МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки

до вивчення аналітичної геометрії

для студентів будівельних спеціальностей та

спеціальності “Менеджмент організацій”

КИЇВ 2005

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Т М54

Укладачі: А.А. Кириченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
К.В. Терлецька, канд. фіз.-мат. наук, асистент
Ю.П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент
А.Н. Чепелева, ст. викладач

Рецензент В.М.Турчин, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.К.Чибіряков, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 12 від 5 червня 2005 року.

Методичні вказівки до вивчення аналітичної геометрії. Уклад.: А.А. Кириченко, К.В. Терлецька, Ю.П. Філонов, А.Н. Чепелева — К.:КНУБА, 2005. — 30 с.

Містить навчальні завдання та короткі теоретичні відомості з аналітичної геометрії.

Призначено для студентів І курсу будівельних спеціальностей та спеціальності 7.05.07.01 “менеджмент організацій”.

ВСТУП

Аналітична геометрія *— розділ геометрії, в якому найпростіші геометричні образи (прямі, площини, лінії, поверхні) досліджуються методами лінійної алгебри за допомогою методу координат.*

Виникнення методу координат пов’язано з розвитком астрономії, механіки та техніки у XVII сторіччі. Чітке та повне викладення цього методу та основ аналітичної геометрії було зроблено Р. Декартом у його “Геометрії” (1637). Основні ідеї методу були відомі також його сучаснику П. Ферма (1629). Подальша розробка аналітичної геометрії пов’язана з працями Г.Лейбніца та І. Ньютона і особливо Л. Ейлера. Засобами аналітичної геометрії користувався Ж. Лагранж при побудові аналітичної механіки та Г. Монж у диференціальній геометрії. Довгий час для аналітичної геометрії застосовувалася назва “декартова геометрія”, яку ввів І. Бернуллі (1692). Термін “аналітичний” йде від Ф. Вієта (1591), стосовно геометрії він вперше був застосований І. Ньютоном (1671, опубл. 1736).

Розділ 1. ДЕКАРТОВА ТА ПОЛЯРНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині. Рівняння лінії

Розташування точки на площині визначається по відношенню до прямокутної декартової системи координат двійкою чисел (координатами).
Систему координат встановлюємо таким чином:

- визначимо два взаємно перпендикулярних напрямки і горизонтальний напрямок називаємо віссю абсцис, а вертикальний — віссю ординат (осі Ox і Oy відповідно);
- визначимо на кожній з осей Ox і Oy додатній напрямок;
- визначимо на кожній з осей одиницю довжини (практично здебільшого вибирають спільну одиницю довжини для обох осей).

Тоді положення будь-якої точки M на площині визначається її ортогональними проекціями на осі координат — x_M, y_M. (на рис. 1, А зображена точка Р з координатами $x_M = 2, y_M = 3$). Усі точки, що належать осі абсцис, мають нульову ординату $y = 0$, усі точки осі ординат мають нульову абсцису $x = 0$. Між точками площини і парами чисел (x, y) встановлена взаємно однозначна відповідність: кожній точці відповідає тільки одна пара чисел (x, y); кожній парі чисел (x, y) відповідає тільки одна точка площини

За відомими координатами двох точок $P_1(x_1;y_1)$ і $P_2(x_2;y_2)$ (рис. 1, Б) відстань між ними визначається за формулою, що випливає з відомої теореми Піфагора

$$d = P_1P_2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

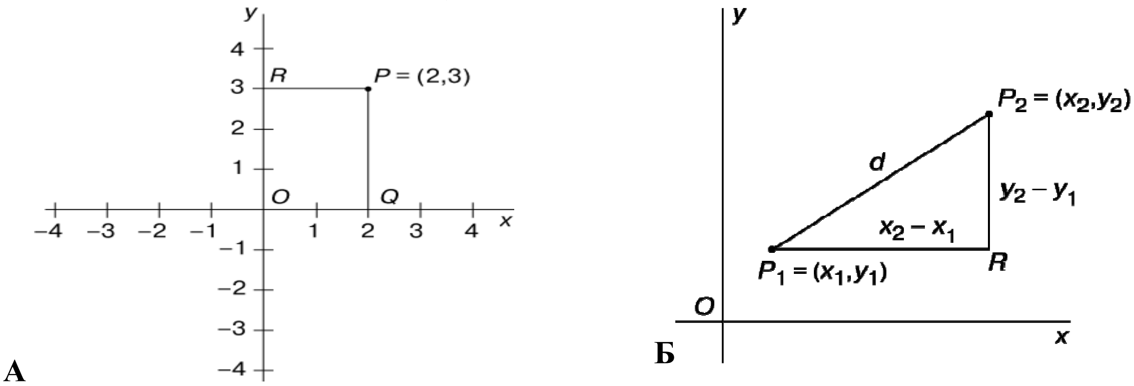


Рис. 1. А –Координати точки на декартовій площині, Б - відстань між двома точками

Координати точки $C\left(x_c, y_c\right)$, що ***поділяє в заданому відношенні*** $\lambda : \mu$ відрізок між точками $A\left(x_1, y_1\right)$ та $B\left(x_2, y_2\right)$ (тобто $\lambda \ : \mu = AC : BC$) визначаються за формулами $x_c = \dfrac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}$, $y_c = \dfrac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}$. Якщо точка $C\left(x_c, y_c\right)$ середина відрізка AB то $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Площа трикутника з вершинами $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$, $C\left(x_3, y_3\right)$ знаходиться за формулою $S = \dfrac{1}{2} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$, де mod означає модуль.

Полярні координати

Окрім декартової системи координат існують інші системи. Досить популярною є ***полярна система координат***. Полярна система координат визначається заданням деякої точки *O*, що називають ***полюсом***, променя *OA*, що виходить з цієї точки, який називають ***полярною віссю***, та масштабу для вимірювання довжини. Крім того, при заданні полярної системи повинно бути сказано, які повороти навколо точки O вважаються додатніми (зазвичай додатніми вважають повороти проти руху годинникової стрілки). Полярними координатами довільної точки *M* (відносно заданної системи) називають числа $\rho = OM$, і $\theta = \angle AOM$ (рис. 2). Кут θ при цьому слід розуміти так, як це прийнято

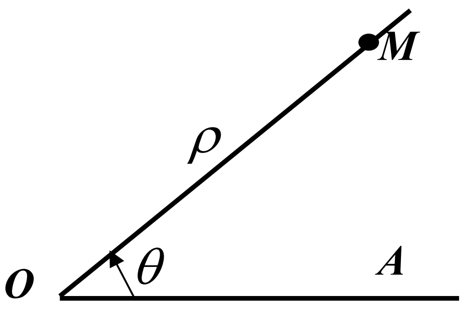


Рис. 2. Полярні координати

в тригонометрії. Відстань ρ називається полярним радіусом, число θ полярним кутом точки *M*. При цьому точку позначають $M(\rho,\theta)$. Значення полярного кута θ, що задовольняє нерівностям $-\pi < \theta \le \pi$, називають головним. Якщо полюс полярної системи координат співпадає з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь співпадає з додатньою віссю абсцис, то перехід від полярних координат довільної точки до декартових координат цієї ж точки відбувається за формулами: $x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$.

Зауважимо, що обернений перехід здійснюється за формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\theta = \frac{y}{x}.$$

Декартові кординати у просторі

Декартова система координат у просторі визначається трьома осями *Ox*, *Oy* та *Oz*, які перетинаються у одній точці *O* під прямим кутом. При цьому вісь *Ox* називається віссю абсцис, *Oy* — ордина́т, *Oz* — аплікат, *O* — початок координат. Нехай *M* точка простору. Кординатами точки *M* називають її проекції x_M, y_M, z_M на осі *Ox*, *Oy* і *Oz* відповідно. При цьому запис $M=(x_M,y_M,z_M)$ означає, що точка *M* має координати x_M, y_M, z_M. Відстань між точками $M_1(x_1y_1,z_1)$, $M_2(x_2y_2,z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Аналогічно як і у випадку на площині, координати точки С, що поділяє відрізок AB де $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ у заданному відношенні $\lambda : \mu = AC : BC$ у просторі мають вигляд $x_c = \dfrac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}$, $y_c = \dfrac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}$, $z_c = \dfrac{\lambda z_1 + \mu z_2}{\lambda + \mu}$. Зокрема, координати середини відрізка AB знаходять за формулами
$x_c = (x_1 + x_2)/2,\ y_c = (y_1 + y_2)/2, z_c = (z_1 + z_2)/2$.

Центр мас двох матеріальних точок $M_1(x_1, y_{1,} z_1)$ та $M_2(x_2, y_{2,} z_2)$, з зосередженими масами m_1 та m_2 у цих точках, лежить на відрізку M_1M_2 та поділяє його у відношенні $\lambda_1 = m_2/m_1$. Його координати знаходяться за формулами:

$$x_N = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, y_N = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, z_N = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}.$$

Координати центра мас трьох матеріальних точок $M_1(x_1, y_{1,} z_1)$, $M_2(x_2, y_{2,} z_2)$, $M_3(x_3, y_{3,} z_3)$, з зосередженими массами m_1, m_2, m_3 відповідно, знаходяться за формулами $x_N = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y_N = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $z_N = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

У випадку, коли $m_1 = m_2 = m_3$ центр мас знаходиться у точці перетину медіан трикутника $M_1M_2M_3$.

Інші системи координат у просторі

У просторі крім прямокутної системи координат часто використовують циліндричну та сферичну системи координат.

Циліндрична система координат. Положення точки в циліндричній системі координат визначається трьома координатами $P(\rho,\varphi,z)$, де ρ *та* φ - полярні координати проекції точки Р на основну площину (як правило *xOy*), z - апліката - відстань від точки Р до основної площини (рис. 3,А). Формули переходу від циліндричних координат до декатових $x=\rho\cdot\cos\varphi,\ y=\rho\cdot\sin\varphi,\ z=z$. Та обернений перехід $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg\varphi=y/x,\quad z=z$.

