3.7. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння другого степеня.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxz + Exz + Kyz + Mx + Ny + Lz + F = 0 \qquad (1)$$

Рівняння поверхні може і не містити всіх трьох змінних: x, y, z. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно z, то одержимо рівняння поверхні у вигляді $z = f(x, y)$

Сфера.

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї ж точки, яка називається центром сфери.

Рівняння сфери має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (2)$$

де a, b, c - координати центра сфери, а R - її радіус. Якщо центр сфери знаходиться в початку координат, то її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3)$$

Приклад. Записати рівняння сфери радіуса $R = 3$ з центром в точці $C(-1;\, 2;\, -3)$.

Розв'язання. *Підставляючи в рівняння (2)* $a = -1; b = 2; c = -3$, *будемо мати* $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$

або

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

Циліндр.

Циліндричною поверхнею, або циліндром, називається поверхня, що описується нескінченною прямою (твірною), яка рухається, залишаючись паралельною даній прямій і перетинаючи дану криву (направляючу).

Ми будемо розглядати тільки такі циліндричні поверхні, у яки х твірна паралельна одній із координатних осей, а направляюча лежить в одній із координатних площин. Назва таких циліндричних поверхонь залежить від типу направляючої:

- ***прямий круговий циліндр***, якщо направляюча лежить в площині xOy, визначається рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$. (рис. 3.32)
- ***еліптичний циліндр***, направляюча якого лежить в площині xOz, визначається рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.33)

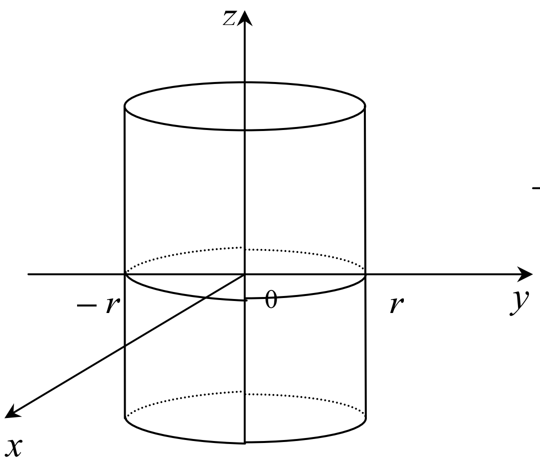

рис. 3.32

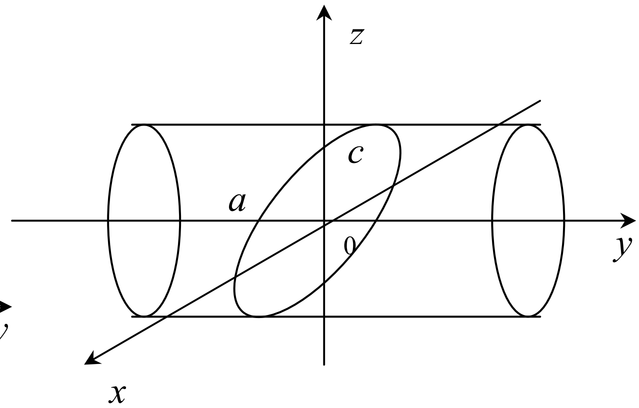

рис. 3.33

- ***рівняння гіперболічного циліндра***, направляюча якого лежить в площині xOy, має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 3.34)
- ***рівняння параболічного циліндра***, направляюча якого лежить в площині yOz, має вигляд $y^2 = 2pz$ (рис. 3.35)

