МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Лінійна алгебра

Методичні вказівки
та самостійні завдання
з вищої математики

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ – 2024

УДК 511.14+512.643
ББК 22.13+22.14
Л

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 25 березня 2024 року.

Видається в авторській редакції

Лінійна алгебра: Методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики для студентів 1-го курсу всіх напрямків підготовки / Уклад.: Бондаренко Н.В., Божонок К.В. – К.: КНУБА, 2024. – 90 ст.

Містить методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики за темою «Лінійна алгебра».

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 193 «Геодезія та землеустрій».

Загальні положення

Алгебра матриць і систем лінійних рівнянь є одним з основних інструментів математики, що застосовується в багатьох прикладних задачах, де діють лінійні закономірності.

Методична розробка містить основні теоретичні відомості, приклади розв'язання основних задач та 30 варіантів вправ з лінійної алгебри, що охоплюють такі розділи: комплексні числа, визначники, дії з матрицями, ранг матриці, системи лінійних рівнянь, лінійні простори та лінійні оператори.

Навчальні завдання можуть бути використані як основа типового розрахунку з вищої математики, для самостійної роботи студентів, а також як задачі для контролю рівня засвоєння знань студентами з лінійної алгебри.

Розділ 1. Комплексні числа.

1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Комплексним числом називається вираз виду $z = a + bi$, де a і b − довільні дійсні числа, а i – деякий символ (так звана *уявна одиниця*) уявна одиниця, така що $i^2 = -1$.

Числа a та b називаються відповідно ***дійсною*** і ***уявною*** частинами комплексного числа $z = a + ib$ і позначаються, $a = \operatorname{Re} z \in \mathbf{R}$, $b = \operatorname{Im} z \in \mathbf{R}$.

Вираз $z = a + bi$ називають ***алгебраїчною формою*** комплексного числа. Комплексне число $x + 0i$ ототожнюють з дійсним числом x.

Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ ***рівні*** між собою тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не існує, тобто множина комплексних чисел **C**, на відміну від множини дійсних чисел **R**, не впорядкована.

Комплексне число $\bar{z} = a - bi$ називається ***спряженим*** до комплексного числа $z = a + bi$.

Операції над комплексними числами в алгебраїчній формі визначаються таким чином:

1) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

2) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;

3) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

4) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$, якщо $c + di \neq 0$.

Приклад 1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$\frac{(3 - 4i)(2 + i)}{3 - 2i} - i^3(4 - 3i).$$

Розв'язання.

$$\frac{(3-4i)(2+i)}{3-i}-i^3(4-3i)=\frac{6+3i-8i+4}{3-i}-(-i)(4-3i)=$$

$$=\frac{10-5i}{3-i}+i(4-3i)=\frac{(10-5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}+4i+3=$$

$$=\frac{30+10i-15i+5}{10}+4i+3=\frac{35-5i}{10}+3+4i=3,5-0,5i+3+4i=$$

$$=6,5+3,5i.$$

2. Геометричне зображення комплексних чисел

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Oxy. Оскільки комплексне число $z=a+bi$ можна розглядати як впорядковану пару дійсних чисел $(a;b)$, то його можна зобразити на площині Oxy точкою $M(a;b)$ або радіус-вектором $\overrightarrow{OM}=(a;b)$ (Рис. 1). Тобто поле комплексних чисел **C** природно ототожнюється з множиною точок площини Oxy. Площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають ***комплексною площиною***. Вісь абсцис називається ***дійсною віссю***, вісь ординат ***уявною віссю***.

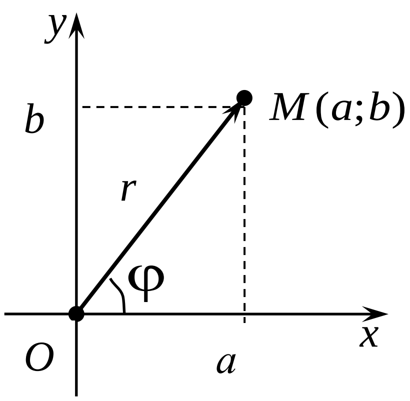


Рис. 1

Положення довільної точки M на площині також можна визначити за допомогою її полярних координат: відстані r (полярний радіус) від початку координат до точки M і кута φ між додатнім напрямком осі абсцис та радіус вектором $\overrightarrow{OM}$.

Полярні та декартові координати точки пов'язані співвідношеннями: $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi.$

Полярний радіус r називають ***модулем комплексного числа*** z і позначають $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}\geq 0$, а полярний кут φ

називають ***аргументом*** комплексного числа z. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ визначається однозначно з точністю до доданку $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

$Arg\ z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, де $\arg z$ – ***головне значення аргумента***, що належить проміжку завдовжки 2π (зазвичай $(-\pi;\pi]$, $[0;2\pi)$ або $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$). Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений, а модуль дорівнює нулю.

Аргумент та його головне значення можна знайти із системи

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Також, якщо $\arg z \in (-\pi;\pi]$, то

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b > 0, \\ arctg\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b < 0, \\ 0, & \text{якщо } a > 0, b = 0, \\ \pi, & \text{якщо } a < 0, b = 0. \end{cases}$$

Комплексне число $z = a + bi$ можна записати у вигляді

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Такий запис називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа z.

3. Дії з комплексними числами у тригонометричній формі

Для комплексних чисел у тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ маємо

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Показниковою формою комплексного числа $z = a + ib$ називається запис: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ − аргумент z. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ − формула Ейлера, що встановлює зв'язок між показниковою та тригонометричними функціями.

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для $n \in \mathbf{N}$ степінь комплексного числа обчислюється за ***формулою Муавра***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то корінь n-го степеня з комплексного числа $\sqrt[n]{z}$ має n значень, які обчислюються за формулою

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (1)$$

Приклад 2. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$(\sqrt{6}i - \sqrt{2})^{18}.$$

Розв'язання. Знайдемо тригонометричну форму комплексного числа $z = \sqrt{6}i - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$. Дійсна частина комплексного числа $a = -\sqrt{2}$, уявна частина $b = \sqrt{6}$. Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Комплексне число z лежить в II четверті координатної площини. Тому

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Звідси тригонометрична форма комплексного числа має вигляд $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. За формулою Муавра отримаємо

$$z^{18} = (2\sqrt{2})^{18}(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 18 + i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot 18) = 2^{27}(\cos 12\pi + i\sin 12\pi) = 2^{27}.$$

Приклад 3. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(5+2i)x-(3-i)y = 3+4i.$$

Розв’язання. Виконаємо наступні дії

$$(5+2i)x-(3-i)y = 3+4i,$$

$$5x+2xi-3y+3yi = 3+4i,$$

$$(5x-3y)+(2x+3y)i = 3+4i,$$

З означення рівності комплексних чисел маємо

$$\begin{cases} 5x-3y=3, \\ 2x+3y=4, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-3y=3, \\ 7x=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ 3y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=2/3. \end{cases}$$

Отже, дійсні розв’язки рівняння $x=1,\ \ y=2/3.$

Приклад 4. Знайти корені рівняння $5\sqrt{3}-5i-z^3=0$.

Розв’язання. Перетворимо рівняння $z^3 = 5\sqrt{3}-5i$. Щоб знайти значення z, потрібно знайти корені 3-го степеня з комплексного числа $w = 5\sqrt{3}-5i$. Для цього знайдемо тригонометричну форму числа w.

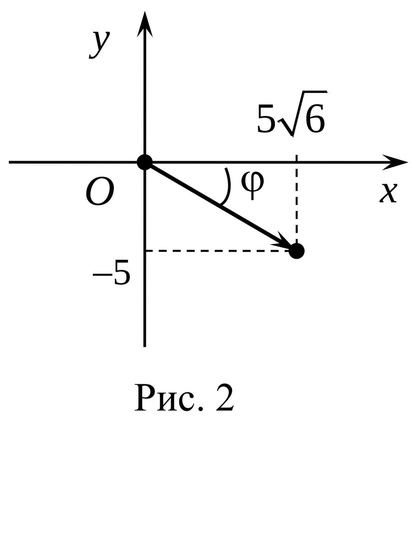


Рис. 2

Дійсна та уявна частини рівні $a = 5\sqrt{3}$, $b=-5$, тому

$$|w| = \sqrt{25\cdot 3+25} = 5\sqrt{4} = 10.$$

Комплексне число w знаходиться в IV четверті (рис. 2), тому $\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$.

За формулою (1) коренів з комплексних чисел маємо

$$\varepsilon_k = \sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Звідси,

$$\varepsilon_0 = \sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right) = \sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right),$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)\right),$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt[3]{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)\right) = \sqrt[3]{10}\cdot\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right).$$

4. Многочлени та їхні корені

Многочленом або ***поліномом*** n-го (де $n \in \mathbf{N}$) степеня над полем **К** називається вираз виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ − довільні числа з **К**, $a_n \neq 0$. Під полем **К** будемо розуміти одне з числових полів: **Q** − поле раціональних чисел, **R** − поле дійсних чисел, **C** − поле комплексних чисел. Множину всіх многочленів з коефіцієнтами з поля **К** від змінної x позначається $\mathbf{K}[x]$.

