Аналітична геометрія в просторі

3.4. Площина

Загальне рівняння площини.

Нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}\{A, B, C\}$ (рис. 3.26

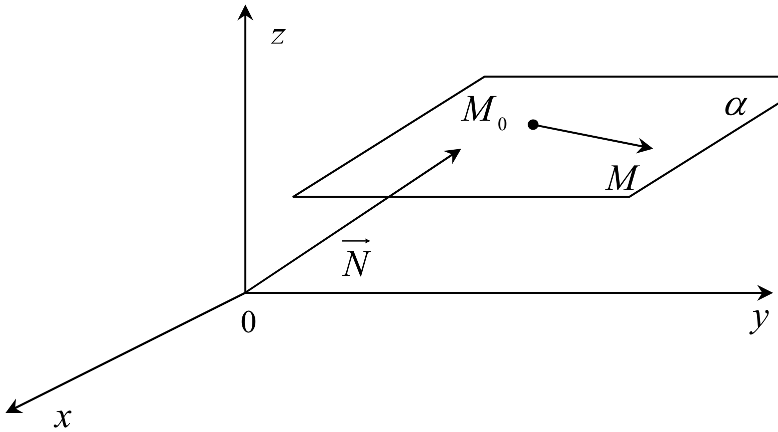

рис. 3.26

Цими умовами визначається єдина площина в просторі $Oxyz$. Вектор $\vec{N}$ називається нормальним вектором площини α. Візьмемо в площині α довільну точку $M(x, y, z)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ буде перпендикулярним вектору $\vec{N}\{A; B; C\}$. Значить, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві, тобто $\left(\vec{N}\overrightarrow{M_0M}\right) = 0$

Одержане рівняння запишемо в координатній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Рівняння (1) є рівнянням площини, перпендикулярної даному вектору $\vec{N}\{A; B; C\}$ і проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Зауваження. При довільних A, B, C рівняння (1) визначає деяку площину, що належить в'язці площин, які проходять через точку M_0. Через це його часто називають рівнянням в'язки площин.

Рівняння площини, записане у вигляді $Ax + By + Cz + D = 0$ (2), (де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$), називається загальним рівнянням площини.

Можна довести, що будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними є рівняння площини.

Неповні рівняння площини

Якщо в рівнянні (2) деякі із A, B, C, D дорівнюють нулеві, то такі рівняння називаються ***неповними рівняннями площини***. Особливість розташування площин, які задаються неповними рівняннями, в просторі $Oxyz$ визначається слідуючи ми правилами:

Правило 1. Якщо $D = 0$, то рівняння $Ax + By + Cz = 0$ визначає площину, яка проходить через початок координат.

Приклад. Площина задана рівнянням $2x - 3y + 4z = 0 \ (D = 0)$ проходить через початок координат.

Правило 2. Якщо дорівнює нулеві коефіцієнт при одній із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній вісі.

Приклад. Площина задана рівнянням $7y + 4z - 5 = 0 \ (A = 0)$ паралельна вісі Ox.

Правило 3. Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній площині.

Приклад. Площина задана рівнянням $2z - 6 = 0 \quad (A = 0, B = 0)$ паралельна координатній площині xOy.

Правило 4. Якщо дорівнює нулеві коефіцієнт при одній із координатних змінних і $D = 0$, то площина проходить через відповідну координатну вісь.

Приклад. Площина задана рівнянням $3x + 4y = 0 \ (C = 0, D = 0)$ проходить через вісь Oz.

Правило 5. Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох координатних змінних і $D = 0$, то площина співпадає з відповідною координатною площиною.

Приклад. Площина задана рівнянням $5z = 0$ співпадає з координатною площиною xOy.

Рівняння площини у відрізках

Рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{3}$$

До цього вигляду можна привести загальне рівняння площини (1) за допомогою нескладних перетворень:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$Ax + By + Cz = -D \quad \left| \div D \neq 0 \right.$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Запишемо останнє рівняння так:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{x}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Введемо позначення $a=-\frac{D}{A}$; $b=-\frac{D}{B}$; $c=-\frac{D}{C}$. Числа a, b, c дорівнюють відрізкам, які відтинає площина на координатних осях.

Дійсно, якщо точка A належить осі Ox, то її координатами будуть $(x_0, 0, 0)$ і одержуємо $Ax_0+D=0$ звідки $x_0=-\frac{D}{A}$, отже $a=-\frac{D}{A}$.

Приклад. Записати рівняння площини $x+2y-3z+6=0$ у вигляді рівняння площини у відрізках.

Розв'язання. Дане рівняння є загальним рівнянням площини. Обчислимо відрізки які вона відтинає на координатних осях:

- на осі Ox, якщо $y=0, z=0$, то $x+6=0$, отже $x=-6$ і $a=-6$;
- на осі Oy, якщо $x=0, z=0$, то $2y+6=0$, отже $y=-3$ і $b=-3$;
- на осі Oz, якщо $x=0, y=0$, то $-3z+6=$, отже $z=2$ і $c=2$.

