МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.Д. Федоренко
В.В. Демченко

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛІЗУ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ 2003

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.174.973
Ф33

Рецензенти: В.М.Михайленко, доктор технічних наук, професор (Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу)
А.А.Лященко, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник (Державний науково-дослідний інститут автоматизованих систем у будівництві)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист Міністерства освіти і науки України № 14/18.2-2045 від 04.11.2002)

Федоренко Н.Д., Демченко В.В.
Ф33 **Основи дискретного аналізу**: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 108 с.
ISBN 966-627-075-7

У посібнику розглянуто окремі розділи дискретної математики (комбінаторний аналіз, формальні алгебри, математична логіка), які мають широке теоретичне і практичне застосування в сучасних інформаційних системах і технологіях. Особливу увагу приділено доступності викладання матеріалу, текст супроводжується великою кількістю прикладів. Кожний розділ містить задачі для самостійної роботи студентів.

Призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються комп'ютерним спеціальностям за напрямами: комп'ютерні науки, комп'ютерна інженерія, прикладна математика, також може бути корисним студентам, аспірантам і спеціалістам інших напрямів і спеціальностей.

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.174.973

ISBN 966-627-075-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дискретний аналіз – розділ математики, в якому викладено властивості структур фінітного (скінченного) характеру, що виникають як в самій класичній математиці, так і в її застосуваннях. Синонімом поняття дискретного аналізу є поняття “скінченна математика”. Класична математика займається вивченням властивостей об’єктів неперервного характеру, а використання дискретної математики пов’язане із задачами, в яких об’єктами дослідження є дискретні моделі.

Для розв’язування математичних задач, що виникають при створенні сучасних інформаційних технологій, зокрема в проектуванні й управлінні, необхідно мати математичні моделі, які не тільки адекватні описуваним процесам і об’єктам проектування, а й придатні для реалізації на обчислювальних машинах. З цих позицій у навчальному посібнику систематизовано класичний прикладний математичний апарат, який використовується для побудови моделей в інформаційних системах, теорії ігор, теорії прийняття рішень тощо.

Цілісність і компактність посібника певною мірою визначають той обсяг знань, яким повинен володіти студент, щоб на практиці застосувати знання основ дискретного аналізу.

У першій главі розкрито основні поняття комбінаторного аналізу, розглянуті поліноміальна формула та біном Ньютона.

У другій главі наводяться основні поняття алгебри, типи алгебр.

У третій главі викладаються основи математичної логіки. Ґрунтовно та детально розглядаються булеві функції, логічні функції, реалізація функцій формулами, методи їх мінімізації. Особлива увага приділяється численню висловлювань та предикатів, методам доведень у логіці Буля, логіці висловлювань та логіці предикатів, розглядаються основні логічні загальнозначущі формули.

Кожна глава ілюстрована прикладами. Для цілей тренування в кінці кожної глави наведені задачі, всі вони носять навчальний характер.

В основу посібника покладено курс лекцій, що читаються протягом кількох років на другому курсі факультету автоматизованих інформаційних технологій Київського національного університету будівництва і архітектури. Всі глави написані спільно.

ГЛАВА 1. КОМБІНАТОРНІ СХЕМИ

Комбінаторику в деякому змісті можна розуміти як синонім терміна “дискретна математика” – дослідження дискретних скінченних математичних структур.

Для подальшого розглядання комбінаторних схем нагадаємо деякі з понять теорії множин.

$a \in A$ – елемент a належить множині A,

$a \notin A$ – елемент a не належить множині A;

$|A|$ – потужність множини (кількість її елементів).

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ – об’єднання двох множин;

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ – перетин двох множин;

$A | B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ – різниця двох множин;

$A x B = \{(a,b) a \in A; b \in B\}$ – прямий декартовий добуток двох множин;

$\varnothing$ – порожня множина;

V – універсальна множина, або універсум;

$\overline{A} = V | A = \{x | x \notin A\}$ – доповнення до множини A;

$A \cap B = \varnothing$ – неперетинні множини.

Якщо A та B – скінченні множини, причому $A \cap B = \varnothing$, то можна сформулювати правила суми й прямого добутку.

Нехай $|A| = n$; $|B| = m$; $A \cap B \neq \varnothing$, то

$|A \cup B| = |A| + |B| = m + n$ – правило суми.

Інтерпретація. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n-способами із множини A, а елемент $b \in B$ вибрати m-способами із множини B, то елемент $x \in A \cup B$ можна вибрати $(m+n)$–способами.

Правило суми можна поширити і на n-множин, тобто якщо $A_i \cap A_j = \varnothing$, $j \neq i$, то $\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$.

Нехай A і B скінченні множини, $|A| = n$; $|B| = m$, тоді $|A\text{x}B| = m \cdot n$ – правило прямого добутку.

Інтерпретація. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати m-способами, а елемент $b \in B$ вибрати mспособами, то вибір пари $(a,b) \in A\text{x}B$ у вказаному порядку можна виконати

$$|A \times B| = m \cdot n\text{-способами.}$$

Причому вибір елементів множини A не залежить від способу вибору елементів множини B.

Якщо $X_1, X_2, ..., X_k$ – довільні множини, $|X_i| = n_i$, $i = \overline{1,k}$, то

$$|X_1 \times X_2 \times ... \times X_k| = \left|\left\{(x_1, x_2, ..., x_k) \middle| X_i \in X_i, i = \overline{1,k}\right\}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k.$$

Приклад 1. Із залізничного вокзалу м. Києва до Львівської площі ведуть чотири дороги, що проходять через площу Перемоги, від якої є три дороги до Львівської площі. Скількома шляхами можна пройти з вокзалу до Львівської площі?

Розв'язання. Побудуємо схему задачі (рис.1).

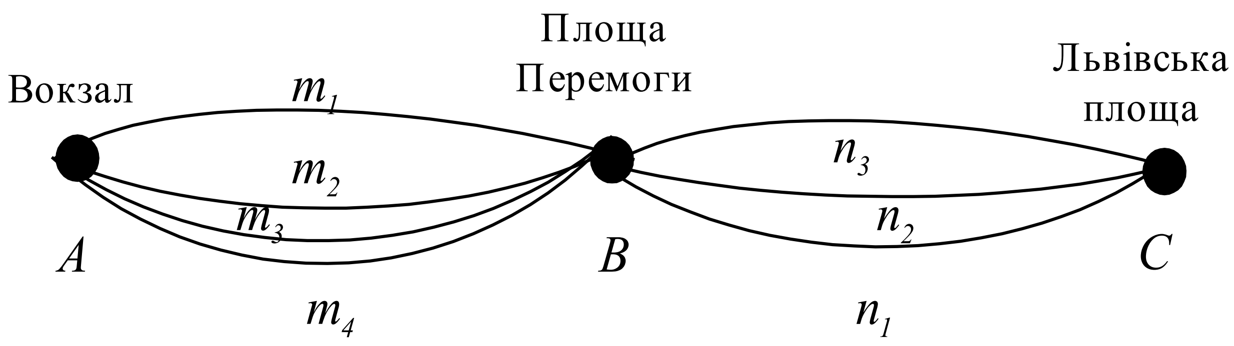


Рис.1

Введемо дві множини $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ – дороги з A в C. Шлях із A в C, це пара (m_i, n_j), де $i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,3}$.

$M \times N$ – множина всіх можливих пар, тобто доріг із A в C, загальна їх кількість $|M \times N| = 4 \cdot 3 = 12$.

Отже, з вокзалу до Львівської площі можна пройти 12 шляхами.

1.1. РОЗМІЩЕННЯ З ПОВТОРЕННЯМ

Класичною задачею комбінаторики є задача визначення числа способів розміщення деяких об'єктів в якійсь кількості "урн", так щоб були виконані деякі обмеження.

Сформулюємо задачу: нехай маємо n предметів різного виду $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, з яких складають набори довжиною $m\,(m < n)$. Наприклад, x_1, x_2, x_3; x_1, x_1, x_2; x_2, x_3, x_3 і т.д. такі набори називають *розміщенням з повторенням* із n по m. Поставимо задачу знаходження числа всіх можливих наборів із n по m (позначаються $V(n, m)$; вважаючи *різними* ті, які відмінні один від одного або видом предметів, що в них входять, або порядком їх розміщення). Зауважимо, що при складанні наборів довжиною m на кожне i-місце можна покласти предмет довільного вигляду.

Для розв'язання задачі розглянемо множини $X_1 = X_2 = ... = X_m = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Розміщення з повторенням складуть множину $X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$. Тоді за правилом прямого складу $|X_1 \times X_2 \times ... \times X_m| = \overbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}^{m\text{ разів}} = n^m$.

Тобто число всіх розміщень з повторенням із n по m обчислюється за формулою $\mathrm{V}(n, m) = n^m$.

Якщо ж $|A_1| = n_1$; $|A_2| = n_2 ...$, $|A_m| = n_m$, то

$\mathrm{V}(n, m) = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$.

Приклад 2. Знайти загальну кількість всіх натуральних чотиризначних чисел.

Розв'язання. Введемо множини

$$A_1 = \{1, 2, ..., 9\}, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \{0, 1, 2, ..., 9\};$$

$$|A_1| = 9, \quad |A_2| = |A_3| = |A_4| = 10.$$

Чотиризначні числа утворять прямий добуток $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ в заданому порядку. За правилом прямого добутку $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Приклад 3. Скількома способами можна розфарбувати 6 дошок в 4 кольори?

Розв'язання. $\mathrm{V}(6;4) = 6^4$.

1.2. РОЗМІЩЕННЯ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ

Нехай маємо n предметів різного виду $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Розглянемо розміщення з n по m такі, що вважаються відмінними одне від іншого, якщо вони відрізняються видом елементів, що в них входять, або порядком їх розміщення. Такі набори мають назву *розміщення без повторень*.

Наприклад: утворимо всі послідовності наборів із множини $x = \{1;2;3;4\}$ по три елементи:

$\{1;2;3\}$; $\{2;1;3\}$; $\{3;1;2\}$; $\{4;1;2\}$,

$\{1;2;4\}$; $\{2;1;4\}$; $\{3;1;4\}$; $\{4;1;3\}$,

$\{1;3;2\}$; $\{2;3;4\}$; $\{3;2;4\}$; $\{4;2;1\}$,

$\{1;3;4\}$; $\{2;3;1\}$; $\{3;2;1\}$; $\{4;2;3\}$,

$\{1;4;2\}$; $\{2;1;4\}$; $\{3;4;1\}$; $\{4;3;1\}$,

$\{1;4;3\}$; $\{2;4;3\}$; $\{3;4;2\}$; $\{4;3;2\}$.

Поставимо задачу знайти кількість розміщень без повторень із n по m. Позначається A_n^m. Читається “розміщення з n по m”.

Утворюючи такі набори на перше місце можна поставити довільний із n-предметів, на друге – лише довільний із $(n-1)$-предметів і т.д. На m-місце – довільний із $(n-m+1)$-предметів. За правилом прямого добутку отримаємо,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$(0! = 1; \quad n! = 1,2,...,n)$.

Приклад 4. У спортивному турнірі з шахів беруть участь десять учасників. Скількома способами можна розподілити призові місця (I, II, III) у змаганнях?

Розв'язання. Вважаючи, що всі учасники можуть зайняти призові місця однаково, отримаємо $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ можливих варіантів трійки призерів.

1.3. ПЕРЕСТАНОВКИ

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ містить n предметів різного виду.

Розглянемо розміщення з n елементів по n, що відмінні одне від другого лише *порядком* елементів, що в них входять. Такі розміщення називають *перестановками*, їх число позначають P_n.

$$P_n = A_n^n = n!$$

Приклад 5. Маючи шість олівців різного кольору, малюк малює веселку з шести кольорів. Скільки різних веселок він може намалювати?

Розв'язання. Число веселок – це число перестановок із шести по шість, тому малюк може намалювати

$P_6 = 6!$ веселок.

Перестановки $f = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ елементів 1,2,…, n записують і в матричній формі $f = f\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix}$, де верхній рядок фіксований, однозначно відповідний послідовності, яка розташована в нижньому рядку, π_j-номер елемента на j-му місці перестановки. Порядок стовпців у перестановках, записаних матричним способом, неістотний. Наприклад, перестановку (5,6,7,8) можна задати так:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \ f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \ f = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перестановки $\pi = (\pi_1; \pi_2, ...\pi_n)$ елементів 1,2,…,n можна задати за допомогою орієнтованих графів з множиною вершин $X = \{1,2,...,n\}$, в яких x_i входить в y_i тоді, коли $y_i = f(x_i) = \pi_i$; $i = \overline{1,n}$.

Із кожної вершини виходить одне ребро $(x_i, f(x_i)) = (x_i, \pi_i)$. Легко побачити, що, виходячи з довільної вершини x_0 і розглядаючи по черзі вершини $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), ...$, ми дійдемо після скінченного числа кроків до вершини x_0, тобто $x_i = f(x_{i-1})$.

Отже, граф складається з деякого числа елементарних циклів з різними множинами вершин, що в сумі дають всі множини X. Нехай у розкладі існує k-циклів:

$$a_0^{(i)} \to a_1^{(i)} \to ... \to a_{n_i - 1}^{(i)} \to a_0^{(i)} \qquad i = \overline{1,k}.$$

Кожному циклу відповідає перестановка $f_i = (a_0^{(i)} a_1^{(i)} ... a_{n_i - 1}^{(i)})$, що називається циклом (довжини n_i), яка визначається так:

$$f_i(a_0^{(i)}) = a_1^{(i)}, \quad f_i(a_1^{(i)}) = a_2^{(i)} ..., \quad f_i(a_{i-1}^{(i)}) = a_0^{(i)},$$

$$f_i(x) = x; \quad x \in \{a_0^{(1)}, ;... a_{n_{i-1}}^{(i)}\}.$$

Перестановку можна записати у вигляді суперпозицій циклів

$$f = (a_0^{(1)} a_1^{1} ... a_{n_{i-1}}^{(1)})(a_0^{(2)} a_1^{(2)} ... a_{n_{2-1}}^{(2)})...(a_0^{(k)} a_1^{(k)} ... a_{n_{k-1}}^{(k)}),$$ тобто перестановку представлено розкладом на цикли.

Називатимемо перестановку f перестановкою типу $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$, якщо вона містить цикли в точності до α_i- циклів і довжиною $i = \overline{1,n}$. Тип $< \alpha_1, ..., \alpha_n >$ записують символічно $1^{\alpha 1} 2^{\alpha 2} ... n^{\alpha n}$ ($\lambda_i = 0$, то $i^{\lambda i}$ – опускається).

Наприклад, перестановка

$$f = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

має розклад по циклах

$f = (1\ \ 7\ \ 6\ \ 3)\quad (2\ \ 5)\quad (4)$, тобто тип $1^1 2^1 4^1$.

Зобразимо розклад f на цикли (рис.2).

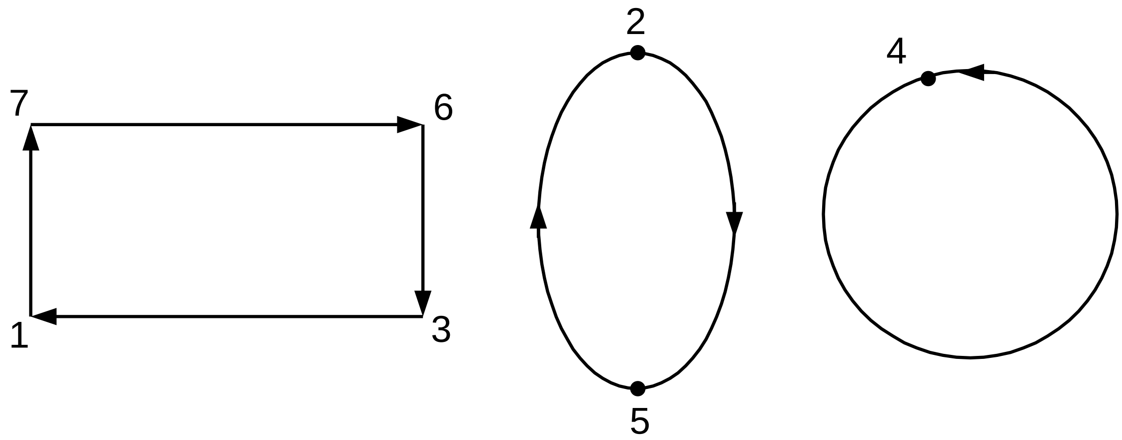


Рис.2

1.4. КОМБІНАЦІЇ

Розглянемо набори з n різних елементів по m $(m < n)$, в яких нас цікавить склад набору, і не цікавить порядок елементів у наборі. Такі розміщення називають *комбінаціями*.

Тобто комбінаціями з n різних елементів по m називають всі можливі розстановки довжини m, утворені з цих елементів і відмінні одна від другої *складом*, але не порядком елементів.

Загальне число комбінацій позначають $C_n^m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ і читають "число комбінацій із n по m".

Знайдемо це число.

Складемо всі комбінації з n елементів по m, тобто C_n^m. Потім переставимо в кожній комбінації елементи всіма можливими способами. Ми отримали набори, які відмінні або складом, або порядком розміщення елементів у наборі, тобто це всі розміщення без повторень із n по m. Їх число A_n^m. За умови, що кожна комбінація дає $m!$ розміщень, то за правилом добутку можна записати

$$m!C_n^m = A_n^m, \text{ або } C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}.$$

Приклад 6. Студент хоче гарантовано вгадати п’ять номерів лотереї “5 із 36”. Скільки білетів він повинен купити?

Розв’язання. Очевидно, що мова йде про число комбінацій 5 із 36, а саме:

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{31!5!} = 376992 \text{ білети.}$$

1.5. КОМБІНАЦІЇ З ПОВТОРЕННЯМ

Нехай маємо множину з n-предметів різного виду. Число елементів кожного виду необмежене. Поставимо задачу визначити кількість наборів довжиною m, які не залежать від порядку. Такі набори називають *комбінаціями з повторенням*, кількість яких визначають так: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$. Виведемо дану формулу. Нехай $x_1, x_2, ..., x_m$ – вихідні довільні типи елементів, загальне число яких n. Розглянемо довільні комбінації з повторенням:
$x_1 x_2 x_1 x_2 ... x_m$ з даних елементів.

З урахуванням того, що порядок елементів у комбінаціях нас не цікавить, побудуємо їх так:

$x_1 x_1 x_1 ... x_1 | x_2 ... x_2 | ... | x_m x_m ...,$ де елементи кожного типу впорядковані і відділені один від одного вертикальною рискою, за виключенням останньої серії елементів. З урахуванням рисок, довжина такого набору становить

$m + (n-1) = m + n - 1,$ де

m – кількість елементів у наборі,

$n-1$ – число вертикальних рисок. Такий набір можна задати вибором із $(n+m-1)$-місць $(n-1)$-чином для положення вертикальних ліній.

Це можна зробити C_{n+m-1}^{n-1} способами, тобто $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$ – число комбінацій з повторенням із n по m.

Приклад 7. Скількома способами четверо дітей можуть поділити між собою 80 цукерок?

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному розподілу цукерок комбінації з повторенням. Нехай типами елементів будуть діти – x_1, x_2, x_3, x_4, тобто $n = 4$, для яких треба скласти всі комбінації довжиною $m = 80$. Належність у наборі будь-якого елемента відповідає належності даної цукерки відповідній дитині x_i, причому порядок в такому наборі не має значення, все одно яка з цукерок дістанеться тій чи іншій дитині. За таких умов, число способів розподілу цукерок між дітьми $\overline{C_{80}^4} = C_{4+80-1}^{80} = \frac{83!}{3!80!} = 9188$.

Приклад 8. Скількома способами можна розмістити m-прибулих гостей серед n-гостей, що вже сидять за круглим столом?

Розв'язання. Очевидно, що між n-гостями, які сидять за столом, існують m-проміжків, у яких можна розмістити m-прибулих гостей. Це можна зробити

$$\overline{C}_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}$$ способами.

1.6. ПЕРЕСТАНОВКИ З ПОВТОРЕННЯМ

Розглянемо мультимножину M, яка може вміщувати однакові елементи. Наприклад, $M = \{1;1;1;2;2;2;3;3;3;3;3;3\}$. Повторення елементів мультимножини можна задати й іншим способом $M = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2; 6 \cdot 3\}$.

Сформулюємо задачу. Нехай задано предмети m–типів. Скільки існує перестановок n_1 елементів першого типу, n_2–другого типу і т.д., n_m–m-го типу?

$$n_1 + n_2 + ... + n_m = n.$$

Такі перестановки називають *перестановками з повторенням*. Практично – це перестановки елементів деякої мультимножини. Нехай, наприклад, $M = \{5l;2k;4f\}$. Розглядаючи елементи M, як різні, тобто $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, k_1, k_2, f_1, f_2, f_3, f_4$, отримаємо 11! перестановок. Без індексів багато з перестановок будуть однакові. Фактично кожна з перестановки множини M зустрілась би рівно $5!\cdot 2!\cdot 4!$ раз, оскільки для елемента l індекси можна поставити $(5!)$–способами, елемента $(k-2!)$–способами, для елемента f $(S-4!)$–способами. Тому число перестановок множини M дорівнює $\frac{11!}{5!2!4!}$.

У загальному випадку число перестановок мультимножини (перестановок з повторенням)

$$p(n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!},$$ де

$n_1 + n_2 + ... + n_m = n$ – загальна кількість елементів множини.

Встановимо зв'язок між перестановками з повторенням і комбінаціями. Визначимо кількість перестановок з повторенням. Із усіх n-місць перестановки першого типу займають n_1-місце. Вибір місць для них можна зробити $C_n^{n_1}$ способами. Залишилось $(n-n_1)$-місць, на яких можна розмістити n_2 елементи другого типу $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами і т.д. елементи m-го типу – $C_{n-n_1-n_2-...n_{m-1}}^{n_m}$ – способами. За правилом прямого добутку

$$P(n_1, n_2, ..., n_m) = C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} ... C_{n-n_1-n_2-...-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.$$

Приклад 9. Скільки існує різних перестановок букв у слові "математика"?

Розв'язання. $P(3\cdot a;2m;1e;2м;1и;1к) = \frac{10!}{3!\ 2!\ 1!\ 2!\ 1!\ 1!} = 151200.$

1.7. ВПОРЯДКОВАНІ ТА НЕВПОРЯДКОВАНІ РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Розглянемо деяку множину A, потужність якої $|A| = n$. Підрахуємо число розбиттів даної множини на m різних підмножин, таких що $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = A$; $A_j \cap A_j = \downarrow$; $i \neq j$, $|A_i| = n_i$, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Розглянемо послідовність підмножин $A_1, A_2, ..., A_m$ як впорядковану. Тоді на перше місце підмножину A_1 можна вибрати $C_n^{n_i}$ способами, на друге місце множину A_2 $-C_{n-n_1}^{n_i}$ способами і т.д. На останнє місце A_m можна вибрати із залишку $C_{n-n_1-n_2-...-n_{m-1}}^{n_m}$ способами.

