2.4. Векторний добуток векторів

Означення векторного добутку двох векторів. Основні властивості векторного добутку. Векторний добуток в координатній формі. Деякі застосування векторного добутку.

Означення векторного добутку

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє таким умовам:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в які лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2.14)
- вектор $\vec{c}$ направлений в той бік, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший оберт від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ буде виконуватись проти годинникової стрілки, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів;
- довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах.

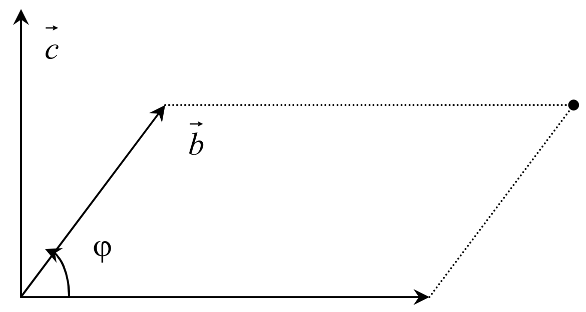

рис. 2.14

Векторний добуток позначають: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$.

Основні властивості векторного добутку

Геометричні властивості.

1. Довжина вектора $\vec{c}$ векторного добутку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах. Площа паралелограма зі сторонами a і b і гострим кутом між ними φ обчислюється за формулою $S_{\text{пар}} = ab\sin\varphi$, тому $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$.

2. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$, якщо $sin\varphi = 1$, тобто $\varphi = \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}$, або $\vec{a}\perp\vec{b}$.

3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0}$, якщо $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$.

4. Вираз $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left[\vec{a}\cdot\vec{a}\right] = \left[\vec{a}\right]^2$ називається векторним квадратом. Векторний квадрат $\left[\vec{a}\right]^2 = 0$.

Алгебраїчні властивості

1. При переміні місцями множників векторного добутку знак векторного добутку міняється на протилежний: $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\vec{a}\right]$.

2. Властивості сполучності множення: $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

3. Розподільча властивість відносно додавання: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \overrightarrow{b\times c}$, $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b}$.

Зауваження. Якщо властивість (1) можна довести використовуючи властивість непарної функції синус: $sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = sin\left(\vec{b}\vec{a}\right)$ або $sin\varphi = -sin(-\varphi)$, то доведення властивостей (2) і (3) потребує більш серйозних досліджень.

4. Обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі.

На основі розподільчої властивості векторний добуток векторів можна виконати по правилу множення многочлена на многочлен. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}\right)\cdot\left(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}\right) =$$

$$= X_1X_2\left[\vec{i}\vec{i}\right] + X_1Y_2\left[\vec{i}\vec{j}\right] + X_1Z_2\left[\vec{i}\vec{k}\right] + Y_1X_2\left[\vec{j}\vec{i}\right] + Y_1Y_2\left[\vec{j}\vec{j}\right] + Y_1Z_2\left[\vec{j}\vec{k}\right] + Z_1X_2\left[\vec{k}\vec{i}\right] +$$

$$`+Z_1Y_2\left[\vec{k}\vec{j}\right] + Z_1Z_2\left[\vec{k}\vec{k}\right].$$

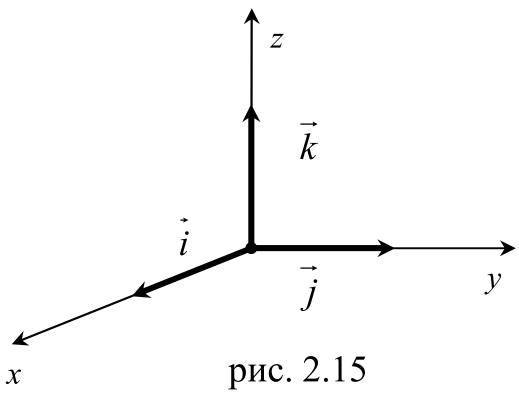

рис. 2.15

Виходячи із рис (2.15) визначимо векторний добуток ортів:

$$\left[\vec{i}\vec{i}\right] = \left[\vec{i}\right]^2 = 0;\ \left[\vec{i}\vec{j}\right] = \vec{k},\ \left[\vec{i}\vec{k}\right] = -\vec{j},\ \left[\vec{j}\vec{i}\right] = -\vec{k},\ \left[\vec{j}\vec{j}\right] = \left[\vec{j}\right]^2 = 0,\ \left[\vec{j}\vec{k}\right] = \vec{i},$$
$$\left[\vec{k}\vec{i}\right] = \vec{j},\ \left[\vec{k}\vec{j}\right] = -\vec{i},\ \left[\vec{k}\vec{k}\right] = \left[\vec{k}\right]^2 = 0.$$

Підставляючи ці значення у вираз $\vec{a}\cdot\vec{b}$, одержимо:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{i}-(X_1Z_2-Z_1X_2)\vec{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{k}$.

Цей результат можна записати за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Застосування векторного добутку. Момент відносно точки

Нехай в деякій точці B прикладена силу $\vec{F}$. Моментом сили $\vec{F}(X_2, Y_2, Z_2)$ прикладеної в точці B, відносно довільної точки A (рис. 2.16) називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r_B}=\overrightarrow{AB}\{X_1,\ Y_1, Z_1\}$на вектор сили $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right)=\vec{r_B}\cdot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

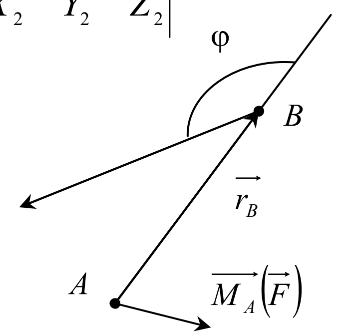

рис. 2.16

Приклад 1. Сила $\vec{F}\{1;\ 3;\ 2\}$ прикладена в точці $B(3;\ 4;\ 5)$. Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно точки $A(1;\ 2;\ 3)$.

Розв'язання. $\vec{r_B}=\overrightarrow{AB}\{2,\ 2,\ 2\}$. Тоді:

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$$

Зауваження. Векторний добуток може бути використаний для обчислення моменту сил, що діють на диполь, для обчислення сили, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі, в гіроскопічних ефектах і т.д.

Приклад 2. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 2)$.

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}\{1;\,1;\,1\}$ і $\overrightarrow{AC}\{-1;\,1;\,0\}$ (рис. 2.17).

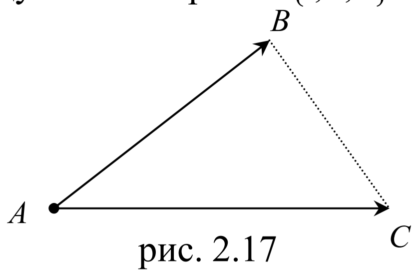

рис. 2.17

Обчислимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

Довжина вектора векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах, як на сторонах. Площа трикутника дорівнює половині площі відповідного паралелограма. Отже,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\,(\text{од}^2.).$$

Приклад 3. Обчислити синус кута A трикутника ABC з вершинами $A(1;\,0;\,2)$, $B(2;\,1;\,3)$, $C(0;\,1;\,2)$.

Розв'язання. Синус кута A трикутника ABC можна обчислити за формулою:

$$\sin A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Кут A слід взяти гострим, якщо $BC^2<AB^2+AC^2$ і тупим, якщо $BC^2>AB^2+AC^2$. Ці нерівності безпосередньо витікають із теореми косинусів.

Отже, $\overrightarrow{AB}\{1;\,1;\,1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-1;\,1;\,0\}$, $\overrightarrow{BC}\{-2;\,0;\,0\}$, тоді $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=3$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=2$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=5$. В нашому випадку $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$, отже кут $A=90^0$.

До цього висновку можна прийти, якщо обчислити скалярний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, який в нашому випадку дорівнює нулеві.

