3.3. Елементарні властивості кривих другого порядку

Загальні положення

Рівняння виду $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1), якщо одночасно коефіцієнти A, B, C не дорівнюють нулеві, називається ***рівнянням другого степеня***. Криві, які описуються рівняннями другого степеня, називаються ***кривими другого порядку***. До кривих другого порядку відносяться: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Властивості кривих другого порядку можна вивчати через дослідження рівняння другого степеня (1). Ми будемо вивчати криві другого порядку, як геометричні місця точок, які задовольняють певній властивості.

Множина точок, які мають певну властивість, серед якої немає жодної точки, що не має цієї властивості, називається ***геометричним місцем точок.***

Розглянемо приклади застосування поняття геометричного місця точок в елементарній геометрії.

Приклад 1. Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, називається бісектрисою цього кута.

Приклад 2. Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є перпендикуляр до цього відрізка проведений через його середину.

Коло

Геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від однієї точки O_1, називається ***колом.***

Точка O_1 називається ***центром кола***, а відстань точок кола до центра називається ***радіусом***. В наведеному означенні кола використана його характеристична властивість.

Нехай дано коло радіуса R з центром в точці $O_1(a; b)$ (рис. 3.22). Знайдемо його рівняння.

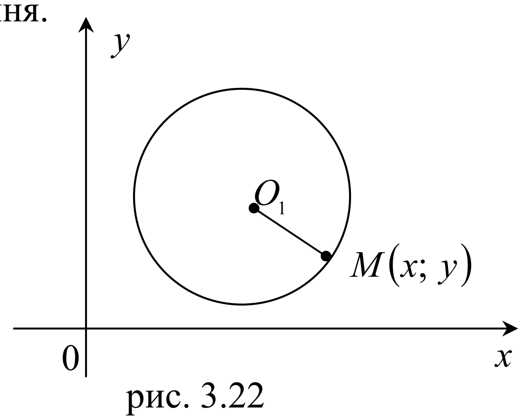

рис. 3.22

Для довільної точки $M(x; y)$ кола виконується рівність $OM = R$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, одержимо:

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$ або після піднесення до квадрату (двох додатніх частин рівняння) одержимо рівносильне рівняння:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

Значить, координати кожної точки кола $M(x, y)$ задовольняють рівняння (2). Неважко показати, що координати довільної точки, яка не лежить на колі, цьому рівнянню не задовольняють.

Рівняння (2) називається канонічним або нормальним рівнянням кола. Зокрема, рівняння кола з центром в початку координат $(a=0, b=0)$ має вигляд:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2a)$$

Вияснимо за яких умов рівняння (1) буде рівнянням кола. З цією метою рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Якщо рівняння (3) співставити з рівнянням (1), то прийдемо до такого висновку.

Висновок. Щоб рівняння (1) було рівнянням кола, необхідно рівність коефіцієнтів при x^2 і y^2 $(A=C)$, коефіцієнт при xy повинен дорівнювати нулеві $(B=0)$.

Приклад. Привести до канонічного виду загальне рівняння кола $2x^2+2y^2-4x-2y-\frac{11}{2}=0$.

Розв'язання. В даному рівняння виконуються вимоги висновку $A=C=2, B=0$. Поділимо обидві частини рівняння на 2. Згрупуємо члени, які містять тільки x або тільки y, і доповнимо їх до повного квадрату. Одержимо рівняння: $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$.

Держане рівняння є канонічним рівнянням кола, у якого центром є точка $O\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, а радіус $R=2$.

Рівняння дотичних до кола в точці $M_1(x_1, y_1)$ мають вигляд:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2 \qquad (4)$$

$$xx_1+yy_1=R^2 \qquad (5)$$

в залежності від того, визначається коло рівнянням (2) або (2a).

Приклад. Дано коло: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Записати рівняння його дотичної в точці $A(5; 5)$.

Розв'язок. Коло задано рівняння (2), отже, рівняння дотичної буде мати вигляд: $(x-1)(5-1)+(y-2)(5-2)=25$.

Після перетворень одержуємо рівняння: $4x+3y-35=0$.

Еліпс

Дамо означення еліпса, виходячи із його характеристичної властивості.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 (фокусів), є величина стала.

Для одержання канонічного рівняння еліпса, його фокуси F_1, F_2 візьмемо на осі Ox і позначимо відстань $F_1F_2 = 2c$, тоді $F_1(c;\, 0)$; $F_2(-c;\, 0)$ (рис. 3.23).