За правилом прямого добутку число розбиттів множини A на m-підмножин дорівнює:

$$C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} ... C_{n-n_1-n_2-...-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!},$$

що співпадає з числом перестановок із повторенням.

Приклад 10. В групі з 30 студентів вибирають делегата на конференцію. “За” дану кандидатуру проголосувало 20 студентів, “проти” – 6, “утрималося” – 4.

Скількома способами могло бути проведено таке голосування?

Розв’язання. Розглянемо множини:

$A = \{x | \text{x - студент, x} \in \overline{1,30}\}$;

$A_1 = \{x | \text{x - студент, що голосує "за", x} \in \overline{1,20}\}$;

$A_2 = \{x | \text{x - студент, що голосує "проти", x} \in \overline{1,6}\}$;

$A_3 = \{x | \text{x - студент, що "утримався", x} \in \overline{1,4}\}$;

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$. $|A_1| = 20$; $|A_2| = 6$; $|A_3 = 4|$.

Кількість способів голосування

$$C_{30}^{20}C_{10}^{6}C_{4}^{4}=\frac{30!}{20!\ 6!\ 4!}.$$

Знову розіб’ємо множину $A, |A| = n$ на підмножини, серед яких для кожного $i=\overline{1,n}$ існує $m_i \geq 0$ підмножин з i-елементами.

Тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} im_i = n, \quad A=\bigcup\limits_{j=1}^{m_1}A_{1j}\bigcup\limits_{j=1}^{m_2}A_{2j}\bigcup\limits_{j=1}^{m_1}\dots\bigcup\limits_{j=1}^{m}A_{nj}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m}A_{ij}$,

де A_{ij} – попарно неперетинні та $|A_{i1}|=|A_{i2}|=\dots|A_{im1}|=i$ для кожного $i=\overline{1,n}$. Порядок підмножин в розбитті неістотний.

Так, наприклад, розбиття множини

$A=\{a,b,c,d\}$

$\{a\}; \quad \{b,c\}; \quad \{d\}.$

$\{b,c\}; \quad \{a\}; \quad \{d\}.$

$\{d\}; \quad \{a\}; \quad \{b,c\}.$

вважаються однаковими.

Позначимо число невпорядкованих розбиттів множини A через $N(m_1,m_2,\dots,m_n)$ та розглянемо схему формування впорядкованих розбиттів множини для

$$n=1\cdot m_1+2\cdot m_2+\dots+i\cdot m_n : \underbrace{C_n^1 C_{n-1}^1\dots}_{m_1}\underbrace{C_{n-1m_1}^2 C_{n-1m_1-1}^2\dots}_{m_2}\dots$$

$$\dots\underbrace{C_{n-1m_1-2m_2-\dots-(n-1)m_{n-1}}^{i}}_{m_n}=\frac{n!}{\underbrace{1!\dots1!}_{m_1}\underbrace{2!\dots2!}_{m_2}\dots\underbrace{n!\dots n!}_{m_n}}=\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(n!)^{m_n}}.$$

Нехай в n різних урн закладають i кульок $m_1+m_2+\dots+m_n=n.$ Якщо всі урни вміщують різне число кульок, то вони різні, тобто впорядковані і невпорядковані розклади співпадають. Нехай тепер в урни вміщують однакову кількість кульок. При впорядкованому розкладі такі урни різні. При невпорядкованому розкладі обмін кульками таких урн можна розглядати як відповідну перестановку вказаних урн, що не приводить до нових розкладів. Тобто число невпорядкованих розкладів буде в $m_1!\ \mathrm{m}_2!...m_n!$ разів менше, ніж впорядкованих, а саме

$$N(m_1 m_2,...,m_n)=\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(n!)^{n_m}m_1!m_2!...m_n!}.$$

Приклад 10. Скількома способами можна поділити колоду з 36 карт навпіл, щоб в кожній половинці було дві дами?

Розв'язання. 4 дами розкласти на $\frac{4!}{(2!)^2 2!}=3$ різних коаліцій (невпорядковане розбиття). Кожна половина трьох розкладів дам виконує роль двох "урн", куди необхідно покласти розділені навпіл 32 карти. Розкладання 32 карт – впорядковане, бо "урни" різні, число їх $\frac{32!}{16!16!}$.

За правилом прямого добутку

$$N=\frac{4!}{(2!)^2 2!}\cdot\frac{32!}{16!16!}=\frac{3\cdot 32!}{16!16}.$$

1.8. ПОЛІНОМІНАЛЬНА ФОРМУЛА. БІНОМ НЬЮТОНА

Формула $(x_1+x_2+...+x_i)^n=\sum\limits_{n_1+n_2+...+n_i=n}\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_i!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_i^{n_i}$ називається поліноміальною, сума виконується по всіх розв'язках рівняння $n_1+n_2+...+n_i=n$ в цілих невід'ємних числах, $n_j\geq 0$; $j=1,2,...,i$.

Окремим випадком поліноміальної формули є біном Ньютона

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доведення бінома проведемо методом індукції.

Доведення. База $n=1$.

$$(x+y)^1=x+y=1x^1y^0+1x^0y^1=C_1^0x^1y^0+C_1^1x^0y^1=\sum_{n=0}^{1}C_n^1x^ny^{1-n}.$$

Індукційний перехід:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} xC_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} yC_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} y^{n-k-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)x^k y^{n-k}\right) + \left(C_{n-1}^{k-1} x^n y^0\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k y^{n-k} + C_n^k x^n y^{n-n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Наслідок: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Доведення. Скористуємося формулою бінома Ньютона $x = y = 1$.

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = 2^n.$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$
2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n.$
3. $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$

Із властивості три випливає ефективний спосіб рекурентного обчислення значень біноміальних коефіцієнтів, який можна записати в графічній формі, відомій як трикутник Паскаля.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -
\end{array}$$

1.9. ПРИНЦИП ВКЛЮЧЕННЯ ТА ВИКЛЮЧЕННЯ

Розглянуті раніше формули дають способи обчислення комбінаторних чисел лише для деяких комбінаторних конфігурацій. Практичні задачі не завжди прямо можна звести до відомих комбінаторних схем.

Досить часто комбінаторна конфігурація є об'єднанням інших комбінацій, які обчислити просто. В елементарних випадках формули очевидні:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 11. Скільки існує натуральних чисел, менших за 1000, які не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7? (Всього чисел менших за 1000, 999).

Розв'язання. Скористуємося відомою формулою загального члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1. Знайдемо кількість чисел, що діляться на 3.

$a_1 = 3; \quad d = 3; \quad a_n = 999.$

$999 = 3 + 3(n-1); \quad n = 333.$

2. Знайдемо кількість чисел, що діляться на 5.

$a_1 = 5; \quad d = 5; \quad a_n = 995.$

$995 = 5 + 5(n-1); \quad n = 199.$

3. Знайдемо кількість чисел, що діляться на 7.

$a_1 = 7; \quad d = 7; \quad a_n = 994.$

$994 = 7 + 7(n-1); \quad n = 142.$

аналогічно:

4. Кількість чисел, що діляться на 3 та 5 дорівнює 66.
5. Кількість чисел, що діляться на 3 та 7 дорівнює 47.
6. Кількість чисел, що діляться на 5 та 7 дорівнює 28.
7. Кількість чисел, що діляться на 3, 5, 7 дорівнює 9.

Тоді 999 – (333+199+142 – 66 – 47 – 28+9)=457.

В загальному випадку існує формула відома як принцип включення та виключення, що дозволяє обчислити потужність об’єднання множин, якщо відомі їх потужності та потужності всіх їх перетинів:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j\le k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

1.10. ТВІРНІ ФУНКЦІЇ

В комбінаторних задачах на підрахунки числа об’єктів при деяких обмеженнях часто шуканим розв’язком є деяка послідовність $\{a_m\}$, наприклад при обчисленні числа розбиттів $a_m = p(m)$.

В цьому випадку послідовності можна поставити у відповідність формальний ряд

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

який називають твірною функцією послідовності $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ Функція $A(x)$ може бути як функцією дійсної, так і комплексної змінної.

Вираз $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$

– це розклад функції $A(x)$ в ряд Тейлора - Маклорена.

Для довільних рядів

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \text{ то } B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m .$$

Визначимо операції:

1. *Додавання*

$$A(x) + B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) x^m$$

2. *Множення на число*

$$\alpha A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m x^m.$$

3. *Добуток Коші*

$$A(x)B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \text{ де}$$

$$C_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + ... + a_m b_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}.$$

З математичного аналізу відомо:

1. $A(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x_m$; послідовність $a_m = 1; \quad m \geq 0.$

2. $A(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m (1+m)$; послідовність $a_m = m+1; \quad m \geq 0.$

3. $A(x) = (1+x)^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_n^m x^m$; послідовність $a_m = C_n^m; \quad m \geq 1.$ n – довільне.

4. $A(x) = e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}$; послідовність $a_m = \dfrac{1}{m!}; \ m \geq 0$.

5. $A(x) = \ln \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{m}$; послідовність $a_m = \dfrac{1}{m}; \quad m \geq 1.$ $a_0 = 0.$

6. $A(x) = \ln(1+x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m+1} x^m}{m}$; послідовність $a_m = \dfrac{1}{m}; \quad m \geq 1.$ $a_0 = 0.$

7. $A(x) = (1-x)^{-n} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_{n+m-1}^m x^m$; послідовність $a_m = C_{n+m-1}^m; \ m \geq 0$. n – довільне.

Наприклад, знайти твірну функцію послідовності $1,2,4,8,...,2^k$, …

Відомо, що $\sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m = (1-x)^{-1}$; $\quad \sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^m x^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (2x)^m = \dfrac{1}{1-2x}$, тобто твірна функція послідовності 1;2;4;… є $\dfrac{1}{1-2x}$.

Наприклад. Відомо, що числа Фібоначчі F_n є розв’язком рекурентного рівняння

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1};\ n\ge 1$ з початковими умовами $F_0=F_1=1.$

Твірна функція $F(x)$ для послідовності $F_0;F_1;F_2,...$ задовольняє рівняння

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty}F_m x^m=1+x+\sum_{m=2}^{\infty}\left(F_{m-2}+F_{m-1}\right)x^m=$$

$$=1+x+x^2\sum_{m=2}^{\infty}F_{m-2}x^{m-2}+x\sum_{m=2}^{\infty}F_{m-1}x^{m-1}=1+x+x^2F(x)+$$

$$+x(F(x)-1)=1+(x+x^2)F(x).$$

Звідси твірна функція для чисел Фібоначчі

$F(x)=(1-x-x^2)^{-1}$. Знайдемо корені рівняння

$1-x-x^2=0;\quad 1-x-x^2=(1-ax)(1-bx),$ де

$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\quad b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Розкладемо $F(x)$ на елементарні дроби:

$$F(x)=\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}=\frac{1}{1-x-x^2};$$

$$A(1-bx)+B(1-ax)=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=1;\\ Ab+Ba=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{a}{a-b};\quad B=-\frac{b}{a-b},$$

тобто

$$F(x)=\frac{a}{a-b}\sum_{m=0}^{\infty}a^m x^m+\frac{-b}{a-b}\sum_{m=0}^{\infty}b^m x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}x^m.$$

Отже, $F_m=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right).$

Нехай $A(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ має місце рівняння

$A(x) = xA^2(x) + 1$ – добуток Коші,

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Розкладемо $(1-4x)^{1/2}$ в ряд Маклорена, $m > 0$

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m 1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2m-3)}{m!} x^m = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m-1} x^m.$$

Виберемо додатний розв'язок для $A(x)$.

$$A(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m-1} x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} C_{2m}^{m} x^m,$$ звідси

$$a_m = \frac{1}{m+1} C_{2m}^{m}.$$

Числа a_m називаються числами Каталана, які з'являються при розв'язанні комбінаторних задач.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,…,9, якщо цифри можуть повторюватися?
2. Скільки існує двозначних чисел, що мають обидві парні цифри?
3. Скільки існує п'ятизначних чисел, які можна читати однаково зліва направо і справа наліво?
4. Скільки існує шестизначних чисел, які діляться на 5?
5. У турнірі беруть участь 18 команд. Скількома способами можна розподілити золоту, срібну та бронзову медалі, якщо кожна команда може отримати лише одну медаль?
6. Скільки всього семизначних телефонних номерів, в яких жодна з цифр не повторюється?
7. Скільки існує двозначних чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні?
8. Скількома способами сім книжок різних авторів можна розставити в один ряд?
9. Скількома способами можна вибрати дві книжки з п'яти?

10. В опуклому семикутнику проведені всі можливі діагоналі. При цьому ніякі три з них не перетинаються в одній точці. Скільки існує точок перетину діагоналей?

11. В турнірі беруть участь 16 команд, причому дві команди грають між собою тільки один раз. Скільки всього календарних ігор?

12. Дано п’ять різних чисел $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$. Скількома способами можна скласти різні добутки з цих чисел, що складаються з:

а) трьох різних множників;

б) чотирьох різних множників;

в) п’яти різних множників.

13. У Ніни є сім різних книжок з математики, а у Слави – дев’ять різних з філософії. Скількома способами вони можуть обмінятися між собою по п’ять книжок?

14. З двох математиків і десяти економістів треба скласти комісію в складі 8-ми чоловік. Скількома способами це можна зробити, якщо в комісію повинен увійти хоча б один математик?

15. Скільки існує дільників числа 210?

16. Із 8 квіток (троянда, тюльпан, гвоздика, гладіолус, фіалка, ромашка, лілія, айстра) треба скласти букет так, щоб в нього входило не менше 2 квіток. Скількома способами це можна зробити?

17. Скільки раціональних чисел є в розкладі $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$?

18. Довести тотожності:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$;

г) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n$;

д) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$

19. Знайти число підмножин множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

20. Довести рівність:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^r = 3^n.$$

21. Знайти суму $\sum_{k=0}^{n}\left(k^2 - 1 + \frac{1}{k+1}\right)C_n^k.$

22. З міста А в місто Б ведуть 8 доріг, а з міста Б в місто С – чотири дороги. Скільки можливих шляхів ведуть із А в С?

23. Знайти число додатних цілих чисел, що не більші від 1000 і не діляться ні на одне з чисел 3,5 та 7.

24. Знайти число додатних цілих чисел, що не більші від 1000 та не діляться ні на одне із чисел 6,10,15.

25. У ліфт зайшло 10 студентів. Скількома способами вони можуть вийти на 4-х поверхах так, щоб на кожному поверсі вийшла хоча б один студент ?

26. Скількома способами можна розкласти 10 книжок в 4 бандеролі, по 2 книги в кожну?

27. Скількома способами можна розділити колоду з 36 карт навпіл так, щоб в кожній пачці було по 2 тузи?

28. Визначити коефіцієнт a в одночлені $a \cdot x_1^3 x_2^4 x_3^3$ після розкладу виразу $(x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ та зведення подібних членів.

29. Скількома способами можна розмістити n_1-червоних, n_2-жовтих, n_3- зелених кульок по m- різних урнах?

30. Скількома способами 3 людини можуть розділити між собою 6 однакових яблук, 1 апельсин, 1 сливу, 1 лимон, 1 айву, 1 грушу, 1 мандарин?

31. Скількома способами можна вибрати 5 номерів із 36?

32. Скількома способами можна вибрати 6 карт із колоди в 52 карти, щоб серед них були карти кожної масті?

33. В колоді 52 карти. В скількох випадках при виборі з колоди 10 карт серед них буде: а) хоча б один валет; б) один валет; г)рівно 3 валети; д) не менше двох валетів?

34. У мами 10 яблук, 6 слив і 4 апельсини. Кожен день на протязі 20 днів підряд вона видає сину по 1 фрукту. Скількома способами вона це може зробити?

35. На дискотеці знаходяться 15 дівчат та 20 хлопців. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари? Побудувати графічне відношення: $R - \{x, y |$ пара танцюючих$\}$.

36. Яку кількість матриць можна скласти із n-рядків та стовпців з елементами із множини $B = \{0;1\}$?

37. Довести тотожність:

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-1}} \dots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+m}^{n+1}.$$

38. Скількома способами можна розмістити 10 чоловіків і 10 жінок за круглий стіл так, щоб ніякі двоє однієї статі не сиділи поруч?

39. Скільки чисел між 1000 і 10000 складаються з непарних цифр, скільки із різних цифр?

40. Паліндром – це слово, словосполучення чи фраза, які можна читати однаково як зліва направо, так і справа наліво. Скільки паліндромів довжини n можна скласти, використовуючи 26 букв алфавіту?

41. Довести тотожності:

$$C_{n+1}^{k} = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \dots + C_{n-k}^{0};$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k} + \dots + C_{k}^{k}.$$

42. Довести тотожність: $nC_{n-k}^{k-1} = kC_n^k$.

43. Знайти число маршрутів із пункту M в пункт N через пункт K, якщо із M в K ведуть 3 дороги, а із K в N – 5 доріг.

44. Знайти число п’ятизначних чисел.

45. Скількома способами можна розмістити 8 фігур, кожна з яких тура, на шаховій дошці, щоб вони “не били” одна одну?

46. Задача про прямокутники. Скільки різних прямокутників можна вирізати з клітинок дошки, розмір якої $m \times n$?

47. Скільки існує різних перестановок із букв слова “електричка”?

48. У студентській групі, яка складається з 30 чоловік, при голосуванні “за” проголосувало 20, “проти” – 6, “утрималося” – 4 студенти. Скількома способами може бути проведене таке голосування?

49. Скількома способами з групи 20 чоловік можна сформувати 6 коаліцій по 3 чоловік та 1 із двох чоловік?

50. 25 студентів групи успішно склали з три екзамени весняної сесії. Можливі оцінки: 5,4,3. Довести, що хоча б 3 студенти здали сесію з однаковими оцінками.

51. На деякому підприємстві працюють 250 чоловік. Довести, що з них не можна утворити більше 30 бригад по 5 чоловік в кожній так, щоб ніякі дві бригади не мали більш одного спільного члена.

52. Деяка комісія збиралась 40 раз. Кожний раз на засіданні були присутні 10 чоловік, причому жодні два з членів комісії не були на засіданнях більше одного разу. Довести, що число членів комісії не перевищує 60 чоловік.

53. Скількома способами можна утворити 5 бригад з 50 робітників по 10 чоловік у кожній? 10 бригад по 5 чоловік у кожній?

54. Скількома способами можна розділити колоду карт із 36 карт навпіл, щоб у кожній половині було по 2 валети?

55. Треба розкласти в 100 кошиків 1000 кульок різного кольору. Скількома способами це можна зробити, якщо порожніх кошиків бути не може?

56. Із тридцяти студентів 60% вивчають німецьку мову, 50% – англійську мову, 50% – французьку мову, 30% – німецьку та французьку; 20% – англійську та французьку, 40% – англійську та німецьку, 10% – англійську, німецьку і французьку мови. Скільки процентів студентів: а) не вивчають жодної мови; б) вивчають дві мови; в) вивчають не менше двох мов?

57. Яких чисел більше серед першого мільйона: тих, в запису яких зустрічаються цифра 1 чи тих, де вона не зустрічається?

58. Довести, що з п'яти грибів, які ростуть у лісі і не розташовані на одній прямій, завжди можна знайти таких чотири, які будуть вершинами опуклого чотирикутника.

59. Маємо n-абонентів. Скількома способами можна з'єднати одночасно трьох?

60. Скільки і яких цифр необхідно, щоб записати всі натуральні числа, що менші за 10^n?

61. Застосовуючи правила суми й добутку, розв'язати задачі:

а) Скількома способами з 28 пластинок доміно можна вибрати дві так, щоб їх можна було прикласти одна до одної?

б) В Англії прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину. Якщо їй дають не більше трьох імен, а всього 300 імен. (Два способи, які відмінні порядком імен, вважаються різними).

62. Із 100 букв, буква ***а*** зустрічається 20 разів, буква ***в*** – 5 разів, а інші попарно різні, складаються комбінації з повторенням довжиною 10 букв. Скільки серед них таких, що містять букву ***а*** 15 разів, букву ***в*** – 4 рази?

63. Маємо колоду з $4n$ карт ($n \geq 5$), які містять чотири масті по n-карт у кожній масті, занумерованих числами $1,2,\ldots,n$. Підрахувати, скількома способами можна вибрати п'ять карт, серед яких буде:

а) п'ять послідовних карт однієї масті;

б) чотири карти з п'яти з однаковими номерами;

в) три карти з одним номером і дві карти з іншим;

г) п'ять карт однієї масті;

д) п'ять послідовно занумерованих карт;

е) три карти з п'яти з одним і тим самим номером;

ж) дві карти з п'яти з однаковими, а інші з різними номерами.

64. Довести такі властивості біномних коефіцієнтів:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$; 2) $C_n^k C_k^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$;

3) $\sum_{r=k}^{n} C_k^r = C_{n+1}^{k+1}$; 4) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

5) $\dfrac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \dfrac{n+1}{n-k+1}$.

65. Використовуючи тотожність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

довести:

1) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

2) $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$;

3) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1) 2^{n-2}$;

4) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1);$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k=1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n};$

6) $\sum_{r=0}^{k}C_m^rC_n^{k-r}=C_{n+m}^k;$

7) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2=(-1)^nC_{2n}^n;$

8) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2\left((n-k)!\right)^2}=\left(C_{2n}^n\right)^2.$

9) $\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n}C_k^nC_m^k=\begin{cases}0, \text{якщо } \mathrm{m}\neq n\\ 1, \text{якщо } \mathrm{m}=n.\end{cases};$

10) $\sum_{k}C_n^{2k}=\sum_{k}C_n^{2k+1}=2^{n-1}.$

66. Довести, що $m\sum_{k}\alpha^{mk+r}C_n^{mk+r}=\sum_{v=0}^{m-1}e^{-\frac{2\pi irv}{m}}\left(1+\alpha e^{\frac{2\pi irv}{m}}\right)^n.$

За допомогою даної тотожності обчислити:

1) $\sum_{k}3^kC_n^{2k};$ 2) $\sum_{k}(-1)^k2^kC_n^{4k+1};$

3) $\sum_{k}(-1)^k3^kC_n^{2k+1}\cdot C_{2k+1}^2.$

67. Нехай a – дійсні числа, k,n – цілі додатні числа. Довести, що:

1) $C_a^k+C_a^{k-1}=C_{a+1}^k;$

2) $(1+t)^a=\sum_{k=0}^{\infty}t^kC_a^k;$

3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_a^k=C_{a-1}^n;$

4) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{2k}^k\left(\frac{1}{8}\right)^k=\sqrt{\frac{2}{3}};$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} C_{1/2}^{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$

68. Показати, що кількість натуральних чисел, що діляться на n і не більші за x, дорівнює $\left[\frac{x}{n}\right]$.

69. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більші за 1000 та не діляться ні на число 6, ні на 10, ні на 15.