Питання та вправи для самоперевірки.

Питання

1. Дайте означення векторного добутку двох векторів. Якою символікою користуються для позначення векторного добутку?

2. Чому довжина вектора $\vec{c}$ векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах?

3. Сформулюйте геометричні властивості векторного добутку.

4. Сформулюйте алгебраїчні властивості векторного добутку.

5. Запишіть формулу обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі.

6. Як може бути використаний векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ для обчислення:

- площі паралелограма, побудованого на даних векторах як на сторонах;
- площі трикутника, дві сторони якого співпадають з даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

Вправи

1. * Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 5$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

2. * Дано $|\vec{a}| = 10,\ |\vec{b}| = 2,\ \vec{a}\vec{b} = 12$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

3. Дано вектори $\vec{a}\{3;\,-1;\,-2\}$ і $\vec{b}\{1;\,2;\,-1\}$. Знайти: а) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$; б) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\right]$.

4. Дано точки $A(2;\,-1;\,2)$, $B(1;\,2;\,-1)$ і $C(3;\,2;\,1)$. Знайти координати вектора векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right]$.

5. Дано вершини трикутника $A(1;\,-1;\,2)$, $B(5;\,-6;\,2)$ і $C(1;\,3;\,-1)$. Обчислити довжину його висоти, яка опущена із вершини B на сторону AC.

6. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}\{2;\,-3;\,1\}$, $\vec{b}\{1;\,-2;\,3\}$ і задовольняє умові $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

Відповіді

1. 15. Довжина вектора векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах. Площа паралелограма обчислюється за формулою $S = a \times b \sin\varphi$, а тому $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 15.$

2. 16. Для обчислення $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ нам необхідно знати $\sin(\overrightarrow{\bar{a}}\,\hat{}\,\bar{b})$ (див.вправу 1). Через скалярний добуток обчислюємо $\cos(\overrightarrow{\bar{a}}\,\hat{}\,\bar{b})=\dfrac{12}{10\cdot 2}=\dfrac{3}{5}$, а потім із тотожності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ визначаємо $\sin(\overrightarrow{\bar{a}}\,\hat{}\,\bar{b})=\dfrac{4}{5}$.

3. а) $\{5;\,1;\,7\}$; б) $\{10;\,2;\,14\}$.
4. $\{6;\,-4;\,-6\}$.
5. 5.
6. $\bar{x}=7\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$.

2.5. Векторно-скалярний добуток трьох векторів

Означення векторно-скалярного добутку

Вияснимо, що можна сказати про добуток трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, з врахуванням того, що нам відомо скалярний і векторний добутки двох векторів.

Можливі випадки:

1. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ скалярно, а результат потім помножити на вектор $\vec{c}$, то одержимо вектор колінеарний вектору $\vec{c}$.
2. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\vec{c}$ скалярно, то одержимо скаляр.
3. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\vec{c}$ векторно, то одержимо вектор.

У випадку (2) одержимо векторно-скалярний добуток, а у випадку (3) – подвійний векторний добуток. Предметом нашого вивчення буде векторно – скалярний добуток.

> ***Векторно-скалярний добутком*** або ***мішаним добутком*** трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називають скалярну величину, яка одержується в результаті скалярного множення векторного добутку двох векторів, наприклад $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на третій вектор $\vec{c}$: $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$.

Векторно-скалярний або змішаний добуток позначається:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\left[\vec{a}\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right).$$

Нижче буде показано, що результат не залежить від того, які вектори, що стоять рядом, перемножуються векторно:

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]=\left(\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\right).$$

Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай зведені до спільного початку некомлапанарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку (рис. 2.18).

