ще однієї точки.

Приклад. Побудувати пряму $y = 3x + 2$.

Розв'язання. Пряму $y = 3x + 2$ задано рівняння з кутовим коефіцієнтом. Із рівняння видно, що пряма відтинає на осі ординат відрізок, величина якого $b = 2$ (рис. 20). Значить точка $A(0;\,2)$ належить прямій. Знайдемо ще одну точку на цій прямій. Краще всього визначити точку перетину прямої з віссю Ox. Взявши в рівнянні $y = 0$, одержимо $0 = 3x + 2$, звідки $x = -\dfrac{2}{3}$.

Точка перетину прямої з віссю Ox має координати $B\left(-\dfrac{2}{3};\,0\right)$, а потім їх з'єднавши, одержимо пряму, що відповідає даному рівнянню. (рис. 3.20).

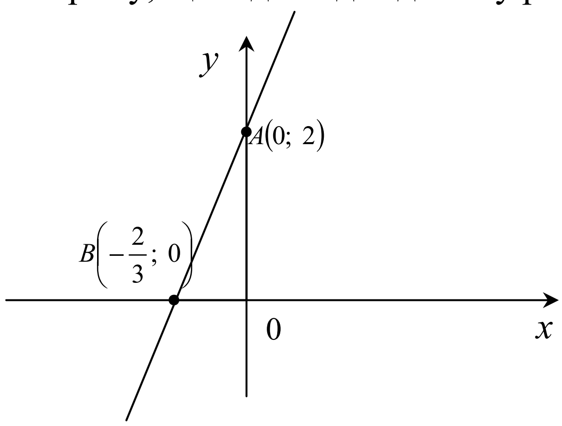

рис. 3.20

Дві прямі на площині

а) Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями с кутовими коефіцієнтами:

$(l_1)\;\; y = k_1 x + b_1;\;\; (l_2)\;\; y = k_2 x + b_2$,

тоді відповідно кути їх нахилу будуть φ_1 і φ_2: $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$ (рис. 3.21)

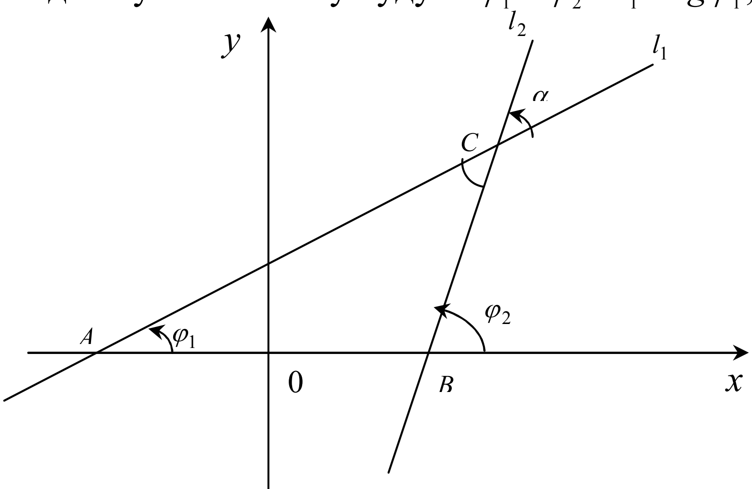

рис. 3.21

Кутом між прямою l_1 і l_2 будемо називати той кут, на який потрібно повернути пряму l_1 проти годинникової стрілки, щоб вона співпала (стала паралельною) з прямою l_2.

Так як при повороті на кут й пряма займе початкове положення, то звідси слідує, що кут між двома прямими визначається неоднозначно з точністю до кратних π. Одне із значень цього кута можна завжди вибрати так, щоб воно було невід'ємним і меншим π. На рис. 3.21. цей кут позначено θ: $\left(l_1 \widehat{\ } l_2\right) = \theta$.

Кут φ_2 буде зовнішнім кутом по відношенню трикутника ABC. Із теореми, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, які несуміжні з ним, одержуємо рівність: $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ або $\theta = \varphi_2 - \varphi$. Звідки $tg\theta = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$, але $tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$, тоді

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (10)$$

Формула (10) визначає тангенс кута між двома прямими через їх кутові коефіцієнти.

Зауваження 1. Формула (10) визначає тангенс кута θ, який визначається обертанням навколо точки с прямої l_1 з кутовим коефіцієнтом k_1, проти годинникової стрілки до спів падання з прямою l_2.

Зауваження 2. Якщо порядок розглядуваних прямих не вказано, то цей порядок можна вибирати самостійно.

Із формули (10) легко одержати умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \| l_2$, то $k_1 = k_2$;
- якщо $l_1 \perp l_2$, то $k_1 k_2 = -1$.

Приклад. Обчислити кут між прямими (l_1) $y = 2x - 3$ і (l_2) $y = -3x + 2$.

Розв'язання. В нашому випадку $k_1 = 2$, а $k_2 = -3$, за формулою (10), маємо: $tg\theta = \dfrac{-3-2}{1+2(-3)} = 1,\ tg\theta = 1.$

Отже, кут між прямими $\left(l_1 \widehat{\ } l_2\right) = 45^0$.

б) якщо прямі l_1 і l_2 задано загальними рівняннями: (l_1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; (l_2) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то кут між нормаль векторами до цих прямих: $\vec{n_1}\{A_1; B_1\}, \vec{n_2}\{A_2; B_2\}$. За відомою формулою маємо:

$$\cos\left(\vec{n_1} \widehat{\ } \vec{n_2}\right) = \cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (11)$$

Згідно формули (11) умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2 будуть мати вигляд:

- якщо $l_1 \| l_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$;

- якщо $l_1 \perp l_2$, то $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Приклад. Визначити взаємне розташування прямих $(l_1)\ x-y8=0,\ (l_2)\ x+y-12=0$.