70. Нехай V – множина з n $(n \geq 3)$ елементів.

1. Знайти число пар (x, y) таких підмножин V, що $X \cap Y = \varnothing$.

2. Знайти число пар (x, y), що $x \subseteq V;\ y \subseteq V,\ \ (x \mid y) \cup (y \mid x) = 1.$

3. Знайти число таких пар (x, y), що $X \subseteq V;\ \mathrm{Y} \subseteq \mathrm{V};$ $|(x \mid y) \cup (y \mid x)| = 1; |x| \geq 2; |y| \geq 2.$

71. Довести, що функція $A(x)$ є твірною для послідовності $\{a_n\}$, якщо:

1) $a_n = a^n;\quad A(x) = (1-ax)^{-1};$

2) $a_n = n;\quad A(x) = x(1-x)^{-2};$

3) $a_n = n^2;\quad A(x) = x(1+x)(1-x)^{-3};$

4) $a_n = C_m^n;\quad A(x) = (1+x)^m.$

72. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої функція $A(x)$ є твірною:

1) $A(x) = (q+px)^m;$

2) $A(x) = \sqrt{1-x};$

3) $A(x) = x^m(1-x)^m;$

4) $A(x) = x^2(1-x)(1+2x)^{-m};$

5) $A(x) = \ln(1+x).$

73.Нехай $a_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n+2j}^{2j};\quad b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^{2j+1}$

$n = 0,1,2,\ldots.$ $A(x),\ B(x)$ – відповідні твірні функції.

1. Довести, що a_n та b_n зв'язані відношеннями типу

   $a_{n+1} = a_n + b_{n+1};$

   $b_{n+1} = a_n + b_n; \quad a_0 = 1; \quad \mathrm{b}_0 = 0.$

2. Знайти $A(x)$ та $B(x)$.

3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};$

   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n b_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

ГЛАВА 2. АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

2.1. ПОНЯТТЯ АЛГЕБРИ. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ АЛГЕБРИ

“Алгеброю” позначають не тільки розділ математики але й конкретні об’єкти, що вивчаються в ній. Поняття “алгебра” використовується як родове поняття для позначення різних алгебраїчних структур.

Нехай задано деяку непорожню множину *M*.

Всюди визначену функцію $f : M^n \to M$ називають n-арною операцією на M.

Якщо операція f бінарна $\left(f : M^2 \to M\right)$, то будемо записувати це так $f(x, y)$, або xoy; або xfy, (o- знак операції, або інфіксна форма запису).

Алгеброю A називається сукупність $(<>)$ множини M із заданими в ній операціями $S = \left\{f_{11}, f_{12}, f_{1n}, f_2; f_{22},..., f_{mn}\right\}$ $A = < M, S >$. M – основа або носій, S – сигнатура. Перший нижній індекс операції вказує на її арність.

Операції f_{ij} – скінченномірні (фінітарні), сигнатура S – скінченна.

Якщо f_{ij} не тільки функції але й відношення, то множина M разом зі всіма операціями та відношеннями називається моделлю.

Підмножину $N \subset M$ називають замкненою відносно операції f, якщо для всіх $x_1, x_2,...x_n \in N$, $f(x_1, x_2,..., x_n) \in N$. Тоді $\langle x, S_x \rangle$ називають підалгеброю алгебри $\langle M, S \rangle$.

Будемо називати *термом* формальний вираз, побудований за допомогою знаків сигнатури S; T – множина термів в сигнатурі S, алгебра $\langle T, S \rangle$називається *вільною алгеброю* термів, а S-алгеброю.

Розглянемо алгебру $\langle M, S \rangle$. Нехай $x, y, z \in M$, 0; $\Delta \in S$; Δ;

$0 : M \times M \to M.$

Деякі властивості операцій в алгебрі мають спеціальні назви:

1. Асоціативність $(xoy)oz = xo(yoz)$.
2. Комутативність: $xoy = yox$.
3. Дистрибутивність:

   зліва: $x\Delta(yoz) = (x\Delta y)o(x\Delta z)$,

   справа: $(yoz)\Delta x = (y\Delta x)o(z\Delta x)$.
4. Поглинання: $(xoy)ox = x$.
5. Ідемпотентність: $xox = x$.

Наприклад: комутативні операції – додавання та множення чисел, некомутативна – добуток матриць; ідемпотентна– знаходження найбільшого спільного дільника натуральних чисел, неідемпотентна – додавання чисел.

Зауважимо, що алгебри з різними типами $\langle M, S \rangle$ мають різну будову.

Розглянемо дві алгебри одного типу

🕘$= \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ та 🕛$= \langle B; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \rangle$.

Якщо існує функція $\psi : A \to B$ така, що $\Psi(f_i(a_1 a_2, \ldots, a_n)) = \varphi_i(\psi(a_1), \psi(a_2), \ldots, \psi(a_n))$, то кажуть, що ψ гомоморфізм із 🕘 в 🕛.

Наприклад.

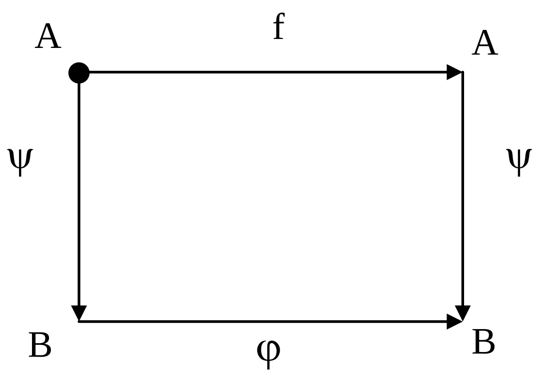


Рис. 3

Нехай $\mathfrak{A} = \langle A; f \rangle$; $\mathfrak{B} = \langle B, \varphi \rangle$,

Тип =(1) і $\psi : A \to B$. (рис. 3).

Гомоморфізм, що є ін'єкцією називається *мономорфізмом*.

Гомоморфізм, що є сюр'єкцією називається *епіморфізмом*.

Якщо $A = B$, то гомоморфізм називають *ендоморфізмом*, а ідоморфізм – *автоморфізмом*.

Якщо ψ – ідоморфізм $\psi : A \to B$, то алгебри **A** та **B** називають ізоморфними і позначають $\mathfrak{A} \overset{\psi}{\sim} \mathfrak{B}$.

2.2. АЛГЕБРИ З ОДНІЄЮ ОПЕРАЦІЄЮ

Найпростішою є алгебра з однією унарною операцією (тривіальний випадок).

Наступною за порядком є алгебра з однією бінарною операцією $o : M^2 \to M$.

Підгрупа – це алгебра з однією асоціативною операцією $xo(yoz) = (xoy)oz$.

Наприклад: довільна множина функцій, яка замкнута відносно суперпозиції утворює підгрупу.

Моноїд – це підгрупа, яка містить одиницю, тобто $\exists e \forall x$, $eox = xoe = x$.

Теорема. Одиниця єдина.

Доведення. Нехай існують дві одиниці e_1 та e_2.

Тоді: $xoe_1 = e_1ox = x$ та $xoe_2 = e_2ox = x$,

Звідки $e_1oe_2 = e_1$ і $e_2 \; oe_1 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$.

Група – це моноїд, в якому для всіх x існує x^{-1} таке, що $xox^{-1} = x^{-1}ox = e$.

Елемент x^{-1} називають оберненим елементом.

Наприклад: множина невироджених квадратних матриць утворює групу відносно операцій множення, одиницею групи являється одинична матриця, оберненим елементом – обернена матриця.

Теорема. В групі :

1. обернений елемент єдиний;
2. $(xoy)^{-1} = y^{-1}ox^{-1}.$
3. $xoy = xoz \Rightarrow y = z.$
4. $(x^{-1})^{-1} = x.$

Без доведення.

Теорема. В групі однозначно розв'язуються рівняння $aox = b,$ причому розв'зок $x = a^{-1}ox.$

Доведення.

$aox = b,$ то $a^{-1}o(aox) = (a^{-1}oa)ox = a^{-1}ob.$

Звідси $eox = a^{-1}ob,$ або $x = a^{-1}ob.$

Якщо у групі для елементів виконується рівність

$xoy = yox,$ то групу називають комутативною або абелевою групою.

Наприклад: множина додатних раціональних чисел утворює абелеву групу відносно операції множення.

2.3. АЛГЕБРИ З ДВОМА ОПЕРАЦІЯМИ

Розглянемо алгебри з двом бінарними операціями, які прийнято умовно називати "додавання" та "множення".

$\oplus \otimes : M^2 \to M.$

Кільце – це множина M з двома бінарними операціями $\oplus$ та $\otimes,$ в яких виконуються співвідношення:

1. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ – асоціативність додавання.
2. існує $0 \in M,$ такий, що для всіх $x \in M$

$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$ – існує нуль.

3. для всіх $x \in M$ існує елемент $-x$ такий, що $x \oplus (-x) = 0$ – існує обернений елемент.
4. $x \oplus y = y \oplus x$ – комутативність додавання, кільце абелева група.
5. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ – множення асоціативне, кільце – підгрупа за множенням.
6. $\begin{matrix} x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z); \\ (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \end{matrix}$ – множення дистрибутивне

зліва та справа.

7. Кільце комутативне, якщо: $x \otimes y = y \otimes x$.

8. Комутативне кільце називають кільцем з *одиницею,* якщо існує $1 \in M$, така що: $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ – існує одиниця, кільце з одиницею – моноїд по дії множення.

9. $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$.

10. $x \otimes (-y) = (-x) \otimes y = -(x \otimes y)$.

11. $(-x) \otimes (-y) = x \otimes y$.

Якщо у кільці існує $x \neq 0,\ y \neq 0$, а $x \otimes y = 0$, то x називають лівим, а y правим дільником 0.

Комутативне кільце з одиницею, що не вміщує дільників нуля, називають *областю цілісності*.

Поле – це множина з двома бінарними операціями $\oplus$ та $\otimes$ такими, що:

1. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ – асоціативність додавання.
2. Існує $0 \in M$, що $x \oplus 0 \subseteq 0 \oplus x = x$ – існує нуль.
3. для всіх $x \in M$ існує $-x$ таке, що $x \oplus (-x) = 0$ – існує обернений елемент по операції додавання.
4. $x \oplus y = y \oplus x$ – поле абелева група по операції додавання.
5. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ – асоціативність множення.
6. Існує 1, $1 \in M$ така, що $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ – існує 1.
7. Для всіх $x \in M$ та $x \neq 0$ існує x^{-1} такий, що $x^{-1} \otimes x = 1$ – існує обернений елемент.
8. $x \otimes y = y \otimes x$ - поле абелева група по операції множення.

9. $x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$ – операція множення дистрибутивна відносно операції додавання.

10. $-x = x\otimes(-1)$.

11. $-(x\oplus y)=(-x)\oplus(-y)$.

12. $x\neq 0,$ то $(x^{-1})^{-1}=x$.

13. $x\otimes y=0,$ то $x=0$ або $y=0$.

14. В полі єдиним чином розв’язується рівняння $a\otimes x\oplus b=0,$ причому розв’язок $x=-(a^{-1})\otimes b$.

Доведемо п.14.

$$a\otimes x\oplus b=0\Rightarrow a\otimes x\oplus b\oplus(-b)=0+(-b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\otimes x\oplus 0=-b\Rightarrow x=-(a^{-1}\otimes b).$$

2.4. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Нехай ☞$=\langle F,+,\bullet\rangle$ – деяке поле з операцією додавання та операцією множення адитивною одиницею 0 та мультиплікативною одиницею 1.

V = (V,+) деяка абелева група з операцією додавання та одиницею 0.

Якщо існує операція $F\times V\to V,$ яка називається множенням вектора на скаляр, причому така, що для всіх a та $b\in F,\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ виконуються відношення:

1. $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x};$
2. $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y};$
3. $(a\cdot b)\mathbf{x}=a(b\mathbf{x});$
4. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x},$ то V – називають векторним простором над полем F, F – називають скалярами, V – векторами.

Одиницю групи V називають нуль-вектором, причому $o\mathbf{x}=\mathbf{o},$ для всіх $\mathbf{x}\in V,$ та $o\cdot a=0,\forall a\in F.$

Нехай $S \subset V$, тоді $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i$, $a_i \in F$, $\mathbf{x}_i \in S$ називають лінійною комбінацією векторів в S. Якщо $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = 0$ і $a_1 = a_2 = a_3 = a_n = 0$, то $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *лінійно незалежним*.

Зауважимо, що лінійно незалежна множина векторів не містить нуль-вектора.

Підмножину $S \in V$ таку, що кожен елемент V може бути представлений лінійною комбінацією елементів S, називають *множиною простору* V, скінченну лінійно незалежну вироджену множину називають *базисом* векторного простору. Можна довести, що кожен елемент векторного простору єдиним чином може бути представленим у даному базисі.

Потужність довільного базису B називають розмірністю векторного простору і позначають $\dim V$. Якщо векторний простір має базис, його називають *скінченномірним* векторним простором.

Наприклад: кортежі виду $(0;0;...;0;1;0;0)$ утворюють базис простору $\mathsf{F}^n, \dim \mathsf{F}^n = n.$

2.5. РЕШІТКИ

Решітка це множина M з двома бінарними операціями I та Y, для яких виконуються аксіоми решітки:

1. Ідемпотентність:

$a \,\mathrm{I}\, a = a;$ $\qquad\qquad$ $a \,\mathrm{Y}\, a = a.$

2. Комутативність:

$a \,\mathrm{I}\, b = b \,\mathrm{I}\, a;$ $\qquad\qquad$ $a \,\mathrm{Y}\, b = b \,\mathrm{Y}\, a;$

3. Асоціативність:

$(a \,\mathrm{I}\, b) \,\mathrm{I}\, c = a \,\mathrm{I}\, (b \,\mathrm{I}\, c);$ $\qquad\qquad$ $(a \,\mathrm{Y}\, b) \,\mathrm{Y}\, c = a \,\mathrm{Y}\, (b \,\mathrm{Y}\, c);$

4. Поглинання:

$(a \,\mathrm{I}\, b) \,\mathrm{Y}\, a = a;$ $\qquad\qquad$ $(a \,\mathrm{Y}\, b) \,\mathrm{I}\, a = a;$

5. Решітка дистрибутивна, якщо

$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$;

$a\cap\left(b\cup c\right)=\left(a\cap b\right)\cup\left(a\cap c\right)$.

Якщо в решітці існує 0, $0\in M$, такий, що для всіх $a\in M$ $0\cap a=0$, то 0 називають нулем або *нижньою межею решітки*.

Якщо існує $1\in M$, така, що $1\cup a=1$; то 1 називають *одиницею* або *верхньою межею* решітки. Якщо межа існує, то вона *єдина*.

Решітка, яка має нижню та верхню межі називається *обмеженою*. В обмеженій решітці елемент $\overline{a}$ називають *доповненням* до a, якщо $a\cap\overline{a}=0$ та $a\cup\overline{a}=1$.

При цьому доповнення єдине, інволютивне, тобто $\overline{\overline{a}}=a$, $\overline{1}=0$; $\overline{0}=1$, виконуються закони де Моргана:

$\overline{a\cup b}=\overline{a}\cap\overline{b}$ та $\overline{a\cap b}=\overline{a}\cup\overline{b}$.

2.6. БУЛЕВІ АЛГЕБРИ

Дистрибутивна обмежена решітка, у якій для кожного її елемента існує доповнення, називається ***булевою алгеброю***.

Властивості булевої алгебри:

1. $a\cup a=a$; $\quad a\cap a=a$;
2. $a\cup b=b\cup a$; $\quad a\cap b=b\cap a$;
3. $a\cup\left(b\cup c\right)=\left(a\cup b\right)\cup c$; $\quad a\cap\left(b\cap c\right)=\left(a\cap b\right)\cap c$;
4. $\left(a\cap b\right)\cup a=a$; $\quad \left(a\cup b\right)\cap a=a$;
5. $a\cup\left(b\cap c\right)=\left(a\cup b\right)\cap\left(a\cup c\right)$;
   $a\cap\left(b\cup c\right)=\left(a\cap b\right)\cup\left(a\cap c\right)$;
6. $a\cup 1=1$; $\quad a\cap 0=0$;
7. $a\cup 0=a$; $\quad a\cap 1=a$;

8. $\overline{\overline{a}} = a$;

9. $\overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b}$; $\qquad \overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}$;

10. $a \cup \overline{a} = 1$; $\qquad a \cap \overline{a} = 0$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Довести, що в довільному комутативному кільці
$$(a+b)^n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i a^{n-i} b^i + b^n.$$
2. Дана сукупність $\langle 0;+,\cdot \rangle$, де $0+0=0$ та $0 \cdot 0 = 0$. Чи буде дана сукупність кільцем, полем?
3. Довести, що в кожній решітці:
   1) $(a \le b)$ та $(c \le d) \to a \cup c \le b \cup d$;
   2) $(a \le b) \to$ для всіх $c(a \cup c \le b \cup c)$;
   3) $(a \le b) \leftarrow$ для всіх $c(a \cap c \le b \cap c)$;
   4) $(a \le b)$ та $(a \le c) \to a \le b \cap c$;
   5) $(a \le b)$ та $(c \le d) \to a \cap c \le b \cap d$.
4. Довести, що решітка дистрибутивна тоді і тільки тоді, коли для довільних a, b, c виконується рівність
$a \cap (b \cup c) \cup b \cap c = (c \cup a \cap b) \cap (a \cup b)$.
5. Довести, що в кожній решітці для довільних a, b, c:
   1) $a \cup b \cap c \le (a \cup b) \cap (a \cup c)$;
   2) $a \cap (b \cup c) \ge a \cap b \cup a \cap c$;
   3) $a \le b \to a \cup b \cap c \le (a \cup c) \cap b$.

ГЛАВА 3. ЛОГІКА

В цій главі розглядатимемо, так звану формальну логіку, яка ділиться на три частини: логіку Буля, логіку висловлювань та логіку предикатів. В основу логіки Буля покладено відношення еквівалентності, в основу двох інших – відношення порядку.

3.1. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Означення. Функції $f : B_2^n \to B_2$, де $B_2 = \{0;1\}$ називаються функціями логіки або булевими функціями.

Всю множину булевих функцій n - змінних позначимо P_n;

$P_n = \left\{ f \,/\, f : B_2^n \to B_2 \right\}$. $|P_n| = 2^{2^n}$.

Булеві функції від n змінних можна задавати таблично або за допомогою формул.

При табличному задаванні $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задається таблицею істинності (табл. 1):

Таблиця 1

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_4)$
0	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	
…..	…..	……..	………	………..	………………………………
1	1	1	1	1	

Якщо число змінних n,то таблиця істинності містить 2^n рядків, які відповідають всім можливим комбінаціям змінних.

Змінну x_i називають істотною змінною, якщо булева функція $f \in P_n$ істотно залежить від x_i, а саме: $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \neq f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$.

У випадку, коли

$f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., 0)$,

x_i називають неістотною або фіктивною змінною.

Наприклад, нехай $f(x_1, x_2)$ задана таблицею істинності (табл.2):

Таблиця 2

x_1	x_2	$f(x_1 x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	0

тут x_1 – фіктивне, x_2 – істотна змінна.

3.2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ $\left(f(x)\right)$

Всього таких функцій чотири. Задамо їх таблицею 3

Таблиця 3

Змінна x		0	1	
Назва функції	Позначення			Фіктивна
Нуль	0	0	0	x
Тотожність	x	0	1	
Заперечення	$x\,;\overline{x};-x$	1	0	
Одиниця	1	1	1	x

3.3. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ $\left(f(x_1, x_2)\right)$

$P_2 = 2^{2^2} = 16$, тобто таких функцій 16. Знайдемо їх за допомогою таблиці 4.

Таблиця 4

		Змінна x_1	0	0	1	1	
		Змінна x_2	0	1	0	1	
№ пор	Назва $f(x_1, x_2)$	Позна-чення					Фіктивні змінні
1	Нуль	0	0	0	0	0	$x_1; x_2$
2	Кон’юнкція	$\bullet$; $\wedge$	0	0	0	1	
3			0	0	1	0	
4			0	0	1	1	x_2
5			0	1	0	0	
6			0	1	0	1	x_1
7	Додавання за модулем	$+; \oplus; \Delta$	0	1	1	0	
8	Диз’юнкция	$\vee; +$	0	1	1	1	
9	Стрілка Пірса	$\downarrow$	1	0	0	0	
10	Еквівалентність	$\sim; \equiv$	1	0	0	1	
11			1	0	1	0	x_1
12			1	0	1	1	
13			1	1	0	0	x_2
14	Імплікація	$\rightarrow; \supset \Rightarrow$	1	1	0	1	
15	Штрих Шефера	$\mid$	1	1	1	0	
16	Одиниця	1	1	1	1	1	$x_1; x_2$

Розглянемо деякі булеві функції з позиції теорії множин. Нехай задано деяку універсальну множину V та множини $A \subset V$, $B \subset V$. Тоді

$\overline{A} = \{a | a \notin A, a \in V\}$;

З теорії множин відомо, що

$A + \overline{A} = V$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

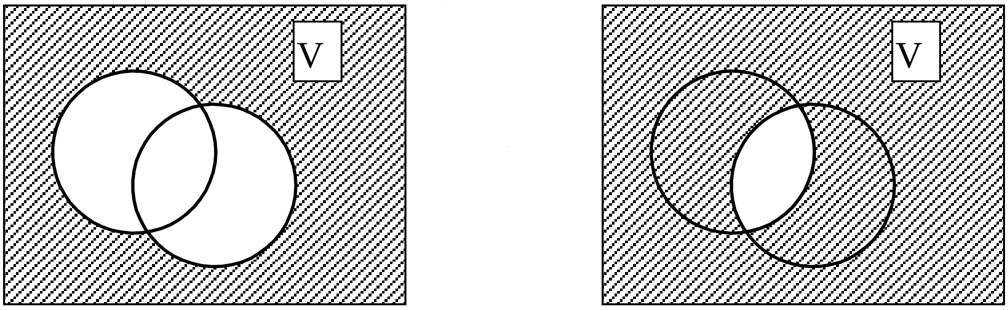
Аналогічні рівності виконують і для логічних функцій:

$f = x \vee \overline{x} = 1$ – тавтологія;

$f = x \wedge \bar{x} = 0$ – протиріччя.

Тавтологія – це завжди істинний логічний вираз; протиріччя – завжди хибний логічний вираз, якого б значення не набував би x.

Побудуємо діаграми Венна для операцій $\overline{A \cup B}$ та $\overline{A \cap B}$ (рис.4). Результат заштриховано.



а) $A \cup B$ б) $A \cap B$

Рис. 4

На мові логіки цей факт виражається наступним чином:

$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \downarrow x_2) = 1$; $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2) = 0$ – для стрілки Пірса:

$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 | x_2) = 1$; $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 | x_2) = 0$ – для штриха Шефера.