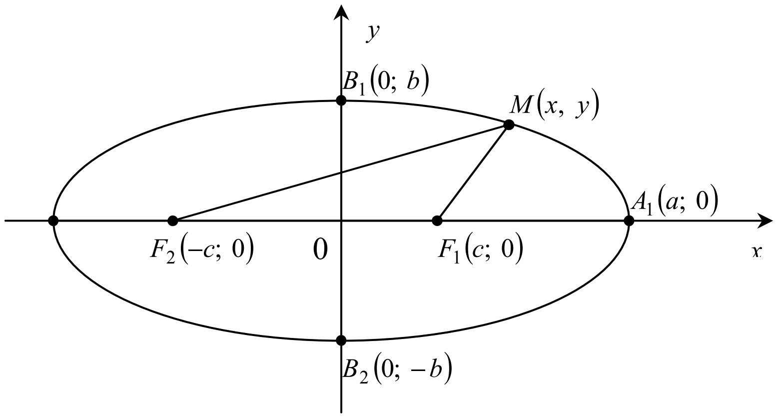

рис. 3.23

Нехай довільна точка $M(x,\, y)$ належить еліпсу. На основі означення еліпса маємо: $F_1M + F_2M$ дорівнює сталій величині. Позначимо цю сталу величину через $2a$, тоді $FM + F_2M = 2a$ (1) Із ΔF_1MF_2 за відомою теоремою про співвідношення між сторонами трикутника одержуємо нерівність:
$F_1M + F_2M > F_1F_2 \Rightarrow 2a. > 2c \Rightarrow a > c$.

Із рівності (1), використовуючи формулу відстані між двома точками, одержуємо рівність:
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

В останній рівності, після двократного піднесення до квадрату, звільняємось від радикалів. Виконавши відповідні алгебраїчні перетворення, отримаємо:
$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Введемо позначення $a^2 - c^2 = b^2$ алгебраїчна обґрунтованість якого випливає із нерівностей $a > c \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$. Геометричний зміст величин a і b буде дано нижче. З величиною b рівність буде мати вигляд:
$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Поділивши ліву і праву частину рівності на a^2b^2 одержимо рівняння:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається канонічним рівнянням еліпса.

Точки перетину еліпса з координатними осями називаються вершинами еліпса. Вершини еліпса мають координати (рис. 2): $A_1(a;0)$; $A_2(-a;0)$; $B_1(0;b)$; $B_2(0;-b)$. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається ***великою віссю еліпса,*** відрізок $B_1B_2 = 2b$ - ***малою віссю еліпса.***

Рівняння (2) містить плинні координати тільки в другому степені, а тому координатні осі є осями симетрії еліпса. Вісь Ox - горизонтальна вісь симетрії, Oy - вертикальна вісь симетрії. Вісь, на якій лежать фокуси еліпса називають також фокальною віссю.

Точка перетину осей симетрії називається центром еліпса.

Відношення фокусної відстані до довжини великої осі називається ***ексцентриситетом еліпса.***

Позначається: $\ell = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$ (3), так як $c < a$, то для еліпса $\ell < 1$. Для кола ексцентриситет $\varepsilon = 0$. Якщо ексцентриситети рівні, то криві подібні між собою, тобто однаково стиснуті (деформовані). Для еліпса, коли $\ell \to 0$, то він по формі наближається до кола, якщо $\ell \to 1$, то прямує до відрізка великої осі.

Зауваження. При розв'язуванні задач, які пов'язані з еліпсом, крім його канонічного рівняння користуються рівністю (3), а також співвідношенням: $a^2 - c^2 = b^2$ (4), яке було введено при одержані канонічного рівняння еліпса.

Приклад. Дано рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, обчислити a і b координати фокусів еліпса і його ексцентриситет.

Розв'язання. Еліпс задано канонічним рівнянням, а тому $a^2 = 16, b^2 = 9$, звідси $a = 4; b = 3$. Для визначення координат фокусів скористуємось співвідношенням (4): $a^2 - b^2 = c^2$, маємо $16 - 9 = 7 = c^3$. Отже, фокуси еліпса мають координати $F_1\left(\sqrt{7};0\right)$; $F_2\left(-\sqrt{7};0\right)$. Ексцентриситет еліпса обчислимо за формулою (3): $\ell = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Рівняння дотичних до еліпса в точці $M_1(x_1, y_1)$ мають вигляд:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Гіпербола

Дамо означення гіперболи, виходячи із її характеристичної властивості.

