1.1. Визначники

Поняття матриці і визначника.

Матрицею називають множину mn елементів, розташованих у вигляді прямокутної таблиці із m рядків і n стовпців.

Прямокутна матриця розміром $m \times n$ - це таблиця із m рядків і mn стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Існує більш компактне позначення матриці:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{mn} \quad \text{або} \quad A = \left\| a_{ij} \right\|_{mn}.$$

Положення кожного матричного елемента в таблиці визначається його двома індексами: перший індекс – номер рядка, другий індекс – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Матриця не має числового або літерного значення. Це просто зручний спосіб розташування елементів певної природи. У випадку , коли число рядків дорівнює числу стовпців матриці $(m = n)$ матриці називається квадратною. Існують і інші види матриць.

З кожною квадратною матрицею пов’язують певну її числову характеристику, яка називається *визначником* або *детермінантом* цієї матриці.

Визначники другого і третього порядку.

Визначником другого порядку, що складений із елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

називається число або вираз, які обчислюються за формулою:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Елементи a_{11}, a_{22} вважаються елементами головної діагоналі, а елементи a_{21}, a_{12} вважаються елементами побічної діагоналі. Введена термінологія: “головна діагональ”, “побічна діагональ” має місце і у випадку визначників більш високих порядків.

Формула визначника другого порядку по його символічному запису легко одержується, якщо скористатись такою схемою:

-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Добуток елементів головної діагоналі береться зі знаком (+), а добуток елементів побічної діагоналі – зі знаком (-).

Приклади. Обчислити визначники другого порядку.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 14$.

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

Визначником третього порядку, що складений із елементів матриці A:

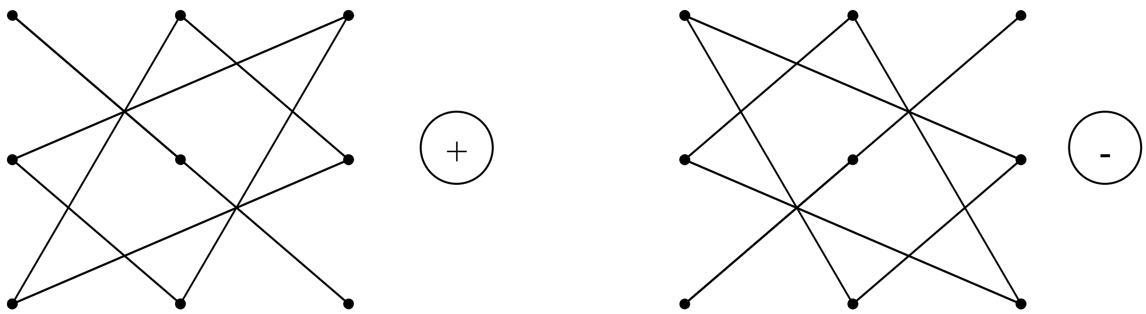
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називається число або вираз, які обчислюються за формулою:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Формулу визначника третього порядку можна одержати за допомогою правил:

а) правило Саррюса або правило трикутників. Це правило пояснюється такими двома схемами:



а) б)

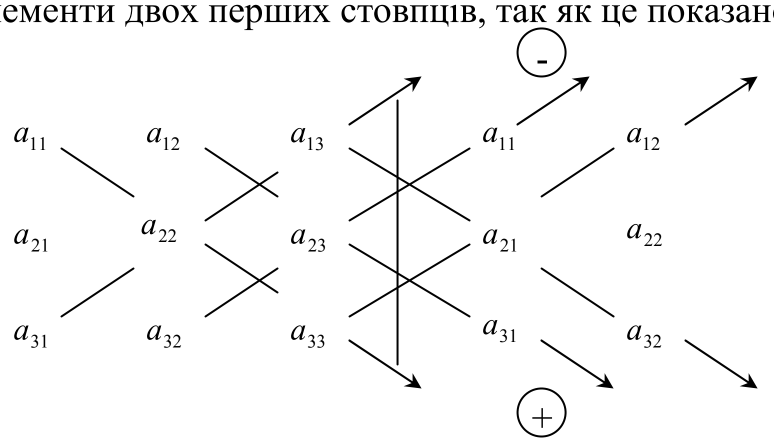
В схемі а) з’єднані позиції тих елементів матриці третього порядку, добуток яких береться зі знаком плюс, а в схемі б) - позиції тих елементів, добуток яких береться зі знаком мінус.