Сферична система координат. Положення точки у сферичній системі координат визначається трьома координатами $P(\rho,\varphi,\theta)$, де ρ - довжина радіус-вектора (відстань від точки *P* до початку координат), φ - довгота (двогранний кут між площинами *zOx* та *zOP*), θ полярна відстань (кут між віссю *Oz* та променем *OP*). Додатні напрямки показані на рис. 3,Б. Формули переходу до декартової системи координат $x=\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$, $x=\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$, $z=\rho\cdot\cos\varphi$, де $0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\theta\le\pi$.

Обернений перехід: $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $tg\varphi=y/x,\ tg\theta=\sqrt{x^2+y^2}/z$.

Примітка: *Сферична система координат використовується для визначення положення точки на земній поверхні, так як форма Землі наближено вважається сферичною з радіусом R=6378.1363 км. Кут φ називається довготою, вимірюється від нульового меридіану, який проходить через місто Лондон, а θ називається широтою, нульове значення якого відповідає екватору. Наприклад, в сферичній системі координат місто Київ має координати $50^o25'$ північної широти та $30^o30'$ східної довготи.*

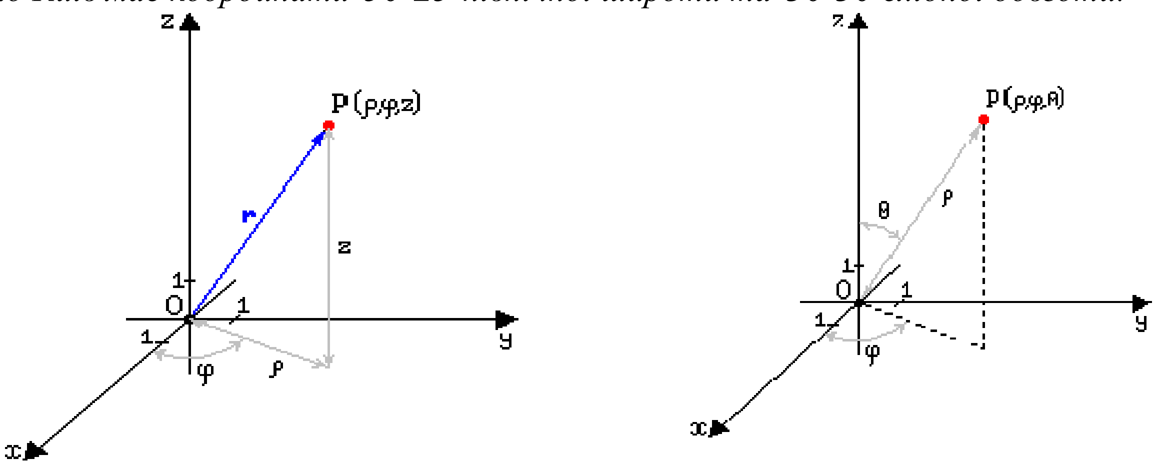


Рис. 3. А – Циліндрична система координат, Б – сферична система координат

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Побудувати у прямокутній системі координат точки $A(-3,4)$, $B(0,3)$, $C(-2,-3)$.

2. Задано точку $M(4,1)$. Побудувати точки, симетричні M відносно: а) осі абсцис, б) осі координат, в) початку координат, г) відносно бісектриси I-го координатного кута, д) відносно бісектриси II-го координатного кута.

3. Визначити, у яких чвертях може бути розміщена точка, якщо 1) $xy > 0$, 2) $xy < 0$, 3) $x + y = 0$.

4. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(1,2)$ і $B(4,6)$. Знайти його площу.

5. Побудувати точки, задані у полярних координатах: $A(2,\pi/2)$, $B(1,\pi/4)$, $C(1,1)$.

6. Довести формулу відстані між двома точками на площині $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

7. Знайти відстань між точками $A(1,\pi/6)$ і $B(3,\pi/4)$, які задані у полярних координатах.

8. Знайти площу трикутника, вершинами якого є точки $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$.

9. Знайти точку, яка ділить відрізок AB у відношенні *1:2*, починаючи з точки A якщо $A(-2,4)$ і $B(5,4)$.

10. Знайти величину сили $\vec{F}(3,4)$, прикладеної до початку координат, та її проекції на осі координат.

11. Знайти площу трикутника, вершинами якого є точки *A(2; -3), B(3; 2), C(-2; 5).*

12. Побудувати точки *A(0,3,0), B(2,1,0)*, *C(3,1,2).*

13. Довести формулу відстані між двома точками у просторі $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

14. Знайти відстань між точками *A(3,2,1)* і *B(2,0,3).*

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Задано точку $M(3,2)$. Побудувати точки, симетричні M відносно: а) осі абсцис, б) осі координат, в) початку координат, г) бісектриси I-го координатного кута, д) бісектриси II-го координатного кута, е) прямої $x + y = 3$.

2. Знайти умову (скласти рівняння), яку задовольняють всі точки $M(x,y)$, що є рівновіддаленими від точок $A(1,2)$ і $B(5,3)$.

3. Знайти точку перетину медіан трикутника ABC, якщо $A(2,-3)$, $B(-1,2)$ і $C(4,5)$.

4. Визначити полярні координати точок, що симетричні відносно полярної осі точкам: $M_1(3,\pi/3), M_2(1,-\pi/2), M_3(5,-\pi/4), M_4(3,2), M_5(2,-1)$ (точки задані у полярній системі координат).

5. У полярній системі координат дано дві вершини паралелограма $ABCD$ $A(2,\pi/6)$, $B(5,3\pi/4)$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.

6. Одна з вершин трикутника співпадає з полюсом полярної системи координат, а дві інші вершини: $A(3,\pi/3)$, $B(2,-\pi/4)$. Знайти площу трикутника.

7. Знайти площу паралелограма, якщо три його вершини *A(1;1), B(5,0), C(2;3).*

8. Вершинами трикутника є точки *A(3; 6), B(-1; 3), C(2; -1)*. Знайти довжину його висоти, проведеної з вершини *C*.

9. Знайти площу паралелограма, три вершини якого задано *A(-2,3), B(4;-5), C(-3;1)*.

10. Знайти центр мас однорідного трикутника (точку перетину медіан) з вершинами *A(-3,1), B(4;3), C(-2; 1)*.

11. Дано послідовно вершини однорідної чотирикутної пластинки *A(2; 1), B(5; 3), C(-1; 7), D(-7; 5)*. Знайти координати її центра мас. (*Вказівка:* розбити чотирикутник на два трикутника)

12. Дано дві вершини трикутника *A(2;5), B(1; -2),* його площа трикутника S=6. Знайти координати вершини *C* трикутника, коли відомо, що вона лежить на осі *Oy*.

13. Площа паралелограма *S=17*; дві його вершини — точки *A(1; 0), B(4; -4)*. Знайти його дві інші вершини за умовою, що точка перетину його діагоналей лежить на осі ординат.

14. Побудувати точки $A(2,\pi/3,3)$, $B(3,2\pi/3,-5)$, $C(1,7\pi/4,0)$, задані у циліндричній системі координат.

15. Побудувати точки $A(1,\pi/3,0)$, $B(2,3\pi/4,\pi/2)$, $C(3,3\pi/2,-\pi/4)$, задані у сферичній системі координат.

16. Знайти геометричне місце точок, які задовольняють рівняння 1) $\rho=1$, 2) $\varphi=3\pi/4$, *а*) у полярній, *б*) у циліндричній системі координат, *в)* сферичній системі координат.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Деякі фізичні величини повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, тиск, густина, температура тощо), вони називаються скалярними. Однак існують величини, які крім числового значення визначаються ще і напрямком (швидкість, прискорення, сила тощо). Такі величини називаються векторними.

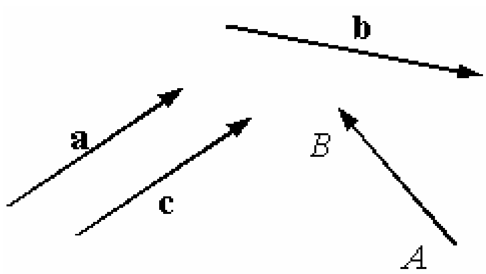


Рис. 4. Зображння векторів

Напрямлений відрізок *AB* (*A*-початок, *B* кінець) називають ***вектором*** і позначають $\overrightarrow{AB}$, або $\vec{a}$ (рис. 4). Тобто, вектор має певну довжину і певний напрямок. Термін «вектор» ввів у 1848 р. *Уільям Гамільтон (ірландський фізик, математик і механік* 1805–1865*)*.

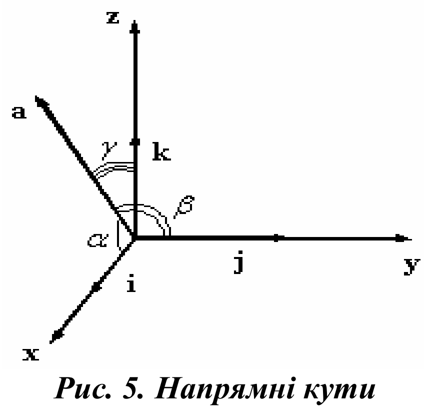


Рис. 5. Напрямні кути

Вектори вважаються ***рівними***, якщо вони суміщаються паралельним переносом, тобто, якщо вони мають одну і ту ж довжину і один і той же напрямок.

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається ***нуль-вектором*** і позначається $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Довжиною вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Нехай $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді координати вектора $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ знаходяться за формулами: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Довжина вектора, або модуль знаходиться за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad \text{або} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Якщо $|\vec{a}| = 1$, то вектор $\vec{a}$ називається одиничним вектором або ***ортом***.

Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — косинуси кутів між вектором та осями координат (рис.5).Для вектора $\vec{a}$ напрямні косинуси можна визначити як:

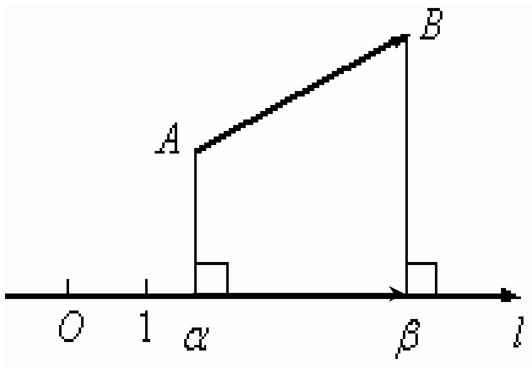


Рис. 6. Проекція вктора на вісь

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

При цьому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ на вісь $\vec{l}$ дорівнює довжині відрізка $\alpha\beta$, який визначається проекцією початку вектора $\overrightarrow{AB}$ (точки *A*) і проекцією кінця вектора $\overrightarrow{AB}$ (точки *B*) на вісь, причому ця проекція вважається додатньою, якщо напрямок вектора $\overrightarrow{\alpha\beta}$ збігається з напрямком осі, і проекція вважається від'ємною, якщо напрямки вектора осі $\overrightarrow{\alpha\beta}$ і $\vec{l}$ протилежні (рис.6). Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на напрямок (вісь) $\vec{l}$ дорівнює добутку довжини вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ на косинус кута φ між вектором $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{l}$: $Пр_{\vec{l}}\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$. ***Проекцією*** вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$ називають число $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Проекції вектора на осі координат називаються його координатами.

Розглянемо вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. ***Сумою*** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Вектор суми $\vec{a} + \vec{b}$ — є діагоналлю паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис.7).

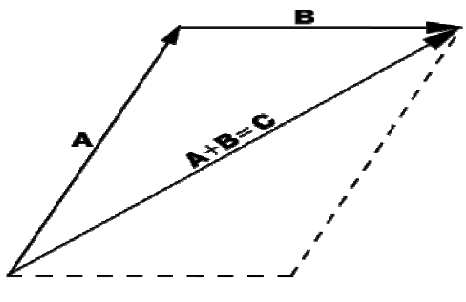


Рис.7. Додавання векторів

Добутком вектора $\vec{a}$ на ***число*** α називають вектор $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$. Множення вектора на число можна розуміти *як* *"розтяг"* вектора $\vec{a}$ в α раз при $|\alpha|>1$ або "стиск" при $0<|\alpha|<1$, причому при $\alpha<0$ відбувається ще і зміна напрямку. Наприклад на рис. 8 зображено добутки $-1.5\vec{a},\ 0.5\vec{a}, 2\vec{a}$.

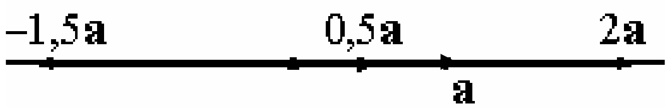


Рис.8. Добуток вектора на число

Вектори $\vec{a}\neq 0$ та $\vec{b}\neq 0$ ***колінеарні*** (лежать на одній прямій або на паралельних прямих) тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, тобто їх відповідні координати пропорційні $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\alpha$. Якщо $\alpha>0$, то вектори мають один і той же напрямок $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а якщо $\alpha<0$, то вектори протилежно напрямлені $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Нуль-вектор вважається колінеарним до будь-якого вектора.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$**.**

Позначається $\vec{a}\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$. Згідно з означенням проекції вектора на вектор можна використовувати такі формули для скалярного добутку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$$

Скалярний квадрат $\vec{a}\cdot\vec{a}$ позначають, як $\vec{a}^2$. Зауважимо, що $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, так як з $\varphi=0$ випливає, що $\cos\varphi=1$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, через координати обчислюється за формулою $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Механічний зміст скалярного добутку: Робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α, дорівнює $A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos\alpha=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Кут φ ***між векторами*** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ знаходиться з наступної формули

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \text{ або } cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}.$$

Оскільки $\cos 90^o=0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\vec{b}=0$. Таким чином $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ - умова перпендикулярності двох векторів.

Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком неколінеарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, для якого виконуються наступні умови:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3. вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Векторний добуток позначають одним із символів: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$.

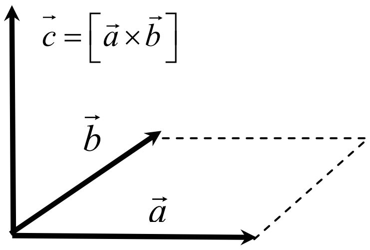


Рис. 9. Векторний добуток

Зауваження. Трійку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називають правою, якщо вектори зі спільною початковою точкою розташовані таким чином, що з кінцевої точки вектора $\vec{c}$ найкоротше обертання від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки (рис.9).

Довжина векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку: $S_{пар.} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Векторний добуток залежить від порядку множників, а саме: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Векторний добуток двох векторів вважається рівним нулю, тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Векторний добуток через координати обчислюється за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{k},$$

де $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Механічний зміст векторного добутку: Моментом сили $\vec{F}$, прикладеної до точки *A*, відносно точки *O*, називається векторний добуток: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.

Лінійна швидкість $\vec{v}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається за формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. (Кутова шводкість $\vec{\omega}\left[рад/с\right]$ напрямлена по осі обертання).

Мішаний добуток векторів

При множенні двох векторів вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число, і векторний, результатом якого є вектор.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Якщо вектори утворюють праву трійку, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, ліву — $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, компланарні $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Через координати векторів мішаний добуток обчислюється формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Модуль мішаного добутку дорівнює ***об'єму паралелепіпеда***, побудованного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ віднесених до спільного початку. $V_{пар.}=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$. Тому, що

$$V_{пар.}=S_{основи}\cdot h=\underbrace{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi}_{S_{основи}}\cdot\underbrace{\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha}_{h}.$$

Звідки, ***об'єм піраміди побудованної на векторах*** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює $1/6\cdot V_{пар.}$ (рис.10).

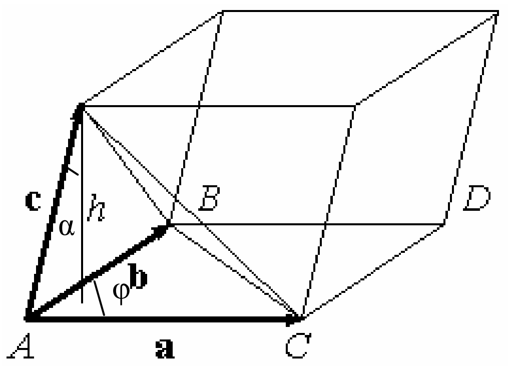


Рис. 10. Об'єм піраміди

Умова компланарності векторів: вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ***компланарні*** *(лежать в одній або паралельні одній і тій же площині)* тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Дано $A(1,-1)$, $B(2,3)$. Побудувати вектор $\overline{AB}$. Знайти його довжину.
2. Вектор $\vec{a}(-1,4,2)$ відкладено від точки $M(3,2,1)$. Знайти його кінець.
3. Знайти орт вектора $\vec{a}=(1,2,2)$.
4. Знайти вектор $\vec{n}$, який колінеарний до вектора $\vec{m}=(4,-4,2)$ і має довжину $|\vec{n}|=5$.
5. Знайти проекцію вектора $\vec{a}(1,2,3)$ на вісь вектора $\vec{b}(2,0,-3)$.
6. Дано $\vec{a}=(1,3,-1)$, $\vec{b}=(7,-2,0)$. Знайти 1) кут між векторами, 2) $\vec{a}+\vec{b}$, 3) $|\vec{a}+\vec{b}|$.
7. Дано $\vec{a}$, $\vec{b}$ два взаємноперпендикулярні орти. Знайти $(\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-5\vec{b})$.
8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^o$, причому $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Знайти 1) $\vec{a}\vec{b}$, 2) $\vec{a}^2$, 3) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$, 4) $|2\vec{a}-\vec{b}|$.
9. Вектори $\vec{a}=(1,2,3)$ і $\vec{b}=(-2,0,1)$. Знайти 1) $\vec{a}\vec{b}$, 2) $\vec{b}^2$, 3) $(2\vec{a}+\vec{b})^2$, 4) $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.
10. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=2$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.
11. Дано $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, кут між ними $\varphi=30^o$. Обчислити 1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; 2) $|(2\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})|$.
12. Дано $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,3,1)$. Обчислити 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $|(\vec{a}+2\vec{b})\times(5\vec{a}-2\vec{b})|$.
13. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,2,0)$ $B(3,1,5)$, $C(-2,0,3)$.
14. Дано $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(3,1,1)$, $\vec{c}=(3,2,1)$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
15. Знайти об'єм тетраедра з вершинами $A(3,1,-1)$, $B(0,1,3)$, $C(1,2,4)$, $D(2,3,2)$.
16. Знайти вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{a}(2,-3,0)$ і $\vec{b}(0,-2,3)$, а його модуль $\left|\vec{c}\right|=10$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Знайти вектор, який утворює з осями координат Ox, Oy, Oz рівні кути і має довжину рівну 5.
2. Вектор утворює кути 135° і 60° з осями *Ox* і *Oy*. Знайти кут, який він утворює з Oz.
3. Знайти паралельну та ортогональну складові сили $\vec{F} = (4, -2, 1)$ відносно напрямку $\vec{a} = (-1, 2, 1)$.
4. Розкласти силу $\vec{F} = (6, 3, 5)$ на дві складові $\vec{F}_{\vec{a}}$ і $\vec{F}_{\vec{b}}$, які паралельні векторам $\vec{a} = (0, 3, 1)$ і $\vec{b} = (2, -1, 1)$. (*Прим.* $\vec{F} = \alpha \vec{F}_{\vec{a}} + \beta \vec{F}_{\vec{b}}$.)
5. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (3, 5, 7)$ при переміщенні точки $A(2, 1, 4)$ у точку $B(-3, 2, 5)$.
6. Знайти модуль рівнодійної трьох сил $\vec{F}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{F}_2 = (2, 0, -2)$, $\vec{F}_3 = (1, 4, -2)$, які прикладено до однієї точки. (*Прим. Рівнодійна системи сил, прикладених до однієї точки, дорівнює їх векторній сумі.*)
7. Дано $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (2, 4, 0)$. Знайти вектор $\vec{x}$ такий, що $\vec{x}\vec{a} = -2$, $\vec{x}\vec{b} = 10$ і $|\vec{x}| = \sqrt{13}$.
8. Знайти момент сили $\vec{F} = (1, 3, 2)$, прикладеної до точки $M(2, 1, 0)$, відносно точки $N(1, 2, 1)$.
9. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, де $\vec{b} = (1, 2, 3)$, $\vec{c} = (2, 0, -1)$, і $|\vec{a}| = 7$.
10. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$, $\vec{c} = (0, 7, 8)$.
11. Перевірити, чи лежать точки $M_1(1, 2, 2)$, $M_2(2, 3, 5)$, $M_3(-1, 3, 2)$, $M_4(0, 1, -1)$ в одній площині?
12. Знайти довжину висоти тетраедра, опущеної з точки M_4, якщо його вершини знаходяться у точках $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(4, 1, -2)$, $M_3(6, 3, 7)$, $M_4(-5, -4, 8)$.