Натуральне число n називається ***степенем*** многочлена $f(x)$, (позначають $\deg f(x) = n$), $a_0, a_1, \ldots, a_n$ − ***коефіцієнтами*** многочлена, причому a_0 − ***вільний*** коефіцієнт, a_n − ***старший*** коефіцієнт.

Довільне ненульове число є многочленом нульового степеня. Многочлени нульового степеня називають ***константними***. Число нуль також є многочленом, степінь якого вважають невизначеним.

Многочлени першого степеня a_1x+a_0 називають *лінійними*. Многочлени другого степеня $a_2x^2+a_1x+a_0$ називають *квадратними*.

На множині всіх многочленів $\mathbf{K}[x]$ визначені операції додавання та множення многочленів.

Кажуть, що многочлен $g(x)\in\mathbf{K}[x]$ є ***дільником*** многочлена $f(x)\in\mathbf{K}[x]$, якщо існує такий многочлен $h(x)\in\mathbf{K}[x]$, що справедливою є рівність $f(x)=g(x)\cdot h(x)$. В такому разі ще говорять, що многочлен $f(x)$ ***ділиться*** на многочлен $g(x)$.

Теорема (Про ділення з залишком). Нехай $f(x)$ і $g(x)$ − довільні многочлени і $g(x)\neq 0$. Тоді існують, причому єдині многочлени $q(x)$, $r(x)$ такі, що:

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \text{ і } \deg r(x)<\deg g(x) \text{ або } r(x)\equiv 0.$$

Многочлен $r(x)$ називається *залишком* від ділення $f(x)$ на $g(x)$.

Наслідок 1 (Теорема Безу). Залишок від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $(x-c)$ дорівнює значенню $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x=c$.

Число $c\in\mathbf{K}$ називається ***коренем*** многочлена $f(x)\in\mathbf{K}[x]$, якщо $f(c)=0$.

Наслідок 1. Число $c\in\mathbf{K}$ є коренем многочлена $f(x)\in\mathbf{K}[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ ділиться на $(x-c)$:

$$f(x)=g(x)\cdot(x-c)$$

У такому разі $\deg g=\deg f-1$.

Одним з практичних методів знаходження частки $q(x)$ та остачі $r(x)$ є ділення многочленів в «стовпчик».

Приклад 5. Поділити многочлен $f(x)$ на $g(x)$ в стовпчик:

$$f(x)=2x^4-x^3+3x^2-5x+2, \quad g(x)=x^2-x-1.$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-x^3+3x^2-5x+2 & \underline{x^2-x-1} \\ \underline{2x^4-2x^3-2x^2} & 2x^2+x+6 \\ \qquad x^3+5x^2-5x+2 & \\ \qquad \underline{x^3-x^2-x} & \\ \qquad\qquad 6x^2-4x+2 & \\ \qquad\qquad \underline{6x^2-6x-6} & \\ \qquad\qquad\qquad 2x+8 & \end{array}$$

Відповідь: $q(x)=2x^2+x+6, \quad r(x)=2x+8,$

$$2x^4-x^3+3x^2-5x+2=(x^2-x-1)(2x^2+x+6)+2x+8.$$

Для ділення многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

на лінійний двочлен $x-c$ можна використовувати «**схему Горнера**».

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_n=a_n$	$b_{n-1}=$ $=b_n\cdot c+a_{n-1}$	$b_{n-2}=$ $=b_{n-1}\cdot c+a_{n-2}$	b_{n-3}		b_1	r

Отримаємо

$$q(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1, \text{ а } \quad f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r.$$

Теорема (Основна теорема алгебри). Кожен многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоча б один корінь в полі комплексних чисел.

Наслідок 1. Незвідними многочленами над полем **C** є многочлени першого степеня a_1x+a_0, $a_1,a_0\in\mathbf{C},\ a_1\neq 0$ і лише вони.

Наслідок 2. Довільний многочлен $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ степеня $n\geq 1$ над полем **C** можна розкласти в добуток n лінійних множників

$$f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdot\ldots\cdot(x-c_n),$$

де $c_1,\ldots,c_n$ − корені многочлена дійсні чи комлпксні, a_n − старший коефіцієнт. Отже, кожен многочлен $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ степеня $n\geq 1$ має n коренів, якщо кожний із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.

Якщо комплексне число $a+ib$ є коренем многочлена $f(x)$ степеня $n\geq 2$ з дійсними коефіцієнтами, то комплексно спряжене число $a-ib$ також є коренем цього многочлена тієї самої кратності.

Кожен многочлен $f(x)$ степеня $n\geq 1$ з *дійсними коефіцієнтами* розкладається єдиним чином (з точністю до порядку множників) на множники з *дійсними* коефіцієнтами першого та другого степеня відповідної кратності:

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}\ldots(x-c_t)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t},$$

причому $k_1+k_2+\ldots+k_l+2(s_1+\ldots+s_t)=n$.

В цьому розкладі кожен квадратний тричлен має від'ємний дискримінант і йому відповідає пара спряжених комплексних коренів.

Розглянемо многочлен з цілими коефіцієнтами

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Якщо раціональне число і нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то p є дільником вільного коефіцієнта a_0, а q − дільником старшого коефіцієнта a_n.

Якщо $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ − зведений многочлен, тобто $a_n=1$, то всі раціональні корені многочлена є цілими числами і знаходяться серед дільників вільного коефіцієнта a_0.

Приклад 6. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$.

Розв'язання. Многочлен $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ – зведений. Тому його раціональні корені знаходяться серед дільників вільного коефіцієнта $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Простим перебором дільників, знаходимо, що $f(1) = 0$. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочлен $x - 1$ за схемою Горнера

	1	1	2	4	-8
1	1	2	4	8	0

Звідси, $f(x) = (x-1)g_1(x)$, де $g_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$. Простим перебором дільників вільного коефіцієнта многочлена $g_1(x)$ знаходимо, що $g_1(-2) = 0$.

Поділимо многочлен $g_1(x)$ на двочлен $x + 2$ за схемою Горнера.

	1	2	4	8
-2	1	0	4	0

Звідси, $g_1(x) = (x+2)(x^2+4)$. Многочлен $x^2 + 4$ дійсних розв'язків не має. Його комплексні розв'язки мають вигляд $x_1 = 2i,\ x_2 = -2i$.

Над полем дійсних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4).$$

Над полем комплексних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-2i)(x+2i).$$

Розділ 2. Лінійна алгебра

1. Алгебра матриць

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел (m рядків, n стовпчиків)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

де $a_{ij} \in \mathbf{K}$, $i = 1,\dots,m$ і $j = 1,\dots,n$.

Тут **К** – будь-яке числове поле. Далі розглядатимемо матриці над полем дійсних чисел **R**.

Матриці позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$. Елементи матриці позначають a_{ij}, де перший індекс i вказує на номер рядка, а другий індекс j – на номер стовпчика, в яких розміщений цей елемент. Наприклад, елемент a_{23} знаходиться у другому рядку та в третьому стовпчику.

Короткий запис матриці: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Множину всіх матриць розміру $m \times n$ з коефіцієнтами з поля дійсних чисел **R** позначають $Mat_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Якщо $m = n$, то матриця (2) називається ***квадратною матрицею порядку*** n.

Операції над матрицями

1. ***Сумою матриць*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ однакового розміру називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$ така, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,\dots,m \ \text{ і } \ j = 1,\dots,n.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операція суми матриць різного розміру є невизначеною.

2. ***Добутком матриці*** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число $\lambda\in\mathbf{R}$ називається матриця $\lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Наприклад,

$$(-3)\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -9 & -3\\ 0 & -15\end{pmatrix}.$$

3. ***Добутком матриць*** $A=(a_{ij})_{m\times s}$ та $B=(b_{ij})_{s\times n}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}$ така, що

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,,\;\; i=1,...,m \text{ і } j=1,...,n\,.$$

Множення матриць виконують за правилом *«рядок на стовпчик»*. Для того щоб отримати елемент c_{ij} матриці $A\cdot B$ потрібно i-й рядок матриці A «накласти» на j-й стовпчик матриці B, відповідні елементи перемножити і додати отримані добутки.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 3\\ 2\cdot 2+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць визначений, якщо кількість стовпчиків s першої матриці дорівнює кількості рядків s другої матриці, інакше добуток матриць є невизначеним.

Множення матриць не є комутативною операцією, тобто, взагалі кажучи, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Дійсно, щоб обидва добутки матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$, і $B=(b_{ij})_{s\times t}$ були визначеними, має бути $n=s$ і $t=m$. Але навіть у такому разі, взагалі кажучи, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\end{pmatrix},\ \text{а}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}.$$

Добуток квадратних матриць однакового порядку визначений завжди. Проте і для квадратних матриць, взагалі кажучи, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ \text{а}\ \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що існують матриці, для яких рівність $A\cdot B=B\cdot A$ є справедливою. В цьому разі матриці A і B називають ***комутативними*** або ***переставними***. Наприклад, одинична матриця E є переставною з будь-якою квадратною матрицею відповідного порядку.

