# ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

## 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

### Аналітична геометрія на площині

Аналітична геометрія – це розділ геометрії, в якому простіші геометричні образи (прямі, площини, лінії і поверхні другого порядку) досліджуються засобами алгебри на основі методу координат. Аналітична геометрія дає нам можливість описувати просторові образи або фігури за допомогою алгебраїчних співвідношень між координатами точок , які належать цим образам або фігурам.

Це необхідно для дослідження властивостей об'єктів розташованих в просторі, на площині через дослідження властивостей функцій – аналітичних образів цих об'єктів. Без таких співвідношень (функція – графічний образ) неможливо було б побудувати графік або зобразити рух на комп'ютері, спрогнозувати погоду по швидкості зміни показників барометра і т.д..

В аналітичній геометрії простішим геометричним образам ставляться у відповідність їх аналітичні еквіваленти – алгебраїчні рівняння. Вивчаючи і аналізуючи ці рівняння, одержують інформацію про властивості і про взаємне розташування цих геометричних об'єктів. В основі цих досліджень лежить метод координат.

### 1. Метод координат

Декартові прямокутна система координат вперше була введена Декартом в його праці "Геометрія" в 1637 році. Прямокутні системи координат бувають праві і ліві. Їх координатні осі відповідно $Ox, Oy, Oz$, точка перетину координатних осей називається початком координат, її позначають О. Початок координат точка О має координати $(0;0;0)$: $O(0;0;0)$ :

Над системою координат можна виконувати перетворення, які пов'язані з паралельним переносом координатних осей та їх поворотом. Якщо початок координат нової системи $OXY$ знаходиться в точці $(x_0, y_0)$ системи $Oxy$ і осі системи $OXY$ повернуто на кут $\varphi$ , то нові координати пов'язані зі старими такими співвідношеннями

$$\begin{cases} x = x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = y_0 + X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

## 2. Пряма лінія на площині

Пряма лінія описується рівнянням першого порядку, через це такі рівняння називаються лінійними. Існують такі основні типи рівнянь прямої лінії на площині:

- загальне рівняння прямої має вигляд: $Ax+By+C=0$, де коефіцієнти $A$, $B$ одночасно не дорівнюють нулеві. В залежності від значень $A,B,C$ , виконується дослідження загального рівняння прямої;
- рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд: $y=kx+b$, де $k$ - кутовий коефіцієнт і $k=\mathrm{tg}\varphi$, $\varphi$ – кут нахилу прямої до вісі $Ox$. Кутовий коефіцієнт також пов'язаний із значенням похідної від $y$ по $x$;
- рівняння прямої у відрізках, які вона відтинає на координатних осях, має вигляд: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, за умови, що $a\neq 0,\ b\neq 0$;
- рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку, має вигляд: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, де $x_0$, $y_0$ - координати точки $P\left(x_0,y_0\right)$, через яку проходить дана пряма; $k$ - кутовий коефіцієнт, за яким визначається напрям;
- рівняння прямої, яка проходить через дані дві точки $P\left(x_1,y_1\right)$, $Q\left(x_2,y_2\right)$, має вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;
- канонічне рівняння прямої має вигляд: $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$, де $x_1$, $y_1$ - координати точки $P\left(x_1,y_1\right)$, через яку проходить дана пряма ; $l$, $m$ - проекції направляючого вектора цієї прямої $\vec{q}\left\{l,m\right\}$;
- параметричне рівняння прямої має вигляд $\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt. \end{cases}$

  Якщо $t$ - час, то параметричне рівняння визначає закон руху матеріальної точки по прямій лінії з постійною швидкістю $V=\sqrt{l^2+m^2}$, тобто рух відбувається по інерції;
- нормальне рівняння прямої має вигляд $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, де $\cos\alpha,\sin\alpha$ - координати одиничного вектора нормалі цієї прямої $\vec{n}_0\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\}$.