Приклад. Обчислити визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 10 \cdot 1 - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -6.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)(-3)(-1) + (-2)\cdot 2\cdot 3 + (-5)\cdot 2\cdot 1 - 3(-3)1 - 2\cdot 2(-4) - (-5)(-2)(-1) = 1.$$

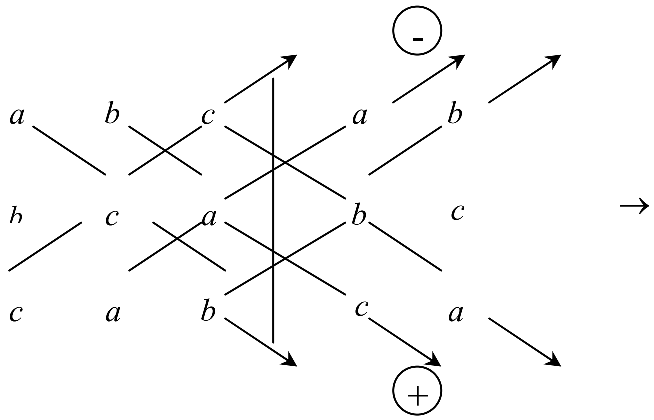
б) правило таблиці. Таблиця для обчислення складається таким чином: виписуються елементи визначника третього порядку і до них з правого боку дописують елементи двох перших стовпців, так як це показано на схемі:



Для простоти користування схемою слід запам’ятати: добутки елементів, що розташовані на головній діагоналі і на діагоналях їй паралельних, беруться зі знаком плюс. А добутки елементів, що розташовані на побічній діагоналі і на діагоналях їй паралельних, беруться зі знаком мінус.

Приклад. Обчислити визначник, користуючись правилом таблиці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$



$$\rightarrow \qquad acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

Зауваження. Нижче буде розглянуто правило, за яким обчислення визначника третього порядку можна звести до обчислення трьох визначників другого порядку.

Визначники n-го порядку.

Поняття визначника узагальнюється для матриці n-го порядку. З цією метою розглянемо деякі властивості перестановок чисел. Якщо деякі предмети об'єднати в групи, то одержимо сполуки. Сполуки, які відрізняються між собою тільки порядком предметів, називаються *перестановками.* Натуральні числа множини $N=\{1,2,\ldots,n\}$ знаходяться в природному стані, якщо вони розташовані так: $1,2,3,\ldots,n$. Наприклад, в перестановці $1,2,3,4,5$ маємо природний порядок (менше число передує більшому), а в перестановці $1,4,3,2,5$ маємо три *інверсії* або безлади (число пар елементів, у яких більше число передує меншому: $4,2;\ 4,3;\ 3,2$). В кожній перестановці із n натуральних чисел число інверсій є визначеним. Це число може бути парним або непарним . Перестановка в першому випадку називається парною, в другому - непарною.

Приклади. Визначити парність або непарність перестановок: а) $1,3,2,6,4,5$; б) $5,3,2,6,4,1$.

В першій перестановці перед одиницею знаходиться 0 чисел, перед 2 – 1 (1 закреслюємо після знаходження числа чисел, що стоять перед 1), перед 3 – 0, перед 4 – 1, перед 5 – 1, значить кількість інверсій дорівнює 0+1+0+1+1=3 (перестановка непарна).

В другій перестановці 10 інверсій (5+2+1+2=10). Вона є парною.

Визначником n-го порядку, який складений із елементів квадратної матриці n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

називають суму $n!$ членів . Кожний член цієї суми є добуток n елементів, взятих по одному і тільки одному із кожного стовпця і із кожного рядка матриці A. Знак члена визначника дорівнює $(-1)^t$, де t - кількість інверсій других індексів співмножників члена, якщо співмножники в ньому розташовані в порядку зростання перших індексів.

