4.2. Границя послідовності. Властивості границь послідовності. Нескінченно мала і нескінченно велика величина. Число e

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує (залежне від ε) число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

для всіх (натуральних) $n > n_0$.

В цьому випадку пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ або $x_n \to a$ і кажуть, що змінна x_n або послідовність $\{x_n\}$ має границю, що дорівнює a, або прямує до a. Кажуть також, що змінна x_n або послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a.

Зауваження. Якщо $\lim x_n = a$, то $\lim x_{n+1} = a$; і обернено. Це випливає з того факту, що якщо

$$|x_n - a| < \varepsilon \ \forall \ n > n_0, \text{ то } |x_{n+1} - a| < \varepsilon \ \forall \ n > n_0 - 1,$$

і обернено.

Змінна прикладу 1.1 має границю, що дорівнює 0: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Дійсно, задамо довільне $\varepsilon > 0$ і розв'яжемо нерівність:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ \text{ або } \ n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Цим для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдено число $n_0 = n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ таке, що нерівність

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

виконується для всіх $n > n_0$, і ми довели, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Приклад 2.1. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$

Дійсно, складемо нерівність $\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Ця нерівність, як ми бачимо, виконується для будь-якого $\varepsilon > 0$, якщо $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}.$ Що і доводить потрібне.

Приклад 2.2. Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

Дійсно, нехай $q \neq 0.$ Нерівність $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$ вірна, якщо $n \lg|q| < \lg \varepsilon$, тобто якщо

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg|q|} = n_0(\varepsilon).$$

Ми довели необхідне при $0 < |q| < 1.$ Якщо $q = 0$, то рівність $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ тривіальна. Адже в цьому випадку змінна q^n є сталою, що рівна нулю: $\{0, 0, \dots\}.$

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ еквівалентна двом нерівностям $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, це еквівалентно тому факту, що точка x_n належить до ε-околу точки a: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$

Тоді означення границі можна виразити словами: число (точка) a є *границею змінної* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке число n_0, що всі точки x_n з індексами $n > n_0$ попадають в ε-окіл точки a: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $(n > n_0)$.

Якщо відомо, що поза (c, d) є тільки скінчення число точок $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_S}$, то, позначивши $k = \max\{n_1, n_2, ... n_S\}$, тобто найбільший серед індексів $n_1, ..., n_S$, ми можемо сказати, що точки x_n з індексом $n > k$ попадуть в інтервал (c, d). Тому поняття границі можна сформулювати і так: змінна x_n має своєю *границею точку* a, якщо поза будь-якого околу цієї точки є скінченна або пуста множина точок x_n.

Приклад 2.3. Змінна $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, ...\}$ ні до якої границі не прямує.

Дійсно, припустимо, що ця змінна має границю, що дорівнює числу a. Розглянемо окіл цієї точки

$$\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right).$$

Довжина околу $\frac{2}{3}$. Очевидно, що цей окіл не може містити одночасно і точку 1, і точку -1, тому що відстань між цими точками дорівнює $2\ (2 > 2/3)$. Для визначеності будемо вважати, що точка 1 не належить до нашого околу. Але $x_n = 1$ для $n = 1, 3, 5, ...$, тобто поза нашим околом існує нескінченна кількість елементів послідовності.

Таким чином, точка a не може бути границею нашої послідовності, і оскільки ця точка довільна, то послідовність $\{(-1)^{n+1}\}$ не має границі.

Теорема 2.1. Якщо змінна x_n має границю, то вона єдина.

Доведення. Припустимо, що x_n має дві різні границі a і b. Покриємо точки a, b відповідно інтервалами (c, d), (e, f) настільки малої довжини, щоб ці інтервали не перетинались (рис. 2.1).

Оскільки $x_n \to a$, то в інтервалі (c, d) знаходяться всі елементи x_n, за винятком скінченного їх числа, але тоді інтервал (e, f) не може містити в собі нескінченне число елементів φ_n і x_n не може прямувати до b. Прийшли до протиріччя. Теорема доведена.

Теорема 2.2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається (має границю), то вона обмежена.

Доведення. Нехай $\lim x_n = a$. Задамо $\varepsilon = 1$ і підберемо натуральне $n_0 = n_0(1)$ так, щоб $1 > |x_n - a|$ $(n > n_0)$, але тоді $1 > |x_n| - |a|$ і виконується нерівність $1 + |a| > |x_n|$ для всіх $n > n_0$. Нехай M – найбільше серед чисел

$$1 + |a|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|.$$

Тоді очевидно, $M \ge |x_n|$ $\forall\, n \in N$.