З таблиці істинності для даних функцій видно, що:

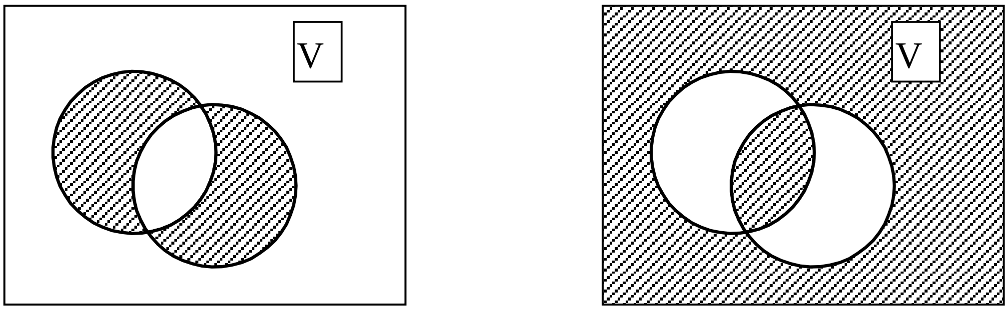
$$f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2);$$

$$f = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Симетрична різниця двох множин A та B є об'єднанням різниць, тобто $A \div B = A \setminus B \cup B \setminus A$ (рис.5,а).

Еквівалентність (тотожність) визначається тими елементами A та B, для яких вони загальні, причому елементи, які не входять ні в A ні в B теж вважаються еквівалентними.

$A \sim B = \left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ (рис. 5,б). Результати заштриховані.



а) $A \div B$ б) $A \sim B$

Рис.5

Для логічних функцій (табл. 5)

$\left(x_1 + x_2\right) \vee \left(x_1 \sim x_2\right) = 1;$ $\left(x_1 + x_2\right) \wedge \left(x_1 \sim x_2\right) = 0,$

$f = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2} = \left(x_1 \wedge x_2\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2\right) = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \wedge$

$\wedge \left(\overline{x_1} \wedge x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}\right)$ або

Таблиця 5

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Симетрична різниця має декілька назв: строга диз’юнкція, виключна альтернатива, сума за модулем два. Операцію можна передати словами “або x_1, або x_2”.

Логічна зв’язка “або” без включення зв’язку “і”.

3.4. РЕАЛІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ФОРМУЛАМИ

Розглянемо множину булевих функцій $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$. **Формулою** F називають вираз виду $F|F| = f\left(t_1, t_2, ..., t_n\right)$, де $f \in F$, t_i $i = \overline{1, n}$ або деяка змінна, *або формула над* F.

F – базис, f – головна (зовнішня) операція, t_i – підформули.

Знаючи таблиці істинності для функцій базису, можна обчислити таблицю істинності тієї функції, яку реалізує дана формула.

Приклад 1. Побудувати функції f_1, f_2, f_3, що реалізуються формулами:

$F_1 = (x_1 x_2) \vee (x_1 \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} x_2)$;

$F_2 = ((x_1 x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$;

$F_3 = x_1 x_2 \to x_1$.

Розв'язання. Відповідно до означення формули F_1, F_2, F_3 реалізують функції, що задані таблицями істинності.

1) $F_1 = (x_1 x_2) \vee (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2)$ (табл. 6).

Таблиця 6

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} x_2$	$x_1 \overline{x_2}$	$x_1 x_2$	$x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$	F_1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1

З таблиці 6 видно, що формула F_1 реалізує функцію

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

2) $F_2 = ((x_1 x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$ (табл. 7)

Таблиця 7

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 \oplus x_1$	F_2
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула F_2 реалізує функцію $f_2(x_1 x_2) = x_1 \vee x_2$.

3) $F_3 = x_1 x_2 \to x_1$ (табл. 8).

Таблиця 8

x_1	x_2	$x_1 x_2$	F_3
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

F_3 реалізує константу $f_3 = 1$.

3.5. ЕКВІВАЛЕНТНІ ФОРМУЛИ

Одна й та сама булева функція може мати над даним базисом різні реалізації. Формули, що реалізують одну й ту ж функцію, називаються **еквівалентними** (рівносильними). Позначаються:

☞$_1$:☞$_2$: *func*☞$_1$= *f* ∧ *func*☞=*f*.

Відношення еквівалентності характеризується основними властивостями булевих операцій:

1. $x \vee x = x;$ $\qquad x \wedge x = x.$

2. $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1;$ $\qquad x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1.$

3. $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3;$

   $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3.$

4. $(x_1 \wedge x_2) \vee x_1 = x_1;$ $\qquad (x_1 \vee x_2) \wedge x_1 = x_1.$

5. $x_1 \vee (x_2 \wedge x_1) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2);$

   $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$

6. $x \vee 1 = 1;$ $\qquad x \wedge 0 = 0.$

7. $x \vee 0 = x;$ $\qquad x \wedge 1 = x.$

8. $\rceil\rceil\, x = x.$

9. $(\overline{x_1 \wedge x_2}) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2};$ $\qquad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}.$

10 $x \vee \overline{x} = 1;$ $\qquad x \wedge \overline{x} = 0.$

Всі властивості можуть бути перевірені за допомогою таблиць істинності. Отже, $\langle B_2, \vee; \wedge; \urcorner \rangle$ – булева алгебра.

3.6. НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Під “нормальною формою” розумітимемо синтаксично однозначний спосіб запису формули, що реалізує задану функцію.

Введемо позначення:

$$x^{\alpha} = x\alpha \vee \overline{x}\overline{\alpha};$$

$$x^{\alpha} = \begin{cases} \overline{x}, \text{ якщо } \alpha = 0 \\ x, \text{ якщо } \alpha = 1; \end{cases} \text{ або } x^{\alpha} = \begin{cases} 1, x = \alpha \\ 0; x \neq \alpha. \end{cases}$$

$$x^{\alpha} = x \equiv \alpha.$$

Теорема про розклад булевих функцій по змінних. Кожну функцію алгебри логіки $f(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$ при довільному $m (1 \leq m < n)$ можна представити у вигляді:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) =$$

$$= \bigvee_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}, ... x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, x_{m+1}, ..., x_n),$$

де диз’юнкція береться по всіх можливих комбінаціях $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

За умови $n = m$,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n} x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

(Без доведення).

Якщо диз’юнкція береться по всіх можливих комбінаціях $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \\ f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}$.

Такий розклад називають *доскональною диз’юнктивною нормальною формою (*ДДНФ).

Зауважимо, що для кожної функції можна побудувати форму, її реалізуючу, у вигляді ДДНФ. Для цього необхідно:

1) у таблиці істинності для функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (f \neq 0)$, відмітити всі рядки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, де $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$;

2) для кожного такого рядка утворити логічний добуток $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$;

3) всі отримані кон'юнкції об'єднати знаком диз'юнкції.

Приклад 2. Знайти ДДНФ для функції $f(x_1, x_2, x_3)$, що задана таблицею істинності (табл. 9):

Розв'язання. Виділимо в таблиці три рядки (1;2;8), де $f = 1$.

1-й рядок дасть добуток $x_1^0, x_2^0, x_3^0 = \overline{x_1}, \overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

2-й рядок – $x_1^0, x_2^0, x_3^1 = \overline{x_1}, \overline{x_2} x_3$;

8-й рядок – $x_1^1, x_2^1, x_3^1 = x_1 x_2 x_3$.

Доскональна диз'юнктивна нормальна форма для даної функції має такий вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x_2}\,\overline{x}_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Таблиця 9

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	0	$\boxed{1}$
2	0	0	1	$\boxed{1}$
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	$\boxed{1}$

Довільна функція алгебри логіки може бути представлена також у вигляді *кон'юнктивної нормальної форми.* Для цього запишемо ДДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \equiv 0$.

Користуючись правилом де Моргана, отримаємо:

$$\overline{f(x_1, x_2, ... x_n)} = \bigvee_{\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n} \overline{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}} =$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n} \overline{x_1^{\alpha_1}} \vee \overline{x_2^{\alpha_2}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\alpha_n}};$$

$$(\overline{f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} = 1; \quad f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = 0)).$$

Таке зображення булевої функції $f(x_1, ..., x_n)$ носить назву *доскональної кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ).*

Для функції (приклад 2), для якої ДДНФ має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cap \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cap \overline{x_2} \cap x_3 \vee x_1 x_2 x_3,$$

$$\overline{f(x_1 x_2 x_3)} = \overline{\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3\right)} =$$

ДКНФ
$$= \left(\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{\overline{x_2}} \vee \overline{\overline{x_3}}\right)\left(\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{\overline{x_2}} \vee \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right) =$$

$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

3.7. ПРИНЦИП ДВОЇСТОСТІ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Функцію $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають двоїстою до функції $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Наприклад: $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$; $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$, вони двоїсті, бо

$$\overline{f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})} = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{\overline{x_2}} = x_1 \vee x_2 = f(x_1, x_2).$$

Якщо функція двоїста сама собі, тобто

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$, її називають *самодвоїстою*.

Якщо у формулі ☞к, що реалізує функцію f, замінити знаки на знаки двоїстих функцій, то отримана формула ☞* буде реалізовувати функцію f^*, що двоїста функції f (*принцип двоїстості*).

В алгебрі Буля принцип двоїстості можна сформулювати так.

Для отримання формули ☞🖂, двоїстостої до формули ☞, треба у формулі ☞ всюди замінити 0 на 1; 1 на 0, $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$.

Наприклад: Якщо ☞$(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$, то ☞🖂$(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2)$.

Якщо ☞$= (x_1, x_2, ..., x_n) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$, то з принципу двоїстості випливає ☞$^* = (x_1, x_2, ..., x_n) = \Phi^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Такі рівності дають можливість отримувати нові еквівалентні співвідношення.

Наприклад: із тотожності $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$ слідує (за принципом двоїстості) тотожність $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$.

3.8. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Булеві функції, як відомо, можуть бути реалізовані різними формулами, проте для практики найбільше значення мають, такі так звані *мінімальні* нормальні форми, у яких число входжень символів змінних найменше. Для довільних функцій методів знаходження таких форм не існує, мінімізацію проводять лише для диз’юнктивних нормальних форм.

Задачі знаходження (побудови) мінімальних ДНФ називаються задачами мінімізації.

Введемо деякі поняття.

Змінні $x_i\,(i=\overline{1,n})$ на $\overline{x}_i$ $(i=\overline{1,n})$ досить часто називають *термами*. Повний набір із n термів утворює *конституенту*. У процесі мінімізації деякі терми із *конституент* зникнуть. Ту частину, яка залишилась, називають *імплікантою*.

Імплікантою називають простою, якщо вона утворює кон'юнкцію змінних. Довільна кон'юнкція отримана із імпліканти викресленням змінної не являється імплікантою.

Приклад 3. Розглянемо функцію $f(x_1,x_2)=x_1 \mid x_2=\overline{x}_1\vee\overline{x}_2$ (штрих Шефера). Таблиця 10 значень функції:

Таблиця 10

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	f
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Функції $g_1(x_1,x_2)=x$ та $g_2(x_1,x_2)=x_2$ імпліканти, бо g_1 та g_2 входять в f та $f\,g_1=g_1$, $f\,g_2=g_2$. Дійсно

$$(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\overline{x_1}=\overline{x_1}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}=\overline{x_1};$$

$$(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\overline{x_2}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_2}=\overline{x_2}.$$

За основу розв'язання задач мінімізації довільних логічних функцій візьмемо схему, що містить три етапи:

1) на першому етапі складається таблиця істинності функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

2) на другому етапі виконується пошук простих імплікант f, тобто будується скорочена доскональна нормальна форма;

3) на третьому етапі проводиться побудова *тупикових* (без зайвих імплікант) доскональних нормальних форм, з числа яких відбирають мінімальні доскональні нормальні форми.

Для розв’язання задач мінімізації на другому етапі застосовують методи законів та тотожностей алгебри логіки, метод Квайна, метод Мак-Класкі, метод Блейка, метод Карнау-Вейча. Основним методом для проведення третього етапу є метод імплікантної таблиці логічних функцій (метод Куайна).

Розглянемо дані методи.

3.9. МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ ТА ТОТОЖНОСТЕЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

В основі даного методу лежить пошук виразів, які можна записати у більш простому вигляді. При цьому, як правило, найбільше використовуються такі операції та закони логіки:

$x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1$ – операція склеювання;

$x_1 \vee x_1x_2 = x_1(1 \vee x_2) = x_1$ – операція поглинання;

$x_1 \vee \bar{x}_1x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$ – дистрибутивний закон;

$x \vee x = x$ – ідемпотентність, з цього закону випливає, що кожний доданок в ДНФ можна групувати з іншим неодноразово.

Методом користуються лише в досить простих випадках, він носить елементи довільних розв’язків і є дуже громіздким.

Розглянемо приклад.

Приклад 4. Мінімізувати булеву функцію

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\overline{\left(\overline{x_2x_3 \vee x_4}\right)\left(\overline{x_1x_2x_3 \vee x_4}\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\right).$$

Розв’язання. Скористуємося законом де Моргана та дистрибутивним законом.

$$f=\bar{x}_1\left(\overline{\overline{(x_2x_3\vee x_4)}}\vee\overline{\overline{(x_1x_2x_3\vee x_4)}}\right)\cdot(\bar{x}_1x_2x_3x_4\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1)=$$
$$=\bar{x}_1((x_2x_3\vee x_4)\vee(x_1x_2x_3\vee x_4))(x_2x_3x_4\vee x_2x_3\vee 1)=$$
$$=\bar{x}_1(x_2x_3\vee x_4\vee x_1x_2x_3\vee x_4)\cdot(x_2x_3x_4\vee x_2x_3\vee 1).$$

Застосуємо дистрибутивний закон і закон поглинання

$$f=\bar{x}_1(x_2x_3(1\vee x_1)\vee x_4)=\bar{x}_1(x_2x_3\vee x_{4)}.$$

Приклад 5. Використавши дані таблиці істинності, знайти логічну функцію та спростити її.

Таблиця 11

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	$\boxed{1}$
0	0	1	0
0	1	0	$\boxed{1}$
0	1	1	$\boxed{1}$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	$\boxed{1}$
1	1	1	0

Розв’язання. На основі таблиці представимо функцію у вигляді ДДНФ.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2x_3.$$

Для спрощення до правої частини додамо два рази *констинтуенту* $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ та скористуємося асоціативним та дистрибутивним законами.

$$f=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3=$$
$$=\bar{x}_1\bar{x}_3(x_2\vee\bar{x}_2)\vee\bar{x}_1x_2(x_3\vee\bar{x}_3)\vee x_2\bar{x}_3(x_1\vee\bar{x}_1)=$$
$$=\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\vee x_2\bar{x}_3\qquad(x\vee\bar{x}=1;\,x\cdot 1=x).$$

Мінімальна форма функції f:

$$f=\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\vee x_2\bar{x}_3.$$

3.10. МЕТОД КУАЙНА

За методом Куайна прості імпліканти знаходяться по доскональній диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ) булевої функції в результаті застосування до неї закону неповного склеювання та операції поглинання.

Продемонструємо дію методу на прикладі.

Приклад 6. Мінімізувати булеву функцію

$$f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee$$
$$\vee \bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee$$
$$\vee x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\bar{x}_1 =$$
$$= f(0010;0101;0110;0111;1010;1100;1101;1110).$$

Розв'язання. Позначимо конституенти номерами:

1. $\bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 = 0010.$
2. $\bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 = 0101.$
3. $\bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1 = 0110.$
4. $\bar{x}_4x_3x_2x_1 = 0111.$
5. $x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 = 1010.$
6. $x_4x_3\bar{x}_2x_1 = 1100.$
7. $x_4x_3\bar{x}_2x_1 = 1101.$
8. $x_4x_3x_2\bar{x}_1 = 1110.$

Застосуємо закон склеювання конституент

6 та 8 $x_4x_3\bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_2) = x_4x_3\bar{x}_1;$

6 та 7 $x_4x_3\bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_1) = x_4x_3\bar{x}_2;$

2 та 4 $\bar{x}_4x_3x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_4x_3x_1;$

3 та 4 $\bar{x}_4x_3x_1(x_1 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_4x_3x_2;$

2 та 7 $x_3\bar{x}_2x_1(\bar{x}_4 \vee x_4) = x_3\bar{x}_2x_1;$

3 та 8 $x_3x_2\bar{x}_1(\bar{x}_4 \vee x_4) = x_3x_2\bar{x}_1;$

5 та 1 $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1(\bar{x}_4 \vee x_4) = \bar{x}_3x_2x_1.$

Склеїмо дві останні імпліканти:

$$x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3x_2x_1 = x_2\bar{x}_1(x_3 \vee \bar{x}_3) = x_2\bar{x}_1.$$

Нагадаємо, що одну й ту саму конституенту (імпліканту) можна склеювати з іншими багато разів на основі закону ідемпотентності $(x \vee x = x; x \wedge x = x)$.

Застосовуючи закони логіки, ми отримали

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2 \vee$$
$$\vee\, x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2 \vee x_4x_3\bar{x}_1.$$

Складемо таблицю Куайна (таблиця 12), в якій помістимо отримані спрощенням імпліканти та вихідні констинтуенти. Одиницю ставимо там, де імпліканта “покриває” констинтуенту, це тому, що констинтуента може бути замінена імплікантою за законом поглинання

$$x = x \vee (x \wedge y) = x(x \wedge xyz) = \ldots;$$
$$x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge (x \vee xyz) = \ldots$$

Після того як таблиця заповнена, проаналізувавши результати, бачимо, що в кожній графі отримано дві одиниці, проте, досить мати хоча б одну. Тому, по можливості, слід виключити зайві одиниці, при цьому вибирають такі, в яких число термів найменше. В нашій таблиці вони взяті в кружечки.

Таблиця 12

x_4	x_3	x_2	x_1	0010	0101	0110	0111	1010	1100	1101	1110
-	-	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	-	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	-	0	0	1	1	0	0	0	0
-	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	-	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	-	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Таким чином, можна обійтися трьома імплікантами замість шести.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2.$$

За допомогою таблиць істинності можна встановити, що отримана мінімальна нормальна форма функції відтворює всі значення вихідної функції.

Підкреслимо, що в загальному випадку розв'язків по даному критерію мінімумів термів може бути декілька.

3.11. МЕТОД КАРНАУ-ВЕЙЧА

Якщо число змінних логічної функції мале $(n \le 4)$, знаходження мінімальних форм можна проводити за допомогою спеціальних таблиць, які називають діаграмами Вейча або картами Карнау.

Нехай $n = 4$, тобто $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Карта Карнау для чотирьох змінних являє собою квадрат, що розбитий на 16 малих квадратів (4х4). Складемо карту Карнау.

Для змінних x_1 та x_2 відведемо вертикальну сторону карти, а для x_3, x_4 – горизонтальну (порядок необов'язковий).

За таких умов карта Карнау записується у вигляді(таблиці 13).

Зміст карти в тому, що функція задається таблицею, але не в стовпчик, як завжди, а на площині у вигляді 16 квадратів. Набори змінних використовуються в порядку так званого коду Грея (0;0); (0;1); (1;1); (1;0). На *карті Карнау* сусідні набори відмінні лише однією координатою від сусіднього по розміщенню. Значення функції записують у малих квадратах. За таблицією Карнау з'ясовують, які квадрати карти Карнау можна закріпити тією чи іншою імплікантою якщо два сусідні рядки чи два сусідні стовпчики заповнені одиницями, то їх можна покрити однотермовим імплікантом, тобто, якби в перших двох рядках всюди були одиниці, то

$$f = \bar{x}_1 \vee \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Таблиця 13

		$\overline{x}_3$		x_3		
	x_3 x_4 / x_1 x_2	0;0	0;1	1;1	1;0	
$\overline{x_1}$	0;0					$\overline{x_2}$
	0;1					x_2
x_1	1;1					
	1;0					$\overline{x_2}$
		$\overline{x}_4$	x_4		$\overline{x}_4$	

Зауважимо, що карту Карнау треба уявляти так, що вона відтворена не на площині, а на поверхні, що має форму тора, в якому сусідніми будуть перший та останній рядки, перший та останній стовпчики. Тобто можна стверджувати, що однобуквеним імплікантам відповідають або два сусідні рядки або два сусідні стовпчики.

Двотермові імпліканти x_1, x_2, x_3 і т.д. розглядають так: імпліканті $x_1 x_2 = 1$ відповідає третій рядок. Якщо цей рядок покрито одиницями, то всі вони покриваються імплікантою $x_1 x_2$. Аналогічно знаходяться тритермові, чотиритермові імпліканти. Тобто, за допомогою карти Карнау графічно виконуються операції склеювання, поглинання, об’єднання одиниць та груп одиниць між собою.

Продемонструємо метод Карнау на прикладі.

Приклад 7. Нехай функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задано таблицею 14.

Таблиця 14

		$\bar{x}_3$		x_3		
	$x_3\ x_4$ / $x_1\ x_2$	0;0	0;1	1;1	1;0	
$\bar{x}_1$	0;0	**1** (*e*	**1** (*a*	**1** (*b*	**1** (*f*	$\bar{x}_2$
	0;1	**0**	**1** (*c*	**1** (*d*	***0***	x_2
x_1	1;1	**0**	**0**	**1** (*i*	**1** (*j*	
	1;0	**1** (*g*	**1** (*k*	**0**	**0** (*h*	$\bar{x}_2$
		$\bar{x}_4$	x_4		$\bar{x}_4$	

Розв'язання. Проаналізуємо задану таблицю істинності і позначимо квадрати, що вміщують одиниці буквами.

З таблиці видно, що однотермові імпліканти відсутні, бо немає двох сусідніх стовпчиків чи рядків, які вміщують лише одиниці.

Будемо шукати двотермові імпліканти, тобто чотири квадрати з одиницею, що витягнуті в одну лінію або складені у великий квадрат. Бачимо, що перший рядок (квадрати e,a,b,f) – утворює лінію, яка покривається $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$, отже, отримано імпліканту $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$.

Квадрат $abcd$, що складається з одиниць, повністю покривається імплікантою $\bar{x}_1 x_4$.

Квадрат $eagk$ покривається імплікантою $\bar{x}_2\bar{x}_3$ (квадрат отримано замкненням карти до утворення тора). Більше квадратів утворити не можна, тобто

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2 \vee \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

В таблиці непокритими залишилися дві одиниці (квадрати i та j). Покрити їх неможливо, тобто необхідно витратити на них тритермову імпліканту $x_1 x_2 x_3$.

Всі одиниці покриті імплікантами, за методом Карнау-Вейча мінімальна нормальна форма функції f має вигляд:

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Отриманий результат можна перевірити по таблиці істинності і впевнитися, що МНФ функції f дає всі значення вихідної функції.

Зауважимо, що зовнішня загальна простота методу, стає складною програмою при реалізації алгоритму Карнау-Вейча на комп'ютері.

3.12. МЕТОД МАК-КЛАСКІ

Метод застосовують тоді, коли булева функція задана нормальною формою.