Транспонованою матрицею до матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Деякі види матриць мають свою власну назву через особливість розміщення елементів. ***Діагональною*** матрицею називається квадратна матриця $A=(a_{ij})_{n\times n}$, яка може мати ненульові елементи лише на головній діагоналі, тобто елементи a_{ii}, а всі інші елементи рівні нулю. Якщо всі елементи головної діагоналі $a_{ii}=1$ матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$, то матриця A називається ***одиничною*** матрицею E порядку n. ***Симетричною*** матрицею називається квадратна матриця $A=(a_{ij})_{n\times n}$, яка має властивість $a_{ij}=a_{ji}$. ***Антисиметричною*** матрицею називається квадратна матриця $A=(a_{ij})_{n\times n}$, у якої $a_{ij}=-a_{ji}$.

Приклад 7. Обчислити добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 3 \\ 2\cdot 2+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо многочлен від матриці $f(A) = A^3 - 2A^2 + 3E$, де E – одинична матриця порядку такого ж, як і матриця A.

Знайдемо матриці $A^2 = A \cdot A$ та $A^3 = A^2 \cdot A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -10 & 29 & 15 \\ 10 & -28 & -14 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -10 & 29 & 15 \\ 10 & -28 & -14 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \\ -6 & 14 & 9 \\ 6 & -12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Означення. ***Елементарними перетвореннями першого, другого, третього типу*** рядків (стовпчиків) матриці називаються:

1) перестановка двох рядків (стовпчиків);

2) множення деякого рядка (стовпчика) матриці на довільне ненульове число.

3) додавання до деякого рядка (стовпчика) матриці іншого рядка (стовпчика) помноженого на довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одна матриця отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень рядків чи стовпчиків. Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$.

Теорема 1 (Алгоритм Гаусса). Довільну ненульову матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$ елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків можна звести до «*трапецієподібного*» вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,r+1} & \cdots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_{2,r+1} & \iddots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{r,r+1} & \dots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де $0 < r \le \min(m, n)$.

Процес зведення матриці A до трапецієподібного вигляду називається ***алгоритмом Гаусса.***

Наслідок 1. Якщо застосовувати елементарні перетворення лише рядків матриці, то довільну матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$ після прямого та оберненого ходу алгоритму Гаусса можна звести до **«*трапецієподібно-східцевої*»** матриці.

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} & 0 & a_{1n_1+2} & \dots & a_{1n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{a_{2,n_1+1}} & a_{2,n_1+2} & \dots & a_{2n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{a_{r,n_r+1}} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де підкреслені елементи $\underline{a_{11}}, \underline{a_{2,n_1+1}}, \dots, \underline{a_{r,n_r+1}}$ відмінні від нуля.

При цьому числа $n_1, n_2 - n_1, ..., n - n_r$ – довжини сходинок, що можуть мати значення від 1 до n. Якщо довжини всіх сходинок дорівнюють 1, то в разі $m = n$ отримуємо діагональну матрицю, а у разі $m > n$ така матриця матиме ще й нульові рядки. Та якщо довжини всіх сходинок, крім останньої, дорівнюють 1, то отримуємо матрицю виду (3), у якої $r < n$.

Наслідок 2. Довільну ненульову квадратну матрицю $A = (a_{ij})_{n \times n}$ елементарними перетвореннями рядків (стовпчиків) можна звести до верхньої трикутної матриці:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, t_{ij} \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Одним із застосувань зведення квадратних матриць до верхнього (нижнього) трикутного виду є знаходження обернених матриць.

Обернена матриця

Означення. Матриця B називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо

$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця такого ж порядку, як і матриця A.

Квадратна матриця, для якої існує обернена матриця, називається ***оборотною***.

Твердження 1. Оборотна матриця може мати тільки одну обернену матрицю.

Доведення. Нехай матриця A має дві обернені матриці B та C, тобто

$$A\cdot B = B\cdot A = E, \quad A\cdot C = C\cdot A = E.$$

Тоді

$$C = E\cdot C = (B\cdot A)\cdot C = B\cdot (A\cdot C) = B\cdot E = B. \qquad \blacksquare$$

Отже, для оборотної матриці A існує єдина обернена матриця, яку позначають A^{-1}. Для матриці A^{-1} маємо

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Означення. ***Елементарною матрицею*** називається квадратна матриця, яка одержуються з одиничної матриці за допомогою одного елементарного перетворення рядків (або стовпчиків). Маємо три типи елементарних матриць:

а) матриця E_{ij}, яка одержується з одиничної матриці E перестановкою i-го та j-го рядків

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

Матриця $E_{ij}A$ отримана з матриці A перестановкою i-го та j-го рядків.

б) матриця $E_i(\lambda)$, яка одержується з одиничної матриці E множенням i-го рядка на число $\lambda \neq 0$

$$
\begin{array}{cc}
E_i(\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 & \ddots & & & \\
0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\
 & & & \ddots & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} &
\end{array}
$$

Матриця $E_i(\lambda)A$ отримана з матриці A множенням i-го рядка матриці на λ.

в) матриця $E_{ij}(\lambda)$, яка одержується з одиничної E додаванням до i-го рядка j- го, помноженого на λ.

$$
\begin{array}{cc}
E_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 & \ddots & & & & & \\
0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\
 & & & \ddots & & & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}
$$

Матриця $E_{ij}(\lambda)A$ отримана з матриці A додаванням до i-го рядка матриці A її j-го рядка, помноженого на λ.

Елементарні матриці є оборотними матрицями. Множення матриці A на елементарну матрицю зліва виконує відповідне елементарне перетворення першого, другого чи третього типу рядків матриці A.

Теорема 2. Квадратна матриця є оборотною тоді і тільки тоді, коли елементарними перетвореннями рядків її можна привести до одиничної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай A – оборотна матриця. Застосуємо алгоритм Гаусса до оборотної матриці A і приведемо її елементарними перетвореннями рядків до вигляду (5). Якщо в отриманій східчастій матриці є принаймні одна сходинка довжини більшої за одиницю, то оскільки матриця квадратна, обов’язково буде нульовий рядок. Така матриця A не є оборотною, бо вона в добутку з будь-якою матрицею буде давати нульовий рядок. Отримали суперечність. Отже, в отриманій перетвореній квадратній матриці всі сходинки мають довжину 1, а, отже, нульові рядки відсутні. Завершуючи зворотний хід алгоритму Гаусса для матриці A, отримаємо одиничну матрицю E .

Достатність. Справедливий ланцюжок таких перетворень: матриця A зводиться елементарними перетвореннями до одиничної матриці $\Rightarrow$ існують елементарні матриці $C_1, C_2, ..., C_k$ такі, що $C_k \cdot C_{k-1} \cdot ... \cdot C_1 \cdot A = E \Rightarrow A = C_k^{-1} \cdot C_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot C_1^{-1} \Rightarrow A$ – оборотна, як добуток оборотних матриць. ■

Теорема 3 (Метод Гаусса знаходження оберненої матриці).

Якщо послідовність елементарних перетворень рядків, якими оборотна матриця A зводиться до одиничної матриці, в тому ж порядку застосувати до рядків одиничної матриці, то в результаті дістанемо обернену матрицю.

Твердження теореми можна схематично подати таким чином:

$$(A|E) \sim ... \sim (E \,|\, A^{-1}).$$

Доведення. Звести матрицю A елементарними перетвореннями рядків до одиничної матриці – це те ж саме, що помножити зліва матрицю A на відповідні цим перетворенням елементарні матриці, тобто

$$C_k \cdot C_{k-1} \cdot ... \cdot C_1 \cdot A = E,$$

де $C_1, C_2, ..., C_k$ – елементарні матриці.

Матриця $C = C_k \cdot C_{k-1} \cdot ... \cdot C_1$ є оборотною, як добуток оборотних матриць. З єдності оберненої матриці випливає, що обернена до A матриця $A^{-1} = C$.

Якщо застосувати ту ж саму послідовність елементарних перетворень до одиничної матриці E, або що те ж саме помножити зліва матрицю E на елементарні матриці $C_1, ..., C_{k-1}, C_k$, отримаємо

$$C_k \cdot C_{k-1} \cdot ... \cdot C_1 \cdot E = C = A^{-1},$$

отримаємо обернену матрицю A^{-1}. ■

Приклад 9. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо поряд з матрицею A одиничну матрицю третього порядку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

До першого рядка додамо другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший рядок, помножений на 3, а до третього рядка додамо перший рядок, помножений на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Ми виконали прямий хід алгоритму Гаусса. Далі до другого рядка додамо третій рядок, помножений на (−3), а до першого рядка додамо третій рядок, помножений на (−2):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, справа від риски маємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Визначники

Визначником першого порядку матриці $A=(a_{11})$ називається число

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

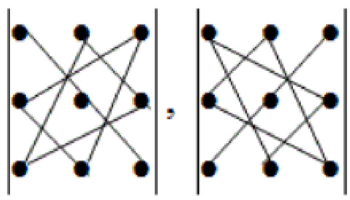
Визначником другого порядку матриці $A=(a_{ij})_{2\times 2}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

Визначником третього порядку матриці $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ є число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$



«+» «–»

Для матриць $A=(a_{ij})_{n\times n}$ порядку $n\geq 4$ визначник можна визначити по індукції за допомогою формули ***розкладу по і-му рядку***

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Тут A_{ij} – ***алгебраїчне доповнення до елемента*** a_{ij} матриці A, що визначається як $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} – ***доповнюючий мінор*** до елемента a_{ij}, тобто визначник порядку $n-1$, складений з елементів вихідної матриці A, з якої викреслений i-й рядок та j-й стовпчик.