Теорема доведена.

Зауваження. Обмеженість послідовності є необхідною умовою збіжності послідовності, але не є достатньою, як показує приклад 2.3.

Теорема 2.3. Якщо змінна x_n має границю a, що не дорівнює нулеві, то існує таке n_0, що $|x_n| > |a|/2$ для $n > n_0$. Для вказаних n, якщо $a > 0$, то $x_n > a/2$, якщо ж $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким чином, починаючи з деякого номера, знак x_n співпадає зі знаком a.

Доведення. Нехай $x_n \to a$. Поді для $\varepsilon = |a|/2$ існує таке число n_0, що

$$|a|/2 > |a - x_n| \ge |a| - |x_n| \qquad (n > n_0),$$

звідки $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, і перше твердження теореми доведено. З іншого боку, нерівність $|a|/2 > |a - x_n|$ еквівалентна таким двом:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \qquad (n > n_0).$$

Тоді, якщо $a > 0$, то

$$x_n > \frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} \ (n > n_0),$$

а якщо $a < 0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \qquad (n > n_0),$$

і цим доведено друге твердження теореми.

Теорема 2.4. Якщо $x_n \to a,\ y_n \to b$ і $x_n \le y_n$ для всіх $n = 1, 2, ...,$ то $a \le b.$

Доведення. Припустимо, що $b < a$. Задамо $0 < \varepsilon < (a - b)/2$ і підберемо числа N_1 і N_2 так, щоб $a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1),\ \ y_n < b + \varepsilon\ (n > N_2):$ це можливо, тому що $x_n \to a,$ а $y_n \to b.$

Якщо $n_0 = \max\{N_1, N_2\},$ то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n \ (n > n_0),$ і ми прийшли до протиріччя, оскільки за умовою $x_n \le y_n$ для всіх $n.$

Наслідок. Якщо елементи збіжної послідовності $\{x_n\}$ належать $[a, b],$ то її границя також належить $[a, b].$

Доведення. Насправді, $a \le x_n \le b.$ Якщо $\lim x_n = c,$ то за теоремою 2.4 $a \le c \le b,$ що і треба було довести.

Теорема 2.5. Якщо змінні x_n і y_n прямують до однієї і тієї ж границі a і $x_n \le z_n \le y_n \ (n = 1, 2, ...),$ то змінна z_n також прямує до $a.$

Доведення. Задавши $\varepsilon > 0,$ можна знайти N_1 і N_2 такі, що

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1),\ y_n < a + \varepsilon \ (n > N_2),$$

звідки для $n > n_0 = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$$

і $|z_n - a| < \varepsilon \ (n > n_0),$ що і треба було довести.

Теорема 2.6. Якщо $x_n \to a,$ то $|x_n| \to |a|.$

Доведення випливає з нерівності $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|.$

Нехай x_n і y_n – змінні, що пробігають відповідно послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. За означенням сума $x_n + y_n$, різниця $x_n - y_n$, добуток $x_n y_n$ і частка x_n / y_n є змінні, що пробігають відповідно послідовності $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$. У випадку частки $y_n \ne 0$ для всіх $n = 1, 2, ...$.

Виконуються такі твердження:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{2.1}$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n, \tag{2.2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ якщо } \lim_{n \to y} y_n \ne 0 \tag{2.3}$$

Ці твердження розуміють так: *якщо існують границі* x_n *і* y_n, *то існують також і границі їх суми, різниці, добутку і частки та виконуються вказані рівності* (2.1)-(2.3).

Доведення. Нехай $x_n \to a,\ y_n \to b$. Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо n_0 так, щоб

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ (n > n_0).$$

Тоді

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ і ми довели (2.1).}$$

Щоб довести (2.2), зауважимо, що $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \le |x_n y_n - ay_n| +$
$$+|ay_n - ab| = |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \tag{2.4}$$

Оскільки y_n має границю, то (за теоремою 2.2) існує додатне число M таке, що

$$|y_n| \le M\ (n = 1, 2, ...), \tag{2.5}$$

$$|a| \le M. \tag{2.6}$$

Підберемо число n_0 так, щоб

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}\ \ (n > n_0). \tag{2.7}$$

Тоді з (2.4)-(2.7) випливає, що

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon\quad (n > n_0).$$

Цим доведена рівність (2.2).