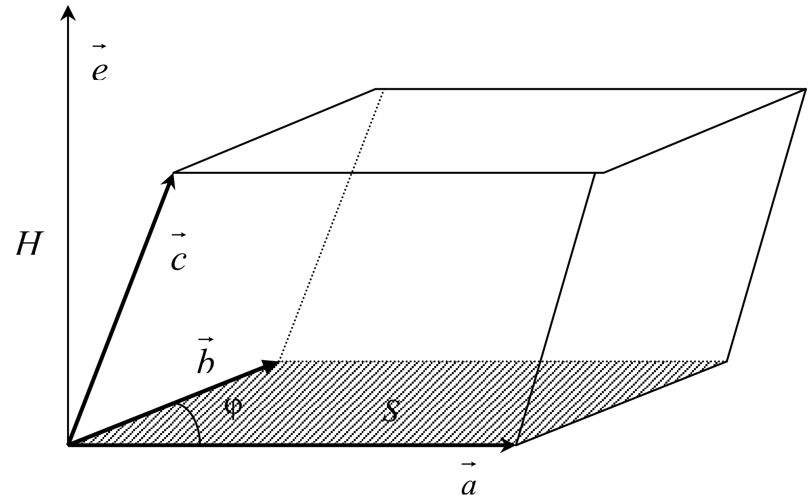

рис. 2.18

Нехай $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{e}$, тоді, за визначенням векторного добутку $|\vec{e}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\varphi = S_{\text{пар}}$, тобто площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах. Скалярний добуток вектора $\vec{e}$ на вектор $\vec{c}$ можна записати так: $\vec{e}\vec{c} = |\vec{e}|\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{c}$. Проекція вектора $\vec{c}$ на напрям вектора $\vec{e}$ буде висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах: $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{c} = H$.

Отже $|\vec{e}|\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| sin\varphi \cdot H = S_{\text{пар}} \cdot H = V_{\text{пар}}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, якщо вони утворюють праву трійку векторів, дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Узагальнюючи зроблений висновок, можна сформулювати таку теорему:

Теорема. Мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$ є число, абсолютна величина якого виражає об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах. Знак добутку додатній, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву систему і від’ємний в протилежному випадку.

Із теореми слідує, що абсолютна величина добутку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ залишається тією ж в якому б порядку ми не брали множники. Знак в одних випадках буде “+”, а в інших “-“.

Одержаним результатом $\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = V_{\text{пар}}$ можна скористатися для обчислення об’єму піраміди, одержимо:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар}} \cdot H = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}.$$

Обчислення змішаного добутку

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано в координатній формі: $\vec{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\vec{c}\{X_3, Y_3, Z_3\}$. По відомій формулі обчислимо:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{e}$, де $\vec{e} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$.

Далі обчислимо:

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Ліва частина цієї рівності є розкладом визначника $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ по елементам третьої строчки.

Отже маємо $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$.

Приклад. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходиться в точках $A(-7; -11; 1)$, $B(-4; -7; 3)$, $C(-1; -2; -4)$, $D(1; -1; 1)$ (рис. 2.19).

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}\{3; 4; 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{6; 9; -5\}$, $\overrightarrow{AD}\{8; 10; 0\}$.

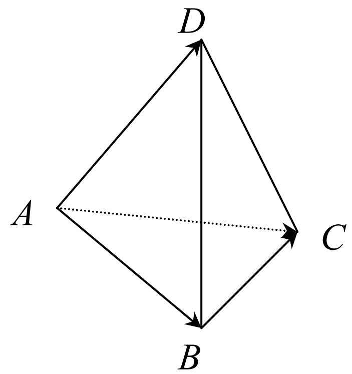

рис. 2.19

Скористуємось співвідношенням $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}$, але

$$V_{\text{пар}} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right)\right| = \left\| \begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -5 \\ 8 & 10 & 0 \end{matrix} \right\| = |-34| = 34.$$

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} \cdot 34 = 5\frac{2}{3} \text{(од.куб.)}$$

Умова компланарності трьох векторів.

Змішаний добуток векторів ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) дорівнює нулеві, якщо:

1. серед векторів співмножників є хоч би один нуль-вектор;
2. якщо серед перемножуваних векторів два вектори колінеарні;
3. якщо три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарні.

Випадки (1) і (2) можна звести до випадку (3):
а) якщо один із векторів є нуль-вектор, то він може належати любій площині і зокрема тій, де лежать два ненульових вектора;
б) якщо два вектори колінеарні, то паралельним переносом їх можна розташувати на одній прямій, а раз так, то через цю пряму і третій вектор можна провести площину, а отже дані вектори – компланарні.

Зауваження. У випадку, коли одержана пряма і напрям вектора є мимобіжними, то за допомогою паралельного переносу, можна добитися їх перетину.

Доведемо рівність нулеві змішаного добутку для випадку (3): коли три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні. У цьому випадку векторний добуток двох довільних векторів цієї трійки буде вектор, що перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Переходячи до обчислення скалярного добутку цього вектора на третій незалежний вектор, будемо мати добуток двох взаємно перпендикулярних векторів, а отже від буде дорівнювати нулеві. Висновком розглянутих випадків є теорема.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є рівність нулеві їх змішаного добутку ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)=0.

Приклад. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}\{1;\,2;\,3\}$, $\vec{b}\{2;\,-3;\,-4\}$, $\vec{c}\{0;\,-7;\,-10\}$.

Розв'язання. Обчислимо змішаний добуток даних векторів:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Значить, дані вектори компланарні.

Зауваження. Використовуючи основні властивості визначників можна довести теорему.

Теорема. Кругова перестановка множників змішаного добутку не змінює його величини. Перестановки двох сусідніх множників міняє знак добутку на протилежний:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right) = \left(\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right) = -\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right) = -\left(\vec{c}\vec{b}\vec{a}\right) = -\left(\vec{a}\vec{c}\vec{b}\right).$$

Питання та вправи для самоперевірки

Питання

1. У якому випадку добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається векторно-скалярним? Як позначається векторно-скалярний добуток?
2. Який геометричний зміст векторно-скалярного добутку?
3. За якою формулою обчислюється векторно-скалярний добуток векторів, коли вони задані в координатній формі?
4. В якому випадку векторно-скалярний добуток є додатнім числом, а в якому випадку – від'ємним?
5. Як виражається необхідна і достатня умови компланарності трьох векторів через їх векторно-скалярний добуток?
6. Що таке кругова перестановка векторів і як вона впливає на величину векторно-скалярного добутку?
7. За якою формулою обчислюється об'єм трикутної піраміди, три ребра якої співпадають з трьома векторами зі спільним початком?

Вправи

1. Дано вектори $\vec{a}\{1;\ -1;\ 3\};\ \vec{b}\{-2;\ 2;\ 1\}$ і $\vec{c}\{3;\ -2;\ 5\}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
2. Перевірити компланарність векторів:

а) $\vec{a}\{2;\ 3;\ -1\};\ \vec{b}\{1;\ -1;\ 3\};\ \vec{c}\{1;\ 9;\ -11\}$;

б) $\vec{a}\{3;\ -2;\ 1\};\ \vec{b}\{2;\ 1;\ 2\};\ \vec{c}\{3;\ -1;\ -2\}$.

3.* Довести, що чотири точки лежать в одній площині: $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$.

4. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках: $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;-1)$, $D(4;\ 1;\ 3)$

5. Об'єм трикутної піраміди $V = 5$, три її вершини знаходяться в точках $A(2;\ 1;-1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

Відповіді

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -7$.

2. а) компланарні, б) не компланарні.

3. Дані точки лежать в одній площині. Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB}\{-1;-1;6\}, \overrightarrow{AC}\{-2;0;2\}, \overrightarrow{AD}\{1;-1;4\}$, далі обчислюємо їх векторно-скалярний добуток, який дорівнює нулеві. Отже вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ - компланарні , а точки A, B, C, D лежать в одній площині.

4. 3 куб.од.

5. $D_1(0;8;0), D_2(0;-7;0)$.