Формула розкладу визначника за j-м стовпчиком має вигляд

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Матриці, у яких $\det A \neq 0$, називаються ***невиродженими***, а при $\det A = 0$ − ***виродженими***.

Властивості визначників зібрані в теоремі.

Теорема. 1. У разі транспонування квадратної матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$ її визначник не змінюється, тобто $\det A^T = \det A$.

2. Якщо всі елементи деякого рядка або деякого стовпчика визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3. Якщо визначник має два однакові рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

4. Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

5. Якщо у визначнику матриці A переставити місцями два рядки (стовпчики), то $\det A$ змінить знак на протилежний.

6. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпчика) матриці A помножити на число λ, то $\det A$ також помножиться на λ.

7. Визначник матриці *A* не зміниться, якщо до елементів одного з її рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на деяке число. Тобто визначник не змінюється внаслідок елементарних перетворень третього типу рядків (стовпчиків) матриці *A*.

8. Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку їх діагональних елементів:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \ .$$

9. Якщо матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ має блоково-діагональний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix},$$

де B і C – квадратні матриці, то $\det A = \det B \cdot \det C$.

Теорема. Визначник добутку двох квадратних матриць однакового порядку дорівнює добутку визначників співмножників:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Справедливою є також рівність $\det(A^n) = (\det A)^n$, $n \in$ **N.**

Розглянемо два основних методи обчислення визначників.

1. **Метод ефективного зниження порядку.** Згідно формулі розкладу визначника за рядком або стовпчиком обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-1)$-го порядку. Такий метод зниження порядку не завжди ефективний, оскільки для високих порядків пов’язаний з громіздкими обчисленнями. В розкладі визначника за рядком чи стовпчиком можна зменшити кількість доданків, виконуючи в матриці визначника елементарні перетворення рядків чи стовпчиків з застосуванням властивостей визначника при виконанні таких елементарних перетворень. В вибраному рядку чи стовпчику визначника завжди можна зробити за допомогою елементарних перетворень рядків чи стовпчиків всі елементи нульовими, крім одного. Тоді обчислення визначника n-го порядку зведеться до обчислення визначника $(n-1)$-го порядку.

2. **Зведення визначників до трикутного виду.** Визначник, у якого всі елементи, що знаходяться вище чи нижче головної

діагоналі, рівні нулю, називається ***визначником трикутного виду***. В цьому випадку визначник рівний добутку елементів його головної діагоналі. Зведення визначників n-го порядку до трикутного виду завжди можливе.

Приклад 10. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. 1 спосіб. Другий рядок визначника помножимо на 2 і додамо послідовно до 1-го та 3-го рядка, а також другий рядок додамо до 4-го рядка. Після цього отримаємо в 1-му стовпчику один не нульовий елемент. Отриманий визначник розкладемо по першому стовпчику.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 224 + 120 + 108 - 112 - 144 - 180 = 16$$

2 спосіб. Виконаємо наступні дії. Перший рядок переставимо місцями з другим. Після цього 1-й рядок помножимо на 2 і додамо до 2-го та 3-го рядка. Далі 1-й рядок додамо до 4-го рядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Третій рядок помножимо на (-1) і додамо до 2-го рядка. Другий рядок, помножений на 9, додамо до 3-го рядка, 2-ий рядок, помножений на 4, додамо до 4-го рядка. Після цього 4-й рядок помножимо на (-2) і додамо до 3-го рядка.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$$

3-й рядок помножимо на (-5) і додамо до 4-го рядка.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot(-1)(-1)\cdot 16) = 16.$$

3. Явна формула для знаходження оберненої матриці. Матричні рівняння

Означення. Матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{nn} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A, $i, j = 1,\dots,n$, називається *приєднаною матрицею до матриці* A.

Теорема (про явний вигляд оберненої матриці). Якщо квадратна матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невироджена, то обернена до A матриця існує і має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

З означення оберненої матриці випливає, що

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Наслідок (критерій оборотності матриці). Квадратна матриця A є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона невироджена ($\det A \neq 0$).

При розв'язанні матричних рівнянь виду $A \cdot X = B$, розв'язок знаходиться у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} − обернена матриця до матриці A. Якщо рівняння має вигляд $X \cdot A = B$, то розв'язок знаходимо у вигляді $X = B \cdot A^{-1}$. Для матричного рівняння $A \cdot X \cdot C = B$ розв'язок має вигляд $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

Приклад 11. Розв'язати матричне рівняння.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислимо визначник $\det A = -8 \neq 0$. Далі знаходимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Звідси, $A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 & 7/8 \\ -1/4 & -1/8 & 5/8 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$

Знайдемо невідому матрицю X :

$X = A^{-1} \cdot B =$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 32 & -40 \\ 24 & -32 \\ 24 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю до A можна знайти й іншим способом. Для цього поряд з матрицею A потрібно записати одиничну матрицю такого ж розміру, як і A, тобто $(A|E)$. Матрицю A елементарними перетвореннями рядків звести до одиничної матриці. При цьому, якщо робити послідовність тих же самих елементарних перетворень рядків одиничної матриці E, то отримаємо обернену матрицю. Будемо мати $(E \mid A^{-1})$.

Приклад 12. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо поряд з матрицею A одиничну ~ матрицю третього порядку

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Переставимо перший та третій рядок.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

До другого рядка додамо перший рядок, помножений на (-1), а до третього рядка додамо перший рядок, помножений на (-2).

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim .$$

Переставимо другий та третій рядок.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\sim$$

До третього рядка додамо другий рядок, помножений на (–2).

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)\sim$$

Ми виконали прямий хід алгоритму Гаусса. Далі проведемо зворотній хід алгоритму Гаусса. Третій рядок помножимо на $\frac{1}{4}$ та додамо до другого рядка та другий рядок додамо до першого рядка.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1/2 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/4 \end{array}\right)\sim$$

Другий рядок помножимо на $(-\frac{3}{2})$ та додамо до першого рядка.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -3/8 & 7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/4 \end{array}\right)\sim$$

Таким чином, справа від риски маємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Лінійні простори

Лінійним (або векторним) простором над полем K називається множина V із заданими на ній операціями додавання «+» двох елементів множини V, $+: V\times V\to V$, $(u,v)\mapsto u+v$ і множення «·» елементів множини V на елементи поля K, $\cdot: K\times V\to V$, $(\lambda, v)\mapsto \lambda\cdot v$, що задовольняють наступним умовам:

1) $u+v=v+u$ для довільних $u,v\in V$;
2) $(u+v)+w=u+(v+w)$ для довільних $u,v,w\in V$;
3) існує такий елемент $0\in V$, що $v+0=v$ для довільного $v\in V$;
4) для довільного $v\in V$ існує такий елемент $-v\in V$, що $v+(-v)=0$;
5) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ для довільних $u,v\in V$ і $\lambda\in K$;
6) $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$ для довільного $v\in V$ і $\lambda,\mu\in K$;
7) $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$ для довільних $v\in V$ і $\lambda,\mu\in K$;
8) $1\cdot v=v$ для довільного $v\in V$.

Елементи лінійного простору називаються ***векторами***. Властивості 1)−4) означають, що V є абелевою (комутативною) групою відносно операції додавання. Елементи поля K іноді називають ***скалярами***. Властивості 5)−8) означають, що поле K лінійно діє на V. Зазвичай ми будемо опускати знак «·». В якості поля K ми будемо розглядати поле дійсних чисел ***R***.

Лінійною комбінацією системи векторів $v_1,v_2,...,v_k\in V$ з коефіцієнтами $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbf{R}$ називається вектор

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+...+\lambda_kv_k\in V.$$

Якщо вектор $v\in V$ є лінійною комбінацією векторів $v_1,v_2,...,v_k\in V$, то кажуть, що вектор v *лінійно виражається* через систему $v_1,v_2,...,v_k$.

Система векторів $v_1,v_2,...,v_k$ називається ***лінійно незалежною***, якщо їх лінійна комбінація $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+...+\lambda_kv_k=0$ тоді і лише тоді, коли $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$. В іншому випадку вектори

$v_1, v_2, ..., v_n$ називаються *лінійно залежними.*

Твердження(критерій лінійної залежності векторів). Система векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ $(n \geq 2)$ лінійно залежна, тоді і тільки тоді, коли хоча б один з векторів системи є лінійною комбінацією інших векторів.

Це твердження інколи приймають за означення лінійної залежності.

Підсистема $v_1, v_2, ..., v_m$ $(m < n)$ системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ називається ***максимальною лінійно незалежною***, якщо приєднуючи до цієї підсистеми довільний вектор системи, отримаємо лінійно залежну систему векторів.