## 3.Дві прямі на площині

Якщо дві прямі задано рівнянням з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, то взаємне розташування : кут між цими прямими, умови паралельності, перпендикулярності, визначаються формулами:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

де $\theta$ - кут між даними прямими,

- якщо дві прямі паралельні , то $k_1 = k_2$,
- якщо дві прямі перпендикулярні , то $k_1 k_2 = -1$.

*Зауваження.* Аналогічні формули можна одержати і для других типів рівнянь.

**4. Криві другого порядку**

Рівняння виду $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, якщо одночасно коефіцієнти $A, B, C$ не дорівнюють нулеві, називаються рівняннями другого степеня. Криві , які описуються рівняннями другого степеня , називаються кривими другого порядку. До кривих другого порядку відносяться: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Властивості кривих другого порядку можна вивчати через дослідження рівняння другого степеня. Ми будемо вивчати криві другого порядку , як геометричні місця точок, які задовольняють певній властивості. Виходячи із поняття геометричного місця точок, можна одержати рівняння:

- кола з центром в точці $O(a;b)$ і радіусом $r$:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2;$$

- еліпса з центром в початку координат

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

- гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- параболи $y^2 = 2px$.

## Аналітична геометрія в просторі.

Декартова прямокутна система координат в просторі – це три взаємно перпендикулярні вісі : $Ox$, $Oy$ і $Oz$.

Рівняння площини.

Загальне рівняння площини має вигляд: $Ax + By + Cz + D = 0$, де $A, B, C$ не дорівнюють нулеві одночасно. В залежності від значень $A, B, C, D$ виконується дослідження загального рівняння площини. Геометрично коефіцієнти $A, B, C$ є проекції вектора $\vec{n}\{A, B, C\}$, який перпендикулярний даній площині.

Рівняння площини у відрізках має вигляд :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

До цього виду рівняння можна привести загальне рівняння площини за допомогою нескладних перетворень.

Рівняння площини, що проходить через дану точку_$M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Рівняння площини, що проходить через три різні точки, які не лежать на одній прямій. Якщо точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежать на одній прямій, то рівняння площини, яка проходить через дані точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальне рівняння площини має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - координати одиничного вектора, перпендикулярного даній площині $\vec{n}_0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ визначається за формулою:

$$d = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right|.$$

## 5. Пряма лінія в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

де $x_1, y_1, z_1$ - координати точки, яка належить даній прямій: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а $l,\ m,\ n$ - координати направляючого вектора цієї прямої $\vec{q}\{l, m, n\}$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві різні точки_$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Параметричне рівняння прямої_має вигляд

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt. \end{cases}$$

Рівняння цього типу можуть бути отримані із канонічного рівняння.

## 6. Пряма , як перетин двох площин

Пряма може бути задана як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

які перетинаються по цій прямій.

Існує алгоритм переходу від рівняння прямої, як перетину двох площин, до канонічного рівняння прямої.

## 7. Пряма і площина в просторі

Умова належності прямої $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ площині $Ax + By + Cz + D$ виражається рівностями

$$\left[\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0. \end{array}\right.$$

Умова належності двох прямих

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

одній прямій виражається рівністю

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут $\varphi$ між прямою $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини виражається рівністю

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n},$$

а умова паралельності виражається рівністю $Al + Bm + Cn = 0$.

## 8. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок , координати яких задовольняють рівняння другого степеня

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Kyz + Mx + Ly + Nz + F = 0.$$

Рівняння поверхні може і не містити всіх трьох змінних: $x, y, z$ .

***1. Сфера.*** Рівняння сфери має вигляд

$$\left(x-a\right)^2-\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2 ,$$

де $a, b, c$ - координати центра сфери, а $R$ - її радіус. Якщо центр сфери знаходиться в початку координат, то її рівняння має вигляд $x^2+y^2+z^2=R^2$.

***2. Циліндр.*** Циліндричною поверхнею, або циліндром, називається поверхня, що описується нескінченною прямою (твірною), яка рухається, залишаючись завжди паралельною даній прямій і перетинаючи дану криву (направляючу).