Алгоритм методу використовує наступні етапи:

1. Кожній констинуенті присвоюється індекс - число одиниць термів та номер – відповідне число в десятковій системі числення.

Наприклад, $x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 - (1110)_3 = 14,$

індекс – 3, номер 14.

Тут:

$x_4 - 1000 = 8;$

$x_3 - 0100 = 4;$

$x_2 - 0010 = 2;$

$x_1 - 0001 = 1.$

Отримані результати заносяться в таблицю, в першому рядку якої записують індекси, а в другому – номери констинтуент.

2. Виконується склеювання за правилом: нехай i – індекс, j – індекс, $j > i$.

Склеюються ті конституенти, різниця між m_i та n_j є степенем двійки, тобто

$$n_j - m_i = 2^n; n = 0;1;2;4;...$$

При склеюванні, справа вказується величина різниці. Склеювання продовжується доти, поки воно можливе (різниці степені-двійки). Склеювати можна лише сусідні індекси.

Алгоритм методу розглянемо на прикладі.

Приклад 8. Методом Мак-Класкі мінімізувати булеву функцію, нормальна форма якої

$$f = x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 \vee$$
$$\vee \bar{x}_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 \vee$$
$$\vee x_4 x_3 x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1.$$

Розв'язання. Запишемо всі конституенти через індекси та присвоєні номери (десяткове числення):

$$x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 - (1110)_{(3)} = 14;$$
$$x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 - (1101)_{(3)} = 13;$$
$$x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 - (1011)_{(3)} = 11;$$
$$\bar{x}_4 x_3 x_2 x_1 - (0111)_{(3)} = 7;$$
$$x_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 - (1100)_{(2)} = 12;$$
$$x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 - (1001)_{(2)} = 9;$$
$$x_4 x_3 x_2 x_1 - (1111)_{(4)} = 15;$$
$$\bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 - (0011)_{(2)} = 3;$$
$$\bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 - (0000)_{(0)} = 0.$$

Отримані результати занесемо в таблицю 15.

Таблиця 15

Індекс	0	1	2	3	4
Номер	0*	-	3;9;12	7;11;13;14	15

Враховуючи, що склеювати можна лише сусідні індекси, бачимо:

1) констинтуенту з індексом 0 склеїти ні з якою не можна, бо не має констинтуент з індексом 1.
2) Процес склеювання $(j > i; m_j - m_i = 2^h; n = 0;1;2;...)$

	(3;7)	(4)
	(3;11)	(8)
I	(9;11)	(2)
	(9;13)	(4)
	(12;13)	(1)
	(12;14)	(2)

	(7;15)	(8)
II	(11;15)	(4)
	(13;15)	(2)
	(14;15)	(1)

Знову проведемо склеювання I та II, у яких різниці однакові,

(12;13;14;15)	(1;2)
(9;11;13;15)	(2;4)
(12;13;14;15)	(1;2)
(3;7;11;15)	(4;8)
(9;11;13;15)	(2;4)
(3;7;11;15)	(4;8)

(12;13;14;15)	(1;2)
(9;11;13;15)	(2;4)
(3;7;11;15)	(4;8)

Процес склеювання закінчено.

Отримані результати запишемо у вигляді констинтуент ліва дужка, права дужка вказує на терми, які треба виключити із констинтуент, що залишилися.

(12;13;14;15) (1;2)

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 1100 - x_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 = x_4 x_3 \\ 13 = 1101 - x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 = x_4 x_3 \\ 14 = 1110 - x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 = x_4 x_3 \\ 15 = 1111 - x_4 x_3 x_2 x_1 = x_4 x_3 \end{array}\right\} x_4 x_3$$

(9;11;13;15) (2;4)

$$\left.\begin{array}{l} 9 = 1001 - x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 = x_4 x_1 \\ 11 = 1011 - x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 = x_4 x_1 \\ 13 = 1101 - x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 = x_4 x_1 \\ 15 = 1111 - x_4 x_3 x_2 x_1 = x_4 x_1 \end{array}\right\} x_4 x_1$$

(3;7;11;15) (4;8)

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 0011 - \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_1 x_2 = x_2 x_1 \\ 7 = 0111 - \bar{x}_4 x_3 x_1 x_2 = x_2 x_1 \\ 11 = 1011 - x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 = x_2 x_1 \\ 15 = 1111 - x_4 x_3 x_2 x_1 = x_2 x_1 \end{array}\right\} x_2 x_1$$

Таким чином, мінімальна нормальна форма отримана за методом Мак-Класкі для функції f має вигляд:

$$f = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_4 x_3 \vee x_4 x_1 \vee x_2 x_1.$$

Зауважимо, що реалізація методу Мак-Класкі на ПК більш простіша, ніж реалізація інших методів.

Всі розглянуті методи використовують для функцій, у яких невелика кількість змінних.

3.13. ДЕЯКІ КЛАСИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Представлення функцій ДНФ, КНФ утворено трьома операціями, а саме: диз’юнкцією, кон’юнкцією та запереченням.

В логіці Буля діє *принцип суперпозиції*, який стверджує: довільна складна функція може бути представлена як сукупність елементарних функцій двох аргументів. Поставимо запитання: через які ще системи логічних операцій можна виразити довільну булеву функцію.

Розглянемо *п’ять класів* булевих функцій двох змінних.

0 – клас – це функція, що зберігає нульове значення на нульовому наборі термів, тобто $f(0;0)=0$.

1 – клас, це функція, що зберігає константу 1 на одиничному наборі термів, тобто $f(1;1)=1$, до 1 класу відносяться непарні функції.

2 – клас – клас лінійних функцій, визначаються лінійністю поліноміальної форми. Наприклад – еквівалентність – лінійна функція.

3 – клас – клас самодвоїстих функцій; описується формулою $f(x_1,x_2)=\bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, таких функцій – чотири.

4 – клас – клас монотонних функцій, визначається нерівністю $f(x_1,x_2)\leq f'(x_1',x_2')$, де $x_1\leq x_1';x_2\leq x_2'$.

Наприклад: $x_1=0;x_1'=1;x_2=1;x_2'=1$.

Для диз’юнкції $f=(x_1\vee x_2=1)\leq f'=(x_1'\vee x_2'=1)$, тобто диз’юнкція монотонна функція. Належність елементарних функцій до того чи іншого класу К відмітимо на таблиці 16 .

Дана таблиця визначає систему *базисних функцій*.

Систему функцій називають базисною, якщо вона перекриває нулями всі рядки К-класів $(K=0;1;2;3;4)$. З таблиці видно, що це дві функції двох змінних (штрих Шефера та стрілка Пірса), кожна з яких може бути застосована для побудови алгебри логіки. Всі інші функції можна отримати з них.

Таблиця 16

П'ять класів булевих функцій					Клас				
Порядковий номер	Таблиця значень функцій	Назва функції	Символічне позначення функції	Представлення функції в основній алгебрі або у вигляді поліному	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0000	Константа 0	0	0	1	0	0	1	1
2	1111	Константа 1	1	1	0	1	0	1	1
3	0011	Основна змінна	x	x	1	1	1	1	1
4	0101	Основна змінна	y	y	1	1	1	1	1
5	1100	Заперечення	$\bar{x}$	$\bar{x} = 1 \oplus x$	0	0	1	0	1
6	1010	Заперечення	$\bar{y}$	$\bar{y} = 1 \oplus y$	0	0	1	0	1
7	1001	Логічна рівнозначність	$x \sim y$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \vee xy = 1 \oplus x \oplus y$	0	1	0	0	1
8	0110	Логічна нерівнозначність	$x \oplus y$; $x \Delta y$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \vee xy = x \oplus y$	1	0	0	0	1
9	0111	Диз'юнкція	$x \vee y$	$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$	0	0	0	0	1
10	1110	Штрих Шефера	$x \mid y$	$\bar{x} \vee \bar{y} = 1 \oplus xy$	0	0	0	0	0
11	1101	Імплікація	$x \to y$	$x \vee \bar{y} = 1 \oplus y \oplus xy$	0	1	0	0	0
12	1011	Імплікація	$y \to x$	$y \vee \bar{x} = 1 \oplus y \oplus xy$	0	1	0	0	0
13	0001	Кон'юнкція	xy	$xy = xy$	1	1	0	1	0
14	0010	Кон'юнкція	$x\bar{y}$	$x \cdot \bar{y} = x \oplus xy$	1	0	0	0	0
15	0100	Кон'юнкція	$\bar{x}y$	$\bar{x}y = y \oplus xy$	1	0	0	0	0
16	1000	Стрілка Пірса	$x \downarrow y$	$\bar{x} \cdot \bar{y} = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$	0	0	0	0	0

3.14. МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ В ЛОГІЦІ БУЛЯ

Для доведення в логіці Буля існує два методи – аксіоматичний та конструктивний.

При аксіоматичному методі використовують основні незалежні системи законів: комутативності, асоціативності, дистрибутивності, нуля та одиниці. Всі інші закони можуть бути виведені через дані.

Наприклад, закон поглинання:

$$x_1 = x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = (x \vee x_1) \wedge (x_1 \vee x_2) =$$
$$= (x_1 \wedge (x_1 \vee x_2)) \vee (x_1 \wedge (x_1 \vee x_2)) = x_1 \vee x_1 = 1.$$

Закон ідемпотентності

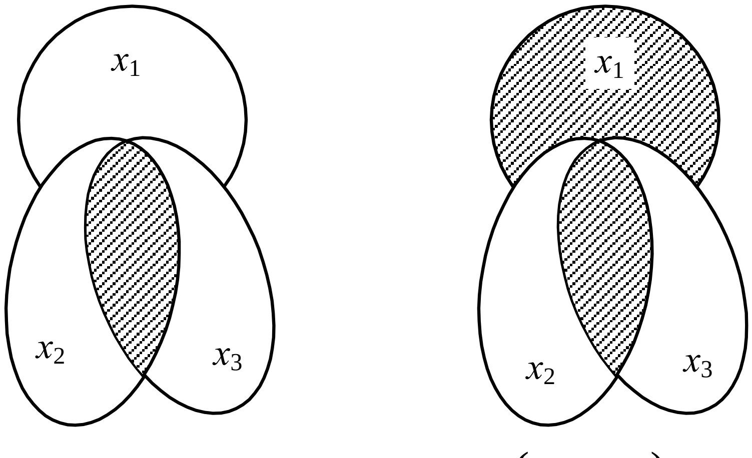
$$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (\bar{x} \vee x) = x \vee (x \wedge \bar{x}) = x \vee 0 = x.$$

При конструктивному доведенні використовують систему *конструктів*, прикладом яких є діаграми Венна та таблиці істинності.

Приклад 9. Довести тотожність

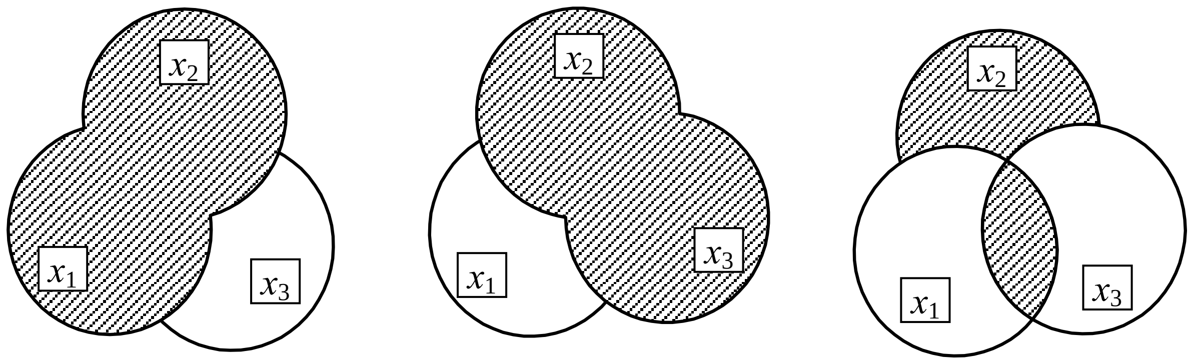
$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$ за допомогою діаграм Венна.

Розв'язання. Зобразимо графічно ліву частину тотожності (рис. 6), результат заштриховано; праву частину тотожності (рис. 7), результат заштриховано.



$x_2 \wedge x_3$ $\qquad$ $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

Рис. 6



$x_1 \vee x_2$ $\qquad$ $x_1 \vee x_3$ $\qquad$ $(x_1 \vee x_2)\ (x_1 \vee x_3)$

Рис.7.

Приклад 10. Довести тотожність:

$$((x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \to (x_1 \vee x_2 \vee x_3)) = ((x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1))$$

а) аксіоматичним методом;

б) конструктивним, за допомогою таблиць істинності.

Розв'язання. Аксіоматичний метод:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \to (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = \overline{(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)} \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \vee$$

$$\vee (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee (\bar{x}_3 \vee x_1) = (x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_3) \vee (x_3 \to x_1).$$

Конструктивний метод. Складемо таблицю істинності лівої і правої частин (табл. 17).

Таблиця 17

x_1	x_2	x_3	x_1, x_2, x_3	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	Права сторона	$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_3$	$x_3 \to x_1$	Ліва сторона
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Значення правої та лівої частин даної тотожності співпадають, що й треба було довести.

3.15. ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Під висловлюванням розуміють *речення*, про яке можна сказати, яке воно істинне чи хибне. Істинність висловлювання будемо позначати 1, а хибність – 0. Позначають висловлювання великими літерами латинського алфавіту A,B,C,…

Наведемо приклади простих висловлювань:

A={Київ – столиця України} – це істинне висловлювання;

B={Київ – столиця Франції} – хибне висловлювання;

C={Київ або столиця України, або столиця Франції} – не являється висловлюванням, бо про нього не можна сказати чи воно істинне, чи воно хибне.

З простих висловлювань можна утворювати більш складні висловлювання за допомогою логічних зв'язків.

1. Заперечення – читаються "не *A*", позначаються $\overline{A}$, або $\neg A$. Заперечення $\overline{A}$ - хибне тоді, коли *A* – істинне. Складемо таблицю істинності.

Таблиця 18

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. Диз'юнкція. Позначається $A \vee B$, читається "*A* або *B*".

Наприклад: A={Петя пішов на лекцію},

B={Петя пішов в бібліотеку},

C={Петя пішов на лекцію або в бібліотеку}=$A \vee B$.

Складемо таблицю істинності $A \vee B$.

Таблиця 19

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Тобто, диз’юнкція двох висловлювань істинна, якщо хоча б одне з них істинне.

3. Кон’юнкція. Позначається $A \wedge B$, читається *“AiB”*.

Складемо таблицю істинності $A \wedge B$.

Таблиця 20

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Кон’юнкція двох висловлювань істинна лише тоді, коли обидва висловлювання істинні.

4. Імплікація. Позначається $A \to B$, читається *“якщо A то B”*.

Складемо таблиця істинності $A \to B$.

Таблиця 21

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Характер імплікації зв’язаний з причинно-наслідковим відношенням, за яким *A* являється причиною, *B* – наслідком. Граматично це можна оформити так: “*A* є достатньою основою для *B*” або “*B* тому що *A*”.

A={студент знає дискретну математику},

B={студент отримав оцінку п’ять з дискретної математики},

C= $A \to B$={якщо студент знає дискретну математику, то він отримав оцінку п’ять”.

5. Еквівалентність. Позначається $A \sim B$, або $A \equiv B$, читається “*A* еквівалентно *B*”, “*A* тотожно *B*”, “*A* рівносильно *B*”.

A~*B* можна виразити через кон’юнкцію двох імплікацій, а саме:

$A \sim B = (A \to B) \wedge (B \to A).$

Складемо таблицю істинності $A \sim B$.

Таблиця 22

A	B	$A \sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Існує різниця між так званими об'єктивними та суб'єктивними висловлюваннями. Якщо її не враховувати, то можна потрапити в протиріччя, які називають логічними парадоксами. Відомий так званий "Парадокс брехуна".

Нехай брехун каже про себе "Я – брехун". Він виступає в протилежній собі якості, тобто каже правду.

"Я – брехун" – сказав брехун, проте в цьому випадку можна стверджувати, що "Я – брехун" – сказав не брехун.

Як бачимо, невідомо як кваліфікувати того, хто це говорить – чи брехун, чи не брехун. Тобто невідомо чи висловлювання істинне, чи хибне.

Розглянемо ще один відомий парадокс. Англійський логік Бертран Рассел розповів притчу:

В одному селі жив перукар. Він голив усіх жителів села, хто не міг поголитися сам. Рассел поставив питання: "Чи може перукар поголити самого себе?".

Поміркуємо: якщо перукар захоче поголити самого себе, то як житель цього села, який голиться сам, він не має права цього зробити, але якщо перукар не стане голитися, то він уже як житель села, який не голиться сам, зобов'язаний себе поголити.

Виразимо семантику цього протиріччя формальною мовою.

Нехай A – перукар,

$P(A, B) = \{A \text{ голить } B\}.$

Опишемо двома метависловлюваннями:

1) якщо $P(B,B)=0,$ то $P(A,B)=1;$

2) якщо $P(B,B)=1,$ то $P(A,B)=0.$

Якщо *A*=*B*, тобто перукар рядовий житель села, то обидва метависловлювання внутрішні протиріччя.

1) якщо $P(A,A)=0,$ то $P(A,A)=1.$

2) якщо $P(A,A)=1,$ то $P(A,A)=0.$

Вираз $P(A,B)$ може означати "*A* лікує *B*", "*A* навчає *B*", "*A* виховує *B*" т. ін. При цьому, хоча *A* як і *B* формально являється об'єктивною змінною, *A* не знаходиться на одному рівні з *B*, бо саме відносно *A* сформульовані метависловлювання.

3.16. АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД ДОВЕДЕННЯ В ЛОГІЦІ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Логіка – це наука про способи доведень. Ми розглянули доведення в логіці Буля, які будувалися на відношенні еквівалентності. Дві логічні функції вважалися еквівалентними, якщо вони давали на відповідні набори аргументів однакові значення нулів та одиниць.

В логіці висловлювань всі доведення будуються на відношенні порядку, тобто відношенні між причиною та наслідком. Окремі ланцюги доведення зв'язані символом імплікації $''\to''$, проте при доведенні використовують символ $''\Rightarrow''$. Символ $''\to''$ називають об'єктивним, а $''\Rightarrow''$ - суб'єктивним, або метасимволом. Аналогічно замість об'єктивної кон'юнкції $''\wedge''$ використовуватимемо суб'єктивний символ метакон'юнкції – *","* , а замість об'єктивної диз'юнкції $''\vee''$ – суб'єктивну метадиз'юкцію – *";"*. Тоді твердження, що вимагає доведення в логіці висловлювань можна оформити у вигляді причинно-наслідкового відношення.

$P_1, P_2, ..., P_n \Rightarrow A,$

де P_i – причина (посилка);

A – наслідок (висновок).

Читається: “Якщо посилки $P_1, P_2, ..., P_n$ – істинні, то наслідок A теж істинний”.

Щоб не переплутати об’єктивні висловлювання з суб’єктивними, істинність яких треба встановити домовимося речення типу $P_1, P_2, ..., P_n \Rightarrow A$ називати *клаузами* – метареченнями, в яких використовуються відношення порядку, оформлені через символ метаімплікації.

Відомо, що відношення порядку задовольняє три закони:

1. $A \Rightarrow A$ – закон рефлексивності.
2. Якщо $A \Rightarrow B$, то $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – закон антисиметричності.
3. Якщо $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$ – закон транзитивності.

Причому, якщо $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$, то $A = B$.

Клауза – це формальний запис речення, яке необхідно довести. Якщо замість букв у ній підставити об’єктивні висловлювання, вона наповнюється конкретним змістом і уже називається *семантикою* або *легендою*.

Наприклад: $A \to B$; $A \Rightarrow B$ (клаузи).

Якщо прийняти $A =$ {Петро студент}, B={Здача екзамену}, то клаузи перетворюються в легенду.

“Якщо Петро студент, то він буде здавати екзамен”.

Довільну клаузу можна записувати в різних еквівалентних формах. Наприклад,

$P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n \Rightarrow A$ може бути записана:

$P_1, P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow \overline{P}_n; A;$ або $P_1, P_2, ..., P_{n-2} \Rightarrow \overline{P}_n, A; \overline{P}_{n-1},$ і т.д.

Проте клауза $P_1, P_2, .., P_n \Rightarrow A$ має деякі переваги, так вона використовується в мові логічного програмування ПРОЛОГ, її називають хорнівською, причому довільну клаузу можна звести до хорнівського виду.

Якщо символ метаімплікації $'' \Rightarrow ''$ хорнівської клаузи змістити в крайнє ліве положення, вона перетворюється в тавтологію, в крайнє праве положення – в протиріччя.

$1 \Rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; ...; \overline{P}_n; A$ – тавтологія, чи

$P_1, P_2, .., P_n, \overline{A} \Rightarrow 0$ – протиріччя.

Як і в логіці Буля, в логіці висловлювань існують аксіоматичний, конструктивний методи доведення.

Аксіоматичний метод побудови доведення полягає в тому, щоб на основі незалежних систем аксіом довести справедливість довільної клаузи. Доведення будується, як уже було сказано, на основі відношення порядку, тобто логіка висловлювань є розширенням логіки Буля. Всі тотожності логіки Буля автоматично стають справедливими клаузами логіки висловлювань, тобто закони комутативності, асоціативності, дистрибутивності, нуля та одиниці стають аксіомами в логіці висловлювань. Для відношення порядку запишемо клаузу $A \Rightarrow B \rightarrow A$ - "якщо A істинне, то джерелом цієї істинності може бути, що завгодно, наприклад B", або після перетворень $A, B \Rightarrow A$ "якщо раніше було відомо, що A - істинне, то істинність B не може проявитися так, що A стане хибним" або "істинність одного висловлювання B не впливає на істинність другого висловлювання A". Елементарна клауза $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$ відома з часів Арістотеля, грає важливу роль в логіці висловлювань, носить назву modus ponehs – правило відділення. Якщо в процесі доведення складної клаузи її звести до клаузи modus ponehs, то доведення закінчилося.

Історично першою системою аксіом класичної логіки була так звана система Фреге:

1. $1 \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A);$
2. $1 \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$
3. $1 \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow C));$
4. $1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A});$
5. $1 \Rightarrow A \rightarrow \overline{\overline{A}}; 1 \Rightarrow \overline{\overline{A}} \rightarrow A.$

Перша аксіома є аксіомою порядку, 3-5 аксіоми логіки Буля, що записані у формі клауз.

Доведемо другу аксіому.

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Виконаємо елементарні перетворення:

$A \to (B \to C), A \to B, A \Rightarrow C.$

Скористаємося modus ponens .

$B \to C, B \Rightarrow C.$

Ще раз скористаємося modus ponens , прийдемо до аксіоми порядку $B, C \Rightarrow C.$

Розглянемо приклад.