Рангом системи векторів $v_1, v_2, ..., v_k$ називається кількість векторів в максимальній лінійно незалежній підсистемі даної системи векторів. Позначається $rank(v_1, v_2, ..., v_k)$. Вектори $v_1, v_2, ..., v_m$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді $rank(v_1, v_2, ..., v_m) = m$.

Лінійно незалежна система векторів $v_1, v_2, ..., v_k$ називається ***базисом простору*** V, якщо кожний вектор $v \in V$ зображується у вигляді лінійної комбінації $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$. Іншими словами, базисом називається максимальна (за включенням) лінійно незалежна система векторів в просторі V. Набір чисел $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ називається ***координатами вектора*** v в базисі $v_1, v_2, ..., v_k$.

Простір V називається ***скінченновимірним***, якщо в ньому існує базис, що складається з скінченного числа векторів. В противному випадку простір називається ***нескінченновимірним***.

Якщо $v_1, v_2, ..., v_k$ − базис простору V, то зображення довільного вектора $v \in V$ у вигляді лінійної комбінації $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$ єдине. В скінченновимірному просторі всі базиси складаються з одного і того ж числа елементів. ***Розмірністю*** скінченновимірного лінійного простору V (позначення $\dim V$) називається число елементів в довільному базисі V.

Прикладом лінійного простору є арифметичний простір $\mathbf{R}^n$, елементами якого є вектори, що мають n координат.

Підмножина $W \subset V$ лінійного простору V називається ***підпростором***, якщо для довільних векторів $u, v \in W$ і скаляра $\lambda \in K$ ми маємо $u+v \in W$ і $\lambda u \in W$. Іншими словами, W буде підпростором, якщо W саме є лінійним простором відносно операцій, заданих в просторі V.

Приклад 13. Перевірити, чи є множина W векторів простору R^n, всі координати яких рівні між собою, підпростором лінійного простору R^n.

Розв'язання. Розглянемо два вектори:

$$a = (x; x; ...; x) \in W \text{ і } b = (y; y; ...; y) \in W.$$

Тоді

$$a + b = (x + y; x + y; ...; x + y) \in W,$$

оскільки вектор $a+b$ має однакові координати.

Нехай $\lambda \in \mathbf{R}$, тоді

$$\lambda \cdot a = (\lambda x; \lambda x; ...; \lambda x) \in W,$$

оскільки вектор $\lambda \cdot a$ має однакові координати.

Отже, W − підпростір $\mathbf{R}^n$.

5. Ранг матриці

Рядковим (стовпчиковим) рангом матриці A (позначається $rankA$) називається ранг вектор-рядків (вектор-стовпчиків) матриці A. Відомо, що рядковий ранг матриці A дорівнює стовпчиковому рангу матриці і називається ***рангом матриці*** A.

Ранг матриці не змінюється, якщо над рядками (стовпчиками) матриці виконувати елементарні перетворення 1-го, 2-го та 3-го типу.

Для того, щоб знайти ранг матриці потрібно визначити, наприклад, максимальну кількість лінійно незалежних стовпчиків матриці. Для цього зводять матрицю до «ступінчатого виду» за допомогою елементарних перетворень рядків чи стовпчиків матриці.

Приклад 14. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Зведемо матрицю елементарними перетвореннями рядків до «ступінчатого виду».

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 4 & 20 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 10/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перший, другий та третій вектор-стовпчик $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ матриці A є лінійно незалежними, оскільки з останньої матриці бачимо, що лінійна комбінація $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ має єдиний розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Крім того, приєднуючи будь-який інший вектор-стовпчик $\vec{v}_4$ або $\vec{v}_5$ матриці A до системи векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ отримаємо лінійно залежну систему. Наприклад, система лінійних рівнянь $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$ невизначена.

Отже, максимальна кількість лінійно-незалежних вектор-стовпчиків матриці A рівна 3. Тому, $rank A = 3$.

6. Системи лінійних рівнянь

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система m рівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ − невідомі або змінні, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1,..., m$, $j = 1,..., n$ − коефіцієнти системи лінійних рівнянь. $b_i \in \mathbf{R}$ − вільні члени.

Якщо в системі лінійних рівнянь $m = n$, то система називається ***квадратною***. Якщо всі $b_i = 0$, то система лінійних рівнянь називається ***однорідною,*** в іншому випадку ***неоднорідною***.

Система лінійних рівнянь називається:

1) ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок;
2) ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку;
3) ***визначеною***, якщо вона має точно один розв'язок;
4) ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків.

Основною матрицею системи лінійних рівнянь називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, що стоять в правих частинах системи (1) утворюють матрицю стовпчик $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матриця системи, доповнена справа стовпчиком вільних членів називається ***розширеною матрицею системи***:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A рівний рангу розширеної матриці A^*, тобто $rank\ A = rank\ A^*$

Наслідок

1. Система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, тобто $rankA^* = rankA = n$.

2. Система лінійних рівнянь є невизначеною тоді і тільки тоді, коли $rankA^* = rankA < n$.

Систему лінійних рівнянь (1) можна записати в матричному вигляді $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, де $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ − набір невідомих.

Якщо система лінійних рівнянь $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ квадратна і $\det A \neq 0$, то єдиний розв’язок знаходимо з матричного рівняння $\mathrm{x} = A^{-1} \cdot \mathrm{b}$.

Розв’язок квадратної системи лінійних рівнянь можна знайти керуючись теоремою Крамера.

Теорема (Правило Крамера). Квадратна система лінійних рівнянь $A \cdot x = b$ визначена тоді і тільки тоді, коли її основна матриця A є не виродженою ($\det A \neq 0$). У такому разі єдиний розв’язок системи знаходять за ***правилом Крамера***:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, \dots, n,$$

де $\Delta = \det A,\ \Delta_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$ − визначник, отриманий заміною i-го стовпчика матриці A на стовпчик вільних членів.

Системи лінійних рівнянь також можна розв’язувати методом послідовних виключень невідомих, або **методом Гауса**. Для цього розширену матрицю системи (1) за допомогою елементарних перетворень рядків потрібно звести так, щоб в кожному базисному стовпчику та рядку залишився один ненульовий елемент (його завжди можна зробити одиничним).

Приклад 15. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Розв'язуючи систему лінійних рівнянь методом Гауса одночасно зробимо висновок про сумісність системи, використовуючи теорему Кронекера-Капеллі.

Запишемо розширену матрицю системи і спростимо її за допомогою елементарних перетворень рядків.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Оскільки ранг основної матриці дорівнює 3 і ранг розширеної матриці дорівнює 3, то за теоремою Кронекера-Капеллі система лінійних рівнянь сумісна, причому визначена. Залишилося над основною діагоналлю зробити нулі. Помножимо 4-й рядок на 3 і додамо до 2-го, після чого помножимо 4-й рядок на (-1) і додамо до 1-го рядка. Отримаємо

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, розв'язок системи $x_1 = 2,\ x_2 = -1, x_3 = 1$.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера.

Спочатку обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Знайдемо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Далі за формулами Крамера знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

в) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом. Для цього знайдемо обернену матрицю до основної матриці системи A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Звідси, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Або $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Приклад 16. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (-3; 2; 1)$ утворюють базис векторного простору R^3, і знайти координати вектора $\vec{b} = (10; 3; -4)$ в цьому базисі.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис простору $\mathbf{R}^3$ тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. Запишемо основну матрицю системи лінійних рівнянь $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ та за допомогою елементарних перетворень рядків зведемо до «ступінчатого виду».

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рівняння $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ має єдиний розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тому вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні, $rank(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворює базис простору $\mathbf{R}^3$.

Оскільки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ базис простору $\mathbf{R}^3$, то існують єдині коефіцієнти $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ такі, що $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$. Запишемо цю рівність в координатному вигляді

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Або $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + x_3 = -4. \end{cases}$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гауса. Випишемо розширену матрицю системи лінійних неоднорідних рівнянь.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -5 & 11 & -27 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right). \qquad \text{Отже, } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2.$$

Координати вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ мають вигляд $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь $A \cdot \mathrm{x} = O$. Однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки вона завжди має тривіальний розв’язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0, ...,\ x_n = 0$.

Якщо матриця A однорідної системи лінійних рівнянь квадратна і $\det A \neq 0$, то по формулам Крамера для неї існує лише тривіальний розв’язок $\mathrm{x} = (0,...,0)^{\mathrm{T}}$. Таким чином, умовою наявності нетривіального розв’язку однорідної системи з квадратною матрицею є рівність нулю її визначника. В загальному випадку, якщо для основної матриці A системи розміру $m \times n$, $rank\, A < n$, то система буде сумісною, але невизначеною, тобто буде мати нескінченно багато розв’язків.

Розв’язки системи лінійних однорідних рівнянь утворюють підпростір лінійного простору $\mathbf{R}^n$, розмірність якого дорівнює $n - r$, де n – кількість невідомих в системі, а r – ранг матриці. Базис простору розв’язків системи лінійних однорідних рівнянь називається ***фундаментальною системою розв’язків*** (ФСР).