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{\alpha_i=1 \\ i=\overline{1,n}}}^{n}(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n},$$

де t - кількість інверсій в перестановці, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$.

Слід відмітити, що визначники другого і третього порядків обчислюються по тому ж правилу, що і визначник n-го порядку. Візьмемо, наприклад, визначник третього порядку:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Перші індекси елементів в кожному члені визначника розташовані в порядку зростання, а перестановки других індексів мають відповідно

1 2 3 - 0 інверсій
2 3 1 - 2 інверсії,
3 1 2 - 2 інверсії,
3 2 1 - 3 інверсії,
2 1 1 - 1 інверсія,
1 3 2 - 1 інверсія.

При парній перестановці доданок береться зі знаком (+), а при непарній - зі знаком (-).

Зручно виділити п’ять основних властивостей визначників і декілька наслідків із них:

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, не змінюючи порядку їх слідування. Операція заміни рядків визначника стовпцями або навпаки, не змінюючи порядку їх слідування, називається транспонуванням визначника. Операція транспонування визначника не змінює величини визначника, ця операція підтверджує “рівноправність” рядків і стовпців: якщо якась властивість має місце для рядків визначника, то вона має місце і для його стовпців, вірно і навпаки.

2. Якщо у визначнику поміняти два стовпці (рядки), то знак визначника зміниться на протилежний.

Наслідок.

Визначник n -го порядку, у якого елементи двох стовпців (рядків) співпадають, дорівнює нулеві.

3. Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника помножити на одне і теж число m, то значення визначника помножиться на число m.

Наслідки.

а) якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника;

б) визначник, у якого елементи двох стовпців (рядків) відповідно пропорційні, дорівнює нулеві.

4. Нехай кожний елемент k-го рядка (стовпця) визначника n -го порядку є сума двох доданків, тоді даний визначник дорівнює сумі двох визначників того ж порядку, причому в одному із них k-й рядок (стовпець) складається із перших доданків, а в другому – із других доданків. Решта рядків (стовпців) цього і другого визначників ті ж , що в даному визначнику.

Очевидно, що ця властивість має місце і у випадку, коли елементи k-го рядка (стовпця) визначника є сумами s доданків. Тоді даний визначник буде дорівнювати сумі s визначників. Із цієї властивості одержуємо такий наслідок:

Визначник не змінить своєї величини, якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) додати відповідні другого стовпця (рядка), попередньо помноживши їх на яке-небудь число .

Наприклад, визначник

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

так як визначник, який містить два однакові стовпці, дорівнює нулеві.

Зауваження. Цей наслідок використовується при обчисленні визначника методом нулів.

В наступних властивостях визначника використовується поняття мінора і алгебраїчного доповнення елемента визначника. Дамо означення цих понять.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який отримується із даного визначника шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпця, на перехресті яких знаходиться даний елемент.

Наприклад, мінором M_{23} елемента a_{23} визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

буде визначник

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{31} & b_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}.$$

5.Значення визначника дорівнює сумі добутків елементів любого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \qquad (i = 1,2,3).$$

Права частина цієї рівності називається розкладанням визначника по елементам i-го рядка. Розкладання визначника по елементам рядка (стовпця) дає можливість обчислення визначника n-го порядку звести до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку.

Із цієї властивості можна отримати такі *наслідки:*

а) якщо у визначника всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) дорівнюють нулеві, то і визначник дорівнює нулеві;

б) сума добутків елементів любого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулеві.

Приклад.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0, \quad i \neq j, \qquad (i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3).$$

Слід звернути увагу на множення визначників. Так як визначник є числом (або алгебраїчним виразом у випадку літерних його елементів), то для знаходження добутку визначників необхідно перемножити ці два числа (вирази). В багатьох випадках добуток визначників виражають у вигляді нового визначника, який знаходиться за таким правилом:

Нехай дано два визначника n-го порядку

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n} \end{vmatrix}.$$

Елементи i-го рядка визначника Δ_1 помножимо на відповідні елементи j-го стовпця визначника Δ_2 і всі ці добутки складемо

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad (i, j = 1,2,\ldots n).$$

Тоді визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{nn} \end{vmatrix}$$

буде добутком $\Delta_1 \cdot \Delta_2$.