Приклад 11. Довести істинність клаузи аксіоматичним методом:

$A, B \to D, C \to D, A \to (B \vee C) \Rightarrow D.$

Доведення.

1. $B \to D, C \to D, B \vee C \Rightarrow D,$
2. $\overline{B} \vee D, \overline{C} \vee D, B \vee C \Rightarrow D,$
3. $(\overline{B} \wedge \overline{C}) \vee D, B \vee C \Rightarrow D,$
4. $(B \vee C) \to D, B \vee C \Rightarrow D,$
5. $B \vee C, D \Rightarrow D.$

3.17. КОНСТРУКТИВНИЙ МЕТОД ДОВЕДЕННЯ В ЛОГІЦІ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Основою конструктивного методу є використання таблиць істинності.

Клауза $P_1, P_2, .., P_n \Rightarrow A$ вважається істинною, якщо всі одиниці наслідку покривають всі одиниці узагальненої причини. Зрозуміло, що таких покриттів може бути багато. Тому необхідно визначити три їх типи: мінімальну нормальну форму, мінімальне та трансверсальне покриття. Знаходження мінімальної нормальної форми проводять аналогічно булевим функціям.

Мінімальне покриття – це покриття з найменшим числом термів.

Трансверсальне покриття включає всі можливі терми. Як правило, саме трансверсальні покриття дають повну картину можливих наслідків із сформованих причин.

Розглянемо дію конструктивного методу на такому прикладі.

Приклад 12. За легендою: “Якщо в одному місці щось вибуло, то в іншому щось прибуло” – це істина, що не вимагає доведення. Проте існує теорія, що стверджує, що в космосі існують “чорні дірки”, в які все провалюється і нічого звідти не повертається. Ця теорія нічого не говорить про існування “білих дірок”, які б діяли протилежно чорним. Один астрономічний журнал опублікував координати “чорної дірки”, астроном направив туди телескоп і нічого не побачив.

“Так, - сказав він, - але білу дірку я все таки відкрив”.

Розв’язання. Розглянемо висловлювання:

$A=$ {десь щось вибуло};

B={десь щось прибуло};

C={“чорна дірка” існує};

D={“біла дірка” існує};

E={нічого побачити не можна}.

Запишемо легенду клаузою:

$$A \sim B, C \to A, D \to B, C \to E \Rightarrow C \to B.$$

$P_1 : A \sim B\{$*якщо в одному місці щось вибуло, то в ііншому прибуло*$\}$.

$P_2 : C \to A\{$*якщо існує "чорна дірка" , то в неї все провалюється, тобто в її околі щось відбуває*$\}$.

$P_3 : D \to B\{$*якщо існує "біла дірка", то з неї в простір щось прибуває*$\}$.

$\mathrm{P}_4 : \mathrm{C} \to \mathrm{E}\{$*якщо існує "чорна дірка" ,то її не можна побачити*$\}$ *або* {*астроном нічого не побачив*}.

$A : C \Rightarrow B\{$*якщо існує "чорна дірка" ,то десь у просторі повинно щось з'явитися*$\}$.

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \Rightarrow A; D.$$

Складемо таблицю істинності(див. табл. 23).

З таблиці видно, що одиниці узагальненої причини P не покриваються одиницями наслідку D, тобто D – хибний висновок.

Істинним є наслідок $A: C \to B$ – одиниці істинного наслідку повністю покривають одиниці узагальненої причини, тобто істинною є “якщо існує “чорна дірка”, то десь у просторі обов’язково щось з’явиться”.

Складемо по таблиці доскональну диз’юнктивну нормальну форму (ДДНФ).

$$A, B, C, D, E; A, B, \overline{C}, D, E; A, B, C, \overline{D}, E; A, B, \overline{C}, \overline{D}, E; \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, E.$$

Спростивши ДДНФ, отримаємо МДФ (мінімальну диз’юнктивну форму).

$$A, B, D, E; \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, E.$$

Трансверсальні покриття (існує три):

$$\overline{A}; \overline{B}, \overline{C}, D, E \qquad A, B; \overline{C}, \overline{D}, E \qquad A, B, E; \overline{C}, \overline{D}.$$

Мінімальне покриття: *E*.

Таблиця 23

№ пор.	A	B	C	D	E	$A \sim B$	$C \to A$	$D \to B$	$C \to E$	P	D	$C \to B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
5	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
7	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
8	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
9	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
10	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
11	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
12	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
13	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
14	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
15	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
16	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
17	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
18	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
19	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
20	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
21	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
22	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
23	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1

Закінчення табл. 23

24	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
25	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
26	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
27	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
28	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
29	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
30	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
31	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
32	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1

3.18. МЕТОД РЕЗОЛЮЦІЙ ДОВЕДЕННЯ В ЛОГІЦІ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Метод резолюції відноситься до напівконструктивного методу, він легко піддається алгоритмізації. Суть його полягає в тому, що два посилкових диз’юнкти з протилежними термами завжди можна склеїти в один заключний диз’юнкт, в якому відсутні протилежні терми:

$$A \vee B, C \vee \overline{B} = A \vee C,$$

де A, C – довільні терми, або цілі диз’юнкти з довільним набором термів, включаючи нуль, а B та $\overline{B}$ – довільні терми.

При послідовному застосуванні принципу резолюцій зменшується число букв, деякі повністю знищуються, а вихідна клауза будується у формі кон’юнктивного протиріччя:

$$P_1, P_2, ..., P_n = 0.$$

Принцип резолюцій повністю замінює аксіому порядку, оскільки вона сама може бути доведена в рамках методу резолюцій.

$$A, B \Rightarrow A, \;\; A, B, \overline{A} \Rightarrow 0, \quad 0, B \Rightarrow 0.$$

Звернемо увагу на те, що посилка *B* взагалі не використовується, тобто необов’язково треба використовувати всі посилки, головне отримати нуль. Всі доведення клауз починають із приведення їх в нормальну кон'юнктивну форму, потім виписують по порядку всі посилки і склеюють почергово. Розглянемо приклад.

Приклад 13. Довести методом резолюцій істинність клаузи:

$$A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, E \to \overline{F}, A \to C \Rightarrow \overline{A}.$$

Доведення. Приведемо клаузу до нормальної кон'юнктивної форми:

$$\overline{A} \vee B, \overline{C} \vee D, \overline{B} \vee E, \overline{D} \vee F, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{A} \vee C, A \Rightarrow 0.$$

1. $\overline{A} \vee B$.
2. $\overline{C} \vee D$.
3. $\overline{B} \vee E$.
4. $\overline{D} \vee F$.
5. $\overline{E} \vee \overline{F}$.
6. $\overline{A} \vee C$.
7. A .
8. $\overline{C} \vee F(2,4)$.
9. $\overline{B} \vee \overline{F}(3,5)$.
10. $\overline{A} \vee \overline{F}(9,1)$.
11. $\overline{A} \vee F(8,6)$.
12. $\overline{A}(10,11)$.
13. $0(12,7)$.

Метод резолюцій використовується в логічних мовах програмування, (ПРОЛОГ). Алгоритм склейок утворює *структуру деревовидної форми*, що добре видно з наступного прикладу.

Приклад 14. Довести клаузу (рис. 8):

$$A \vee \overline{C} \vee B; \overline{A} \vee \overline{F} \vee C; \overline{B} \vee \overline{A} \vee C; \overline{C} \vee \overline{A} \vee B;$$

$$C \vee \overline{F} \vee A; A \vee \overline{F} \vee \overline{C}; B \vee A \vee F; B \vee F \vee C; A \vee \overline{B} \vee \overline{C};$$

$$\overline{B} \vee \overline{A} \vee \overline{C}; \overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{F} \Rightarrow 0$$

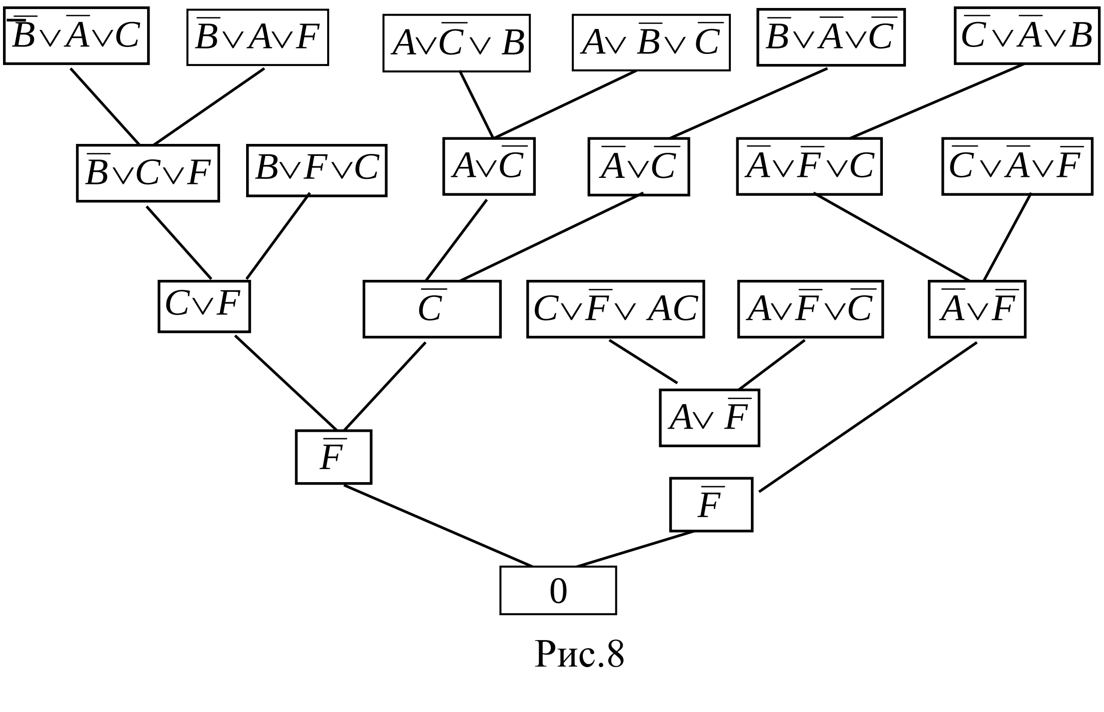


Рис.8

3.19. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Предикатом називають *функціональне висловлювання*, а висловлювання – *предикатною константою*. Логіка предикатів – це розширення логіки висловлювань за рахунок використання предикатів в ролі логічних функцій. Ці функції дещо відмінні від функцій Буля. Булеві функції однорідні, тобто і область значень, і область зміни аргументів або істинні, або хибні. Для предикатів область зміни *логічна*, а область значень – *предметна*. Розглянемо приклади логічних функцій.

Нехай маємо ряд простих висловлювань:

$P_1 =$"4 ділиться на 2";

$P_2 =$ "5 ділиться на 2";

$P_3 =$ "6 ділиться на 2";

. . . .

$P_{97} =$ "100 ділиться на 2".

Замість цих висловлювань, які або істинні, або хибні, можна ввести так званий одномісний предикат $P(x) =$"x ділиться на 2", де областю визначення x є $X = \{4,5,6,...,100\}$.

Означення 1. Одномісним предикатом $P(x)$, визначеним на множині *X*, називається вираз, який після підстановки в нього замість *x* предметів із області визначення перетворюється на висловлювання.

Означення 2. Область визначення, від якої залежить предикат, називається *предметною областю*. Елементи із області визначення називаються предметними змінними.

В наведеному вище прикладі змінимо ряд висловлювань на інші:

$P_1 =$"4 ділиться на 2";

$P_2 =$ "8 ділиться на 4";

$P_3 =$ "5 ділиться на 6";

. . . .

$P_{97} =$ "100 ділиться на 98".

Тут можна ввести двомісний предикат $P(x,y)$={x ділиться на y} з додатковою предметною областю $Y=\{2;4;6;...;98\}$.

Предикат задає відношення ділення на двох множинах X та Y.

Розглянемо ще один предикат $P(x,y)$.

$P(x,y)$=”x має хобі y”, де X={Петрик, Василько, Миколка,…}; Y={шашки, доміно, карти, туризм,…}. Цей предикат задає відношення на множині людей і множині їх можливих хобі.

У загальному випадку n–місний предикат задає n–місне відношення.

Означення 3. N –місним предикатом, визначеним на множинах $X_1, X_2,..., X_n$ називається вираз, який перетворюється в висловлювання при заміні кожної предикатної змінної на елемент із області її визначення.

Операції над предикатами. Предикат – це функціональне висловлювання, що набуває значення $\{0;1\}$, тому над предикатами визначені всі булеві операції: $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\equiv$, а також дві нові – операції навішування кванторів: $\forall$ - всезагальності ($\forall$ - перевернута буква *A*, що є першою буквою англійського слова *ALL* – “всі”); $\exists x$ - існування ($\exists$ - перевернута буква *E*, перша буква англійського слова *Exist* “існування”).

Розглянемо приклади:

1. Всі люди смертні. Сократ – людина. Отже, Сократ смертний.

2. Деякі люди геніальні. Сократ людина. Отже, Сократ геніальний.

Якщо в першому випадку висновок правильний, то в другому правило стосується деяких індивідів, і Сократ міг до них і не належати. Термін “для всіх” в логіці предикатів називають квантором всезагальності $(\forall x)$. Термін “деякі x”, або “існує хоча б один x називають квантором існування $(\exists x)$.

Навішуючи квантори перед предикатами, ми їх або посилюємо $\forall x P(x)$, або послаблюємо $\exists x P(x)$. Семантика:

$\forall x P(x)$=”Для всякого предмету $x \in X$ властивість $P(x)$ виконується”.

$\exists x P(x)$="Деякі x мають властивість $P(x)$".

Предикат, на який діє квантор, називають областю дії квантора. Змінні, на які навішують квантори і які попадають в область його дії, називаються *зв'язаними* змінними. Змінні, що лежать поза дією квантора називаються вільними.

Визначення терму.

1. Кожна предметна змінна або кожна предметна постійна є терм.
2. Функціональний символ $f(t_1, t_2, ..., t_n)$, де $t_1, t_2, ..., t_n$ - терми є терм.
3. Інших термів не існує.

Визначення формули.

1. $P_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$, де P_i^n – предикатний символ, $t_1, t_2, ..., t_n$ – терми – *атомарна формула*.

2. Якщо A та B – формули, x – предметна змінна, то формулами є $(\overline{A}); (A \to B); (\forall x A); (\exists x A)$.

4. Інших формул не існує.

Вирази $A \vee B$ та $A \wedge B$, $A \equiv B$ визначаються аналогічно численню висловлень.

Формула, що не містить вільних змінних, називається *замкнутою*.

Наприклад: $\forall x P(x) \to Q(x, y)$, обидва входження x – зв'язні, y – вільна змінна.

$\forall x \exists y P(x, y) \to Q(x, y)$ – замкнута формула.

Складати "для всіх x властивість P істинна" – це те ж саме, що сказати "кон'юнкція всіх значень предикатної функції істинна".

$\forall x P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge ....$

Квантор існування означає диз'юнкцію всіх значень предикатної функції.

$\exists x P(x) = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee ....$

Обидва квантори можна заперечувати, виражати один через другий на основі закону де Моргана:

$$\overline{\forall} x P(x) = \overline{P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge \ldots} = \overline{P}(a) \vee \overline{P}(b) \vee \ldots = \exists x \overline{P}(x).$$

$$\overline{\exists} x P(x) = \overline{P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \ldots} = \overline{P}(a) \wedge \overline{P}(b) \wedge \ldots = \forall x \overline{P}(x).$$

Звідси

$$\overline{\forall} \overline{P}(x) = \exists x P(x),$$

$$\overline{\exists} \overline{P}(x) = \forall x P(x).$$

Щоб осмислити формули заперечення кванторів розглянемо приклад.

Нехай $P(x)$= “*x* парне число” з предметною областю $x \in N$.

Предикатна функція пробіжить ряд істинних та хибних значень:

$$P(1) = 0; P(2) = 1; P(3) = 0; P(4) = 1; P(5) = 0; \ldots$$

тоді $\overline{\forall} x P(x)$=”не всі *x* парні» = “існують такі *x*, які непарні» $= \exists x \overline{P}(x) = 1$.

Інтерпретація. Під *інтерпретацією* розумітимемо непорожню множину *M*, яку називають областю інтерпретації, а також відповідність, що ставить кожній предикатній букві P_i^n деяке відношення на *M*, кожній предметній константі a_i – деякий елемент області *M*, кожній функціональній букві f_i^m – деяку операцію на *M*.

Означення. Формула називається *значущою*, якщо існує хоча б одна інтерпретація, на якій формула істинна.

Означення. Формула *логічно загальнозначуща*, якщо при довільній інтерпретації вона істинна.

Означення. Формула хибна при довільній інтерпретації, називається протиріччям.

Логічно загальнозначущі формули являються виділеними формулами алгебри предикатів.

Оскільки область визначення предикатів може бути нескінченною, то, очевидно, таблиця істинності не може бути алгоритмом для визначення істинності предикатів.

Можна будувати таблиці істинності на обмежених областях.

Нехай предметна область предикатом $P(x)$ складається з двох конкретних значень $M = \{a, b\}$. Складемо таблицю істинності (табл. 24) всіх можливих інтерпретацій, враховуючи, що $\forall xP(x) = P(a) \wedge P(b); \exists xP(x) = P(a) \vee P(b).$

Таблиця 24

$P(a)$	$P(b)$	$\forall xP(x)$	$\exists xP(x)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

З таблиці витікають три елементарні клаузи:

I. $\forall xP(x) \Rightarrow P(a)$ – аксіома порядку, або $\forall xP(x) \Rightarrow P(a), P(b) \Rightarrow P(a).$

Її дію продемонструємо на відомому уже прикладі: “Для всіх *x* справедливе правило: Якщо *x* – людина, то *x* смертний. Сократ людина, отже, Сократ смертний”.

Введемо предикати:

$P_1(x)$=”*x* – людина”; $P_2(x)$=”*x* – смертний”, *a* = ”Сократ”. Складемо клаузу, що відповідає легенді:

$\forall x(P_1(x) \to P_2(x)); P_1(a) \Rightarrow P_2(a).$

Щоб її довести, перенесемо другу посилку вправо за знак метаімплікації, цього досить, щоб вона задовольняла аксіому порядку і предикатній формі:

$\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \Rightarrow P_1(a) \to P_2(a).$

II. $P(a) \Rightarrow \exists xP(x).$

III. $\forall xP(a) \Rightarrow \exists xP(x).$

Доведемо деякі тотожності та клаузи.

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x).$

Маємо:

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = (A(a) \wedge B(a)) \wedge (A(b) \wedge B(b)) =$$
$$= (A(a) \wedge B(b)) \wedge (A(a) \wedge B(b)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x).$$

2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,

доводиться аналогічно.

3. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.

Маємо:

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) = (A(a) \wedge B(a)) \vee (A(b) \wedge B(b)) = P \wedge M,$$

де $P = (A(a) \vee A(b)) \wedge (B(a) \vee B(b)) = \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.

$M = (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(b) \vee B(a))$.

Клауза зводиться до аксіоми порядку:

$P, M \Rightarrow P$, отже вона правильна.

4. Аналогічно доводиться клауза –

$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$.

В логіці предикатів, як і в логіці висловлювань, діє принцип двоїстості. Клауза залишається в силі, якщо її посилки і наслідки поміняти місцями, але при цьому провести заміну:

$\forall x \Leftrightarrow \exists x; \wedge \Leftrightarrow \vee; 0 \Leftrightarrow 1.$ Розглянемо всі можливі комбінації кванторів при двомісних предикатах.

Нехай двомісний предикат $P(x, y)$ має предметну область $\{a, b\}$. Складемо таблицю істинності (табл. 25) для всіх можливих інтерпретацій.

В таблиці прийняті скорочення:

$\forall\forall P = \forall x \forall y P(x, y)$; $\exists\forall \mathrm{P} = \exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$;

$\forall\exists \mathrm{P} = \forall \mathrm{y} \exists \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{y}); \exists\exists \mathrm{P} = \exists \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$.

На основі таблиці можна встановити істинність клауз: (m, n приймають значення a або *в*).

1. $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$.
2. $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$.
3. $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$.
4. $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$.
5. $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$.
6. $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$.
7. $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x P(x, x)$;

Таблиця 25

$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(b,a)$	$P(b,b)$	$\forall\forall P$	$\exists\forall P$	$\forall\exists P$	$\exists\exists P$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

8. $\exists x P(x,x) \Rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$
9. $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow P(n,m)$
10. $P(n,m) \Rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$.
11. $\forall y P(n,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.
12. $\forall y P(n,y) \Rightarrow \exists y \forall x B(x,y)$.
13. $\forall x P(x,m) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$.
14. $\forall x P(x,m) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$.
15. $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y P(n,y)$.
16. $\exists y \forall x P(x,y) \Rightarrow \exists y P(n,y)$.
17. $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \exists x P(x,m)$.
18. $\forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow \exists x P(x,m)$.

Очевидно, якщо область визначення предиката нескінченна, то таблиці істинності не можуть служити для визначення значущості формул. Існують інші методи доведення.

3.20. ОСНОВНІ ЛОГІЧНІ ЗАГАЛЬНОЗНАЧУЩІ ФОРМУЛИ

1. $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$ правило універсальної конкретизації;
2. $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$ правило екзистенціонального узагальнення;
3. $\overline{\forall} P(x) = \exists x \overline{P}(x); \overline{\exists} x P(x) = \forall x \overline{P}(x)$ закони де Моргана;
4. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x).$
5. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$
6. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x).$
7. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$
8. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow (\forall x B(x)).$
9. $(\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x)).$
10. $\forall x(A(x) \equiv B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \equiv \forall x B(x)).$
11. $(\exists x A(x) \equiv \exists x B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \equiv B(x)).$
12. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$, B не містить входжень x.
13. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$, B не містить входжень x.
14. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$, B не містить входжень x.
15. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$, B не містить входжень x.
16. $\forall x(A(x) \rightarrow B) = (\exists x A(x) \rightarrow B)$, B не містить входжень x.
17. $\exists x(A(x) \rightarrow B) = (\forall x A(x) \rightarrow B)$, B не містить входжень x.
18. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y).$
19. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y).$
20. $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y).$
21. $\forall x P(x) = \forall y P(y).$
22. $\exists x P(x) = \exists y P(y)$, якщо жодне вільне входження y не стане зв’язним в результаті заміни.

Частинним випадком формули $A(x)$ є формула $A(y)$, отримана заміною змінної x на y.