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 (фокусів), є величина стала.

Для одержання канонічного рівняння гіперболи, її фокуси F_1, F_2 візьмемо на осі Ox і позначимо відстань $F_1, F_2 = 2c$, тоді $F_1(c;\,0)$; $F_2(-c;\,0)$. (Рис. 3.24).

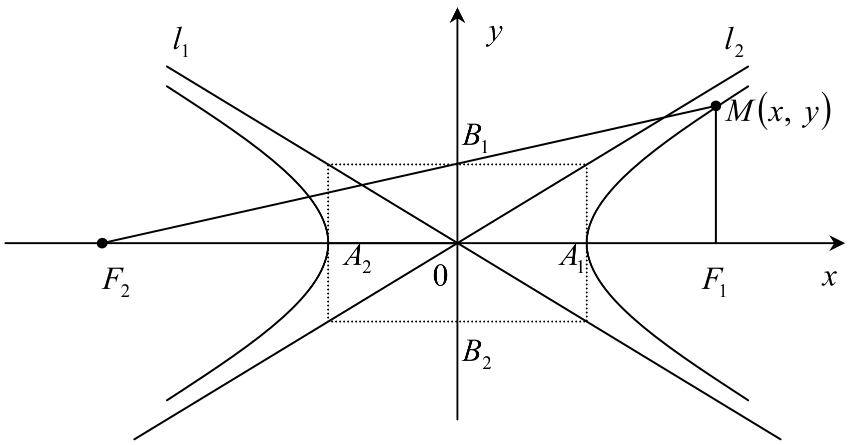

рис. 3.24

Нехай довільна точка $M(x;\,y)$ (рис. 3.24) належить гіперболі на основі означення гіперболи, маємо $F_2M - F_1M = \pm 2a$ (1).

Де $2a$ деяка стала величина, знак "+" береться тоді, коли точка $M(x;\,y)$ лежить правіше осі Oy і мінус – коли точка M а лежить лівіше осі Oy.

Із рівності (1), використовуючи формулу відстані між двома точками, одержуємо рівність:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

В останній рівності, після двократного піднесення до квадрату, звільняємось від радикалів. Виконавши відповідні алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

Введемо позначення $c^2 - a^2 = b^2$. Обґрунтуємо правомірність цього позначення. Із ΔF_2MF_1 за відомою теоремою, що різниця двох сторін трикутника завжди менша третьої його сторони, маємо: $F_2M - F_1M < F_1F_2 \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$.

Значить $c^2 - a^2 > 0$, а тому можна позначити $c^2 - a^2 = b^2$. Геометричний зміст величин і буде дано нижче. З величиною рівність буде мати вигляд:

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

Поділивши ліву і праву частину рівності на a^2b^2 одержимо рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається канонічним рівнянням гіперболи. Точки перетину гіперболи з віссю Ox: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ називаються вершинами гіперболи. Відрізок A_1A_2 називається дійсною віссю гіперболи. Вісь Oy гіперболи не перетинає. Якщо на вісі Oy взяти точки $B_1(0;b), B_2(0;-b)$, то відрізок B_1B_2 називається уявною віссю гіперболи.

Рівняння (2) містить плинні координати тільки в другому степені, а тому координатні осі є осями симетрії гіперболи. Вісь Ox - горизонтальна вісь симетрії, Oy - вертикальна вісь симетрії. Точка перетину осей симетрії називається центром гіперболи.

Розв'яжемо рівняння (2) відносно y, одержимо:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (3)$$

На підставі дослідження рівняння (3) робимо висновок, що гіпербола складається з двох частин. Ці частини називаються гілками гіперболи (рис.3.24).

Відношення фокусної відстані до довжини великої вісі називається ***ексцентриситетом гіперболи***.

Позначається $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ (3), так як $c>a$, то для гіперболи $e>1$.

Зауваження. При розв'язуванні задач, які пов'язані з гіперболою, крім її канонічного рівняння (2), користуються рівністю (3), а також співвідношенням $c^2-a^2=b^2$ (4), яке було введено при одержанні канонічного рівняння гіперболи.

Пряма l називається ***асимптотою нескінченної гілки кривої***, якщо відстань між точкою, що належить гільці і цією прямою прямує до нуля, коли точка, рухаючись по гілці, прямує в нескінченність.