Рівняння площини у відрізках буде мати вигляд:

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1.$$

Рівняння площини, що проходить через три дані точки, що не лежать на одній прямій

Нехай маємо три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 3.27)

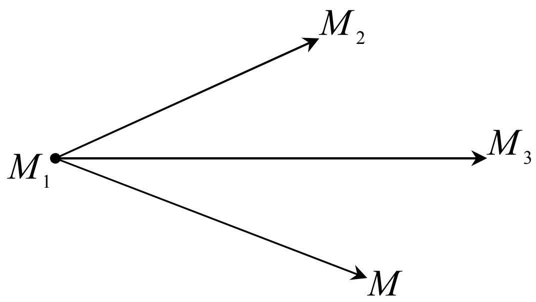

рис. 3.27

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ ці вектори не колінеарні, а тому змінна точка $M(x; y; z)$, лежить в одній площині точками M_1, M_2, M_3, тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$; $\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$; $\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$ будуть компланарними. Якщо вектори компланарні, то їх змішаний добуток дорівнює нулеві: $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}=0$.

Запишемо цю умову у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Рівняння (4) називається рівнянням площини, що проходить через три дані точки.

Приклад. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;\,2;\,-1)$, $M_2(-1;\,0;\,4)$, $M_3(-2;\,-1;\,1)$.

Розв'язання. На основі (4) рівняння шуканої площини можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Обчислимо цей визначник, розкриваючи його по елементам першого рядка: $11(x-1)-11(y-2)+0(z+1)=0$.

Розкриємо дужки, виконаємо зведення подібних членів і скоротимо на 11, після чого одержимо: $x-y+1=0$. Це рівняння визначає площину, яка паралельна вісі Oz.

Нормальне рівняння площини

Нормальне рівняння площини має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (5)$$

В рівнянні (5) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - координати одиничного нормального вектора, який опущено із початку координат на цю площину, кути α, β, γ - кути, які утворює цей вектор відповідно з координатними осями, p - довжина нормального вектора цієї площини, проведеного із початку координат.

Для приведення загального рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ до нормального вигляду необхідно його помножити на нормуючий множник:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (6)$$

Знак нормуючого множника M береться протилежним знаку вільного члена D.

Приклад. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного із початку координат на площину $10x+15y-6z-380=0$, і косинуси кутів, які утворені цим перпендикуляром з координатними осями.

Розв'язання. Приведемо рівняння площини до нормального виду. По формулі (6) знаходимо значення нормуючого множника $M=\frac{1}{19}$. Обидві частини рівняння даної площини помножимо на $\frac{1}{19}$ і одержимо рівняння площини в нормальному вигляді.

$$\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-20=0$$

із якого видно, що $p=20$. Отже, довжина перпендикуляра опущеного із початку координат на площину дорівнює 20. Косинуси кутів, які утворені цим перпендикуляром з координатними осями будуть:

$$\cos\alpha=\frac{10}{19};\ \cos\beta=\frac{15}{19};\ \cos\gamma=-\frac{6}{19}.$$

Контроль: $\cos\ \alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Кут між двома площинами

Кут між двома площинами визначається, як кут між нормальними векторами цих площин. Нехай площини задано загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, тоді нормальним вектором першої площини буде вектор $\overrightarrow{N_1}\{A_1,B_1,C_1\}$, а другої $\overrightarrow{N_2}\{A_2,B_2,C_2\}$. Косинус кута між цими векторами, а значить і між площинами, обчислюється за відомою формулою:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{7}$$

Умова перпендикулярності двох площин співпадає з умовою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$, і має вигляд:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{8}$$

Умова паралельності двох площин співпадає з умовою колінеарності векторів $\overrightarrow{N_1}\ ||\ \overrightarrow{N_2}$: має вигляд:

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}=\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}=\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2} \tag{9}$$

Приклад. Обчислити косинус кута між двома площинами

$5x-3y+4z-4=0$,

$3x-4y-2z+5=0$.

Розв'язання. По формулі (7), якщо врахувати, що $A_1=5;\ B_1=-3;\ C_1=4$, $A_2=3;\ B_2=-4;\ C_2=-2$, одержимо:

$$\cos\varphi=\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}=\frac{19}{5\sqrt{58}}.$$

Отже, $\cos\varphi=\frac{19}{5\sqrt{58}}$.

Відстань точки до площини

Відстань точки $O(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ є довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину. Вона обчислюється за формулою:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + d}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (10)$$

> **Правило.** Щоб визначити відстань від точки $A(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, треба дане рівняння площини привести до нормального виду, потім в ліву частину одержаного рівняння підставити замість плинних координат координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і буде шуканою відстанню.

Приклад. Обчислити відстань від точки $A(2; 3; -1)$ до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Розв'язання. Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою (10), в якій $A = 7; B = -6; C = -6; D = 42$, $x_1 = 2, y_1 = 3, z_1 = -1$. Підставляючи ці значення у формулу (10), одержимо $d = 4$.

Відстань від точки до прямої є величина завжди додатня. Крім відстані від точки до площини розглядається ще і відхилення точки від площини.

Відхилення δ даної точки від даної площини є відстань цієї точки до даної площини взята зі знаком плюс, коли точка і початок координат знаходяться по різні сторони від даної площини, і зі знаком мінус, якщо точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Висновок. Відстань від точки до площини дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від площини: $d = |\delta|$.

Зауваження. Зверніть увагу на схожість обчислення відстані і відхилення токи від площини з обчисленням відстані і відхилення точки від прямої на площині, що розглянуто в п.3.2.