Для знаходження ФСР в матриці A методом елементарних перетворень виділяють базисні рядки і розглядають лише рівняння, що містяться в цих рядках. Далі в них виділяють базисні стовпчики, а змінні, що не містяться в базисних стовпчиках, вважаються вільними і переносяться в праву частину. Кількість вільних змінних дорівнює $(n-r)$, де $r = rankA$. Вільні невідомі вибирають таким чином, щоб утворити з розв'язків системи $n-r$ лінійно незалежних розв'язків. Це і буде ФСР. Довільний розв'язок системи однорідних рівнянь буде лінійною комбінацією векторів з ФСР, що містить $n-r$ довільних сталих.

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і спростимо її за допомогою елементарних перетворень.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Пов'язані змінні будуть x_2 та x_3, а вільні x_1, x_4, x_5.

Запишемо систему лінійних рівнянь по спрощеній матриці, залишивши пов'язані змінні в лівій частині, а вільні змінні в правій.

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 13x_4 - x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5, \\ x_1 = c_1, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5. \end{cases}$$

Надамо по черзі вільним змінним значення $x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$; $x_1 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0$; $x_1 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1$. Отримаємо ФСР: $v_1 = (1;2;0;0;0)$, $v_2 = (0;13;5;1;0)$, $v_3 = (0;-1;-1;0;1)$.

Загальний розв'язок системи:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + C_3 \cdot v_3$, де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$.

7. Лінійні оператори

Означення. Нехай V – лінійний простір над полем $\mathbf{R}$. Лінійним оператором називається лінійне відображення $\mathbf{A}: V \to V$, тобто таке відображення, що задовольняє умови:

1) $\mathbf{A}(x+y) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y),\ \forall x, y \in V$;

2) $\mathbf{A}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}(x),\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, x \in V$.

Нехай $V = \mathbf{R}^n$ – арифметичний лінійний простір розміності n над полем $\mathbf{R}$. Розглянемо стандартний базис лінійного простору $\mathbf{R}^n$, що складається з векторів

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо образи базисних векторів при дії оператора $\mathbf{A}$:

$\mathbf{A}(e_1) = v_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + ... + \alpha_{n1} e_n$;

$\mathbf{A}(e_2) = v_2 = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + ... + \alpha_{n2} e_n$;

………………………………………….

$\mathbf{A}(e_n) = v_1 = \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + ... + \alpha_{nn} e_n$.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею оператора* $\mathbf{A}$ в базисі $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Отже, кожному лінійному оператору в деякому базисі відповідає матриця. І навпаки кожній квадратній матриці порядку n відповідає певне лінійне відображення. Дійсно, нехай $A \in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$. Розглянемо відображення

$$\mathbf{A}: \begin{array}{l} e_1 \mapsto A \cdot e_1, \\ e_2 \mapsto A \cdot e_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ e_n \mapsto A \cdot e_n. \end{array}$$

З властивостей додавання та множення матриць легко перевіряється, що побудоване відображення є лінійним.

Таким чином, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною матриць $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ і множиною лінійних операторів $Lin(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ у просторі $\mathbf{R}^n$.

Встановлена взаємно однозначна відповідність узгоджена з природніми діями додавання операторів, множення оператора на число та суперпозиції операторів. А саме, додаванню операторів відповідає додавання матриць, множення оператора на число відповідає множення материці на число, а суперпозиції операторів відповідає множення матриць. Зазначимо також, що при заміні базису в $\mathbf{R}^n$, що задається матрицею переходу S (невиродженою), матриця A лінійного оператора перетворюється в матрицю $S^{-1}AS$. Згідно з такою трактовкою усі задачі, що формулюються мовою матриць, можна переформулювати мовою лінійних операторів, і навпаки. Ми надалі дотримуватимемось в більшості матричних формулювань.

Приклад 18. Оператор $\boldsymbol{A}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ повороту векторів на площині навколо початку координат проти руху годинникової стрілки на деякий фіксований кут α (рис. 4) є лінійним.

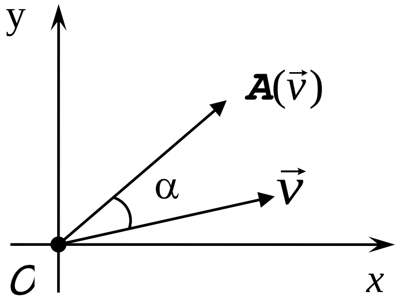


Рис. 4

Дійсно, якщо спочатку додати вектори $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$, а потім їхню суму повернути на кут φ, то отримаємо такий самий вектор, який утвориться, якщо спочатку повернути вектори $\vec{v}$ та $\vec{w}$ на кут α, а потім їх додати.

Так само, якщо спочатку помножити вектор $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$, а потім його повернути на кут α, то отримаємо такий самий вектор, який утвориться, якщо спочатку повернути вектор $\vec{v}$ на кут α, а потім його помножити на число λ.

Означення. Число $\lambda \in \mathbf{R}$ називається *власним (або характеристичним) числом* матриці A, якщо існує ненульовий вектор $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ такий, що $Av = \lambda v$. У цьому разі вектор $\vec{v}$ називається власним вектором матриці A з власним числом λ.

Означення. *Характеристичним многочленом матриці* $A \in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ називається многочлен виду

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

де E – одинична матриця порядку n

Рівняння $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$ називається *характеристичним рівнянням* матриці A.

Основні властивості власних чисел та власних векторів зібрано в наступній теоремі.

Теорема 1. Власними числами матриці A є корені її характеристичного многочлена і тільки вони.

2. Множина $V(\lambda, A)$ усіх власних векторів матриці A з фіксованим власним числом λ (враховуючи нульовий вектор, який можна вважати власним вектором з будь-яким власним числом) утворює підпростір в $\mathbf{R}^n$, розмірність якого збігається з дефектом матиці $A - \lambda E$.

3. Базисом підпростору $V(\lambda, A)$ є фундаментальна система розв'язків (Ф.С.Р.) однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею

$A-\lambda E$.

4. $\dim V(\lambda, A)$ не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена.

5. Довільний набір власних векторів матриці A з попарно різними власними значеннями є лінійно незалежним.

Основні властивості характеристичного многочлена зібрано в наступній теоремі.

Теорема. 1. Для довільної оборотної квадратної матриці $S \in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ справедлива рівність $\chi_{S^{-1}AS}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

2. $\deg \chi_A(\lambda) = n$.

3. $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + d_1(-1)^{n-1} + \ldots + d_n$,

де $d_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ та $d_n = \det A$.

4. $\chi_A(A) = 0$.

Отже, оскільки матриці лінійного оператора **A** в різних базисах мають однакові характеристичні многочлени, а тому, і однаковий набір характеристичних чисел, то характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E)$ матриці A лінійного оператора **A** можна називати *характеристичним многочленом лінійного оператора* **A**, а корені цього многочлена – *характеристичними числами оператора* **A**.

Для того, щоб знайти всі власні значення та власні вектори лінійного оператора $\boldsymbol{A}$, заданого матрицею A, треба:

1. Знайти всі власні значення матриці A, тобто записати характеристичне рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ та знайти всі його різні корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Саме вони і будуть шуканими власними значеннями.

2. Для кожного власного значення $\lambda = \lambda_i$ матриці A знайти базис власного підпростору $V(\lambda_i, \mathbf{A})$. Для цього потрібно підставити значення $\lambda = \lambda_i$ в однорідну систему лінійних рівнянь $(A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ і знайти її фундаментальну систему розв’язків. Отримана

фундаментальна система розв'язків є базисом власного підпростору $V(\lambda_i, \mathbf{A})$.

Приклад 19. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння матриці A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = 0$, $\quad (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = 0$,

$(1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$, $(1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0$,

$(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$.

Корені цього рівняння є власними числами: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Для кожного з цих власних чисел знайдемо власні вектори.

1) $\lambda_1 = 1$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A - E) \cdot x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі x_2, x_3 – пов'язані, невідоме x_1 – вільне. Запишемо загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 0, \;\; c_1 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Надамо значення $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідають власні вектори виду

$$X_{\lambda_1 = 1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1 \in \mathbf{R}, c_1 \neq 0.$$

2) $\lambda_2 = -1$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A + E)x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі x_1, x_2 – пов'язані, невідоме x_3 – вільне. Запишемо загальний розв’язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} x_3, \\ x_2 = x_3, \qquad c_3 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Надамо значення $x_3 = 2$, тоді $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = -1$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_2 = -1$ відповідають власні вектори

$$X_{\lambda_2=-1} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix},\ c_2 \in \mathbf{R},\ c_2 \neq 0.$$

3) $\lambda_3 = 3$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A - 3E)x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі $x_1,\ x_2$ – пов'язані, невідоме x_3 – вільне. Запишемо загальний розв’язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} x_3, \\ x_2 = -x_3, \qquad c_3 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Надамо значення $x_3 = 2$, тоді $x_1 = 1, x_2 = -2$. Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 3$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_3 = 3$ відповідають власні вектори

$$X_{\lambda_3=3} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -2c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix},\ c_3 \in \mathbf{R}, c_3 \neq 0.$$

Відповідь. Власні значення лінійного оператора: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$; власні вектори лінійного оператора:

$$X_{\lambda_1=1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_{\lambda_2=-1} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix},\ X_{\lambda_3=3} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -2c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix},$$

де $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Варіант 1

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1+2i)(3-i)}{2-i} - i(4+3i)$; б) $(\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{36}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x + (1+4i)y = 5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{2}z^3 - 3i + 3 = 0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 0; -3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; 2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (3,12,-2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів парного степеня.