Користуючись поняття границі, можна довести, що гілки гіперболи мають асимптоти, рівняння яких мають вигляд (рис. 5):

$$(l_1)\ y=\frac{b}{a}x,\ (l_2)\ y=-\frac{b}{a}x$$

(5)

Приклад. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжини дійсної і уявної вісей гіперболи, координати фокусів. Записати рівняння асимптот гіперболи.

Розв'язання. Гіперболу задано канонічним рівнянням, а тому $a^2=16, b^2=9$, звідси довжина дійсної вісі $2a=8$, уявної вісі $2b=6$. Для визначення координат фокусів скористуємось співвідношенням (4): $c^2-a^2=b^2$, маємо $c^2=a^2+b^2$ або $c^2=16+9=25$. Отже, фокуси гіперболи мають координати $F_1(5;0)$; $F_2(-5;0)$. Згідно формул (5) рівняння асимптот гіперболи будуть мати відповідно вигляд: $y=\frac{3}{4}x$; $y=-\frac{3}{4}x$.

Рівняння дотичних до гіперболи в точці $M_1(x_1;y_1)$ мають вигляд:

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1 \qquad (6)$$

Парабола

Дамо означення параболи, виходячи із її характеристичної властивості.

Параболою називається геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої l (директриси).

Для одержання канонічного рівняння параболи вісь Ox повинна співпадати з прямою, яка проходить через фокус F і перпендикулярна до директриси l. Початок координат лежить на середині відрізка, який знаходиться між фокусом і директрисою. Додатній напрям осі Ox буде від директриси. Відстань від директриси до фокуса позначимо p і назвемо параметром параболи. Виходячи з цих позначень маємо: $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ - координати фокуса параболи, $x=-\frac{p}{2}$ - рівняння директриси параболи (рис.3.25).

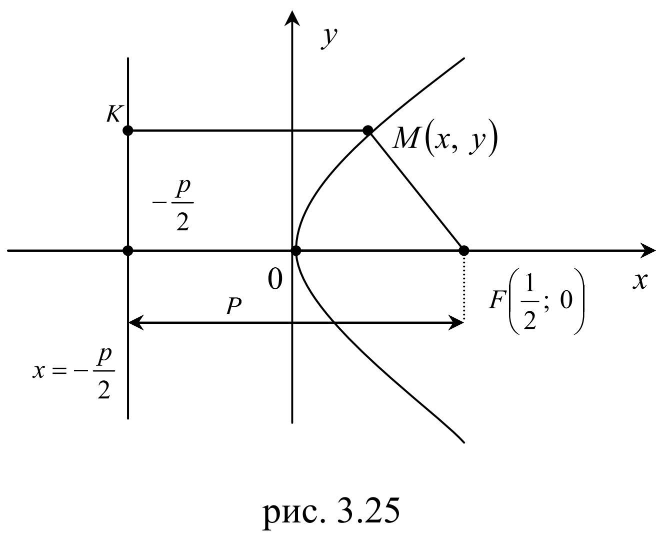

рис. 3.25

Нехай довільна точка $M(x, y)$ (рис. 3.25) належить параболі на основі означення і за побудовою параболи, маємо $FM = MK$ (1), але $FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а $MK = x + \frac{p}{2}$.

Підставивши ці значення в рівність (1), одержимо рівність:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Ліву і праву частини одержаної рівності піднесемо до квадрату, а потім, розв'язавши її відносно y^2, одержимо:

$$y^2 = 2px \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається канонічним рівнянням параболи. Точка перетину параболи з віссю Ox називається вершиною параболи. Вершина параболи співпадає з початком координат. Парабола лежить правіше вісі Oy і симетрична відносно осі Ox. Ексцентриситет параболи $e = 1$. Рівняння дотичної до параболи в точці $M_1(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$yy_1 = p(x + x_1) \qquad (3)$$

Приклад. Записати рівняння параболи, знаючи, що відстань від фокуса до вершини дорівнює 3.

Розв'язання. Фокус параболи має координати $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, отже $\frac{p}{2} = 3,\ p = 6$. Канонічне рівняння параболи моє вигляд $y^2 = 2px$, значить рівняння даної параболи буде $y^2 = 12x$.

Зауваження 1. Рівняння еліпса і гіперболи можна також одержати користуючись рівняннями їх директрис.

Зауваження 2. З оптичними властивостями кривих другого порядку можна ознайомитись самостійно.

Питання та вправи для самоперевірки.

Питання.