Нехай тепер до умови, що $x_n \to a,\ y_n \to b$, додається умова, що $b \ne 0$. Тоді

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n|\cdot|b|} \le \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}. \tag{2.8}$$

Застосувавши теорему (2.3), отримаємо:

$$|y_n| > |b|/2 \qquad (n > N_1) \tag{2.9}$$

Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо N_2 і N_3 так, щоб

$$|x_n - a| < \varepsilon|b|/4\ \ (n > N_2) \tag{2.10}$$

$$|a||y_n - b| < \varepsilon b^2/4\ \ (n > N_3) \tag{2.11}$$

Тоді, поклавши $n_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будемо з урахуванням (2.8)-(2.11) мати

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4}\cdot\frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \ (n > n_0),$$

що і доводить рівність (2.3).

Зауваження. Границі змінних, що стоять в лівих частинах рівностей (2.1)-(2.3), можуть існувати без того, щоб існували окремо границі x_n і y_n. Наприклад, якщо $x_n = (-1)^n,\ y_n = (-1)^{n+1}$, то x_n і y_n не мають границь, в той же час як $\lim(x_n + y_n) = 0$, $\lim x_n y_n = -1$.

Теореми про границі суми, різниці, добутку та частки в багатьох випадках дають можливість з'ясувати, чи має змінна границю і чому вона дорівнює, якщо змінна є результат скінченного числа арифметичних дій з декількома іншими змінними, існування і величина границь яких відомі.

Але часто зустрічаються випадки, що виходять за межі застосування доведених теорем, і тут залишається широке поле для ініціативи.

Змінна α_n, границя якої дорівнює нулю, *називається нескінченно малою величиною* або, коротше, *нескінченно малою*.

Таким чином, змінна α_n є нескінченно мала, якщо для будь-якою $\varepsilon > 0$ знайдеться n_0 таке, що $|\alpha_n| < \varepsilon \ (n > n_0)$.

Легко помітити, що для того, щоб *змінна* x_n *мала границю* a, *необхідно і достатньо, щоб* $x_n = a + \alpha_n$, *де* α_n *– нескінченно мала*.

Змінна β_n називається *нескінченно великою величиною* або просто *нескінченно великою*, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться таке n_0, що $|\beta_n| > M \ (n > n_0)$.

При цьому пишуть $\lim \beta_n = \infty$, або $\beta_n \to \infty$ і кажуть, що β_n прямує до нескінченності.

Якщо нескінченно велика β_n, починаючи з деякого n_0 приймає тільки додатні значення або тільки від'ємні, то пишуть $\lim \beta_n = +\infty$ або $\beta_n \to +\infty$, відповідно $\lim \beta_n = -\infty$ або $\beta_n \to -\infty$.

Відмітимо такі очевидні *властивості*:

1. Якщо змінна x_n обмежена, а y_n – нескінченно велика, то $x_n / y_n \to \infty$.
2. Якщо абсолютна величина x_n обмежена додатнім числом, а y_n – нескінченно мала, що не дорівнює нулю, то $x_n / y_n \to \infty$.

Доведемо другу властивість. Дано, що для деякого числа $a > 0$ має місце нерівність $|x_n| > a \ (n = 1, 2, ...)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що

$$|y_n| < \varepsilon \ (n > n_0). \tag{2.12}$$

Тоді $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| > \dfrac{a}{\varepsilon} = M \ (n > n_0)$.

Задамо довільне додатне число M і доберемо за ним ε так, щоб $M = a/\varepsilon$, а за ε доберемо таке n_0, щоб мала місце нерівність (2.12). Тоді $|x_n / y_n| > M \ (n > n_0)$, що і треба було довести.

З наведених двох властивостей отримуємо такі наслідки:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \ \lim_{y} \frac{c}{y_n} = \infty \ (c \neq 0).$$

Зауважимо, що якщо послідовність $\{x_n\}$ необмежена, то вона не обов'язково нескінченно велика. Наприклад, послідовність $\{n^{(-1)^n}\} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, ...\right\}$, необмежена, але вона не є нескінченно великою, оскільки в ній є як завгодно малі члени з яким завгодно великим (непарним) номером.

Зауваження. Будь-яка стала величина (послідовність), що не дорівнює нулю, не є нескінченно малою. З усіх сталих величин нескінченно малою є лише одна, а саме – та, що дорівнює нулю. Якщо про деяку величину відомо, що вона стала і її абсолютна величина менша будь-якого додатного числа ε, то вона дорівнює нулю.