Ми будемо розглядати тільки такі циліндричні поверхні, у яких твірна паралельна одній із координатних осей, а направляюча є плоска крива, яка лежить в одній із координатних площин. Назва таких циліндричних поверхонь залежить від типу направляючої:

- прямий круговий циліндр, якщо направляюча лежить в площині $xOy$ визначається рівнянням $x^2+y^2=r^2$;
- еліптичний циліндр, направляюча якого лежить в площині $xOy$ , визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
- рівняння гіперболічного циліндра, направляюча якого лежить в площині $xOy$ , має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
- рівняння параболічного циліндра, направляюча якого лежить в площині $xOy$, має вигляд $y^2=2px$.

*Зауваження.* В рівняннях циліндричних поверхонь відсутня змінна, яка однойменна з тією координатною віссю, якій паралельна твірна циліндричної поверхні.

***3.Поверхні обертання.*** Рівняння поверхні обертання за відомим рівнянням лінії обертання можна одержати, користуючись правилом:

Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $L$, яка лежить в площині $yOz$ і обертається навколо вісі $Oy$, необхідно в рівнянні цієї лінії замінити $z$ на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ .

*Зауваження.* В залежності від того в якій координатній площині лежить лінія $L$ і навколо якої координатної вісі виконується обертання, при користуванні правилом необхідно притримуватись вимоги: координата , яка однойменна з віссю обертання, повинна залишатись без зміни.

**Приклад.** Коло $x^2+y^2=r^2$ обертається навколо вісі $Ox$. Знайти рівняння поверхні обертання (сфери).

*Розв'язання.* Щоб записати рівняння поверхні обертання, одержаної від обертання даного кола навколо вісі $Ox$ , необхідно в рівнянні кола змінну $x$, що відповідає вісі обертання, залишити без змін. Другу змінну $y$ і рівнянні кола замінити на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$, тоді рівняння поверхні обертання буде мати вигляд:

$$x^2+\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=r^2,$$

або $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Одержане рівняння є рівнянням сфери з центром в початку координат радіусом $r$.

### Питання для самоперевірки обізнаності з матеріалом модуля.

1. Як досліджуються властивості геометричних образів в аналітичній геометрії?
2. Що таке декартова прямокутна система координат на площині і в просторі? За допомогою яких координатних осей вони задаються? Що таке початок координат? Які бувають системи координат?
3. Які перетворення можна виконувати над системою координат? Які існують співвідношення між "старими" і "новими" координатами.
4. Який вигляд має загальне рівняння прямої? Який геометричний зміст мають коефіцієнти при невідомих?
5. Вкажіть на особливості в розташуванні прямих, відносно координатних осей, які задаються рівняннями: а) $2x+3y=0$; б) $x-5=0$; в) $3y+15=0$; г) $7x=0$; д) $9y=0$.
6. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом? Що таке кут нахилу прямої до вісі $Ox$?
7. Запишіть рівняння прямої у відрізках. Який геометричний зміст мають $a$ і $b$?
8. Як загальне рівняння прямої звести до рівняння прямої у відрізках?
9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в даному напрямку. Чим в даному рівнянні прямої задається її напрямок?
10. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки?
11. Запишіть канонічне рівняння прямої. Який геометричний зміст мають числа $l, m$.
12. Запишіть параметричне рівняння прямої. Який рух матеріальної точки описує це рівняння? Як канонічне рівняння прямої звести до параметричного вигляду?
13. Запишіть нормальне рівняння прямої. Який геометричний зміст мають числа $\cos\alpha, \sin\alpha, p$?
14. Як записуються умови паралельності і перпендикулярності двох прямих, якщо вони задані:

- загальними рівняннями;
- рівняннями з кутовими коефіцієнтами;
- канонічними рівняннями.

15. Запишіть загальний вид рівняння другого степеня відносно змінних $x$ і $y$. Які криві називаються кривими другого порядку? Які ви знаєте криві другого порядку?

16. Як визначається геометричне місце точок? Дайте визначення бісектриси кута, як геометричного місця точок.

17. Дайте визначення кола, як геометричного місця точок. Запишіть рівняння кола з центром в точці $O_1(2;-3)$ і радіусом рівним 5. Які ви знаєте лінії в колі?