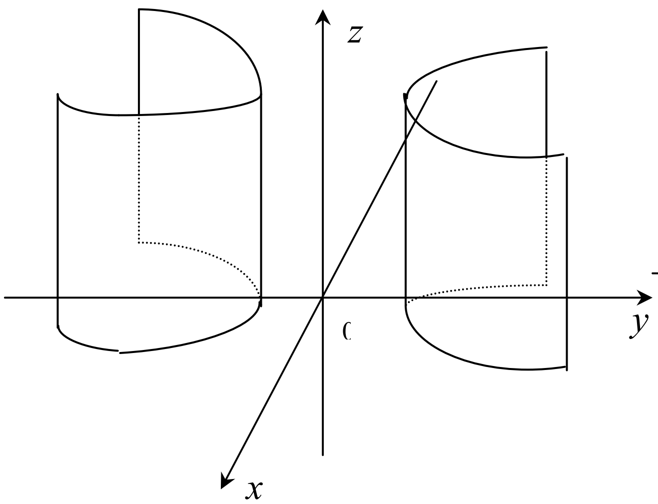

рис. 3.34

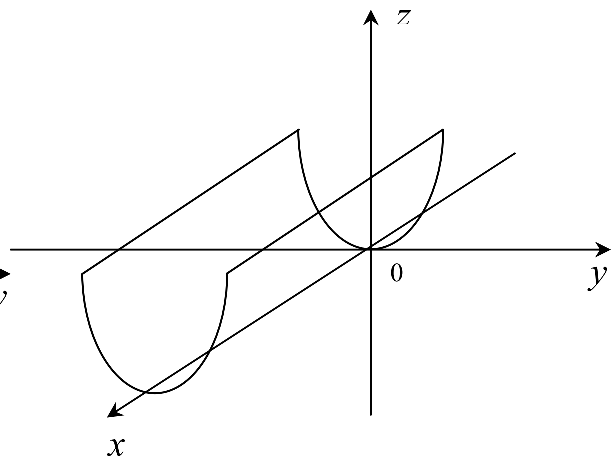

рис. 3.35

Зауваження. В рівняннях циліндричних поверхонь відсутня змінна, яка однойменна з тією координатною віссю, якій паралельна твірна циліндричної поверхні.

Приклад. Які поверхні визначаються такими рівняннями: а) $x^2 + z^2 = 16$; б) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$; в) $x = 2z^2$; г) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Розв'язання. Кожне із цих рівнянь містить тільки дві змінні x і z і визначає на площині xOz криві: а) коло; б) еліпс; в) параболу; г) гіперболу.

В просторі на кожне із них визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні вісі Oy, так як ці рівняння не місять змінної y направляючими цих циліндричних поверхонь є вказані криві:

1. $x^2+z^2=16$ - рівняння прямого кругового циліндра;
2. $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ - рівняння еліптичного циліндра;
3. $x=2z^2$ - рівняння параболічного циліндра;
4. $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ - рівняння гіперболічного циліндра.

Конус

> ***Конічною поверхнею, або конусом***, називається поверхня, що описується рухомою нескінченною прямою (твірною), яка проходить через точку O (вершину конуса) і перетинає дану криву (направляючу).

Якщо направляюча конуса паралельна площині xOy, то рівняння конічної поверхні має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (4)$$

і геометрично зображається на рис. 3.36

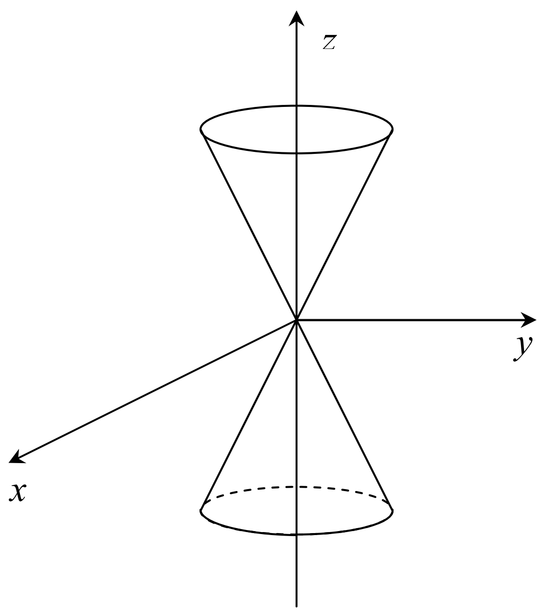

рис. 3.36

Якщо в (4) $a=b$, то рівняння описує круговий конус, якщо $a\neq b$ - еліптичний конус.

Поверхні обертання

Рівняння поверхні обертання по відомому рівнянню обертаючої лінії можна одержати, користуючись правилом:

Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії l, яка лежить в площині yOz і обертається навколо вісі Oy, необхідно в рівнянні цієї лінії замінити z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Зауваження 1. В залежності від того, в якій координатній площині лежить лінія l і навколо якої координатної вісі виконується обертання, при користуванні правилом необхідно притримуватись вимоги: координата, яка однойменна з віссю обертання, повинна залишитись без зміни; другу змінну заміняємо так, щоб перетворене таким чином рівняння в загальному випадку повинно містити три плинні координати: x; y; z.