Теорема 2.7. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно малою послідовністю, тобто якщо $\lim x_n = 0$ і $|y_n| \le M \ \ \forall n \in N$, то $\lim x_n y_n = 0$.

Доведення. Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо n_0 так, щоб $|x_n| < \varepsilon / M \ \ \forall n > n_0$.

Тоді $|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| \le \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \ \ \forall n > n_0$, що і треба було довести.

Нехай $\lim x_n = \lim y_n = 0$ $(y_n \neq 0)$.

Розглянемо послідовність $\{x_n / y_n\}$. Про границю цієї послідовності одразу нічого певного сказати неможливо, як це демонструють конкретні приклади:

якщо $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$ при $n \to \infty$;

якщо $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$;

якщо $x_n = \dfrac{a}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = a \to a$ при $n \to \infty$;

якщо $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ і границі цієї послідовності не існує.

Таким чином, для знаходження границі $\{x_n / y_n\}$ не достатньо знати, що $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Потрібна ще додаткова інформація про характер зміни x_n і y_n. Для знаходження цієї границі в кожному конкретному випадку необхідні спеціальні методи.

Кажуть, що вираз x_n / y_n при $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ є *невизначеність вигляду* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Якщо $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, то вираз x_n / y_n також є невизначеність і її називають *невизначеністю вигляду* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Якщо $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$, то для виразу $x_n y_n$ отримуємо *невизначеність вигляду* $(0 \cdot \infty)$.

Якщо $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$, то вираз $x_n + y_n$ є *невизначеність вигляду* $(\infty - \infty)$.

Для кожного з наведених випадків можна навести приклади.

Розкрити відповідну невизначеність – це означає знайти границю (якщо вона існує) відповідного виразу, що не завжди просто.

Приклад 2.4. Довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Розв'язання. Дійсно, для того, щоб модуль різниці $\left| \dfrac{n}{n+1} - 1 \right| = \dfrac{1}{n+1}$ був меншим будь-якого додатного числа ε, треба лише виконання нерівності $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, тобто $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Таким чином, за заданим числом ε завжди можна знайти таке $N = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, що при всіх $n > N$ вказаний модуль різниці буде меншим ε, а це і означає, що 1 є границею розглядуваної послідовності.

Приклад. 2.5. Розглянемо послідовність

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2},\ \frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{2}, \ldots\ \frac{1}{n}\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right), \ldots .$$

Функція $y_n = \dfrac{1}{n}\sin\left((2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ прямує до нуля при $n \to \infty$, оскільки $|y_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ для всіх n, що задовольняють умові $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Різниця

$$y_n - 0 = \frac{1}{n}\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

буде додатною або від'ємною в залежності від того, парне або непарне n. Значення y_n, необмежено наближаючись до нуля, стає то більше нуля, то менше нуля. Змінна прямує до своєї границі, коливаючись навколо неї.

Приклад 2.6. Послідовність

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{2\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2},...,\ \sin\frac{n\pi}{2},...$$

не має границі, $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ при $n = 1, 2, 3, 4, ...$ послідовно досягає значень 1, 0, -1, 0 і потім знову ті ж значення в тому ж порядку. Немає числа, до якого y_n необмежено наближалось би.

Приклад 2.7. Послідовність $y_n = 2n+1$, значення якої при $n = 1, 2, 3, ...$ утворюють послідовність цілих непарних чисел 1, 3, 5, …, не прямує до границі, оскільки значення y_n при $n \to \infty$ необмежено зростають.

Приклад 2.8. Якщо

$$x_n = a_n n^m + ... + a_1 n + a_0,$$
$$y_n = b_l n^l + ... + b_1 n + b_0 \quad (a_m \neq 0, b_l \neq 0),$$

то при $n \to \infty$ для виразу x_n / y_n ми маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Розкриємо цю невизначеність.

а) Якщо $l = m$, то, ділячи чисельник і знаменник на n^m, отримуємо:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + ... + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_0}{n^m}} \to \frac{a_m}{b_m},$$ при $n \to \infty$. Тобто $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m}{b_m}$ – відношення коефіцієнтів при старших степенях n в виразах для x_n і y_n.