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ЛІНІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Будь-яке рівняння першого степеня відносно декартових координат x і y описує пряму лінію на координатній площині і, навпаки, будь-яка пряма лінія на площині описується рівняннями першого степеня. Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами, яким відповідають різні види рівнянь. Зробимо огляд основних типів рівнянь прямих на площині.

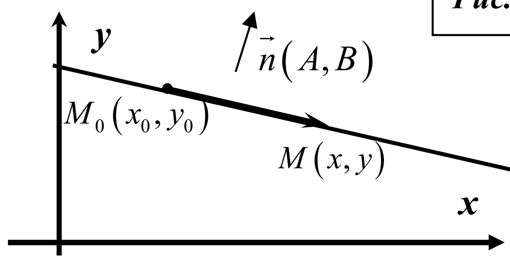
1. ***Загальне рівняння прямої***

$$Ax + By + C = 0.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A,B)$ (*рис. 11*).

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Рис.11

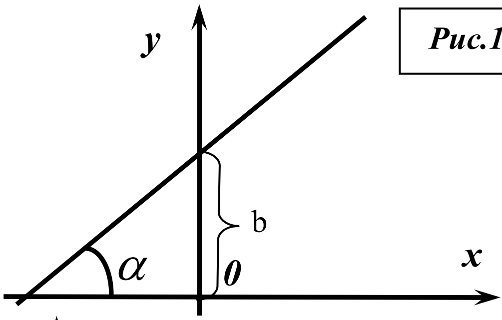


2. ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b,\ tg\alpha = k.$$

$k = tg\alpha$ - кутовий коефіцієнт прямої лінії, що визначає її напрямок; b - точка перетину прямої з віссю *0у (рис 12)*.

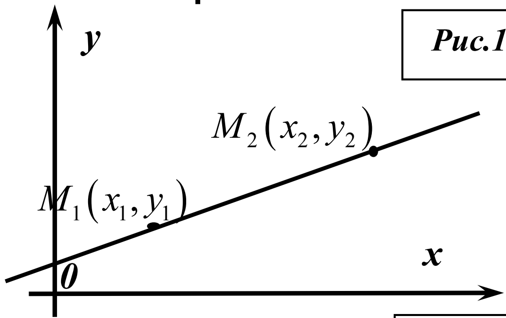
Рис.12



3. ***Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки***
$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ (*рис. 13*):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

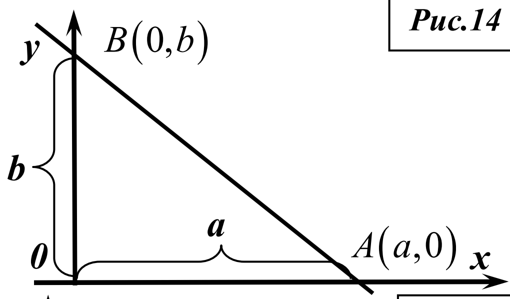
Рис.13



4. ***Рівняння прямої "у відрізках"*** *(рис.14)*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Рис.14



5. ***Рівняння прямої, яка проходить через дану точку*** $M_1(x_1, y_1)$ *(рис.15)*

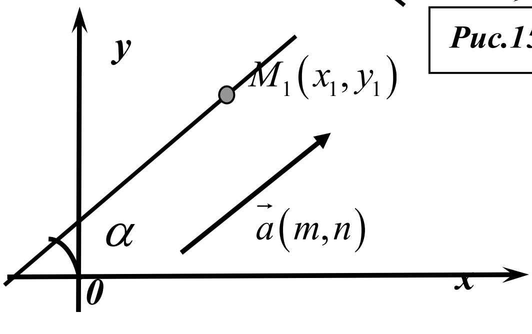
а) з заданим кутовим коефіцієнтом

$$k = tg\alpha:\ y - y_1 = k(x - x_1)$$

б) ***паралельно до вектора а****(m,n) :*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Рис.15

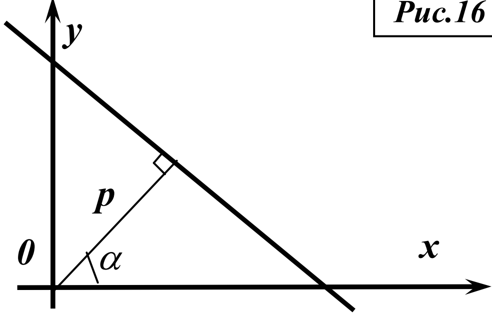


6. ***Нормальне рівняння прямої***:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

при цьому p - довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму, α - кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі *Ох*.(рис.16)

Рис.16



Основні задачі для прямої на площині

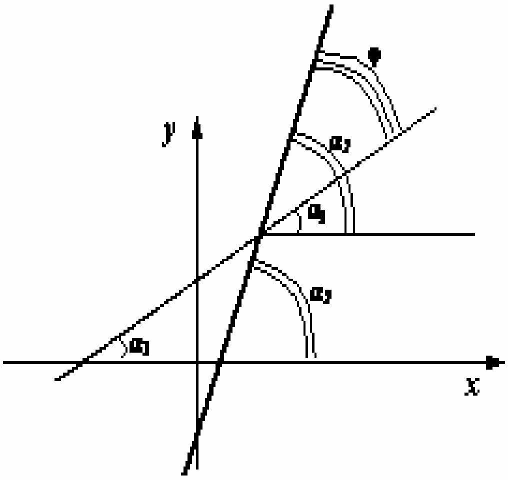


Рис.17. Кут між прямими

1. Кут між прямими. Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то кут між цими прямими φ знаходимо за формулою

$tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$, де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ (рис. 17)

Так як з $\varphi = 0$ випливає, що $tg\varphi = 0$, і тому умову паралельності двох прямих можна записати у вигляді $k_1 = k_2$. І навпаки, з $k_1 = k_2$ випливає, що $\varphi = 0$. Таким чином, умова рівності кутових коефіцієнтів двох заданих прямих $k_1 = k_2$ є необхідною і достатньою умовою ***паралельності прямих***.

Якщо прямі $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді ***умова перпендикулярност***і набуває вигляду $1 + k_1k_2 = 0$, $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

2. ***Зведення рівняння прямої до нормального вигляду***. Для того, щоб рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ звести до нормального виду, потрібно домножити його на множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де знак вибирається протилежним до знака *C*.

3. ***Відстань від точки до прямої***. Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої *l*, яка задана нормальним рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, $p \geq 0$, називають число

$$\delta(M_0) = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p.$$

Зауважимо, що пряма *l* розбиває площину на дві півплощини, для всіх точок півплощини, у якій лежить початок координат, відхилення $\delta < 0$, а для іншої $\delta > 0$, для точок, які належать прямій *l* - $\delta = 0$. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої *l* - $d(M_0) = |\delta(M_0)|$. Отже, маємо, що відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої *l:* $Ax + By + C = 0$:

$$d(M_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ (рис. 18).}$$

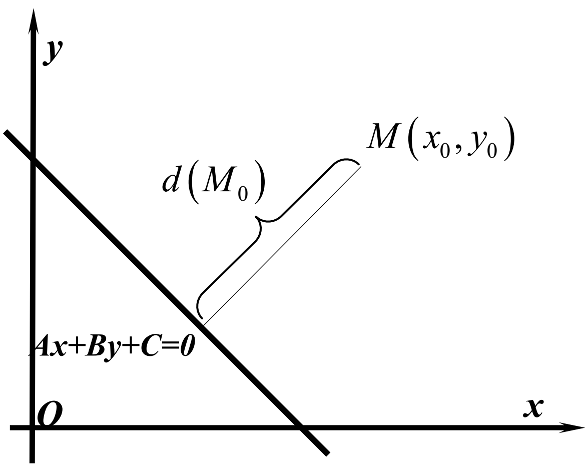


Рис. 18. Відстань від точки до прямої

4. Рівняння в'язки прямих. Якщо

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ рівняння двох прямих, які перетинаються в точці S, то рівняння $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0$

називається ***рівнянням в'язки прямих***. Дане рівняння для кожної пари чисел (λ, μ) визначає пряму, яка також проходить через точку S.