Розв'язання. Дані прямі задано загальними рівняннями, отже: $A_1=1, B_1=-1$, $A_2=1, B_2=1$. Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих: $A_1A_2+B_1B_2=0$, маємо: $1\cdot 1+(-1)\cdot 1=0$. Отже умова виконується, значить дані прямі взаємно перпендикулярні.

в) якщо прямі (l_1) і (l_2) задано канонічними рівняннями: $(l_1)\ \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$; $(l_2)\ \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$, то кут між ними визначається, як кут між направляючими векторами цих прямих: $\overrightarrow{q_1}\{l_1, m_1\},\ \overrightarrow{q_2}\{l_2, m_2\}$. За відомою формулою маємо:

$$\cos\left(\overrightarrow{q_1}\overrightarrow{q_2}\right)=\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}} \qquad (12)$$

Згідно формули (12) умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2 будуть мати вигляд:

- якщо $l_1 \| l_2$, то $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$;

- якщо $l_1 \perp l_2$, то $l_1l_2+m_1m_2=0$.

Приклад. Визначити взаємне розташування прямих $(l_1)\ \dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+3}{6}$; $(l_2)\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-7}{3}$

Розв'язання. Дані прямі задано канонічними рівняннями, отже $l_1=4, m_1=6$, $l_2=2, m_2=3$. Перевіримо виконання умови паралельності прямих $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$, маємо $\dfrac{4}{2}=\dfrac{6}{3}=2$. Отже, умова виконується, значить дані прямі паралельні.

Відстань точки до прямої

Відстань точки $A(x_1, y_1)$ до прямої $Ax+By+C=0$ є довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму. Вона обчислюється за формулою:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad (13)$$

Правило. Щоб обчислити ***відстань від точки*** $A(x_1, y_1)$ ***до прямої*** $Ax + By + C = 0$, треба дане рівняння прямої привести до нормального виду, потім в ліву частину одержаного рівняння підставити замість плинних координат координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і буде шуканою відстанню.

Приклад. Обчислити відстань від точки $A(2; 5)$ до прямої $6x + 8y - 5 = 0$.

Розв'язання. Згідно наведеного правила приведемо дане рівняння прямої до нормального виду. Обчислюємо нормуючий множник:

$$M = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{10}.$$

Рівняння прямої нормального виду запишеться так: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$.

Далі в праву частину цього рівняння $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2}$ підставимо координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і дасть шукану відстань:

$$d = \left|\frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 5 - \frac{1}{2}\right| = 4{,}7$$

Відстань від точки до прямої є величина завжди додатня. Крім відстані від точки до прямої розглядається ще і відхилення точки від прямої.

Відхилення δ ***даної точки від даної прямої*** є відстань цієї точки до прямої, взята зі знаком плюс, коли точка і початок координат знаходяться по різні сторони від прямої і зі знаком мінус, якщо точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Висновок. Відстань від точки до прямої дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від прямої: $d = |\delta|$.

Приклад. Як розташовані по відношенню до початку координат точка $B\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$ і пряма $6x + 8y - 5 = 0$.

Розв'язання. Рівняння даної прямої в нормальному виді запишеться так: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$. Далі в праву частину цього рівняння підставимо координати даної точки. Одержане число буде визначати відхилення даної точки від даної прямої.

$$\delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$$

Відхилення є від'ємне число, отже точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Питання та вправи для самоперевірки

Питання.

1. Дайте визначення рівняння лінії на площині.
2. Які лінії на площині визначають слідуючі рівняння:

а) $x = y$; б) $y = x^2$; в) $y = 2x + 3$?

3. Що називається кутом нахилу прямої?
4. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої?
5. Вкажіть на особливість розташування прямих, заданих слідуючими рівняннями: а) $y = 5$; б) $x = -3$; в) $y = 2x$; г) $y = 0$; д) $x = 0$.
6. Запишіть рівняння прямої, з кутовим коефіцієнтом. Який геометричний зміст в ньому мають коефіцієнти k і b?
7. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку. Яким чином в даному рівнянні визначається напрямок прямої?
8. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві дані точки. За якою формулою визначається кутовий коефіцієнт цієї прямої?
9. Запишіть загальне рівняння прямої. Які координати має нормаль вектор цієї прямої?
10. Вкажіть на особливість в розташуванні прямих, заданих рівняннями: а) $2x - 4y = 0$; б) $7x + 8 = 0$; в) $9 - 3y = 0$; г) $7x = 0$; д) $4y = 0$ є) $4x + 8y - 1 = 0$.
11. Запишіть рівняння прямої у відрізках. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять в це рівняння?
12. Запишіть канонічне рівняння прямої. Як визначаються координати направляючого вектора цієї прямої?
13. Запишіть параметричне рівняння прямої. Яке фізичне тлумачення має це рівняння, якщо параметр є час?
14. Нормальне рівняння прямої. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять в дане рівняння?
15. Назвіть правило переходу від загального виду рівняння прямої до нормального.
16. Побудувати слідуючи прямі за їх рівняннями:

а) $2x - 3y + 6 = 0$; б) $7x - 14y = 0$; в) $x = -5$; г) $y = 1$; д) $y = 3x - 9$.

17. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
18. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями загального виду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
19. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями канонічного виду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
20. Відстань точки до прямої. Правило обчислення відстані точки до прямої.

21. Відхилення точки від прямої. В якому випадку відхилення точки від прямої дорівнює відстані точки до прямої?