б) Аналогічно можна показати, що при $m > l$ $\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$, а при $m < l$ $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Приклад 2.9. Якщо $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$, то при $n \to \infty$ для виразу $x_n - y_n$ маємо невизначеність вигляду $(\infty - \infty)$. Розкриємо цю невизначеність:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$ при $n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Послідовність $\{y_n\}$ називається *обмеженою зверху*, якщо існує таке число M, що для всіх n

$$y_n < M.$$

Аналогічно послідовність називається *обмеженою знизу*, якщо існує таке число m, що для всіх n

$$y_n > m.$$

Якщо послідовність обмежена і зверху, і знизу, то вона називається *обмеженою*.

Вкажемо у вигляді теореми одну просту ознаку існування границі монотонної послідовності.

Теорема 2.8. Якщо послідовність $\{x_n\}$ зростає і обмежена зверху, то вона має границю. Якщо послідовність $\{y_n\}$ спадає і обмежена знизу, то вона має границю.

Доведення. Нехай задана послідовність $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$.
Оскільки вона обмежена зверху, то існує таке число M, що $x_n < M$ при будь-якому n. В теоремі стверджується, що при цьому послідовність має границю – позначимо її через A – яка, очевидно, не перевищує число M, тобто $A \le M$. Дійсно, оскільки точка $x_n = f(n)$, рухаючись в одному напрямі – праворуч по осі Ox – не виходить за межі інтервалу $[0, M]$, то вона повинна необмежено наближатись до деякої точки $x = A$. Очевидно, що $A \le M$.

Якщо послідовність $x_n = f(n)$ монотонна, але необмежена, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$; точка x, рухаючись праворуч по осі Ox, виходить з будь-якого околу точки $x = 0$.

Аналогічно і у випадку спадної послідовності

$y_1 > y_2 > ... > y_n > ...$.

Якщо ця послідовність обмежена знизу: $y_n > m$ для будь-якого n, то вона має границю A, що не менше числа m, тобто $A \ge m$. Якщо ж вона не обмежена, то функція $f(n)$ прямує до $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty.$$

Для немонотонної послідовності можливі не два, а три випадки:

1) послідовність має границю;
2) послідовність прямує до ∞;
3) послідовність не має границі ні скінченної, ні нескінченної (наприклад, послідовність $y_n = (-1)^n$), в цьому випадку вона називається *коливною*.

Завдячуючи цій простій ознаці можна інколи переконатись в існуванні границі, хоча сама по собі ознака і не вказує, чому дорівнює границя.

Теорема 2.9. Послідовність $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ має границю при $n \to \infty$.

Доведення. За формулою бінома Ньютона маємо $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1 + \dfrac{n}{1!}\cdot\dfrac{1}{n} + \dfrac{n(n-1)}{2!}\cdot$

$$\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)\cdot ...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Із збільшенням n кожен доданок (крім перших двох), що стоїть на фіксованому k-му місці, збільшується.
Дійсно,

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

стає більшим із зростанням n. Крім того, при зростанні n додаються нові додатні доданки. Отже, y_n – зростаюча функція n. Але вона обмежена; дійсно, замінивши у всіх доданків правильні дроби, що стоять в дужках, одиницями, отримаємо

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Ми ще збільшимо праву частину, якщо здійснимо такі заміни:

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 3}$ на $\frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$,

$\frac{1}{4!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ на $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$,

. . . .

$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$ на $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Отже, $y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$,

тим більше, дописавши в правій частині члени прогресії $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^{n+1}}, \ldots$, отримаємо

$$y_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right).$$

Оскільки сума нескінченно спадної геометричної прогресії, що стоїть в дужках, дорівнює 2, то $y_n < 3$.

Отже, задана зростаюча послідовність обмежена зверху, тому на основі теореми 2.9 має границю, яка очевидно обмежена числами 2 і 3.

Числом e (числом Ейлера) називається границя

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e ірраціональне і тому не може бути точно виражене будь-яким дробом. Наближено воно дорівнює $e \approx 2{,}718281$. Це число відіграє важливу роль в математичному аналізі.

Питання і вправи для самоперевірки

1. Що таке границя послідовності? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричну ілюстрацію.
2. Наведіть приклад послідовності, що має границю, не має границі.
3. Які величини називаються нескінченно малою, нескінченно великою? Дайте означення за допомогою нерівностей. Наведіть геометричні ілюстрації.
4. Яка послідовність називається обмеженою зверху, знизу?
5. Сформулюйте і доведіть правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.
6. Сформулюйте і поясніть ознаку існування границі монотонної послідовності.
7. Яке число називається числом Ейлера?