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Визначити, які з точок $M_1(1,2)$, $M_2(2,-9)$, $M_3(0,1)$, $M_4(10,-1)$ належать прямій $x + 3y - 7 = 0$.
2. Побудувати пряму а) $-2x + 3y - 6 = 0$, б) $y = -x + 2$.
3. Знайти точку перетину прямих $3x - 2y + 1 = 0$ і $2x + 3y - 8 = 0$.
4. Для прямої $3x + y - 5 = 0$ побудувати пряму, яка проходить через точку $M(-1,2)$ а) паралельно, б) перепендикулярно до неї, та написати її рівняння.
5. Знайти точку симетричну до $M(1,3)$ відносно прямої $2x + y - 3 = 0$.
6. Знайти кут між прямими а) $x + 2y - 3 = 0$ і $3x - y + 7 = 0$, б) $2x + 3y - 4 = 0$ і $3x - 2y + 5 = 0$, в) $x + 2y - 2 = 0$ і $2x + 4y + 3 = 0$.
7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1,2)$ і $B(-4,5)$.
8. Звести рівняння прямої до нормального виду: а) $3x + 4y - 10 = 0$, б) $5x - 12y = -13$.
9. Чи лежать точки $A(4,1)$ і $B(5,1)$ по одну сторону від прямої $2x + 3y - 12 = 0$.
10. Знайти відстань між прямими $3x - y - 5 = 0$ і $6x - 2y + 3 = 0$.
11. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $-3x + 4y - 5 = 0$ і $12x + 5y - 17 = 0$, у якому лежить початок координат.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Дано кординати сторін трикутника $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ і $3x + y + 5 = 0$. Обчислити координати його вершин.
2. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 13$ у точці з координатами $M(2,3)$.
3. Дано вершини трикутника $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-5,1)$. Скласти рівняння: а) його сторін, б) медіани AM, в) висоти BH, г) бісектриси CK.
4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,3)$ і утворює з координатними осями трикутник площею 12 кв.од.
5. Промінь рухався по прямій $2x+y-2=0$, відбився від осі Ox. Скласти рівняння відбитого променя.
6. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомо координати його вершин $A(2,3)$, $B(6,4)$ та точка перетину медіан $O(4,0)$.
7. Знайти відстань між двома паралельними прямими $4x+3y-12=0$ і $4x+3y+4=0$.
8. Основа рівнобедреного трикутника лежить на прямій $x-2y=0$, а одна з бічних сторін – на прямій $x+y-3=0$. Записати рівняння прямої, на якій лежить друга бічна сторона, знаючи, що вона проходить через точку *(1;1)*.

9. Задано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і координати вершини $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

10. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $5x-3y+2=0$, і рівняння висот AM: $4x-3y+1=0$ і BH: $7x+2y-22=0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника і його третьої висоти.

11. Знайти координати центра кола радіуса 4, яке дотикається до прямих $3x+4y-2=0,\ 4x+3y-5=0$.

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і перетинає прямі $x-y+3=0,\ x+y-5=0$ у точках A і B так, що M_0 середина відрізка AB.

ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінія другого порядку — це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+a_1x+a_2y+a_0=0,$$

де $a_{11},a_{22},a_{12},a_1,a_2,a_0$ — дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a_{11},a_{22},a_{12} відмінне від нуля. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Лінії другого порядку називають також конічними перетинами через те, що їх можна дістати як лінії перетину кругового конуса з площиною (рис.19).

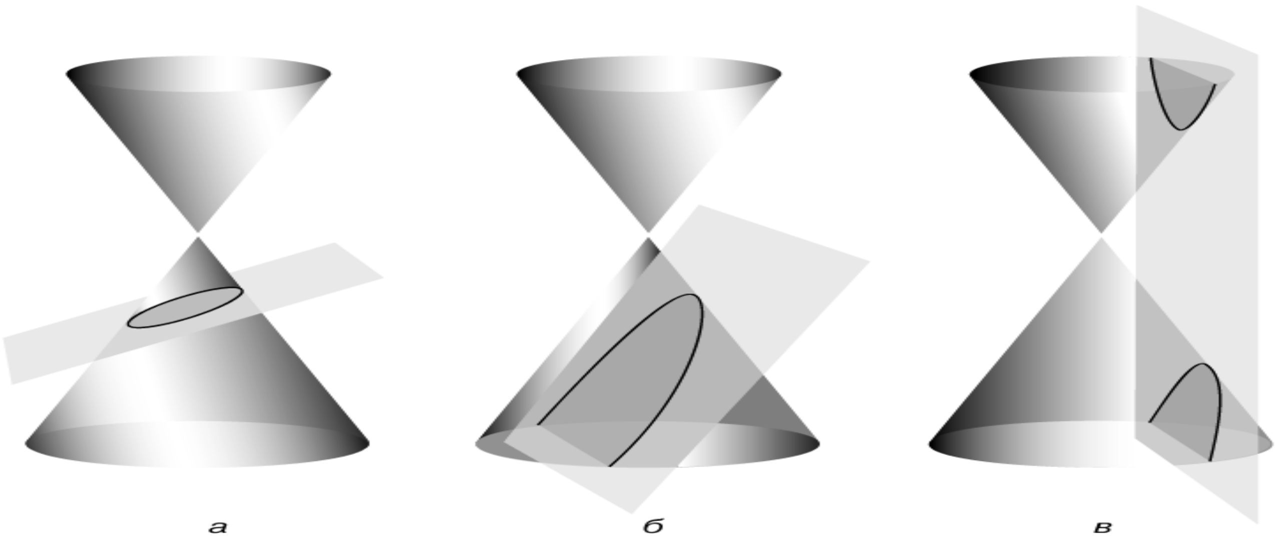


Рис.19. Конічні перетини, як результат перетину площиною конуса. (а) – еліпс, (б) – парабола, (в) – гіпербола.

Еліпсом *(гр. недолік*) називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок F_1, F_2 цієї площини, які називаються ***фокусами***, є величина стала і більша від відстаней між фокусами (рис. 20). Ще еліпс визначається як лінія перетину площини, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярної до осі конуса і яка не проходить через його вершину.

Назву “еліпс” ввів *Аполоній Пергський (біля 200 р. до н.е)*, який розглядав еліпс як один з конічних перетинів. В прямокутній системі координат *Oxy* канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0).$$

Де $F_1F_2=2c$ - фокальна відстань. $2a$, $2b$ - називаються відповідно великою та малою осями еліпса. При цьому $c^2=a^2-b^2$.

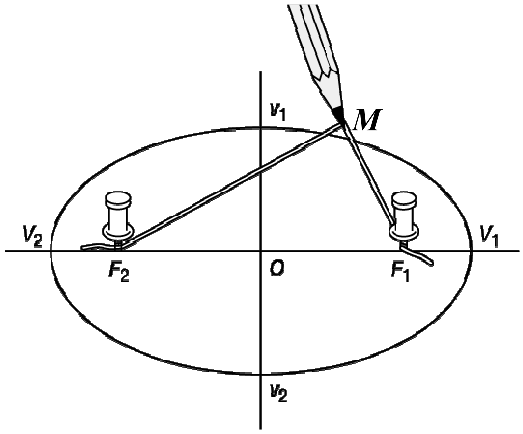


Рис.20. *Побудова еліпса*

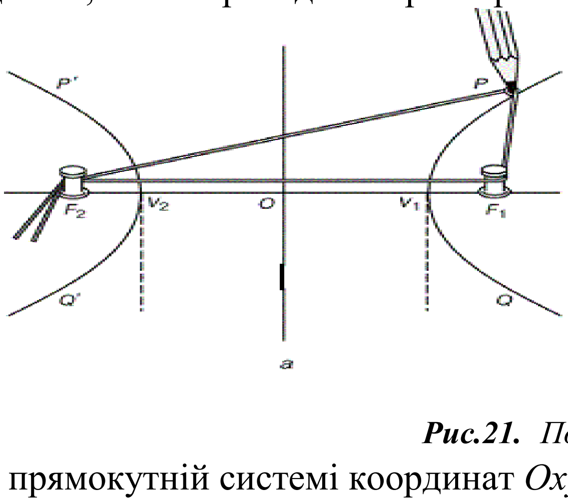
Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається ***ексцентриситетом еліпса*** і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі $\varepsilon=c/a, \varepsilon<1$. Точки перетину еліпса з осями координат — V_1, V_2 називаються ***вершинами еліпса***. Відстані $F_1M=r_1$, $F_2M=r_2$ називають ***фокальними радіусами точки М***. Очевидно, що $r_1+r_2=2a$. Прямі $x=\pm a/\varepsilon$ — ***директрисами еліпса***.

Властивість директрис еліпса: відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто $r_1/d_1=r_2/d_2=\varepsilon$.

Для будь-якої фіксованої точки еліпса $M(x_1,y_1)$ рівняння дотичної до еліпса у цій точці має вигляд: $xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$. Площа еліпса $S=\pi ab$.

Примітка*: Згідно з законами німецького астронома Іоганна Кеплера, відкритими на початку XVII століття, як узагальнення даних спостережень Тихо Браге, планети в сонячній системі рухаються по еліпсам, у одному з фокусів якого знаходиться сонце.*

Гіперболою називають множину всіх точок площини,абсолютна величина рвзниці відстаней яких від двох даних точок F_1, F_2 цієї площини, які називаються ***фокусами***, є величина стала і менша ніж відстань між фокусами (рис 21, а). Назву “гіпербола” ввів *Аполоній Пергський*, який розглядав гіперболу як один з конічних перетинів. ***Гіпербола*** *(гр. перебільшення, надлишок)* — лінія перетину кругового конусу площиною, яка не проходить через вершину конусу, не є паралельною двом твірним.



