2.3. Скалярний добуток двох векторів

Основні властивості скалярного добутку. Скалярний добуток в координатній формі. Кут між двома векторами. Умова взаємної перпендикулярності двох векторів.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|b\right|cos\,\varphi .$$

За визначення проекції вектора на вісь маємо:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|cos\,\varphi ,$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|cos\,\varphi$$

Підставивши ці співвідношення у формулу скалярного добутку двох векторів, одержимо:

$$\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного із них на проекцію другого вектора на напрям першого вектора.

Зауваження. Скалярний добуток вектор $\vec{a}$ на себе називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|cos\,0^0=\left|\vec{a}\right|^2$.

Отже, ***скалярний квадрат*** вектора дорівнює квадратові його довжини. Із цієї властивості витікає формула для обчислення довжини вектора:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}.$$

Основні властивості скалярного добутку

Геометричні властивості:

1. Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $cos\,\varphi=0$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Вірне і обернене твердження: якщо перемножуються два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$ тільки за умовою, що $cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=cos\,\varphi=0$, тобто $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, а отже $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Таким чином, якщо скалярний добуток дорівнює нулеві, то вектори співмножники взаємно перпендикулярні.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо $cos\,\varphi>0$, тобто $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ (φ - гострий кут).

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо $cos\varphi<0$, тобто $\frac{\pi}{2}<0<\varphi$ (φ - тупий кут).

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$, якщо $cos\varphi=1$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співпадають за напрямком.

Алгебраїчні властивості:

1. Перестановка властивість: $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$

Доведення. За означенням скалярного добутку маємо:
$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$, $\vec{b}\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)$, але $cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)$, так як $cos\varphi=cos(-\varphi)$ із властивості парності функції косинус. Отже маємо:
$\vec{b}\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}$, що необхідно було довести.

2. Розподільча властивість: $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

Доведення. Маємо:
$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|(\,\text{пр}_{\bar{a}}\vec{b}+\text{пр}_{\bar{a}}\vec{c}\,)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\vec{c}\,)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

3. Сполучна властивість: $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

Доведення. Маємо $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\left(\lambda\vec{a}\right)=|\vec{b}|\cdot\lambda\,\text{пр}_{\bar{b}}\vec{a}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$, так як $|\vec{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Скалярний добуток векторів в координатній формі

Нехай $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$, $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$, тоді, враховуючи розподільчу властивість скалярного добутку, маємо:
$\vec{a}\vec{b}=\left(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\right)=$
$\overrightarrow{X_1}\overrightarrow{X_2}\vec{i}^2+Y_1X_2\vec{j}\vec{i}+Z_1X_2\vec{k}\vec{i}+X_1Y_2\vec{i}\vec{j}+Y_1Y_2\vec{j}^2+Z_1Y_2\vec{k}\vec{j}+X_1Z_2\vec{i}\vec{k}+Y_1Z_2\vec{j}\vec{k}+Z_1Z_2\vec{k}^2$.

Враховуючи, що $\vec{i}^2=1;\ \vec{j}^2=1;\ \vec{k}^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{i}=0;\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0$, одержуємо:
$\vec{a}\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ заданих своїми координатами дорівнює сумі добутків їх однойменних координат:
$\vec{a}(X_1,Y_1,Z_1)\cdot\vec{b}(X_2,Y_2,Z_2)=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

Кут між двома векторами. Умова взаємної перпендикулярності двох векторів

За визначенням скалярного добутку, маємо: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||b|\cos\varphi = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.

Звідси маємо: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $\varphi = \arccos\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$,

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}};$$

$$\varphi = ar\cos\frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Якщо вектори взаємно перпендикулярні, тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то

$|\vec{a}||\vec{b}| == |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$,

З цієї рівності випливає умова взаємної перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в координатній формі:

$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$

Зауваження. Скалярний добуток двох векторів використовується для обчислення роботи: робота дорівнює абсолютній величині, скалярного добутку вектора сили на вектор переміщення.

Приклад 1. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}\{-6;\ 2\}$, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується зі точки $A(3;\ 4)$ в точку $B(-1;\ 3)$ (рис. 2.12).