Зауваження 2. Виходячи із означення поверхні обертання, можна одержати рівняння конічної поверхні (конуса). В цьому випадку лінією обертання l буде пряма лінія.

Приклад. 1. Пряма $x=z$ обертається навколо вісі Oz. Знайти рівняння поверхні обертання (конуса).

Розв'язання. Так як в рівняння лінії l входять тільки змінні x і z, то лінія лежить в площині xOz.

Для одержання рівняння поверхні обертання в рівнянні прямої, змінна z повинна залишитись без зміни, так як вона відповідає вісі обертання Oz.

Друга змінна x в рівнянні прямої повинна бути замінена $\pm$ коренем квадратним із суми квадратів решти двох змінних x і y, тобто $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.
Рівняння поверхні запишеться так: $\pm\sqrt{x^2+y^2}=z$.
Виконавши піднесення обох частин останньої рівності до квадрату, одержимо остаточно рівняння поверхні обертання у вигляді:

$$x^2+y^2=z^2$$

або

$$x^2+y^2-z^2=0 \text{ (конус)}$$

Одержане рівняння є частинним випадком рівняння (4) $(a=b=c=1)$.

Приклад 2. Знайти рівняння поверхні обертання, утвореної обертання еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$: а) навколо вісі Ox; б) навколо вісі Oy.

Розв'язання. Рівняння кривої містить координати x і y, значить, крива лежить в лощині xOy.

Для визначення рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса навколо вісі Ox, необхідно в рівнянні еліпса змінну x, яка відповідає вісі обертання, залишити без зміни, а другу змінну y в рівнянні еліпса замінити на корінь квадратний із суми квадратів решти двох змінних, тобто на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$.

Шукане рівняння поверхні обертання буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}{b^2}=1$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

ця поверхня називається ***еліпсоїдом обертання***.

2. Якщо ж обертати даний еліпс навколо вісі Oy, то змінну y, що відповідає вісі обертання, в рівнянні еліпса, слід залишити без зміни, а змінну x замінити на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

В цьому випадку рівняння поверхні обертання буде мати вигляд:

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

або

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ця поверхня також називається еліпсоїдом обертання.

Далі наведемо для довідок простіші рівняння поверхнею другого порядку:

1. Тривісний еліпсоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{5}$$

a, b, c - піввісі еліпсоїда.

2. ***Однопорожнинний гіперболоїд***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{6}$$

В перетині поверхні однопорожнинного гіперболоїда з координатними площинами одержуються криві:

1. з площиною xOy $(z=0)$ - еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який називається головним;
2. з площиною xOz $(y=0)$ - гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;
3. з площиною yOz $(x=0)$ - гіпербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Вершини головного еліпса (інколи його називають горловим) називаються вершинами гіперболоїда, їх довжини дорівнюють $2a$ і $2b$. Вісь гіперболоїда, розташована по вісі Oz що дорівнює $2c$, називається його повздовжньою віссю.

У випадку, коли повздовжня вісь однопорожнинного гіперболоїда розташована на вісі Ox, рівняння його поверхні запишеться у вигляді:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad (7)$$

для випадку, коли повздовжня вісь однопорожнинного гіперболоїда знаходиться на вісі Oy, його рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

3. ***Двопорожнинний гіперболоїд***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (9)$$

Площина xOy не перетинає поверхні двопорожнинного гіперболоїда (9). Площини xOz, yOz перетинають поверхню (9) відповідно по гіперболам:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{і} \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

які називаються головними гіперболами. Відрізок довжиною $2c$, розташований на вісі Oz, називається повздовжньою віссю двопорожнинного гіперболоїда (9), а відрізки довжиною $2a$ і $2b$ розташовані відповідно на осях Ox і Oy, називається поперечними його осями.

У двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (10)$$

повздовжня вісь розташована на вісі Oy, а у двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1 \qquad (11)$$

вона розташована на вісі Ox.

4. Еліптичний параболоїд:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \qquad (12)$$

вісь Oz називається його віссю.

У еліптичного параболоїда:

$$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2r} \qquad (13)$$

віссю служить вісь Oy, а у еліптичного параболоїда:

$$x=\frac{y^2}{2q}+\frac{z^2}{2r} \qquad (14)$$

віссю служить вісь Ox.

5. Гіперболічний параболоїд.

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q} \qquad (15)$$

Приклад. Які поверхні визначаються рівняннями.