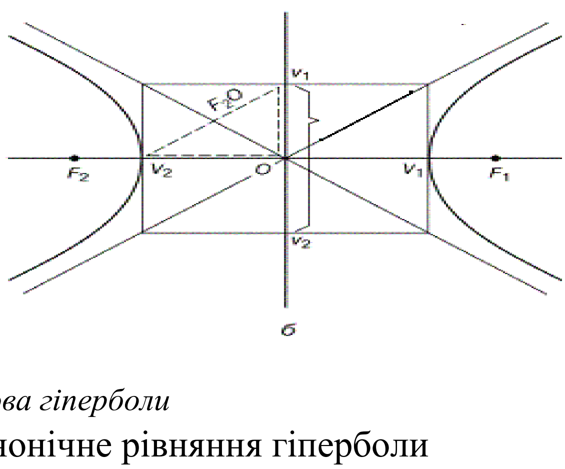


Рис.21. *Побудова гіперболи*

В прямокутній системі координат *Oxy* канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рівняння $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ також визначає гіперболу, яка називається ***спряженою*** до канонічної.

Гіпербола складається з двох гілок (лівої та правої) і має дві ***асимптоти*** $y=\pm(b/a)x$. Осі симетрії називають осями гіперболи, а точка перетину осей — її центром. Фокальна відстань $F_1F_2=2c$ і $c^2=a^2+b^2$.

Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках $V_1(a,0)$ *та* $V_2(-a,0)$, які називають ***вершинами гіперболи***. Ця вісь називається дійсною віссю гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою, — уявною віссю. ***Ексцентриситет*** гіперболи, який характеризує її форму $\varepsilon=c/a>1$.

Директрисами гіперболи є прямі, паралельні осі Oy $x=\pm a/\varepsilon$. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що і директриси еліпса.

Для будь-якої фіксованої точки гіперболи $M(x_1,y_1)$ рівняння дотичної до неї у цій точці має вигляд: $xx_1/a^2-yy_1/b^2=1$.

Парабола — це геометричне місце точок площини, які рівновіддалені від даної незмінної точки ***(фокуса)*** і даної незмінної прямої ***(директриси)*** (рис. 22). Параболу можна отримати як лінію перетину кругового конуса площиною, яка не проходить через вершину конуса і є паралельною двом твірним. В прямокутній системі координат Oxy канонічне рівняння параболи

$$y^2=2px,\ p>0.$$

Число p називаютьпараметром параболи. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається вершиною параболи. Фокус має координати *F(p/2,0)*, а директриса - рівняння $y = -p/2$. Для довільної точки $M_1(x_1;y_1)$, що належить параболі, рівняння дотичної до параболи у цій точці має вигляд: $yy_1=p(x+x_1)$.

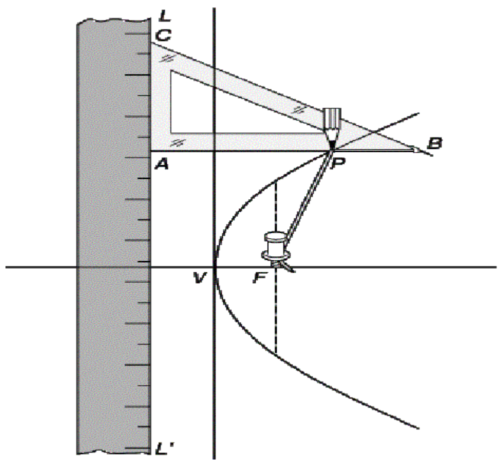


Рис.22. *Побудова параболи*

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Намалювати коло а) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$, б) $x^2-2x+y^2-4y=0$.
2. Скласти рівняння кола, яке дотикається до прямих $3x-2y-1=0$ і $3x-2y-5=0$, і центр якого лежить на прямій $5x-4y-5=0$.
3. Скласти рівняння хорди кола $x^2+y^2=16$, яка ділиться точкою $M(1,3)$ пополам.
4. Скласти ріняння кола, яке проходить через точки $A(5,4)$, $B(-2,5)$, $C(-3,4)$.
5. Для еліпса $4x^2+9y^2=36$ знайти 1) півосі, 2) фокуси, 3) ексценриситет, 4) рівняння директрис.

6. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо його малу піввісь видно з центра під прямим кутом.

7. Знайти площу квадрата, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$.

8. Для гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ знайти 1) півосі, 2) фокуси, 3) ексценриситет, 4) рівняння асимптот, 5) рівняння директис.

9. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $2x^2-y^2=16$, які паралельні прямій $6x+3y+7=0$, і обчислити відстань між ними.

10. Намалювати параболу $y^2=4x$, її фокус і директрису.

11. Визначити довжини осі, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144$.

12. На прямій $x+5=0$ визначити точку, що рівновіддалена від лівого фокусу та верхньої вершини еліпса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

13. Задано гіперболу $x^2-y^2=8$. Знайти еліпс, що проходить через точку $M(4;6)$ і фокуси якого співпадають з фокусами гіперболи.

14. Знайти фокальні радіус - вектори гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ у точках її перетину з колом $x^2+y^2=91$.

15. На параболі $y^2=8x$ знайти точку, відстань якої від директриси параболи дорівнює 4 одиниці.

16. Визначити довжину хорди параболи $y^2=2px$, яка проходить через фокус параболи перпендикулярно до її осі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо *а*) його півосі 1 і 2, *б*) відстань між фокусами 8, а мала піввісь 3, *в*) мала піввісь 10, а ексцентриситет 0,8.
2. Знайти точки перетину прямої $2x-y-3=0$ і еліпса $x^2+9y^2=13$.
3. Намалювати еліпс $4x^2+9y^2-4x+12y=13$.
4. Визначити взаємне розміщення еліпса $x^2+3y^2=1$ і прямої $y=x+b$ в залежності від параметра *b*.
5. Меридіан земної кулі має форму еліпса. Знайти його ексцентриситет, якщо відношення осей 299/300.
6. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між її асимптотами 30^o.
7. Скласти рівняння прямої, яка дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ у точці $M(-3,2)$.
8. Для параболи $y=x^2+3$ знайти фокус і директрису.
9. Визначити тип і намалювати лінії $x+2-\sqrt{y-1}=0$, $x-\sqrt{2y^2-1}=0$.
10. Арка має форму параболи. Визначити параметр параболи, якщо висота арки 4, а її ширина 2.

11. Дано вершину параболи $V(2,3)$ і директрису $x+y+1=0$. Скласти рівняння параболи.
12. Знайти найкоротшу відстань між точками параболи $y^2=2x$ і прямої $x-2y+4=0$.
13. Скласти рівняння хорди кола $x^2+y^2=49$, яка у точці $A(1;2)$ поділяється навпіл.

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Площина — одне з основних понять геометрії. Рівняння площини вперше зустрічається у *А. Клеро* (1731). Рівняня площини у відрізках вперше з'являється у *Г.Ламе* (1816-1818), а нормальне рівняння ввів *О.Гессе* (1861).

Площина – алгебраїчна поверхня першого порядку. У декартовій системі координат площина може бути задана рівняням 1-го степеня. Вектор (не рівний нуль-вектору), перпендикулярний до даної площини, називається її нормальным вектором. Рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де *A, B, C, D* сталі, причому *A, B, C* одночасно не дорівнюють 0, визначає площину, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та має вектор нормалі $\vec{n}(A,B,C)$ (рис. 23). Якщо розкрити дужки та позначити $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, то рівняння набуває вигляду:

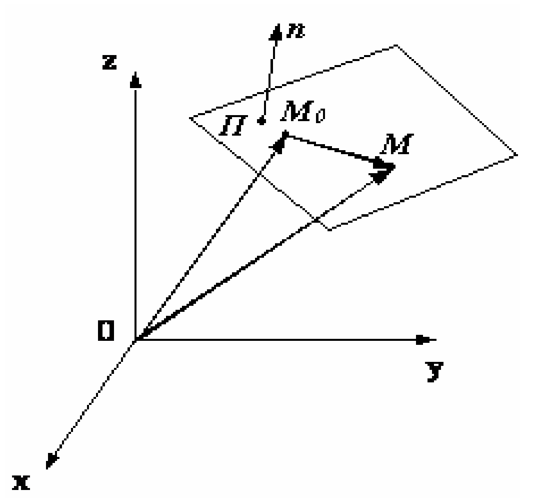


Рис.23. *Площина, що проходить через задану точку з заданим вектором нормалі*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Це рівняння називається ***загальним рівнянням*** площини.

Рівняння $x/a+y/b+z/c=1$ визначає площину, яка перетинає осі координат у точках a,b,c. Дане рівняння називається ***рівнянням площини "у відрізках"***.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно до двох векторів $\vec{u}_1(n_1,m_1,l_1)$, $\vec{u}_2(n_2,m_2,l_2)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ n_1 & m_1 & l_1 \\ n_2 & m_2 & l_2 \end{vmatrix}=0.$$

Рівняння $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

де $p \ge 0$ і вектор $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ має одиничну довжину — $|\vec{n}| = 1$, називають ***нормальним рівнянням*** площини.
Для того, щоб звести загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до нормального виду, його потрібно домножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причому знак μ вибирається протилежним до знака D.

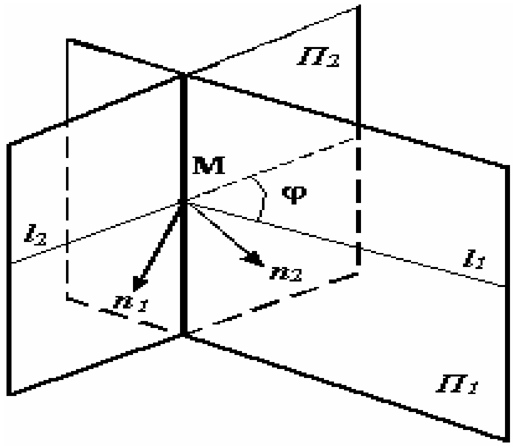


Рис. 24. *Кут між площинами*

Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини, яка задана нормальним рівнянням, називають число

$$\delta(M_0) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини- $d(M_0) = |\delta(M_0)|$. Звідки, ***відстань від точки*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$d(M_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Нехай дві площини задані рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. ***Кут*** φ ***між площинами*** (рис. 24) дорівнює куту між векторами нормалей до площин $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$, тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \text{ або } \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова ***перпендикулярності двох площин***: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0$ або $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Умова ***паралельності двох площин***: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ або $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$.