Переконаємось в вірності цього правила для визначників другого порядку, пояснивши таким чином метод доведення його в загальному випадку.

Нехай

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

тоді

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Записане значення $\Delta_1 \cdot \Delta_2$ на основі властивості 4 можна записати у вигляді суми визначників

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + a_{12}a_{22}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{21} \cdot 0 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\left(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}\right) + a_{12}a_{22} \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 \cdot \Delta_2 .$$

Приклад. Записати у вигляді визначника добуток $\Delta_1 \cdot \Delta_2$, якщо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Згідно правило множення визначників маємо:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 2(-1) = 0, \qquad c_{21} = (-1)2 + 1 \cdot 7 + 0(-1) = 5,$$
$$c_{31} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1(-1) = 19, \qquad c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2,$$
$$c_{22} = (-1)0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1, \qquad c_{32} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3,$$
$$c_{13} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 2(-1) = 3, \qquad c_{23} = (-1)5 + 1 \cdot 0 + 0(-1) = -5,$$
$$c_{33} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 1(-1) = 14.$$

Отже,

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 19 & 3 & 14 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначників використовують їх властивості і методи, які базуються на цих властивостях.

Приклади. Обчислити значення визначників

1. $\begin{vmatrix} 45252 & 45452 \\ 28328 & 28528 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45252 & 200 \\ 28328 & 200 \end{vmatrix} = 200\begin{vmatrix} 45252 & 1 \\ 28328 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 200(45252 - 28328) = 200 \cdot 16954 = 3384800$

При обчисленні визначника спочатку елементи першого стовпця на помножили на (-1) і додали до відповідних елементів другого стовпця, потім 200 винесли за знак визначника. Після цього обчислення виконали звичайним методом.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, так як всі елементи його стовпця рівні нулеві.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$, оскільки всі елементи 1-го і 3-го стовпців рівні між собою.

4. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$, оскільки елементи 1-го і 3-го стовпців відповідно пропорційні.

5. Показати, що визначник у якого

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 \quad 0 & \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix}$$

всі елементи нижче головної діагоналі рівні нулеві, дорівнює добутку діагональних елементів :

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Розклавши визначник Δ по елементам першого стовпця, одержимо рівність

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи процес розкладання, знаходимо

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

6. Розкласти по елементам четвертого стовпця і обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Маємо

$$\Delta = 3(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+4(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 35 - 2\cdot 21 - 35 + 4(-56) = -406.$$

Зауваження. Очевидно, розкладання визначника спроститься, якщо будемо його розкладати по елементам рядка (стовпця), у якого більшість елементів є нулями. На цій ідеї базується метод утворення нулів при обчисленні визначників.

7. Методом утворення нулів обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Простіше утворювати нулі в тому рядку або стовпцю, де маємо елемент 1 або –1. Утворюємо нулі в першому рядку. Для цього до елементів 1-го стовпця відповідно додамо елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 2. При цьому значення визначника не зміниться

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 10 & 5 & 2 & 6 \\ -9 & 8 & 6 & -7 \\ -7 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Далі до елементів 2-го стовпця додамо відповідно елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 3, а до елементів 3-го стовпця додамо відповідно елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 4.

Одержимо рівність

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 10 & 5 & 2 & 6 \\ -9 & 8 & 6 & -7 \\ -7 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 23 & 26 & 6 \\ -6 & -13 & -22 & -7 \\ -7 & -8 & -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

В першому рядку одержали три нулі. Розкладемо одержаний визначник по елементам першого рядка. Тоді

$$\Delta = (-1)(-1)^5\begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник (-1) із 2-го і 3-го рядків, одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ 9 & 13 & 22 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо із елементів 3-го і 2-го стовпців відповідно елементи 1-го стовпця

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ 9 & 13 & 22 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 9 & 4 & 13 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

щоб отримати іще один нуль в третьому рядку, додамо до елементів 1-го стовпця відповідно елементи 2-го стовпця, попередньо помноживши їх на –7. Одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -81 & 13 & 6 \\ -19 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