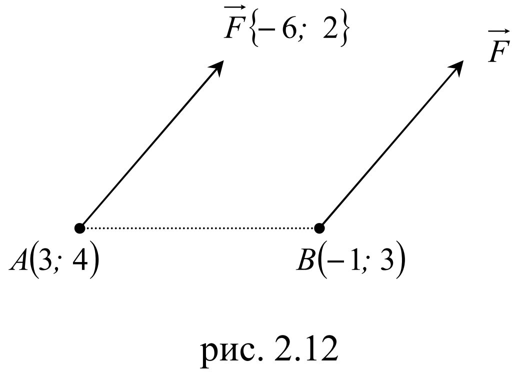

рис. 2.12

Розв'язання. Визначимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB}\{-4;\ 1\}$. Обчислимо скалярний добуток вектора $\vec{F}$ і $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (-6)(-4) + (2)(-1) = 24 - 2 = 22$ (од.роботи).

Приклад 2. Дано три сили $\vec{F_1}\{3;-4\}$, $\vec{F_2}\{2;32\}, \vec{F_3}\{-3;-2\}$, які прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодіюча цих сил, коли точка їх прикладення, рухаючись прямолінійно, переміщається із точки $A(5;\ 3)$ в положення точки $B(4;\ -1)$.

Розв'язання. Обчислюємо силу $\vec{F}$, яка є рівнодійною сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$:
$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{F}\{2;-3\}$.

Знаходимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB}\{-1;\ -4\}$, обчислюємо роботу:
$A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = -2+12 = 10$ (од.роботи).

Приклад 3. Дано точки $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$. Знайти кут ABC.

Розв'язання. Кут ABC будемо шукати, як кут між векторами $\overrightarrow{BA}\{2-2;\ 0-1;\ 1-0\} = \overrightarrow{BA}\{0;-1;\ 1\}$ і $\overrightarrow{BC}\{1-2;\ 0-1;\ 0\} = \overrightarrow{BC}\{-1;-1;\ 0\}$.

По формулі косинуса кута між двома векторами, маємо:

$$cos\,\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Значить $\varphi = 60^0$.

Приклад 4. Визначити координати точки C середини вектора $\overrightarrow{AB}$ по відомим координатам його кінців $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Розв'язання. Вектор, який з'єднує початок координат з точкою, називається радіусом-вектором цієї точки. Позначається, наприклад радіус-вектор точки $A: \vec{r_A}$, радіус-вектор точки $B: \vec{r_B}$. Координати точки є відповідними проекціями її радіус-вектора, отже: $\vec{r_A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}, \vec{r_B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$.

Середина відрізка $\overrightarrow{AB}$, буде знаходитись на перетині діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{r_A}$ і $\vec{r_b}$ (рис. 2.13).

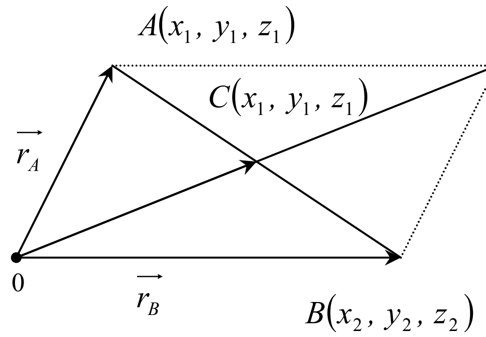

рис. 2.13

Позначимо координати точки C через x, y, z, тоді її радіус-вектор буде мати координати $\vec{r_C}\{X,\ Y,\ Z\}$, який дорівнює півсумі векторів $\vec{r_A}$ і $\vec{r_b}$, тобто

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_b}}{2} \qquad (2.1)$$

Векторну рівність (1) можна замінити такими трьома скалярними рівностями, які визначають координати середини відрізка по відомим координатам його кінців:

$$x = \frac{x_1 + y_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (2.2)$$

Аналізуючи формули (2.2) можна зробити висновок, що координати середини відрізка дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його кінців.

Приклад 5. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}\{7;\ 2;\ -1\}$і $\vec{b}\{1;\ 2;\ -3\}$. Знайти скалярний добуток цих векторів і косинус кута між ними.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано в координатній формі, тому для обчислення їх скалярного добутку скористуємось формулою: якщо $\vec{a}\{X_1, Y_1, Z_1\},\ \vec{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то $\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.