3.21. ПОБУДОВА ДОВЕДЕНЬ У ЛОГІЦІ ПРЕДИКАТІВ

Основною задачею логіки предикатів є встановлення істинності предикатних формул. Позначимо через P_i деякий предикат з довільним числом аргументів, а через r_i відповідну кванторову групу. Тоді закон дистрибутивності, наприклад, матиме вигляд:

$$r_1P_1 \vee (r_2P_2 \wedge r_3P_3) = (r_1P_1 \vee r_2P_2) \wedge (r_1P_1 \vee r_3P_3).$$

Для одномісних предикатів його можна довести через процедуру конкретизації:

$$x = \{a, b\}; r_1 = \forall x; r_2 = \exists x; P_1 = A(x); P_2 = B(x);$$

$$P_3 = C(x); y = \{c, d\}; z = \{e, f\}.$$

$$[A(a) \wedge A(b)] \vee [(B(c) \vee B(d)] \wedge [C(e) \wedge C(f)] =$$

$$= ([A(a) \wedge A(b)] \vee [B(c) \vee B(d)]) \wedge$$

$$\wedge ([A(a) \wedge A(b)] \vee [C(e) \wedge C(f)]).$$

З того, що в дужках замість одномісних предикатів з'являються багатомісні предикати, суть тотожності не зміниться. Вона справедлива в силу законів логіки і *принципу суперпозиції* за яким: заміна якої-небудь константи іншою або групою констант не впливає на істинність тотожності.

Основні правила доведення алгебри предикатів

1. Правило універсальної конкретизації.

$\forall x A(x) \big| = A(y)$, якщо y вільне для x в $A(x)$.

2. Правило екзистенціональної конкретизації.

$\exists x A(x) \big| = A(b);\ b \in D.$

3. Правило екзистенціонального узагальнення.

$A(y) \big| = \exists x A(x),$ де x вільне для y в $A(y)$.

4. Правило всезагальності.

$C \to A(x) \mid = C \to \forall x A(x).$

5. Правило існування.

$A(x) \to C \mid = \exists x A(x) \to C.$

6. Правило узагальнення.

Якщо $B \mid = A(x),$ то $B \mid = \forall x A(x),$ якщо x не входить в жодну формулу з B.

Розглянемо приклади.

Приклад 15. Нехай дана предикатна клауза:

$$\exists x \exists y P(x, y) \to \forall \nu P(a, \nu), \forall P(a, x) \to \exists x \exists y P(y, x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall u \exists \nu P(u, v) \to \exists v \forall u P(u, v).$$

Позначимо $A = \forall x \exists y P(x, y) = \forall u \exists v P(u, v),$

$B = \forall u P(a, u) = \forall x P(a, x);$ $C = \exists x \forall y P(y, x) = \exists v \forall u P(u, v).$

Тоді $A \to B, B \to C, B \to C \Rightarrow A \to C.$

Якщо транзитивність справджується, то і предикатна клауза також.

Приклад 16. Довести істинність клаузи

$$\forall t B(t, t) \to \exists x \overline{\overline{\exists}} y B(x, y), \exists t \forall y \overline{A}(t, y) \to$$
$$\to \forall u \forall v B(v, u), \overline{\overline{\exists}} x A(b, x) \Rightarrow \exists t \exists x \overline{B}(x, t) \wedge \exists t \forall y \overline{A}(t, y).$$

Процедура ідентифікації приводить до

$A_1 = \exists t \exists y A(t, y);$ $\mathrm{A}_2 = \exists x A(b, x);$

$B_1 = \forall u \forall v B(v, u) = \forall t \forall x B(x, t);$

$B_2 = \forall t B(t, t);$

$B_3 = \forall x \exists y B(x, y);$

$B_2 \to \overline{B}_3, \overline{A}_1 \to B_1, \overline{A}_2 \Rightarrow \overline{B}_1 \wedge \overline{A}_1; \overline{B}_2 \vee \overline{B}_3; A_1 \vee B_1, \overline{A}_2 \Rightarrow 0,$

$A_1, \overline{A}_2 \Rightarrow 0; \forall x \exists y A(x, y), \overline{\overline{\exists}} y B(k, y) \Rightarrow 0;$

$B_1, \overline{B}_2 \Rightarrow 0; \forall x \forall y B(x, y), \overline{\forall} x B(x, x) \Rightarrow 0;$

$B_1, \overline{B}_3 \Rightarrow 0; \forall x \forall y B(x, y), \overline{\forall} x \exists y B(x, y) \Rightarrow 0.$

Звідси випливає істинність вихідної клаузи.

Приклад 17. Довільна семантика логіки висловлювань може бути виражена в предикатній формі. Дана проста легенда: Якщо Ваня ходить всюди за Ніною, а Ніна знаходиться в кінотеатрі, то де буде знаходитися Ваня?

$P(x, y) =$”x знаходиться там, де y”.

Складемо клаузу:

$$\forall t P(Ніна, t) \to P(Ваня, t), P(Ніна, кінотеатр) \Rightarrow \exists t P(Ваня, t).$$

Тобто, треба довести наступне речення: чи існує таке місце t, де знаходився б Ваня.

Перетворимо нашу клаузу у протиріччя:

$$\overline{P}(Ніна, t) \vee P(Ваня, t),\ P(Ніна, кінотеатр), \overline{P}(Ваня, t) \Rightarrow 0.$$

Квантори всезагальності опускаємо, бо відсутні квантори існування. Доведення оформимо у вигляді дерева (рис.9)

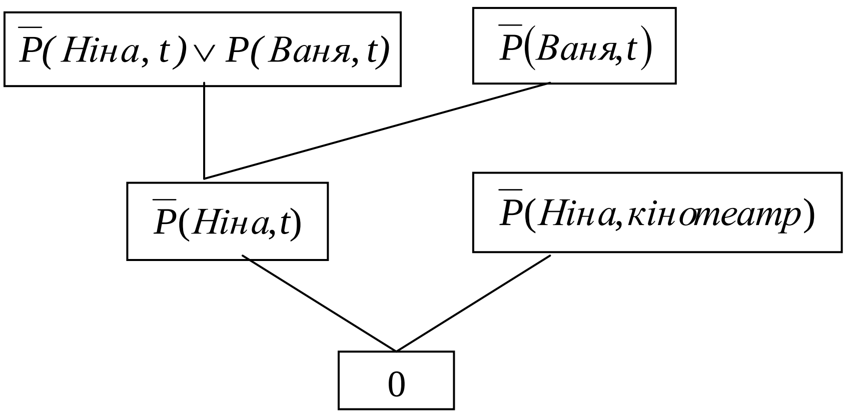


Рис.9

При конкретизації t = кінотеатр, доводиться, що дійсно існує місце, в якому знаходиться Ваня.

Зауважимо, що метод резолюції можна модифікувати так, щоб доведення дало відповідь у предикатній формі: “Ваня знаходиться в кінотеатрі”. Це можливо тоді, коли до того, що треба довести дописати диз’юнкцію з протилежним твердженням, утворивши таким чином тавтологію:

$$\overline{P}(Ваня, t) \vee P(Ваня, t).$$

Тоді дерево логічного висновку буде таким (рис. 10).

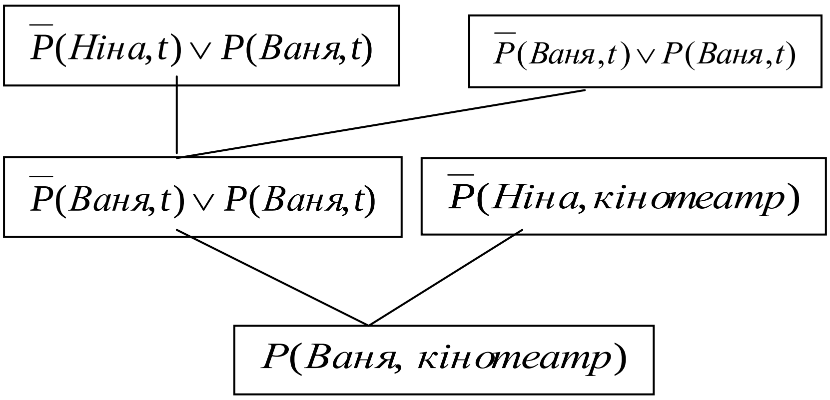


Рис.10

Більшість задач з використанням предикатів носить *пошуковий* характер. Пошукові задачі реалізуються мовою логічного програмування - ПРОЛОГ. Зупинимося на основних управляючих структурах та функціональних елементах цієї мови. Оскільки логіка висловлювань працює з правильно побудованими реченнями, існує можливість змішування об’єктивних та суб’єктивних речень, а також висловлювань, взятих з різних ієрархічних рівнів предметної області. Щоб обійти таку помилку, задачу, яку доводять, оформляють в вигляді *структури деревовидної форми*.

За корінь дерева приймається деяка *ціль А,* істинність якої треба довести.

Вона є заголовком *правила*, яке уявляє собою *хорнівську клаузу,* клаузи записують в оберненому порядку.

$$A \Leftarrow A_1, A_2, ...$$

Кожне A_i – підціль основної цілі *А* і залежить, в свою чергу, від інших правил B_{ij}.

$$A_1 \Leftarrow B_{11}, B_{12}, ...; \quad \mathrm{A}_2 \Leftarrow B_{21}, B_{22}, ...$$

Взагалі в ролі посилок можуть бути не тільки клаузи, але й елементарні висловлювання – *факти*. В свою чергу, B_{ij} знову можуть бути заголовками правил чи фактами. Так утворюється ієрархічна структура деревовидної форми. В логічних деревах не виникають парадокси.

У мові ПРОЛОГ реалізована *процедура уніфікації*, з допомогою якої проводиться порівняння *цілі* з *правилами*, а *правила* порівнюються з *фактами*. В результаті уніфікації змінним присвоюються конкретні значення так, що предикат цілі стає істинним фактом у випадку сприятливого виходу. Для розуміння утворення уніфікації розглянемо конкретний приклад програми.

Приклад 18. Нехай задана легенда.

Василя цікавлять книги, комп'ютери та автомобілі. Михайла цікавить дещо, що цікавить Василя, але це є техніка, яка вироблена в Японії. Відомо, що комп'ютери та автомобілі – це техніка. Крім того, відомо, що комп'ютери випускають в Америці, а автомобілі – в Америці і Японії.

Запитання: "що цікавить Михайла?".

Щоб краще скористуватися програмою, всі предикати та конкретні значення змінних не кодуються окремими буквами, а приводяться на словах. Зліва від тексту програми приведемо символьні вирази, щоб в аналітичній формі продемонструвати метод резолюцій, який лежить в основі інтерпретації ПРОЛОГу. При цьому всі склеювання проводяться з квантором загальності, але сам квантор не вказується.

Програма.

1. Інтерес (Василь, комп'ютери) $A(t,a)$.
2. Інтерес (Василь, книги) $A(t,b)$.
3. Інтерес (Василь, автомобілі) $A(t,c)$.
4. Інтерес (Михайло, x) $\Leftarrow$ $A(m,x)$.
5. $\Leftarrow$ інтерес (Василь, x) $A(t,x)$.
6. Техніка (x), $T(x)$.
7. Виготовлено (x, Японія) $P(x,n)$.
8. Техніка (комп'ютери) $T(a)$.
9. Техніка (автомобілі) $T(c)$.
10. Виготовлено (комп'ютери, Америка) $P(a,r)$.
11. Виготовлено (автомобілі, Америка) $P(c,r)$.
12. Виготовлено (автомобілі, Японія) $P(c,n)$.

Ціль: 13. Інтерес (Михайло, x) $\quad A(m, x)$.

Програма дає можливість скласти протиріччя, яке розв'язується в рамках методу резолюції:

$$A(t,a), A(t,b), A(t,c), T(a), T(c), A(m,x) \vee \overline{A}(t,x) \vee$$
$$\vee \overline{T}(x) \vee \overline{P}(x,n), P(a,r), P(c,r), P(c,n), \overline{A}(m,x) \Rightarrow 0.$$

Нуль можна отримати, коли x=c. Тоді,

$A(m,c) \vee \overline{A}(t,c) \vee \overline{T}(c) \vee \overline{P}(c,n)$ нейтралізується предикатами 3,9,13.

Пошук значення x проходить через процедуру уніфікації, яку можна виділити шляхом трасування програми (покрокового протоколювання процесу виконання програми).

Позначимо: *В* – виклик нового предикату, *П* – повторний виклик предикату, *У* – успішне завершення процедури уніфікації, тобто викликаний предикат відповідає якому-небудь факту, *Н* – неуспішне завершення уніфікації, *У* - вказує на те, що існує ще один факт з уніфікацією, яка підходить. Символ підкреслення на місці x називається анонімною змінною і повністю замінює x при трасуванні програми. Рядок трасування закінчується числом, яке відповідає номеру роздруківки програми.

Наведемо трасування програми.

1. В: ціль ( ) – 13.
2. В: інтерес (Михайло, -) – 1.
3. П: інтерес (Михайло, -) – 2.
4. П: інтерес (Михайло, -) – 3.
5. У: інтерес (Михайло, -) – 4.
6. В: інтерес (Василь -) – 5.
7. У: інтерес (Василь, комп'ютери) – 1*у*.
8. В: техніка (комп'ютери) – 6.
9. У: техніка (комп'ютери) – 8.
10. В: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 7.
11. П: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 10.
12. П: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 11.
13. Н: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 12.

14. П: інтерес (Василь, -) – 5.
15. У: інтерес (Василь, книги) – 2*у*.
16. В: техніка (книги) – 6.
17. П: техніка (книги) – 8.
18. Н: техніка (книги) – 9.
19. П: інтерес (Василь, -) – 5.
20. У: інтерес (Василь, автомобілі) – 3.
21. В: техніка (автомобілі) – 6.
22. П: техніка (автомобілі) – 8.
23. У: техніка (автомобілі) – 9.
24. В: виготовлено (автомобілі, Японія) – 7.
25. П: виготовлено (автомобілі, Японія) – 10.
26. П: виготовлено (автомобілі, Японія) – 11.
27. У: виготовлено (автомобілі, Японія) – 12.
28. У: Ціль ( ) – 13.

Для відповіді на запитання "Що цікавить Михайла?", або в предикатній формі – інтерес Михайла, ПРОЛОГ – система шукає факти і заголовки правил, які порівнюються з ціллю. Перші три факти не відповідають цілі, далі слідує правило, заголовок якого замінюється трьома підцілями. В рядку 6 викликається підціль, потім ПРОЛОГ – система повертається на початок програми, де її чекає "успіх". Виставляється показник "*у*", до якого система повернеться у випадку "неуспіху", який може з'явитися в іншому місці програми. В рядку 8 викликається виклик другої підцілі – техніка (комп'ютери), для яких знаходиться факт (рядок 9). Проте для третьої підцілі (комп'ютери, Японія) – потрібного факту немає (рядок 13). Тоді змінна *х* звільнюється від своєї конкретизації (комп'ютери) і набуває нового значення "книги". Ця конкретизація не задовольняє другу підціль (рядок 18). Змінна знову звільнюється і набуває значення "автомобілі". При цій конкретизації задовольняються всі три підцілі, тобто пошук закінчується успіхом, інтерес (Михайло, автомобілі) є тим конкретизованим предикатом, при якому забезпечена істинність клаузи.

Граф пошуку цілі "інтерес (Михайло, *х*) зображений на рис.11.

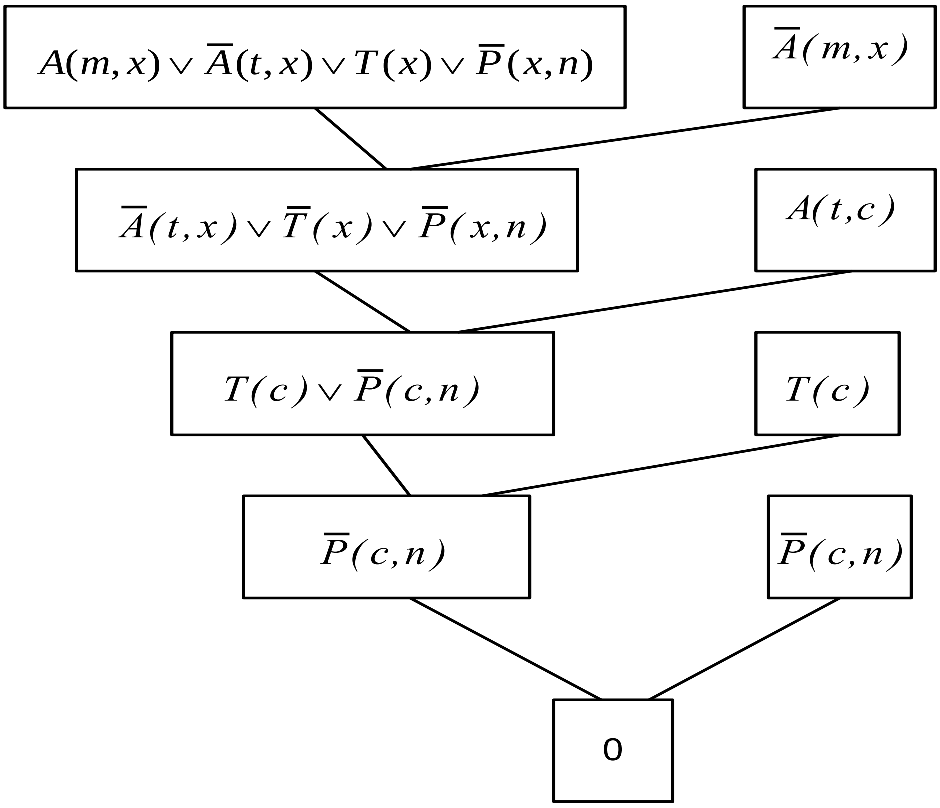


Рис.11

Бінарне дерево отримано в результаті підстановок предметних констант на місце змінних, правила замінювалися фактами, а ціль – підцілями.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Вказати на істинні та фіктивні змінні булевих функцій:

а) $xy \vee \bar{x}y$;

б) $x_1 \vee x_2 \to x_3$;

в) $(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_3 \to x_1)(x_3 \to x_2)$;

г) $(((x_1 \to x_2) \vee x_3)\overline{(x_2 \to x_1)}x_1\bar{x}_3) \oplus x_1$;

д) $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)\overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}$.

2. Визначити, чи являються формули тавтологіями:

а) $(x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$;

б) $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \to x_2)$;

в) $(\bar{x}_1 \to x_2) \to (\bar{x}_2 \to x_1)$;

г) $(x_2 \to x_3) \to (x_2 \to (x_1 \to x_3))$;

д) $(x_1 \to x_2) \to ((x_3 \to x_2) \to (x_1 \vee x_3) \to x_2)$;

е) $((x_2 \to x_1) \to x_3) \to (x_1 \to x_3)$;

ж) $((x_1 \to x_2)(x_3 \to x_4)) \to (x_1 x_3 \to x_4 x_2)$.

3. Чи еквівалентні формули:

а) $A \equiv (A \vee B)$ *та* $A \vee B$;

б) $A \equiv B\bar{A}\bar{B} \vee AB$ *та* $(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)$;

в) $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3$ *та* $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$;

г) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$ *та* $\bar{x}_1$.

4. Побудувати функції, що реалізуються формулами. Записати логічний вираз у ДДНФ та ДКНФ.

а) $$((x_1 | x_2) | (\bar{x}_1 \sim x_2) | (x_3 \oplus \bar{x}_4)) \to (x_4 \oplus \bar{x}_3)) \to$$
$$\to (((x_2 \to x_3) \to (x_1 \sim x_2)) \downarrow \overline{(\bar{x}_1 | x_4) | (x_4 \to \bar{x}_3)});$$

б) $$((\overline{x_1 \downarrow x_2}) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_4)) \to (((\overline{(\bar{x}_4 \to \bar{x}_3)} | (x_3 \to x_4)) \vee$$
$$\vee ((\bar{x}_2 \to \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_3 \to x_4)) \to ((\bar{x}_1 \downarrow x_4) \vee (x_3 \downarrow x_4)));$$

в) $$((x_1 \to x_2) | (\bar{x}_2 \to x_3) | \overline{(\bar{x}_1 \to \bar{x}_2)}) \vee$$
$$\vee \overline{(x_1 \oplus x_2)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \sim x_3)} \vee (\bar{x}_3 \sim x_4)) \to x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4;$$

г) $$(((x_1 x_2) \sim (\bar{x}_3 x_4)) | (\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \bar{x}_4)) \to ((x_1 \to \bar{x}_2) \vee$$
$$\vee \overline{(\bar{x}_2 \to \bar{x}_4)} \vee \overline{(\bar{x}_4 \to x_1 x_2)})) \downarrow (\overline{\bar{x}_1 \downarrow x_2})).$$

5. Максимально спростити вираз, скориставшись законами логіки Буля:

а) $$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee ((\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4)),$$

б) $(x_1 \wedge \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$,

в) $$(x_1 \vee (x_3 \vee (x_2 \wedge x_3))) \wedge \overline{(x_3 \wedge x_4)} \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_4) \wedge$$
$$\wedge (x_3 \vee (\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \vee x_4)),$$

г) $(((x_4 \vee (x_4 \wedge x_3)) \wedge \bar{x}_4) \vee \bar{x}_2) \wedge ((x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1))$, д) $x_1 \wedge \overline{(x_2 x_3 \vee x_4)}\,\overline{(x_1 x_2 x_3 \vee x_4)}(\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1)$,

е) $\overline{\overline{((x_2 \vee x_3)}} \wedge \overline{(x_4 \vee x_1))} \vee \overline{(x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee (x_1 \to x_2))} \vee$
$\vee (\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1)$,

ж) $\overline{(\overline{(x_1 x_2)} \vee (x_2 \bar{x}_3)} \vee \overline{(x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee (x_1 \to x_2))} \vee \overline{((x_1 | x_2 | x_3) \downarrow \bar{x}_4)}$,

з) $\overline{((\overline{(x_1 x_2)} \vee (x_2 \bar{x}_3))} \to \overline{((x_1 | x_2) | \bar{x}_3) x_4)}) \to$
$\to \overline{(((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus \bar{x}_4)}$.

6. Знайти мінімальні ДНФ булевих функцій методом Куайна; методом Карнау-Вейча, методом Мак-Класкі:

а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 0,3,4,7,8,9,11,12;

б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 3,6,8,9,11,13,15;

в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 4,6,8,9,10,11,15;

г) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 0,3,7,9,10,12,14;

д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 4,5,7,9,10,11,12,15;

е) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 3,4,5,7,8,9,10,11;

ж) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 0,2,9,10,11,12,13,15;

з) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборах 0,5,7,8,9,12,13,15.

7. Чи буде повною система функцій :

а) $\{0;1;(x_1 \to x_2) \to x_3\}$;

б) $\{x_1 \equiv x_2, x_1 \vee x_2; 0\}$;

в) $\{x_1 x_2; (x_1 = x_2) = x_3\}$;

г) $\{\wedge; \vee; \rceil\}$;

д) $\{\to; 0\}$;

е) $\{\to; \rceil\}$.