18. Яка пряма називається дотичною до кола, а яка січною? Запишіть рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=25$ в точці $M(-3;4)$.

19. Дайте визначення еліпса, як геометричного місця точок. Запишіть канонічне рівняння еліпса. Як називаються величини, що входять в канонічне рівняння еліпса?

20. Що таке фокуси еліпса? Обчислити координати фокусів еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

21. Що характеризує ексцентриситет еліпса? Які числові значення може приймати ексцентриситет еліпса? Обчислити координати вершин і ексцентриситет еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

22. Запишіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точці $M_0(2;-3)$.

23. Дайте визначення гіперболи, як геометричного місця точок. Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Як називаються величини, що входять в канонічне рівняння гіперболи?

24. Дайте визначення асимптоти кривої, що має нескінченну гілку. Запишіть рівняння асимптот гіперболи: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

25. Що таке фокуси гіперболи? Обчисліть координати фокусів гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

26. Що характеризує ексцентриситет гіперболи? Які числові значення може приймати ексцентриситет гіперболи? Обчисліть координати вершин і ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

27. Записати рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точці $M_0(5;-4)$.

28. Дайте визначення параболи, як геометричного місця точок. Запишіть канонічне рівняння параболи. Як називаються величини, що входять в канонічне рівняння параболи?

29. Що таке фокус параболи? Обчисліть координати фокуса параболи $y^2=10x$.

30. Запишіть рівняння дотичної до параболи $y^2=6x$ в точці $M_0(6;-6)$.

31. Який вигляд має загальне рівняння площини? Який геометричний зміст мають коефіцієнти при невідомих?
32. Вкажіть на особливість в розташуванні площин відносно координатних осей, які задаються рівняннями: а) $3x-4y+5z=0$; б) $2y+4z-1=0$; в) $7x-4y=0$; г) $5z-10=0$; д) $7z=0$.
33. Запишіть рівняння площини у відрізках. Який геометричний зміст мають величини, що входять в це рівняння?
34. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-3;2)$.
35. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки, які не належать одній прямій?
36. Запишіть нормальне рівняння площини. Який геометричний зміст мають коефіцієнти при невідомих?
37. Наведіть загальне рівняння площини $10x+2y-11z+60=0$ до нормального вигляду.
38. Що таке відхилення точки від площини і відстань точки до площини? Обчисліть відстань точки $M_0(3;\ 1;-1)$ від площини $22x+4y-20z-45=0$.
39. Запишіть формулу обчислення кута між двома площинами. Якими співвідношеннями виражаються умови паралельності і перпендикулярності двох площин?
40. Запишіть канонічне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають величини, що входять в дане рівняння?
41. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, заданими канонічними рівняннями. Якими співвідношеннями виражаються умови паралельності і перпендикулярності двох прямих?
42. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через дві різні точки.
43. Запишіть параметричне рівняння прямої. Як з канонічного рівняння прямої одержати її параметричне?
44. Пряма як перетин двох площин. Приведіть до канонічного вигляду рівняння прямої:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$$

45. Запишіть умову належності прямої площині. В чому полягає її геометричний зміст?
46. Запишіть умову належності двох прямих одній площині. В чому полягає її геометричний зміст?
47. Як визначається кут між прямою і площиною?
48. Запишіть формулу обчислення кута між прямою і площиною. Якими співвідношеннями виражаються умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини?
49. Що ми називаємо поверхнею другого порядку?
50. Запишіть рівняння сфери з центром в точці $O(a;\ b;c)$ і радіусом $R$.
51. Яка поверхня називається циліндричною? Від чого залежить назва циліндричних поверхонь? Наведіть приклади циліндричних поверхонь.

52. Запишіть рівняння прямого кругового циліндра, еліптичного циліндра, гіперболічного циліндра, параболічного циліндра.
53. Сформулюйте правило, за яким за відомим рівнянням лінії обертання можна одержати рівняння поверхні обертання.
54. Запишіть рівняння еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда, конуса другого порядку.