1. Запишіть загальне рівняння кривих другого порядку. В якому випадку це рівняння буде рівнянням кола?
2. Дайте визначення геометричного місця точок. Наведіть приклади.
3. Дайте визначення кола, як геометричного місця точок.
4. Запишіть канонічне рівняння кола і рівняння дотичної до нього, проведеної в точці $M_1(x_1; y_1)$.

5. Дайте визначення еліпса, як геометричного місця точок. Запишіть канонічне рівняння еліпса. Як називаються величини, що входять в це рівняння?
6. Чому дорівнює ексцентриситет еліпса і які числові значення може він приймати?
7. Запишіть рівняння дотичної до еліпса, проведеної в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.
8. Дайте визначення гіперболи, як геометричного місця точок.
9. Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Як називаються величини, що входять в це рівняння?
10. Чому дорівнює ексцентриситет гіперболи і які числові значення може він приймати?
11.Запишіть рівняння дотичної до гіперболи, проведеної в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.
12.Які існують співвідношення між величинами a, b, c для еліпса, для гіперболи?
13. Дайте означення асимптоти. Запишіть рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.
14.Дайте визначення параболи. Запишіть канонічне рівняння параболи. Як називаються величини, що входять в це рівняння?
15.Чому дорівнює ексцентриситет параболи? Запишіть рівняння директриси параболи.
16.Запишіть рівняння дотичної до параболи в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.

Вправи

1. Записати рівняння кола з центром в точці $C(2;-3)$ і радіусом, який дорівнює 6.
2. Знайти координати центру і радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.
3. Знайти точки перетину кола $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ і прямої $y=2x$.
4. Записати рівняння дотичної до кола $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ в точці $C(2;\,4)$.
5. Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144$.
6. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо: а) відстань між фокусами $2c=10$, а велика вісь $2a=16$; б) сума піввісей $a+b=12$, а відстань між фокусами $2c=6\sqrt{2}$.
7. На еліпсі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ знайти точки, абсциса яких дорівнює – 3.
8.* Знайти точки перетину прямої $3x+10y-25=0$ і еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

7. Записати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ в точці $C\left(2\sqrt{3};\ 1\right)$.

8. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між вершинами її дорівнює 20, а відстань між фокусами дорівнює 30.

9. Дійсна вісь гіперболи дорівнює 5, ексцентриситет $e=1{,}4$. Знайти рівняння гіперболи.

10.Дано гіперболу $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=1$. Знайти рівняння її асимптот.

11.Знайти ексцентриситет гіперболи $25x^2-36y^2=900$.

12.Парабола $y^2=2px$ проходить через точку $A(2;\ 4)$. Визначити її параметр

.

13.Визначити величину параметра і розташування відносно координатних осей таких парабол: а) ; б) $y^2=-4x$; в) $x^2=-y$; г) $x^2=5y$.

14. Визначити точки перетину прямої $x+y-3=0$ і параболи $x^2=4y$.

15.Записати рівняння дотичної до параболи $y^2=36x$ в точці $A(1;\ -6)$.

Відповіді

1. $(x-2)^2+(y+3)^2=36$.
2. $O(-2;\ 3),\ R=4$.
3. $A\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}};\ \frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$, $A\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}};\ \frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$.
4. .
5. $2a=12,\ 2b=8,\ F_1(2\sqrt{5};0),\ F_2(-2\sqrt{5};0);\ \ell=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

1. а) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; б) $\frac{16x^2}{729}+\frac{16y^2}{441}=12$.
2. $A_1\left(-3;\ \frac{8}{5}\right),\ A_2\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$.
3. $A_3\left(3;\ \frac{8}{5}\right)$. Отже пряма є дотичною до еліпса.
4. $\sqrt{3}x-2y-8=0$.
5. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{125}=1$.
6. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.
7. $y=\frac{1}{4}x,\ y=-\frac{1}{4}x$.

8. $\ell = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$.

9. $p = 4$.

10. а) $p = 3$, віссю симетрії є вісь Ox, парабола знаходиться правіше вісі Oy;

б) $p = 2$, віссю симетрії є вісь Ox, парабола знаходиться лівіше вісі Oy;

в) віссю симетрії є вісь Oy, парабола знаходиться нижче вісі Ox;

г) віссю симетрії є вісь Oy, парабола знаходиться вище вісі Oy.

11. $A(2;\ 1)$, $B(-6;\ 9)$.

12. $3x + y + 3 = 0$.