Якщо $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ рівняння двох площин, які перетинаються по прямій l, то рівняння

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

має назву **рівняння в'язки площин.** Для кожної пари чисел λ і μ це рівняння визначає площину, яка також проходить через пряму l.

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Побудувати площину 1) $x + y + 2z = 2$, 2) $z = 1$, 3) $x + y = 1$.
2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(1,2,3)$ і є
   (a) паралельною до площини $2x - 3y + z + 2 = 0$;

(b) перпендикулярною до вектора $\vec{N}(7,3,0)$;

(c) паралельною до векторів $\vec{n}_1(2,5,1)$, $\vec{n}_2(0,-1,1)$.

3. Знайти кут між площинами $3x+y-2z+2=0$ і $x+2y-5=0$.
4. Обчислити відхилення та відстань від точки $A(3,2,1)$ до площини $x-2y+2z-5=0$.
5. Скласти рівняння площин, які ділять пополам двогранні кути між площинами $3x-y+7z-4=0$ і $5x+3y-5z+2=0$.
6. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,2,3)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.
7. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(0,1,-1)$, $M_3(2,1,1)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Визначити відрізки, які відсікає на координатних віссях площина $2x+3y-5z+30=0$.
2. При яких m і n площини $nx+y-2z+1=0$ і $x+2y-mz-3=0$ будуть 1) паралельні, 2) перпендикулярні.
3. Знайти кут між площинами $6x+2y-4z+15=0,$ і $9x+3y-6z-4=0$.
4. Знайти відстань від точки $M\left(2,0,-0.5\right)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.
5. Знайти кут між площиною $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z-5=0$ та площиною Oyz.
6. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних $A(1,4,-1)$ і $B(3,-2,5)$.
7. На площину $5x-y+3z+12=0$ з початку координат опущено перпендикуляр. Визначити його довжину, координати основи перендикуляра та кути, які він утворює з віссями координат.
8. Знайти відстань між площинами $11x+2y-10z-3=0$ і $22x+4y-20z+5=0$.
9. Визначити, при яких значеннях a і b площини $3x+y-z-1=0,$ $x+3y-z+b=0,$ $x+y+az+4=0$

   a) мають одну спільну точку;

   b) проходять через одну пряму;

   c) перетинаються по трьом різним паралельним прямим.
10. Скласти рівняння площини, яка ділить навпіл той кут між площинами $x+3y-2z-4=0$, $3x+2y-z-2=0$, у якому лежить точка $A(1,1,1)$.
11. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;1;-2)$ і $B(-7;-2;1)$ і паралельна осі Oy
12. Скласти рівняння площини, яка знаходиться на відстані 5 одиниць від площини $2x-2y-z-1=0$.
13. Знайти точку симетричну до $M(4,5,9)$ відносно площини $x+2y+3z-13=0$.
14. Знайти площину, що належить в'язці прямих $2x-y+4z-6+\mu(3x+2y+6z+5)=0$ і є паралельною до однієї із координатних площин.

ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Пряму у просторі можна задавати, як лінію перетину двох площин.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

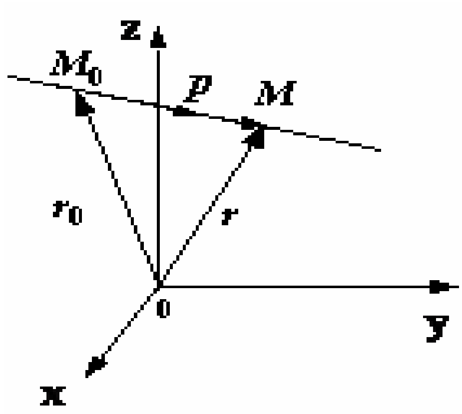


Рис. 24. Векторне рівняння прямої

Ненульовий вектор, що лежить на прямій (або паралельний їй) називається напрямним вектором. Нехай у просторі у прямокутній системі кординат задано пряму точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та напрямним вектором $\vec{p} = (k, l, m)$. Позначимо через $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}_0$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ радіус вектори точок M_0 та M. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{MM_0}$ колінеарний $\vec{p}$, тобто $\overrightarrow{MM_0} = t\vec{p}$ для деякого t. З рисунка 24 видно, що $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}$ - ***рівняння прямої у векторній формі***.

Від цього векторного співвідношення перейдемо до співвідношення координат $\vec{r} = (x, y, z), \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $t\vec{p} = (tk, tl, tm)$, маємо

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$$ - ***параметричне рівняння прямої у просторі***.

Якщо тепер виразити t: $t = \dfrac{x - x_0}{k}, \quad t = \dfrac{y - y_0}{l}, \quad t = \dfrac{z - z_0}{m}.$

Тоді рівняння прямої запишеться у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$$ — ***канонічні рівняння прямої у просторі***.

Кут між площиною та прямою (рис. 25) знаходиться за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Ak + Bl + Cm|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}}.$$

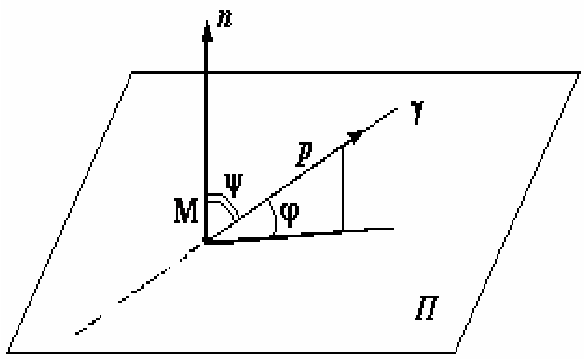


Рис. 25. Кут між прямою та площиною

Умова паралельності прямої та площини має вигляд: $Ak + Bl + Cm = 0,$ а умова перпендикулярності $\frac{A}{k}=\frac{B}{l}=\frac{C}{m}$.

Нехай прямі l_1 *та* l_2 задано рівняннями $\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1}$,

$\frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}$. ***Кут між*** цими ***прямими*** дорівнює куту між їхніми напрямними векторами. Тоді формула для кута має вигляд

$$\cos\varphi=\frac{k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{k_2^2+l_2^2+m_2^2}}.$$

Умова ***паралельності двох прямих у просторі*** має вигляд $k_1/k_2=l_1/l_2=m_1/m_2$,

а ***умова перпендикулярності двох прямих у просторі*** $k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2=0$.

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить

   a) через точки $A(1,2,3)$ і $B(3,0,2)$;
   b) через точку $C(-1,5,2)$ і має напрямний вектор $\vec{u}=(7,4,0)$;
   c) через точку $D(5,7,4)$ паралельно до прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{3}$;
   d) через точку $E(0,-2,5)$ і є перпендикулярною до площини $2x+3y-z+4=0$.

2. Записати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x+2y-2z-3 = 0, \\ 3x-y+z+2 = 0. \end{cases}$

3. Знайти точку перетину прямої $x+3=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{2}$ і площини $3x+y+2z-4=0$.

4. Знайти кут між прямими $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{5}$ і $\begin{cases} x+y-3 = 0, \\ 3x-y+z-5 = 0. \end{cases}$

5. Знайти точку перетину прямої та площини
   a) . $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;
   b) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;\ 2;\ -3)$ паралельно до прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ та $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

7. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{-1}$.
8. Знайти пряму, яка перетинається з прямими $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ і $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{1}$, та є паралельною до прямої $\frac{x+13}{6}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{5}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Записати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 3x-y-2 &= 0, \\ 2x-3y+2z+1 &= 0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння прямих перетину площини $x+3y+2z-6=0$ з координатними площинами.
3. На прямій $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ знайти точку, яка знаходиться на однаковій відстані від площин $x+3y-z+6=0$ і $-3x-y+z+1=0$.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1,2,3)$ і пряму $\begin{cases} 3x+2y-z+1 &= 0, \\ 2x+y+z-3 &= 0. \end{cases}$
5. Знайти відстань від точки $A(1,1,-1)$ до прямої $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$.
6. Знайти проекцію точки $A(5,-2,4)$ на площину $2x-y+z-3=0$.
7. Знайти проекцію точки $M(-2,5,1)$ на пряму $\begin{cases} 2x+y-z+2 &= 0, \\ x-y-4z-24 &= 0. \end{cases}$
8. Скласти рівняння проекції прямої $\begin{cases} 3x-y+2z-1 &= 0, \\ 2x+y-z-2 &= 0 \end{cases}$

на площину $x+4y-2z=0$.

9. Знайти відстань між двома прямими

$$1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{3} \quad \text{і} \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+6}{3};$$

$$2)\ \frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=z-5 \quad \text{і} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}.$$

10. Скласти рівняння прямої, симетричної до прямої $\frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+5}{-2}$, відносно площини $2x-2y-z-5=0$.
11. Написати рівняння медіани, висоти і бісектриси трикутника ABC, опущених з вершини A на сторону BC, якщо $A(1,0,1)$, $B(3,1,2)$, $C(-4,2,5)$.
12. Точка M рухається у просторі із швидкістю $v=6$ (од./сек.) у напрямку $\vec{u}(3,2,1)$. Скласти рівняння руху точки $M=M(t)$, де t час, якщо у початковий момент $t_0=0$ вона була у точці $A(2,-1,4)$. Знайти положення точки у момент $t_1=10$ сек.

РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхня другого порядку — це множина точок простору, координати яких задовольняють рівняння виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0$ — дійсні числа, причому хоча б одне з чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ відмінне від нуля.

Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром сфери. У декартовій прямокутній системі координат сфера, яка має центр $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та радіус R, визначається рівнянням

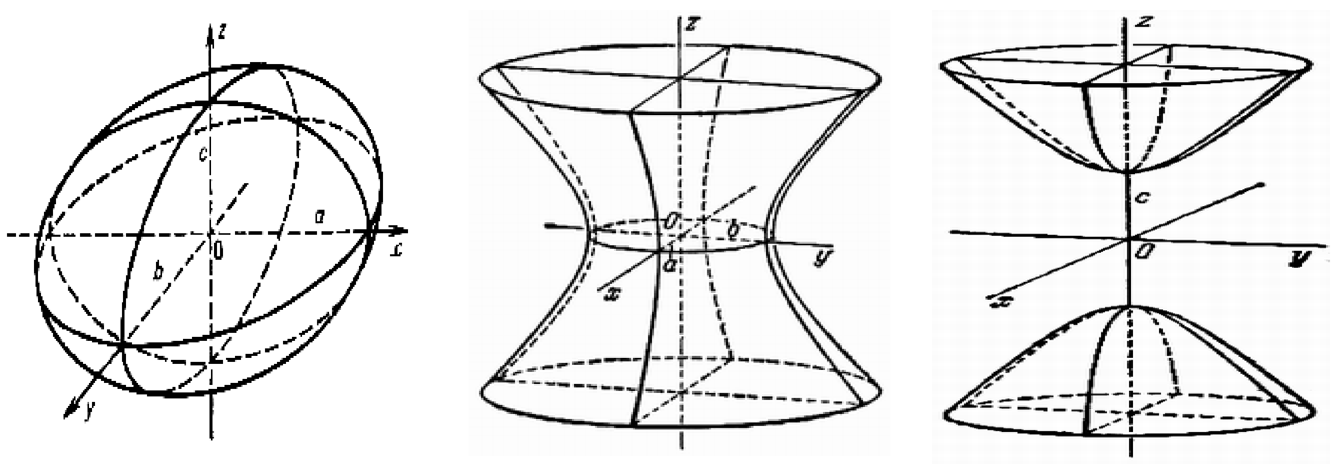
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Сфера з радіусом R в точці $O(0,0,0)$ має рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Еліпсоїд *(рис.26,А)* — замкнена центральна поверхня другого порядку. Канонічне рівняння еліпсоїда має вигляд: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Однопорожнинним гіперболоїдом *(рис.26,Б)* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Двопорожнинним гіперболоїдом *(рис.26,В)* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат має вигляд $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



А *Б* **В**

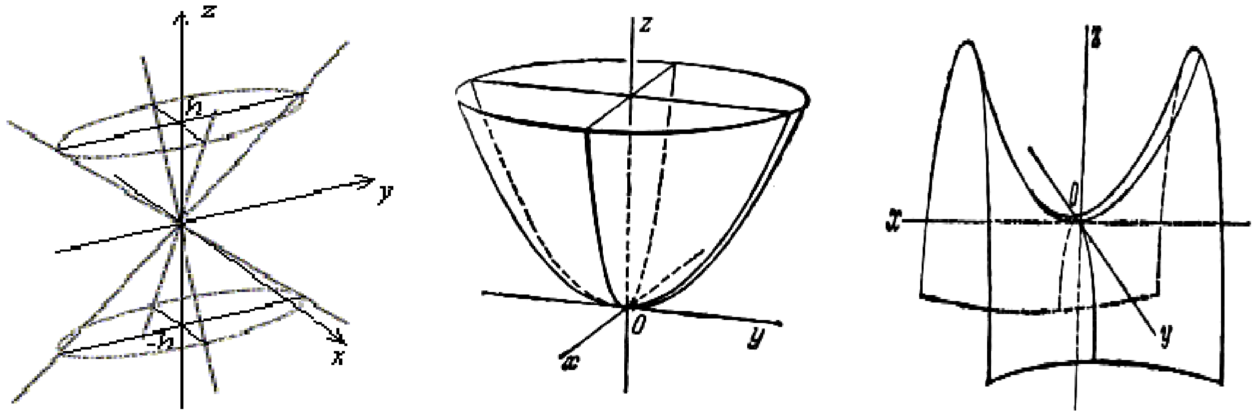
Рис. 26 . Поверхні другого порядку

Конусом другого поряку (рис.27,А) називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

Взагалі, конічною поверхнею називають поверхню, що описується прямою (твірною), яка рухається по деякій кривій (напрямній) і проходить через деяку фіксовану точку (вершину).

Еліптичним параболоїдом *(рис. 27,Б)* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат має вигляд $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

Гіперболічним параболоїдом *(рис.27,В)* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат має вигляд $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$



А **Б** **В**

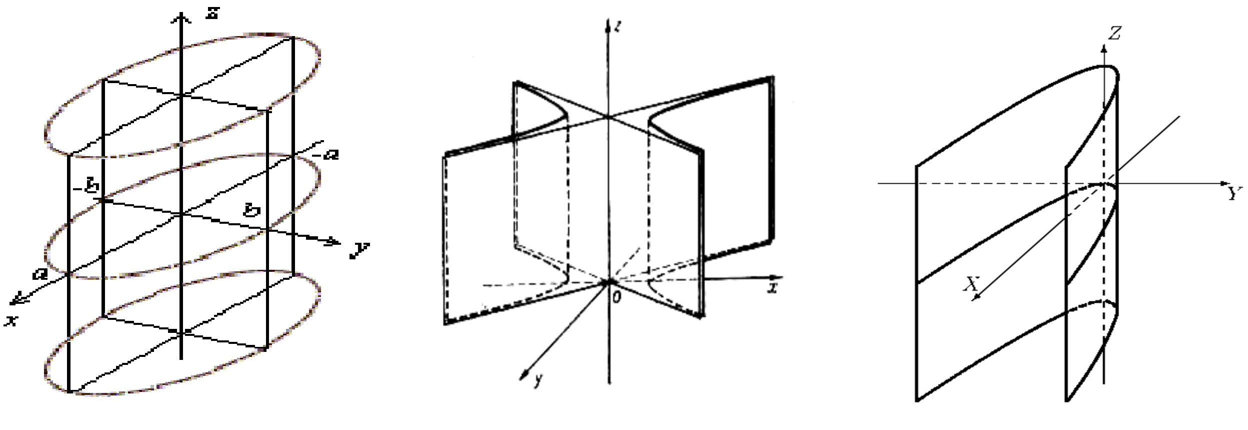
Рис. 27 . Поверхні другого порядку

Циліндричною поверхнею називають поверхню, яка задана прямою лінією, що залишається паралельною деякому заданому напрямку і рухається вздовж заданої лінії L, що називається напрямною лінією.

Еліптичний циліндр (рис.28,А) — *циліндрична поверхня, напрямна лінія якої — еліпс. Рівняння* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Гіперболічний циліндр (рис.28,Б) — *циліндрична поверхня, напрямна лінія якої — гіпербола. Рівняння* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Параболічний циліндр (рис.28, В) — *циліндрична поверхня, напрямна лінія якої — парабола. Рівняння* $y^2=2px$.



А **Б** **В**

Рис. 28 . Поверхні другого порядку

АУДИТОРНІ ЗАВДАННЯ

1. Дослідити перерізи поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ площинами, паралельними до координатних площин.
2. Зобразити лінії перетину поверхні $x^2+y^2-z^2+2xy+4z-5=0$ з координатними площинами.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі $0z$ кривої

   1) $z=y,\ x=0$, 2) $z=y^2,\ x=0$.
4. Побудувати методом перерізів (перерізів площинами) поверхні:

   1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, 3) $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}+z^2=1$, 4) $x^2+y^2=z$,

   5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$, 6) $x^2+y^2=9$.
5. Вказати взаємне розміщення еліпсоїда $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ і площини $x+2y-z-m=0$ в залежності від параметра m.
6. Скласти рівняння поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Oz прямої $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$.
7. Скласти рівняння циліндра, якщо його твірна $y=x^2$, а твірна паралельна напрямку $\vec{n}=(1,2,3)$.
8. Знайти точки перетину поверхні та прямої

   a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1,\quad \frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$

   b) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1,\quad x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$

   c) $4z=x^2-4y^2,\quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Знайти радіус сфери, що дотикається двох площин $3x+2y-6z-15=0, \quad 3x+2y-6z+55=0.$
2. Записати рівняння сфери, що проходить через точки $M_1(1,-2,-1), \quad M_2(-5,10,-1), \quad M_3(4,1,11), \quad M_4(-8,-2,2)$
3. Встановити, що площина $z+1=0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гіперболі. Знайти її півосі та вершини.
4. Визначити, при якому значенні m площина $x-2y-2z+m=0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$.
5. Знайти точки перетину поверхні та прямої
   а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1, \quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4};$ б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \quad \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}.$
6. Побудувати методом перерізів поверхню 1) $z^2=xy$, 2) $z=xy$.
7. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(2,-1,-2)$ і дотикається параболоїда $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z$.
8. Довести, що площина $2x-12y-z+16=0$ перетинає гіперболічний параболоїд $x^2-4y^2=2z$ по прямим. Скласти рівняння цих прямих.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. http://www.a-geometry.narod.ru/
2. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. —М.: “Наука”, 1970. — 356с.
3. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.: “Наука”, 1975.
4. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии.— М.: “Наука”, 1986. — 240с.
5. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1988. — 222с.
6. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Часть I. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. — Харьков: изд-во Харьковского университета им. А.М. Горького, 1973. — 204с.

Навчально-методичне видання

Методичні вказівки

до вивчення аналітичної геометрії

для студентів будівельних спеціальностей та

спеціальності "Менеджмент організацій"

Укладачі: Кириченко Анатолій Анатолійович

Терлецька Катерина Валеріївна

Філонов Юрій Петрович

Чепелева Алла Никифорівна