звідси

$$\Delta = \begin{vmatrix} -81 & 13 & 6 \\ -19 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -81 & 16 \\ -19 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 81 & 16 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 81 \cdot 13 - 16 \cdot 19 = 749.$$

8. Обчислити визначник Вандермонда (франц. математик)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від кожного стовпця попередній, помножений на a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-ab \\ c-a & c^2-ac \end{vmatrix}.$$

Далі одержимо

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Питання і вправи для самоперевірки

Питання

1. Що називається матрицею? Як позначають елементи матриці? Якими символами прийнято позначати матрицю?

2. Дайте визначення порядку матриці. Яка матриця називається квадратною? Що називається порядком квадратної матриці?
3. Що називається перестановкою із n предметів (чисел)? Дайте визначення інверсії, парної і непарної перестановки.
4. Який вираз із елементів матриці другого порядку називається визначником другого порядку?
5. Що називається визначником 3-го порядку? Укажіть правила (схеми), за допомогою яких складається визначник 3-го порядку із елементів матриці 3-го порядку.
6. Дайте визначення визначника n-го порядку.
7. Що таке транспонування визначника? Доведіть, що в результаті транспонування величина визначника не зміниться. Підтвердіть цю властивість прикладами.
8. Якщо у визначнику помінять місцями два сусідніх стовпця(рядки), то він змінить знак. Доведіть цю властивість і наслідок, який витікає з неї про величину визначника з двома однаковими стовпцями (рядками).
9. Доведіть властивість визначника: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) помножити на одне і те ж число m , то значення визначника помножиться на число m. Які наслідки випливають із цієї властивості? Покажіть цю властивість і наслідки на прикладах.
10. Пересвідчитись в справедливості властивості: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника складають собою суму двох доданків, то такий визначник можна записати у вигляді суми двох визначників. Який наслідок випливає із цієї властивості?
11. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника n-го порядку?
12. Сформулюйте і доведіть властивості про розкладання визначника по елементам його рядка (стовпця). Назвіть наслідки, що витікають із цієї властивості.
13. Сформулюйте і доведіть правило множення двох визначників.
14. В чому полягають способи утворення нулів і розкладання визначника по елементам рядка (стовпця) при його обчисленні.

Вправи.

1. Які із таблиць є матрицями?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} & 2 & \\ 5 & & 6 \\ & 1 & \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ -\dfrac{1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} b & a & a+b \\ a & a+b & b \\ a+b & b & a \end{vmatrix}$.

3. Визначити число інверсій в перестановках:

а) 1,8,5,4,3,6,7,2; б) 5,1,3,2,4; в) 10,8,9.1,7,3,2,4,5,6.

4. Обчислити визначники, розкладаючи їх по елементам якого-небудь рядка або стовпця.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 9 \\ 7 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначники, використовуючи їх властивості:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 2 & b & 3 & -2 \\ 4 & c & 3 & -3 \\ 3 & d & 4 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів 3-го стовпця визначника:

$$\begin{vmatrix} a & b & x & x \\ c & d & b & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ a & x & b & x \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити визначники методом утворення нулів в рядку(стовпцю)

а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

8. Записати у вигляді визначника добуток визначників:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Відповіді.

1. а), б), в).
2. а) $\cos\alpha$, б) 29, в) 1, г) 28, д) 45, е) 0.
3. а) 14, б) 5, в) 29.
4. а) 161, б) 247.
5. а) $7b-7a-d-c$, б) 48.
6. $A_{13}=x^3(c-a+1)-dx^2-cx+ad$,

   $A_{23}=-x^3+bx^2+ax-ab$,

   $A_{33}=x^2(c-a)+x(ab-bc)$,

   $A_{43}=x^3(a-c)+x^2(d-b)+cb-ad$.
7. а) –10б, б) 0.
8. а) $\begin{vmatrix}31 & 27\\ 16 & 11\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}-15 & -11 & -13\\ 2 & -5 & 9\\ -5 & 21 & -6\end{vmatrix}$.