Варіант 2

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

а) $\dfrac{2i^6+7i}{1-i}-(4+3i)(1-i)$; б) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2+3i)x+(1-i)y=1+9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4-3z^2-10=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3+x^2+2x-2$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -3)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; 1; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, що є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь.

Варіант 3

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

а) $\dfrac{1+8i^3}{4-2i}+(4-i)^2$; б) $(2-2i)^{84}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x+(2+2i)y=(1+2i)x-yi.$$

3. Знайти корені рівняння $8\sqrt{3}-8i-z^3=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3-3x^2-7x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+3x-1$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 4 & 3 & -6 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 = 2; \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 8x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; -5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць.

Варіант 4

1. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

а) $(-1+i)(5+3i)+\dfrac{i(5-4i)}{2+2i}$; б) $(\sqrt{2}i-\sqrt{6})^{33}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x+(1-2i)^2 y=(-1-4i)\cdot i\,.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4-\sqrt{7}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+6x^3+14x^2+16x+8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2-5$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 6; \\ -5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 11x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2;1;3)$, $\vec{a}_2 = (1;-4;2)$, $\vec{a}_3 = (3;-2;5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4;4;-7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 15 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, сума координат яких дорівнює нулю.

Варіант 5

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{5+3i}{1+3i} - i(3+2i)$; б) $(-1+\sqrt{3}i)^{26}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)x+(-5+2i)y=1-i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4+\sqrt{3}i\cdot z=z$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-2x^2+9x-9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+3x^2+x-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -16 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8; \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -4; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-4; 7; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 6

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{4-5i^3}{1+i}-3i(5+2i)$; б) $(-\sqrt{3}-3i)^{36}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(5+i)x+(4-2i)y=ix-(2+i)y+4+i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3+5+5i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=2x^4-9x^3+9x^2+x-3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-4x^2-2$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & -2\\ -1 & 4 & 0 & -1\\ 3 & -6 & 2 & 5\\ -2 & 0 & 3 & 8\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -1 & 4\\ -3 & 5 & -4 & 0 & 2\\ 1 & -11 & 8 & 2 & -10\\ 2 & -8 & 6 & 1 & -6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 = -2; \\ -5x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-3; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 9; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $f(1) + f(2) + f(3) = 0$.

Варіант 7

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1-5i)\cdot(2+i)}{-1+i}-i^7(4-3i)$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2+i)x+(4-i)y=y+5i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^4-5i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2x-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-4 & 2 & 1 & 8\\ 2 & 1 & -3 & 0\\ 6 & -5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -4\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -8 & 1 & -4\\ -4 & 2 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -7 & 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -6; \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 5; -1)$, $\vec{a}_2 = (0; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -1; 0)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; 0; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U векторів, у яких всі координати рівні між собою.

Варіант 8

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(1-6i)\cdot i^3}{-2+i}-(1-i)^2$; б) $(-2+2i)^{44}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x+(1+4i)y=5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3+3\sqrt{3}-3i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-x^2-10x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & -4\\ -1 & 6 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 1 & -5 & 2 & -3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 2 & -1 & -4 & 2 & 1\\ 7 & 0 & -10 & 6 & 9\\ 0 & 7 & 8 & -2 & 11\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -7 & 6\\ -2 & 6 & -5\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2; \\ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; -1; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -9)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; 4; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх симетричних матриць.

Варіант 9

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(2-i)\cdot i^3}{2+3i}+7-2i$; б) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)^2 x-y=(1+i)x+9i$.

3. Знайти корені рівняння $z^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-4x+3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}4 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -4 & 2 & -3\\ -1 & 7 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -4 & -3 & 2 & 7\\ -2 & 1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & 3 & -4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -7 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 6 & -5\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; 7; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U всіх векторів, у яких координати з непарними номерами рівні нулю.

Варіант 10

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(3-i)\cdot i^5}{1-2i}-3+2i$; б) $(1-i)^{32}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+4i)x+(5-2i)y=(3+i)x-(2+3i)y+3+7i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3+\sqrt{2}-\sqrt{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-16x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 0 & -1\\ 1 & 6 & 3 & -4\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}4 & -1 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2\\ 3 & -4 & 2 & -6 & -1\\ 6 & 5 & -1 & 6 & 7\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 5 & -6 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 7\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4; \\ x_2 + 4x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{b}_2 = (-1; 2; 5)$, $\vec{b}_3 = (4; 0; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (1; -1; 11)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем **R** множина U тих многочленів, що не містить парних степенів змінної x.

Варіант 11

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1-3i)(2+i)}{3-i}+2i(2-i)$;   б) $(-2\sqrt{3}+2i)^{36}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння

$$(1+3i)x+(2-i)^2y=(-1-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3+\sqrt{5}+\sqrt{5}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-12x^2+4x+16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+x^2-5x+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 7 & -1\\ -1 & -3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 5 & -4 & 6\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; 10; 6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких координати є непарними цілими числами.

Варіант 12

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3i+2i^6}{1-i}-5+2i$; б) $(-5+5i)^{24}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2-i)^2x+(3-2i)y=-2i$.

3. Знайти корені рівняння $3z^3-\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+3x^3+6x^2+2x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 5 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & -3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & -4 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 10 & 9 & -1\\ 4 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0\\ -3 & 2 & -1 & 7 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -7; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; -3; -1)$, $\vec{a}_2 = (-5; 2; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -3)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $b = (-5; -3; 5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, визначник яких дорівнює нулю.

Варіант 13

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-i)^2+\dfrac{3+2i}{1-2i}$; б) $(3\sqrt{3}-3i)^{30}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(2+i)x+(3-2i)y=(1-i)x+(4+i)y.$$

3. Знайти корені рівняння $3z^3+\sqrt{5}+\sqrt{15}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3+2x^2-5x+3$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -8; \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; -7; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; -2; 5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-5; -4; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць.

Варіант 14

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{2-i}{-1+3i}-2+5i^5$;   б) $(\sqrt{5}-\sqrt{15}i)^{45}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5+i)x-(1+i)y=-7-3i$.

3. Знайти корені рівняння $z^4+2=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^2-16x-15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 7 & 0 & 3\\ 4 & -2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 5 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 6 & 0\\ 4 & -5 & 2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 11 & -4 & 7 & 10 & -1\\ 2 & -8 & 3 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5; \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -2; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 0; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (0; 4; 3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів непарного степеня.

Варіант 15

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{i^5(6-i)}{-2+i}-4+5i$; б) $(2\sqrt{3}-2i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-2i)x-(4+2i)y=3+4i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+5x^2-2x+3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-2 & 4 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 0 & -2\\ -3 & -5 & 1 & -7\\ 0 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 8 & -3 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -2 & -5 & 10\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 10. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (9; 0; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U всіх многочленів $f(x)$, які задовольняють рівність $2 \cdot f(1) + 3 \cdot f(2) = 0$.

Варіант 16

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(1+2i)^2}{3-i}-2+i; \qquad \text{б) } (3-\sqrt{3}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x+(3-2i)y=-7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^4-2\sqrt{3}z^2+4=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+3x^3+2x^2+4x+8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2-1$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 8 & 2 & -4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -3; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -9; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-3; 3; -7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх діагональних матриць.

Варіант 17

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } 5-3i+\frac{i^3(2-i)}{2+i}; \qquad \text{б) } (-\sqrt{21}+\sqrt{7}i)^{90}.$$

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x+(1+4i)y=7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^5+2+2i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+5x-6$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2x-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0 & 4\\ -7 & 0 & 1 & 8\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}-5 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 2 & -2 & 1 & -6\\ 2 & 0 & 3 & 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -6\\ 1 & 0 & -3\\ -3 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (4; 5; 6)$, $\vec{a}_3 = (-1; -3; -2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-8; 7; -5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, для яких дане число $a \in \mathbf{R}$ буде коренем.

Варіант 18

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-3i)^2+\dfrac{(5-6i)}{4+2i}-i^5$; б) $(-6+6i)^{96}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(7-i)x+(-2+4i)y=11+x$.

3. Знайти корені рівняння $2x^6+3i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+4x^2-6$ від матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}6 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 4\\ -1 & 5 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 0 & -2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2\\ -2 & 7 & 4 & 1 & -9\\ -3 & -2 & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}5 & -6\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (5;-1;2)$, $\vec{a}_2 = (-1;2;-4)$, $\vec{a}_3 = (-3;2;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2;1;4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, координати яких є парними цілими числами.

Варіант 19

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1-3i)^2}{2+i}-1-i^5$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{28}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $x+(-1+3i)y=1-6i$.

3. Знайти корені рівняння $2z^3+\sqrt{15}i-\sqrt{5}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+7x^3+18x^2+22x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+5x-6$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 8 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 3 & -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4; \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (-1; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (3; -8; -1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -9 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розмірності n множина U тих векторів, у яких співпадає перша і остання координата.