Отже, маємо $\vec{a}\vec{b} = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1)(-3) = 14$.

$cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ будемо визначати за формулою $cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, де $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$,

$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{54}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

Одержуємо, що $cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{14}{\sqrt{54} - \sqrt{14}} \approx 0{,}509.$

Питання та вправи для самоперевірки

Питання

1. Чому дорівнює скалярний добуток двох векторів, якщо:
   - дано довжини цих векторів і косинус кута між ними?
   - дано довжину одного із них і проекцію другого вектора на напрям першого?
   - дано проекції векторів?
2. Що таке скалярний квадрат вектора і чому він дорівнює?
3. Сформулюйте геометричні властивості скалярного добутку.
4. Сформулюйте алгебраїчні властивості скалярного добутку.
5. Запишіть формулу косинуса кута між двома векторами через їх скалярний добуток.
6. Запишіть формули обчислення координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців.
7. Якщо вектори колінеарні, то якій умові задовольняють їх проекції?

Вправи

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, знаючи, що $|\vec{a}| = 3; \ |\vec{b}| = 4$, обчислити:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\overrightarrow{a^2}$; в) $\overrightarrow{b^2}$; г) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; д) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

2.* Дано одиничні вектори $\overrightarrow{a_0}, \ \overrightarrow{b_0}, \ \overrightarrow{c_0}$, які задовольняють умові $\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0} + \overrightarrow{c_0} = 0$. Обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

3. Дано вектори $\vec{a}\{4; -2; -4\}; \ \vec{b}\{6; -3; 2\}$, обчислити:

а) $|\vec{a}|\vec{b}$; б) $\sqrt{\overrightarrow{a^2}}$; в) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; г) $(\vec{a} - \vec{b})^2$

4. * Дано вершини чотирьохкутника $A(2; -3; 1\}, B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1), D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

5. Обчислити косинус кута, який утворений векторами $\vec{a}\{2; -4; 4\}$ і $\vec{b}\{-3; 2; 6\}$.

6.* Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}\{2; 1; -1\}$ і задовольняє умові $\vec{x}\vec{a} = 3$.

7. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо що він перпендикулярний векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, утворює з віссю O_y тупий кут і $|\vec{x}| = 14$.

8. Обчислити проекцію вектора $\vec{a}\{5; 2; 5\}$ на вісь вектора $\vec{b}\{2; -1; 2\}$.

Відповіді

1. а) –6; б) 9; в) 16; г) 13; д) 73.
2. $-\frac{3}{2}$. Так як $\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0} + \overrightarrow{c_0} = 0$, то вони утворюють правильний трикутник, атому кут між двома послідовними векторами дорівнює 120^0.
3. а) $6\vec{b} = 36\vec{i} - 18\vec{j} + 12\vec{k}$; б) 6; в) 129; г) 41.
4. $AC \perp BD$. Вектори, які співпадають з діагоналями будуть мати координати $\overrightarrow{AC}\{-6; 4; 0\}$; $\overrightarrow{AD}\{-6; -9; 3\}$. Обчислимо скалярний добуток цих векторів: $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = (-6) \cdot (-6) + 4 \cdot (-9) + 0 \cdot 3 = 0$, з цього робимо висновок, що $AC \perp BD$.
5. $\frac{5}{21}$.
6. $\vec{x} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$. Нехай вектор $\vec{x}$ має координати $\vec{x}\{X; Y; Z\}$, тоді із колінеарності векторів $\vec{x}$ і $\vec{a}$ витікає пропорційність їх відповідних координат.

Коефіцієнт пропорційності позначимо t. Тоді $\frac{X}{2}=\frac{Y}{1}=\frac{Z}{-1}=t$, звідки $X=2t$, $Y=t$, $Z=-t$. Із скалярного добутку $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$ одержуємо рівняння $2X+Y-Z=3$. Якщо в одержане рівняння підставити значення $X=2t, Y=t, Z=-t$, то обчислимо $t=\frac{1}{2}$. Знаючи t обчислюємо $X=1, Y=\frac{1}{2}, Z=-\frac{1}{2}$.

7. $\vec{x}=-4\bar{i}-6\vec{j}+12\vec{k}$.
8. 6.