а) $2x^2-5y^2-8=0$; б) $4x^2-8y^2+16z^2=0$;

в) $8x^2-4y^2+24z^2-48=0$; г) $y^2=6x-4$;

д) $2x^2-y^2-z^2=0$; є) $3x^2+5y^2=12z$;

ж) $x^2+4y^2-8=0$; з) $z^2-4x=0$;

і) $2x^2-3z^2=-12y$; к) $4x^2-12y^2-6z^2=12$

Розв'язання.

а) Гіперболічний циліндр з твірними, які паралельні вісі Oz;

б) із рівняння (4) видно, що це конус;

в) порівнюючи з рівнянням (8), робимо висновок, що це є однопорожнинний гіперболоїд, повздовжня вісь якого розташована на вісі Oy;

г) параболічний циліндр з твірною, яка паралельна вісі Oz;

д) запишемо рівняння у вигляді: $y^2+z^2-2x^2=0$ або $\frac{y^2+z^2}{2}-x^2=0$, звідки видно, що це конус, у якого вісь співпадає з віссю Ox;

є) записавши рівняння у вигляді: $z=\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{\frac{12}{5}}$, можемо зробити висновок, що це еліптичний параболоїд (12);

ж) еліптичний циліндр з твірними, які паралельні вісі Oz;

з) рівняння містить дві координати, це циліндрична поверхня. Запишемо рівняння у вигляді $z^2=4x$ (парабола). Отже, дане рівняння визначає параболічний циліндр з твірними, які паралельні вісі Oy;

і) запишемо рівняння у вигляді: $y=\frac{z^2}{4}-\frac{x^2}{6}$. Порівнюючи з рівняннями (15), робимо висновок, що це гіперболічний параболоїд;

к) Перепишемо рівняння у вигляді: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=1$, або $\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{3}=-1$. Порівнюючи з рівнянням (11), робимо висновок, що це двопорожнинний гіперболоїд, вісь якого співпадає з віссю Ox.

Питання та вправи для самоперевірки.

Питання

1. Дайте визначення поверхні другого порядку. Які ви знаєте поверхні другого порядку?

2. Дайте визначення сфери. Запишіть рівняння сфери з центром в точці $C(a;b;c)$ і радіусом R.
3. Яка поверхня називається циліндричною? Від чого належить назва циліндричних поверхонь? Приведіть приклади циліндричних поверхонь.
4. Запишіть рівняння прямого кругового циліндра, еліптичного циліндра, параболічного циліндра.
5. Скільки змінних присутні в рівняннях циліндричних поверхонь? Як визначається змінна, яка відсутня в рівнянні циліндричної поверхні?
6. Дайте визначення конічної поверхні. Запишіть рівняння конічної поверхні, якщо направляюча паралельна площині xOy.
7. Сформулюйте правило, за яким по відомому рівнянню обертаючої лінії можна одержати рівняння поверхні обертання. Наведіть приклади.
8. Запишіть рівняння тривісного еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда, двопорожнинного гіперболоїда.
9. Запишіть рівняння еліптичного параболоїда, гіперболічного параболоїда.

Вправи.

1. Скласти рівняння сфери радіуса $R=5$ із центром в початку координат.
2. Записати рівняння сфери радіуса $R=8$ із центром в точці $C(3;4;-1)$.
3. Сфера має центр в точці $C(5;7;-1)$ і проходить через початок координат. Знайти її рівняння.
4. Які циліндричні поверхні визначають рівняння: а) $yz=5$; б) $y=6z^2$; в) $y^2+z^2=9$; г) $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$? Якій координатній вісі паралельні твірні цих поверхонь?
5. Пряма $y=z$ обертається навколо вісі Oy. Знайти рівняння поверхні обертання (конуса).
6. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ навколо: а) вісі Ox; б) вісі Oz. Назвіть типи цих поверхонь.

Відповіді

1. $x^2+y^2+z^2=25$.
2. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=64$.
3. $(x-5)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=75$.
4. а) гіперболічний циліндр;
   б) параболічний циліндр;
   в) прямий круговий циліндр;
   г) еліптичний циліндр.

Твірні цих поверхонь паралельні вісі Ox.

5. $y^2 - x^2 - z^2 = 0$.

6. а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, двопорожнинний гіперболоїд;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{f^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, однопорожнинний гіперболоїд.