Варіант 20

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(2-i)^2 + \dfrac{4+i}{1-2i}$; б) $(-\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(3-2i)x+(1+4i)y=5+6i$.

3. Знайти корені рівняння $z^6-3=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+2x^2-7x-10$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+4$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ -7 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -6 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 2 & -4 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3;-2;1)$, $\vec{a}_2 = (-8;3;-1)$, $\vec{a}_3 = (1;4;2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2;-8;1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина всіх тих матриць, в яких сума елементів по діагоналі дорівнює 0.

Варіант 21

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{6+i}{-1-2i}+\dfrac{4+5i}{i}$; б) $(-\sqrt{15}+\sqrt{5}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(6-i)x+(3+2i)y=x-13i+13.$$

3. Знайти корені рівняння $7x^3+\sqrt{18}i-\sqrt{6}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-6x^3-3x^2+20x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+3x^2-x+8$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-5 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 4 & -2 & -6\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 4 & -1 & -3 & 2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 2 & -3\\ -1 & 7 & 5 & 0 & -2\\ -3 & 2 & -4 & 0 & 1\\ 4 & -5 & -6 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8; \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1;-2;-1)$, $\vec{a}_2 = (3;-1;1)$, $\vec{a}_3 = (-1;-4;2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (11;3;9)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що задовольняють рівність $f(4) + f(5) = 0$.

Варіант 22

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(1+3i)(3-2i)+\dfrac{2i(4+3i)}{1+2i}$; б) $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{40}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x+(1-2i)y=(3-4i)\cdot i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^4+6=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2-4$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & -6 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = -9; \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2;-1;1)$, $\vec{a}_2 = (-1;1;3)$, $\vec{a}_3 = (0;5;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (10;-1;-4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких перша і остання координата дорівнюють нулю.

Варіант 23

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(2-i)(1+i)}{-3+i}-i^3(1-i)$; б) $(-2\sqrt{3}+2i)^{40}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(5-2i)x+(1+4i)y=7+6i$.

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{3}z^3+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x+12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}-3 & 3 & 1 & -4\\ 5 & -1 & 2 & 6\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 6 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 5 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6 & -1 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 9 & -6 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 0 & 9 & -2 & 8\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 3 & -2\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ -5x_1 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 0; 3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-2; -6; 1)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U тих матриць, діагональні елементи яких дорівнюють нулю.

Варіант 24

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $i^3(1+2i)-\dfrac{2+3i}{1-2i}$; б) $(3-\sqrt{3})^{60}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(1+3i)x+(2-2i)^2 y=(-1-4i).$$

3. Знайти корені рівняння $3x^3+\sqrt{2}+\sqrt{2}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-6x^2-15x-9$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+2$ від матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 & -5 & -7 \\ -8 & -4 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = -10; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 13x_3 - 8x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; -3; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (6; -2; 7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем **R** множина U тих многочленів, що не містять парних степенів змінної x.

Варіант 25

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $3i^3(5+2i)-\dfrac{4-5i}{1-i}$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{60}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(-4+i)x+(3-2i)y=-7+3i.$$

3. Знайти корені рівняння $\sqrt{5}z^5-2=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-3x^3+4x^2-12x+16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2-x+5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}8 & 2 & -7 & 3\\ 1 & -4 & 2 & 1\\ -7 & 1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -3 & 2\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0\\ -3 & -1 & -5 & 3 & -1\\ 1 & -5 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 1 & -4 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1;-2;3)$, $\vec{a}_2 = (0;4;1)$, $\vec{a}_3 = (1;1;-2)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4;-7;-5)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх матриць, координати яких є парними натуральними числами.

Варіант 26

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{5+2i}{3-i}-i^3(2-3i)$; б) $(2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i)^{60}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+5i)x+(1-2i)y=(3-4i)i.$$

3. Знайти корені рівняння $z^3+\sqrt{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-5x^3+x^2+21x-18$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+x^2-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 5\\ 3 & 2 & -5 & 1\\ 4 & -1 & -2 & -6\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 4 & -2 & 1 & 2 & 3\\ 8 & -1 & 0 & 11 & 7 & -6\\ 2 & -3 & 1 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 1 & -1 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7; \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (4;-1;0)$, $\vec{a}_2 = (1;3;2)$, $\vec{a}_3 = (-2;-1;-5)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (2;8;-7)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 1 & -8 & 7 \\ 0 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}^n$ всіх векторів розміру n множина U тих векторів, у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю.

Варіант 27

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{(1+3i)(2-i)}{3+i}-i^6(5+6i)$; б) $(3\sqrt{3}-3i)^{72}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3+i)^2x+(1-4i)y=15+16i.$$

3. Знайти корені рівняння $5x^3+\sqrt{7}-\sqrt{7}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-6x^2-14x-12$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-3x^2+7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}5 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1 & 3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 5 & -2\\ 7 & 6 & -4 & 2 & 3\\ -1 & -10 & 6 & 8 & 3\\ 4 & 8 & -5 & -3 & -5\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -14; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (-6; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; -1; 4)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -15 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U діагональних матриць, сума елементів яких дорівнює числу 10.

Варіант 28

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $(3-i)^2+\dfrac{1-7i^3}{4+2i}$; б) $(-\sqrt{21}-\sqrt{7}i)^{48}$.

2. Знайти дійсні розв’язки рівняння $(1-i)x+(3+4i)y=-3-11i$.

3. Знайти корені рівняння $7z^4-\sqrt{6}+\sqrt{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-2x^3-14x+15$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+4x^2-3$ від матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & -7 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -4 & 1\\ -5 & 0 & 3 & -6\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}4 & -2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & -5 & 4 & 11 & -5\\ 3 & 3 & 6 & 8 & -1\\ -5 & 2 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ -7 & 6 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -7; \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ -4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -2; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (4; -8; -4)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх нижніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

Варіант 29

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3-i}{4+5i}-(3+2i)\cdot i^7$; б) $(-\sqrt{7}+\sqrt{21}i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3-i)x-(1+2i)y=(9i-4)i.$$

3. Знайти корені рівняння $5z^3+\sqrt{3}i=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3+2x^2+4x-7$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & 5 & 2 & 6\\ -7 & 1 & 8 & 0\\ -4 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -3 & 7\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 9 & 1 & -3\\ -2 & 10 & -11 & 12 & 0 & 1\\ 4 & -5 & 1 & 6 & 2 & -7\\ 3 & -8 & 6 & -3 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ -3 & -7 & 6\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -4 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 1x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-3; 4; -6)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; 1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (2; 6; -6)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ множина U тих многочленів, що не містять непарних степенів змінної x.

Варіант 30

1. Знайти алгебраїчну форму комплексних чисел:

а) $\dfrac{3-2i^3}{4-3i}-i(3+2i)$; б) $(2\sqrt{3}+2i)^{90}$.

2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(1-i)x+(2+i)y=-1+3i$.

3. Знайти корені рівняння $2x^5-\sqrt{5}=0$.

4. Розкласти многочлен на незвідні множники над полями дійсних та комплексних чисел: $f(x)=x^4-x^3+4x-16$.

5. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-5x^2+4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & 5 & -8 & 3\\ -3 & 1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -6 & 1\\ 6 & 0 & 3 & -7\end{vmatrix}$.

7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4 & 2 & -6\\ 4 & 3 & -2 & 7 & 2\\ 1 & 5 & 2 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 6 & -8 & 4\end{pmatrix}$.

8. Знайти невідому матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ 3 & -5 & 3\\ 4 & -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

9. Перевірити сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати: а) методом Гауса, б) по правилу Крамера, в) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8; \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (3; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -5)$, $\vec{a}_3 = (-3; 1; -1)$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (-7; 8; -3)$ в цьому базисі.

12. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ -9 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbf{R})$ всіх дійсних матриць порядку n множина U всіх верхніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

Список літератури

1. *Безущак О.О.* Навчальний посібник з лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету / О.О. Безущак, О.Г. Ганюшкін, Є.А. Кочубінська – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.

2. *Боднарчук Ю.В.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю.В. Боднарчук, Б.В. Олійник – Київ: Київський університет «Києво-Могилянська академія», 2019. – 150 с.

3. *Бондаренко Н.В.* Лінійна алгебра: навчальний посібник / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська – Київ: КНУБА, 2023. – 180 с.

4. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ: Вища школа,1993. – 648 с.

5. *Дубовик В.П.* Вища математика: збірник задач/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

6. *Завадский А.Г.* Методические указания к решению задач по линейной алгебре / А.Г. Завадский, М.С. Пастухова, В.М. Турчин, А.С. Шкабара – Киев: КИСИ, 1992. – 63 с.

7. *Завало С.Т.* Курс алгебри – Київ, Вища школа, 1985. – 503 с.

Навчально-методичне видання

Лінійна алгебра

Методичні вказівки та самостійні завдання
з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Укладачі: БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
БОЖОНОК Катерина Валеріївна

Комп'ютерна верстка А.П. Морозюк

Підписано до друку 27.03.2024 . Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. акр. 2,5.
Електронний документ. Вид. № 6/I-24

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.