8. Наведені нижче клаузи довести відповідними методами (аксіоматичним, натурального числення та резолюції):

а) $(A \to C) \to (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$;

б) $C \to A, B \vee C, B \to D, D \to A \Rightarrow A$;

в) $A \vee D, B \vee E, D \to C, D \vee C \Rightarrow A \wedge C; E \wedge D; B$;

г) $(A \wedge B) \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$;

д) $(A \vee C) \sim \overline{(B \vee D)} \Rightarrow \overline{A} \sim B; \overline{C} \sim D$;

е) $A \to D, C \to D, B \to E; D \to F, E \wedge F, A \to C \Rightarrow \overline{A}$;

ж) $A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$;

з) $E \to F, C \to (D \to E), (A \to B) \to C \Rightarrow D \to (A \vee \overline{F})$.

9. Нижче наведені легенди. Зробіть висновок, якщо можливо, з кожного набору посилок:

а) тому хто лисий, волосся фарбувати немає сенсу. Ні одна жаба не має волосся;

б) розумні люди ходять на руках. Нерозумні люди ходять на руках;

в) всі кози люблять капусту. Василь любить капусту;

г) ні одному ішаку не можна відмовити в розумі. Розумна істота не попаде в халепу;

д) ні один професор не являється дурнем. Дурні люди гонористі;

е) сіль солона. Море солоне. Люди люблять море. Ні один будинок не побудований із солі. Деякі будинки дуже гарні;

ж) пісок сипучий. Діти люблять бавитись у піску. Побудований будинок із піску – недовговічний;

з) якщо пан Івашко – щасливий, то пані Івашко – нещаслива, якщо пан Івашко – нещасливий, то пані Івашко – щаслива;

і) якщо Джон піде на танці, то Макс не піде на танці, або Джон не піде на танці, то Макс прекрасно проведе вечір;

к) необхідна і достатня умова для щастя шейха полягає в тому, щоб мати золото, вино, жінок і слухати легкі мелодії;

л) якщо x додатне, то x^2 – від'ємне;

м) для того щоб x було непарним, досить того, щоб воно було простим.

10. Скласти клаузи для наведених нижче легенд та за методом резолюцій перевірити логічний наслідок:

а) якщо Іван – комуніст, то Іван – атеїст. Наслідок: Іван – комуніст;

б) якщо капіталовкладення будуть постійними, то виростуть державні витрати, або виникне безробіття. Якщо державні витрати не виростуть, то податки будуть зменшені. Якщо податки будуть зменшені, а капіталовкладення не зміняться, то безробіття не зросте. Наслідок: державні витрати зростуть;

г) дещо, що несе в собі риси чогось доброго, добре само по собі. Дещо, що несе в собі риси поганого, погане саме по собі. Війна несе в собі риси миру і страждань. Мир це добре, страждання – погано. Наслідок: деякі речі як хороші, так і погані;

д) перукарі стрижуть всіх тих, хто не стрижеться сам, і не стрижуть тих, хто стрижеться сам. Чи існують перукарі ?

е) кожний, хто їде в тролейбусі, купує білет. Наслідок: якщо не існує білетів, то ніхто нікуди не їде.

11. Чи буде сумісна множина наведених нижче тверджень ? Впевнитися в цьому, склавши клаузи та перевірити їх кон'юнкції на сумісність:

а) якщо на вечірці не цікаво, то або Аліса починає плакати, або Вася розповідає смішні історії. Якщо Петро приходить на вечірку, то вона або нецікава, або Аліса починає плакати. Якщо Вася розповідає смішні історії, то Аліса не починає плакати. Петро приходить на вечірку, тоді і тільки тоді, коли Вася не розповідає смішні історії. Якщо Аліса починає плакати, то Вася розповідає смішні історії;

б) або свідок був заляканим, або, якщо Джон покінчив життя самогубством, записка була знайдена. Якщо свідок був заляканим, то Джон не покінчив життя самогубством. Якщо записка була знайдена, то Джон покінчив життя самогубством;

в) якщо курс цінних паперів росте і процента ставка зменшується, то або падає курс акцій, або податки не підвищуються. Курс акцій знижується тоді і тільки тоді, коли росте курс цінних паперів і податки зростають. Якщо процентна ставка знижується, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не зростає. Або підвищуються податки, або курс акцій знижується і зменшується процентна ставка.

12. Нижче наведені легенди. Записати клаузу, що містить 4-6 букв, яка відповідає тексту та підтексту легенди, для чого сформулювати необхідні посилки та два наслідки: один істинний, другий хибний. З допомогою таблиці істинності знайти МНФ, мінімальне та трансверсальне покриття:

а) в одній старій легенді розповідається, що грецький драматург Софокл загинув при загадкових обставинах. На його лису голову орел скинув камінь, прийнявши її за яйце. Якби Софокл не творив трагедій, то він один не ходив би в гори і залишився б жити до старості. Проте він міг творити трагедії в горах, якби у нього було волосся на голові та за відсутності птахів;

б) всі автори літературних описів, що пізнали природу людини, розумні люди. Ні одного автора не можна вважати істинним поетом, якщо він не може хвилювати серця людей. Шекспір написав “Гамлета”. Ні один автор, який не пізнав природу людини, не може хвилювати серця людей. Тільки істинний поет міг написати “Гамлета”. Шекспір розумна людина;

в) ні один чоловік, який дарує дружині плаття, не може бути недобродійним. Акуратний чоловік повертається додому до вечері. Дружині нелегко слідкувати за одягом чоловіка, якщо, повернувшись додому, він розкидає одяг де попало. Хороший чоловік завжди дарує своїй дружині плаття. Ні один чоловік не може не бути недобродійним, якщо жінка не слідкує за його одягом. Неакуратний чоловік розкидає одягом. Хороший чоловік завжди повертається додому на вечерю;

г) я не вважаю день нещасливим, якщо начальник не викликає мене. Четверги завжди бувають похмурими. Якщо люди беруть зонти, то день не буває сонячним. Єдиний день тижня, коли начальник мене викликає – четвер. Кожний візьме зонт, якщо йде дощ. Мої нещасливі дні завжди сонячні. Дощові дні похмурі;

д) “Ти мене поважаєш?” – “Так”. – “Тоді дай мені грошей”. – “Якщо я дам гроші, то перестану тебе поважати”. – “Ти мене поважаєш за гроші?” – “Ні, як актора”. – “Ну, тоді тим паче дай мені грошей”. – “Я даю лише тим, у кого вони є. Ти ж їх не віддаєш”. – “Позич під проценти”. – “Добре”;

е) “Цей костюм не одягай, ти в ньому як бомж”. – “Але це плаття я теж не одягну, бо воно на мені, як на вішалці”. – “Одягни шкіряний піджак та спідницю”. – “Піджак весь у фарбі”. – “Це не біда, прикрий фарбу сумкою”. – “Ні, я одягну сарафан, якщо ти не заперечуєш”. – “Заперечую, одягай костюм”;

ж) якщо в електричному ланцюзі протікає великий струм, то перегорить запобіжник, тобто його треба буде замінити. При цілому запобіжнику, приймач працює, якщо його ввімкнено в мережу. Якщо приймач працює, я буду слухати улюблену мелодію. Тобто я слухаю мелодію за умови відсутності перевищення ЛЗО та підключення приймача до мережі;

з) сьогодні я попаду на першу пару, якщо не затримається автобус. Автобус не запізнився, але в мене не було грошей на білет. Поїду “зайцем”. В салоні з’явився контролер. Контролер мене затримав, але потім відпустив. На першу пару я запізнився;

і) із твердження “два плюс два дорівнює три” слідує, що Ваня і Папа римський одна особа. Якщо від обох частин рівності відняти по одиниці, то буде справедлива рівність “три дорівнює двом”. Якщо знову відняти по одиниці, то буде справедлива рівність “два дорівнює одиниці”. Один – це Ваня, два – Ваня і Папа римський. Оскільки правильно, що “один дорівнює двом”, то Ваня – Папа римський;

к) якщо хмари – це гори в небі та гори – це хмари на землі, то гроза – це вулкан на небі і вулкан – це гроза на землі. Вулкан викидає попіл, а гроза воду, які допомагають підняти урожайність. Урожай це благо. Все благо – від Бога. Отже, попіл, вода, вулкан, грози, хмари – все від Бога;

л) існує дві теорії виникнення людства на землі – теорія еволюції Дарвіна і теорія створення людини Богом. Якщо справедлива перша теорія, то людина виникла в результаті перетворення живих організмів. Як довели вчені, такі перетворення відбувалися. По теорії створення людини Богом вона була виліплена із глини, а життя вдихнув Господь. Глини завжди багато, а про дихання Бога сумніватися не приходиться, про це написано у Біблії. Отже – обидві теорії правильні;

м) сліпий та глухий пішли на прогулянку. “Дивися, спереду поле з помідорами, отже, ми поїмо”, – сказав глухий. “Але”, – сказав сліпий. “Послухай, десь гримить грім, напевно піде дощ” – сказав сліпий. “Ага” – сказав глухий. Вони набрали помідорів та відкрили парасольки. Все це бачив і чув німий. “Я їм не товариш”, – сказав німий;

н) щоб зварити грибний суп, необхідні: гриби, морква, цибуля, картопля, пшоно. Моркви та пшона в нашому магазині не було. Все інше я купив. Проте супу уже не зварити. Добре, куплю м’ясо і приготую котлети, відварю картоплю – друге уже є. На перше відварю грибний бульйон;

о) щоб назбирати грибів, треба зранку поїхати до лісу. Поїхати можна або електричкою, або автомобілем. Автомобілем швидше. Петро поїхав на автомобілі. По дорозі автомобіль зламався, Петро його відремонтував, але їхати в ліс було пізно. Грибів Петро не назбирав;

п) щоб успішно здати екзамен, треба або вивчити весь матеріал, або підготувати шпаргалки, або вивчити і написати шпаргалки. Студент написав шпаргалки, проте забув їх удома. Екзамен не був зданий;

р) щоб приготувати кофе, необхідно купити кофе, цукор та мати кип’яток. Петро купив кофе, цукор, але не було води. Коли Петро приніс воду, згорів кип’ятильник. Петро приготував кофе з холодної води;

с) якщо Джон не зустрічав вечором Сміта, то або Сміт був вбивцем, або Джон бреше. Якщо Сміт не вбивець, то Джон його не зустрічав вечором, і вбивство було після опівночі. Якщо вбивство було після опівночі, то або Сміт – вбивець, або Джон бреше. Отже, Сміт був вбивцем;

т) Оля та Таня близнюки. Оля з великою швидкістю полетіла у космос, а Таня залишилася на землі. Теорія відносності стверджує, що якщо летіти на великій швидкості, то час уповільнюється, тому Таня зістарилася, а Оля ні. Ця ж теорія стверджує, що якщо Оля рухається відносно Тані, то Таня рухається відносно Олі. Проте ця ж теорія стверджує, що Оля, повернувшись з польоту, буде молодшою за Таню. Висновок: теорія відносно не є вільною від протиріччя;

у) – "Хочеш молока?" – "Молоко я не п'ю після риби, а рибу я не їм після борщу. Борщ я сьогодні не їв, але з'їв трохи гречаного супу. Після нього з'їв кусок риби. Якщо я їм гречаний суп, то в цей день не буду відмовлятися від молока, але при умові, що я не пив компоту. Отже, давай сюди молоко";

ф) касир Іванова сказала, що вона бачила водія Петрова в кімнаті відпочинку. Ця кімната за її словами знаходиться поруч з приміщенням складу. Стріляли в складі. Водій заявив, що він пострілів не чув. Отже, якщо касир сказала правду, то водій бреше, не можуть касир і водій одночасно говорити правду;

х) мотоцикл я спочатку не побачив, бо його закривав бензовоз, а "Волга" вивернула із-за рогу, коли "Жигулі" були біля світлофора. Іномарка проскочила на "червоне світло" і стала, як мені здається, причиною всієї аварії. Із-за неї "Волга" різко загальмувала і мотоцикліст впав на асфальт. "Жигулі", щоб не задавити мотоцикліста, повернули на тротуар, а бензовоз в цей час врізався у "Волгу". Якби не було мотоцикла, то такої ситуації не було б. Хоча винен і водій "Волги", тому що він їхав дуже швидко.

13. Побудувати таблиці істинності на області інтерпретації $D=\{a,b\}$:

а) $\exists x \forall y (P(x) \vee A(y)) \to B$;

б) $\exists x (P(x) \to \forall y A(y)) \to B$;

в) $\forall x (P(x) \vee \exists y (Q(y) \to B)) \to A$;

г) $\exists x (P(x) \to \exists y (B \to A(y)))$;

д) $\forall x\exists y(P(x)\vee A(y)\to B(y))$;

е) $\exists x(P(x)\vee\exists y(Q(y)\to A)$.

14. Довести еквівалентність формул:

а) $\exists x(A\wedge F(x))$ *та* $\mathrm{A}\wedge\exists \mathrm{xF(x)}$;

б) $\forall x(F(x)\to A)$ *та* $\overline{\exists}\overline{\mathrm{x}}\overline{(\mathrm{F(x)}\to \mathrm{A})}$;

в) $\forall x(A\to F(x))$ *та* $\mathrm{A}\to\forall \mathrm{xF(x)}$;

г) $\exists xF(x)$ *та* $\overline{\forall}\mathrm{x}\overline{\mathrm{F}}\mathrm{(x)}$;

д) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ *та* $\exists \mathrm{x(F(x)}\to \mathrm{A})$;

е) $A\vee\forall xF(x)$ *та* $\forall \mathrm{x(A}\vee \mathrm{F(x))}$.

15. Встановити істинність логічного виразу шляхом конкретизації:

а) $\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$;

б) $\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yP(x,y)$;

в) $\forall xP(x,a)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)$;

г) $\exists xP(x,x)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$;

д) $\exists xA(x)\to\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\to B(y))$;

е) $\forall x(A\vee B(x))=A\vee\forall xB(x)$;

ж) $\forall yP(a,x)\Rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$.

16. Довести істинність предикатних клауз методом резолюцій:

1) $\forall y\exists tB(y,c,t),\forall x\exists yA(x,y,y)\vee\forall xB(b,x,a)\vee$
$\vee\exists x\forall vA(x,c,v)\vee\forall u\exists vB(u,c,v)\Rightarrow\exists tB(t,c,t)\wedge$
$\wedge\overline{\forall}uA(u,c,v)$;
$\forall u\exists vB(u,v,v)\wedge\exists uA(b,u,u)\wedge\exists xB(b,c,x)$;

2) $\forall y\exists tB(y,c,t),\forall x\exists yA(x,y,y)\vee\forall xB(b,x,a)\vee$
$\forall u\forall v\forall wA(u,v,w)\vee\forall x\exists yB(x,b,y)\vee\forall u\forall vC(u,v,b)$,
$\exists x\overline{A}(x,a,b)\vee\forall y\exists tB(a,y,t)\vee\forall v\forall uC(u,v,a)$,
$\forall w\overline{B}(a,b,w)\Rightarrow\forall u\exists v\exists wC(u,v,w)\wedge\exists x\exists y\exists tC(x,y,t)$;

3) $\exists y\forall tB(y,a,t)\to\forall u\forall vA(b,v,u),\forall u\forall vA(v,u,a)\vee$
$\vee\forall y\exists uB(u,y,t),\forall tB(t,t,t)\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists yB(a,b,y)\wedge\exists x\forall y\exists tA(x,y,t);\exists u\exists v\exists wA(u,v,w)$;

4) $\forall x\exists y\exists tA(x,t,y)\vee\exists u\forall v\exists wA(u,v,w)\Rightarrow\exists x\forall t\overline{B}(x,b,t),$
$(\forall u\exists vB(u,b,v)\to\exists y\forall xA(a,x,y)\to(\forall t\exists xB(t,b,x)\vee$
$\vee\forall u\forall t\exists xA(t,u,x));$

5) $\forall x\exists tB(x,t,a),\forall u\exists wA(u,w,w)\vee\exists t\forall wB(w,t,t)\vee$
$\vee\exists t\forall xA(x,c,t)\Rightarrow\overline{\forall}x\exists wA(x,x,w)\wedge\forall u\exists vB(u,v,b);$
$\exists v\exists wB(b,v,w)\wedge\exists tA(b,t,t)\wedge\exists v\forall uB(u,v,a).$

17. Задана ПРОЛОГ-програма "Родинні зв'язки".

Необхідно виконати трасування програми окремо для двох цілей, вводячи предикати і правила. Оскільки може існувати декілька значень змінних *x* та *y*, що задовольняють одній цілі, при трасуванні допустимо обмежитися одним істинним значенням *x* або *y* (приклад взятий з [1]). Крім того, в зв'язку з великою кількістю повторних викликів, дозволяється вказувати лише перший і останній рядки викликів, які повторюються, наприклад:

…
81 В: чоловік (Фелікс) – 85,
82 П: чоловік (Фелікс) – 1,
…
99 П: чоловік (Фелікс) – 18,
100 У: чоловік (Фелікс) – 19.

ПРОЛОГ-програма "Родинні зв'язки":
чоловік (x) – x – чоловік,
дружина (x) – x – дружина, дочка (x,y) – x дочка y,
батько (x,y) – x – батько y, син (x,y) x син y,
мати (x,y) – x – мама y, батьки (x,y) – x батько або мати y,
сестра (x,y) – x – сестра y, брат (x,y) – x брат y.

Клаузи:
1) чоловік (Микола), 2) чоловік (Іван),
3) чоловік (Степан), 4) чоловік (Сергій),
5) чоловік (Павло), 6) чоловік (Ігор),
7) чоловік (Анатолій), 8) чоловік (Йосип),
9) чоловік (Роман), 10) чоловік (Кирило),
11) чоловік (Дмитро), 12) чоловік (Максим),
13) чоловік (Євген), 14) чоловік (Петро),

15) чоловік (Юхим), 16) чоловік (Юрій),
17) чоловік (Вадим), 18) чоловік (Олег),
19) чоловік (Фелікс), 20) дружина (Марія),
21) дружина (Ольга), 22) дружина (Тетяна),
23) дружина (Жанна), 24) дружина (Ірина),
25) дружина (Аліса), 26) дружина (Катерина),
27) дружина (Олена), 28) дружина (Вікторія),
29) дружина (Поліна), 30) дружина (Луїза),
31) дружина (Наталія), 32) дружина (Барбара),
33) дружина (Бела), 34) дружина (Ганна),
35) батько (Микола, Іван), 36) батько (Степан, Марія),
37) батько (Іван, Ольга), 38) батько (Іван, Сергій),
39) батько (Іван, Тетяна), 40) батько (Сергій, Вікторія),
41) батько (Павло, Роман), 42) батько (Сергій, Дмитро),
43) батько (Йосип, Ірина), 44) батько (Юхим, Анатолій),
45) батько (Юхим, Поліна), 46) батько (Юрій, Вадим),
47) батько (Петро, Юхим), 48) батько (Петро, Юрій),
49) батько (Петро, Ганна), 50) батько (Максим, Петро),
51) батько (Дмитро, Наталка), 52) батько (Фелікс, Олег),
53) батько (Олег, Євген), 54) мати (Аліса, Петро),
55) мати (Катерина, Олена), 56) мати (Олена, Юхим),
57) мати (Олена, Юрій), 58) мати (Олена, Ганна),
59) мати (Марія, Ольга), 60) мати (Ганна, Вікторія),
61) мати (Луїза, Євген), 62) мати (Тетяна, Поліна),
63) мати (Марія, Сергій), 64) мати (Ганна, Олег),
65) мати (Тетяна, Анатолій), 66) мати (Ганна, Дмитро),
67) мати (Вікторія, Бела), 68) мати (Марія, Тетяна),
69) мати (Ольга, Жанна), 70) мати (Ольга, Павло),
71) мати (Жанна, Ірина), 72) мати (Ірина, Ігор),
73) мати (Ірина, Кирило), 74) мати (Барбара, Роман),
75) род. (x,y)⇐батько (x,y), 76) род. (x,y)⇐мати (x,y),
77) син (x,y)⇐батьки (y,x), чоловік (x),
78) дочка (x,y)⇐род. (y,x), жінка (x),
79) брат (x,y)⇐род.(z,x), род. (z,y), чоловік (x); $x \neq y$.
80) сестра (x,y)⇐род.(z,x), род.(z,y), дружина (x), $x \neq y$.

Цілі:

1. Тесть (Фелікс, у), племінник (Павло, у).
2. Тітка (Ганна, у), внук (х, Аліса).
3. Двоюрідний брат (Вадим, у), внучка (х, Сергій).
4. Дядько (Юхим, у), свекруха (Марія, у).
5. Невістка (х, Максим), внук (х, Ганна).
6. Племінниця (Жанна, у), внук (Роман, у).
7. Теща (Олена, у), внучка (Бела, у).
8. Теща (Марія, у), свекор (х, Олена).
9. Внук (Євген, у), дядько (Юрій, у).
10. Тітка (Тетяна, у), двоюрідний брат (Дмитро, у).
11. Зять (Петро, у), тітка (Ольга, у).
12. Свекор (Петро, у), внучка (Поліна, у).
13. Свекруха (х, Луїза), дядько (Сергій, у).
14. Тесть (х, Сергій), двоюрідний брат (Вадим, у).
15. Теща (х, Сергій), двоюрідний брат (х, Вікторія).
16. Троюрідна сестра (х, Бела), зять (Сергій, у).
17. Племінник (Вадим, у), внучка (Ірин, у).
18. Невістка (Ганна, у), двоюрідний брат (Вікторія, у).
19. Невістка (Олена, у), племінниця (Вікторія, у).
20. Двоюрідна сестра (Жанна, у), свекор (Іван, у).
21. Троюрідна сестра (Наталія, у), племінник (х, Юхим).
22. Тесть (Петро, у), троюрідний брат (Роман, у).
23. Племінниця (х, Сергій), зять (Юхим, у).
24. Внучка (х, Марія), двоюрідна сестра (Бела, у).
25. Двоюрідна сестра (х, Поліна), зять (х, Петро).

18. Придумати легенди такі, в яких введення предикатів і кванторів можливе, скласти предикатну клаузу і довести її істинність методом резолюцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Акимов О.Е.* Дискретна математика. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 349с.
2. *Михайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Спеціальні розділи математики. – К.: Вища школа, 1992. – 214с.
3. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский П.М.* Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 480с.
4. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 399с.
5. *Шиханович Ю.А.* Введение в современную математику. – М.: Наука, 1986. – 384с.
6. *Лапа В.Т.* Математические основы кибернетики. – К.: «Вища школа», 1971. – 420с.
7. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384с.
8. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264с.

Навчальне видання

ФЕДОРЕНКО Наталія Дмитрівна
ДЕМЧЕНКО Віктор Вікторович

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *О.С.Дзюби*
Комп’ютерна верстка *Т.І.Кукарєвої*

Підписано до друку   2003. Формат 60х84 1/16
Папір офсетний. Гарнітура Таймс.   Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 6,28. Обл.-вид. арк. 6,75. Ум. фарбовід. 55.
Тираж 100 прим.   Видавничий № 70/І-02.   Замовлення №

КНУБА, 03037, Київ-37, Повітрофлотський проспект, 31

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури.