МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник у двох частинах

Частина 1

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Київ 2014

УДК 517(07)
ББК 74.3
Д55

Автори: *Н.Д. Федоренко*, канд. техн. наук, професор;
С.В. Білощицька, канд. техн. наук, доцент;
А.О. Білощицький, д-р техн. наук, професор;
О.І. Баліна, канд. техн. наук, доцент;
І.С. Безклубенко, канд. техн. наук, доцент;
Ю.П. Буценко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти: *С.С. Рижов*, д-р техн. наук, професор, ректор Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова, лауреат Державної премії в галузі науки і техніки, заслужений діяч науки і техніки України;
Ю.М. Тесля, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій;
О.О. Диховичний, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірності НТУ «КПІ»

Відповідальний за випуск *В.М. Міхайленко*, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

Затверджено на засіданні науково-методичної ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 2 від 22 жовтня 2013 року.

Федоренко Н.Д.
Д55 Дискретна математика: навчальний посібник у двох частинах / Н.Д. Федоренко та ін. – Ч. 1. – К.: КНУБА, 2014 – 104 с.

Навчальний посібник складено відповідно до робочої програми з дискретної математики. Він вміщує теоретичні відомості, вправи, що призначені для знайомства з основними поняттями та основами розглянутих розділів, і завдання, які розраховані на читача з достатньою математичною культурою.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, в яких вивчається дискретна математика.

УДК 517(07)
ББК 74.3

ЗМІСТ

ВСТУП. 5

Розділ 1. МНОЖИНИ. 6

1.1. Множини. Булеві операції над множинами. 6

Завдання для самостійної роботи. 11

Розділ 2. ВІДНОШЕННЯ. 18

2.1. Відношення. Основні поняття та визначення 18

2.2. Властивості бінарних відношень 21

2.3. Спеціальні бінарні відношення. 21

2.4. Функціональні відношення. 22

Завдання для самостійної роботи. 23

Розділ 3. АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ 26

3.1. Алгебраїчні операції та їх властивості. 26

3.2. Найпростіші алгебраїчні структури. 28

3.3. Кільця і поля 29

3.4. Решітки 29

Завдання для самостійної роботи 31

Розділ 4. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ. 33

4.1. Булеві змінні та булеві функції. 33

4.2. Способи задання булевих функцій. 34

4.3. Таблиці істинності. 34

4.4. Номери булевих функцій. 36

4.5. Булеві формули і пріоритет операцій. Перехід від формули до таблиці істинності 37

4.6. Двоїстість. Принцип двоїстості 39

4.7. Закони булевої алгебри 41

4.8. Диз’юнктивне розкладення булевих функцій. 42

4.9. Кон’юнктивне розкладення булевих функцій. 43

4.10. Алгебра Жегалкіна. Тотожності алгебри Жегалкіна 44

4.11. Поліном Жегалкіна. Лінійні функції 46

4.12. Функції, що зберігають нуль та одиницю. Монотонні функції. 47
4.13. Теорема Поста про повноту 48
Завдання для самостійної роботи. 50
Розділ 5. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА. 54
5.1. Поняття логіки висловлювань 54
5.2. Побудова доведення в логіці висловлювань. 56
5.3. Аксіоми логіки висловлювань та правила висновків логіки висловлювань 59
5.4. Побудова доведення в логіці висловлювань. 61
5.5. Операції над предикатами і кванторами 63
5.6. Побудова доведення у логіці предикатів. 67
Задачі для самостійного розв’язування 73
Розділ 6. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ 80
6.1. Вступ. 80
6.2. Правило суми і добутку. 80
6.3. Принцип включення та виключення 82
6.4. Розміщення з повторенням 83
6.5. Розміщення без повторення 83
6.6. Перестановки 84
6.7. Комбінації. 85
6.8. Комбінації з повторенням. 86
6.9. Перестановки з повторенням 87
6.10. Впорядковане та невпорядковане розбиття множин 88
6.11. Поліноміальна формула. Біном Ньютона 90
6.12. Твірні функції. 91
Завдання для самостійної роботи. 94
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 102

ВСТУП

Даний навчальний посібник призначений як методичне керівництво для вивчення загального курсу «Дискретна математика» для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів усіх форм навчання.

Цілісність і компактність посібника певною мірою визначають той обсяг знань, яким повинен володіти студент, щоб на практиці застосувати знання з дискретної математики.

Перший розділ присвячено задачам з теорії множин, в яких розглядаються способи задання множин, операції над множинами. У другому розділі розглядаються задачі з теорії відношень. Задачі третього розділу присвячені алгебраїчним структурам. Четвертий розділ містить булеві функції та їх перетворення. У п’ятому розділі розглянуто елементи математичної логіки. Ґрунтовно та детально розглядаються булеві функції, логічні функції, реалізація булевих функцій формулами та методи їх мінімізації. Особлива увага приділяється численню висловлювань та предикатів, методам доведень у логіці Буля, логіці висловлювань та логіці предикатів, розглядаються основні логічні загальнозначущі формули. Шостий розділ висвітлює комбінаторні задачі, поліноміальну формулу та твірні функції.

З метою надання безпосередньої допомоги під час виконання завдань на початку кожного розділу викладено теоретичні відомості довідкового характеру, а також наведено зразки розв’язування прикладів з роз’ясненням застосованих методів. Розв’язки деяких прикладів супроводжуються ілюстративним матеріалом. Після кожного розділу пропонуються задачі для самостійної роботи студентів. Теми кожного розділу подано відповідно до програми курсу.

Розділ 1. МНОЖИНИ

1.1. Множини. Булеві операції над множинами

Під *множиною* розуміють довільну сукупність об'єктів, об'єднаних деякою ознакою. Об'єкти, або елементи, що складають множини, позначаються маленькими буквами латинського алфавіту a, b, x …, а самі множини позначають великими буквами A, B, X...

Запис $a \in$A означає, що «a – елемент множини A» або «елемент a належить множині A», у протилежному випадку пишуть $a \notin$A або $a \overline{\in}$A. Множина, що не вміщує жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\varnothing$. Множина, яка вміщує в собі всі множини, що розглядаються, називається *універсальною* множиною або *універсамом* і позначається V.

Використовують декілька способів задання множин:

1) Множина A визначається списком всіх її елементів і записується у вигляді: A = $\{a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\}$.

2) Множина A визначається як сукупність тих і тільки тих елементів із деякої основної множини V (універсальна множина), які мають загальну властивість P(x) – характеристичний предикат і записується у вигляді:

$$A = \{x \mid P(x)\} \text{ або } \{x\text{: } P(x)\}.$$

3) Множина задається за допомогою діаграм Венна:

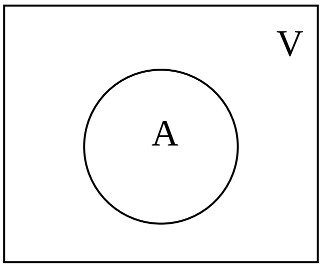


Рис. 1. Діаграма Венна

Приклад 1. Задати множину $A = \{x \mid (x-1)(x-2)(x^2-9) = 0\}$.

Розв'язання. A – множина всіх коренів рівняння $(x–1)(x–2)(x^2–9)=0$, тобто $A = \{–3; 1; 2; 3\}$.

Приклад 2. Зобразити на координатній площині множину:

$A=\{(x, y)\in R^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

Розв'язання. $x^2 - y^2 > 0$, то $y^2 < x^2$, $|y| \le |x|$. Побудуємо дві прямі $y = -x$ та $y = x$. На рис. 2 множину А заштриховано, границя області не належить множині А.

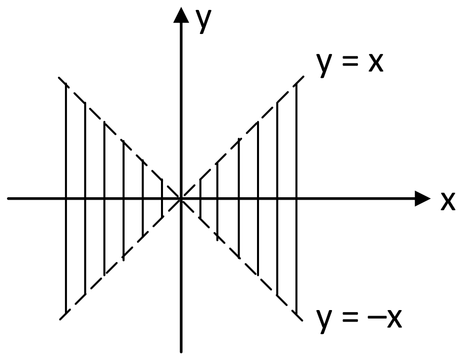


Рис. 2. Множина А (приклад 2)

Якщо всі елементи із множини А належать В, то кажуть, що А є підмножиною В і позначають $A \subset B$ або $B \supset A$. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, множини називають *рівними* (А=В). Зауважимо, що $\varnothing$ є підмножиною довільної множини.

Потужність множини А позначається |A|. Для скінченних множин це число елементів. Наприклад: $|\varnothing| = 0$. Якщо |A| = |B|, то множини А та В називають *рівнопотужними*.

Множина всіх підмножин деякої основної множини А називається *булеаном* і позначається P(A) .

Приклад 3. Знайти P(A), якщо A = {0; 1; 3}.

Розв'язання. $P(A) = \{\{\varnothing\};\{0\};\{1\};\{3\};\{0;1\};\{0;3\};\{1;3\};\{0;1;3\}\}$.

Доповненням до множини А, позначається $\overline{A}$ (читається «не А» або «доповнення до А») є множина $\overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in V\}$.

Об'єднанням множин А та В називають множину С, яка складається з елементів А або В, а саме: $C = A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Перетином двох множин є третя множина $C = A \cap B$, яка складається з елементів як А так і В: $C = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}$.

Різницею двох множин А та В позначається A\B або A-B називають множину С, яка складається з елементів А, що не належать В:

$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}$.

Симетричною різницею множин А та В називають множину:

$A \div B = \{x \mid x \in A$ та $x \notin B$, або $x \in B$ та $x \notin A\}$ або $A \div B = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Приклад 4. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \div B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ та V якщо $A = \{0; 1; 3\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$.

Розв'язання. $A \cup B = \{0; 1; 3; 5; 7\}$; $A \cap B = \{1; 3\}$; $A \setminus B = \{0\}$; $A \div B = \{0; 5; 7\}$; $\overline{A} = \{5; 7\}$; $\overline{B} = \{0\}$; $V = \{0; 1; 3; 5; 7\}$.

Приклад 5. Побудувати діаграми Венна для множин $A \cup B$, $A \cap B$ та $B \setminus A$, якщо $A \subset B$.

Розв'язання. $A \subset B$ (рис. 3), $A \cup B$ (рис. 4), $A \cap B$ (рис. 5), $B \setminus A$ (рис. 6).

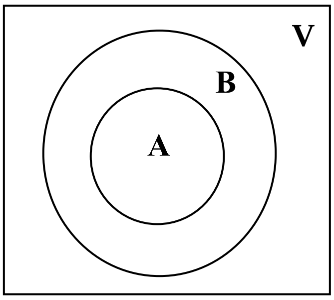


Рис.3 $A \subset B$

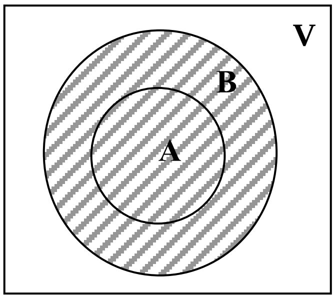


Рис.4 $A \cup B$

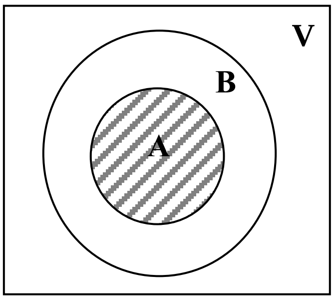


Рис. 5. $A \cap B$

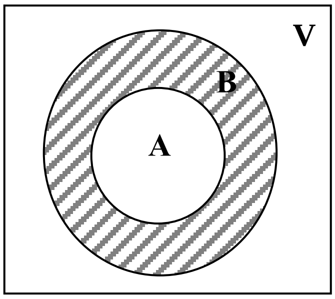


Рис. 6. $B \setminus A$

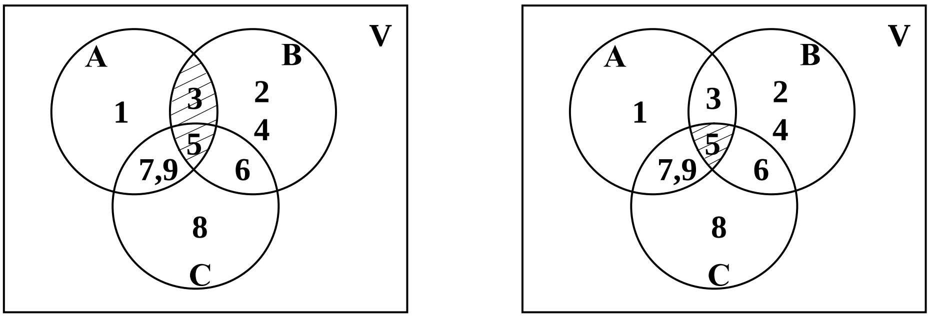
Приклад 6. Знайти $(A \cap B) \cap C$, $(A \setminus B) \cup C$, $(A \cup B) \setminus C$ та побудувати діаграми Венна для заданих множин: $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$, $C = \{5,6,7,8,9\}$.

Розв'язання:

a) $(A \cap B) \cap C$: $A \cap B = \{1,3,5,7,9\} \cap \{2,3,4,5,6\} = \{3,5\}$, (рис. 7, *а*);
$(A \cap B) \cap C = \{3,5\} \cap \{5,6,7,8,9\} = \{5\}$, (рис. 7, *б*).

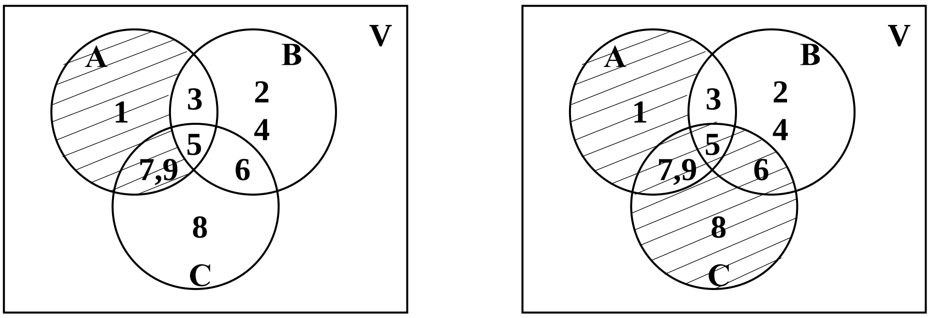
b) $(A \setminus B) \cup C$: $A \setminus B = \{1,3,5,7,9\} \setminus \{2,3,4,5,6\} = \{1,7,9\}$, (рис. 8, *а*);
$(A \setminus B) \cup C = \{1,7,9\} \cup \{5,6,7,8,9\} = \{1,5,6,7,8,9\}$, (рис. 8, *б*).

c) $(A \cup B) \setminus C$:
$A \cup B = \{1,3,5,7,9\} \cup \{2,3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, (рис. 9, *а*);
$(A \cup B) \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7,9\} \setminus \{5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,4\}$, (рис. 9, *б*).



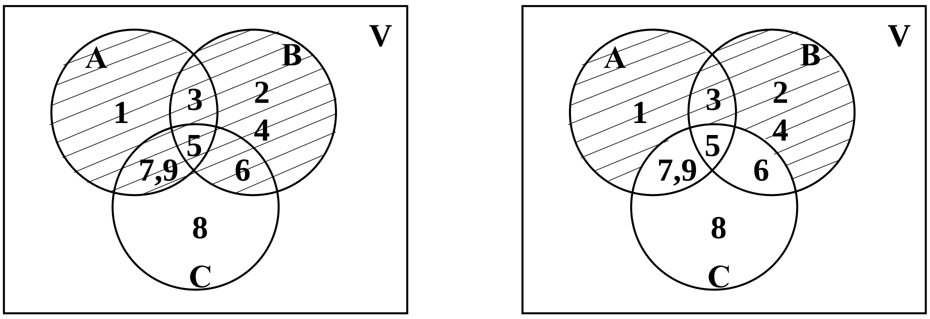
а *б*

Рис. 7. Діаграми Венна



а *б*

Рис. 8. Діаграми Венна



а *б*

Рис. 9. Діаграми Венна

Основні закони алгебри множин

Закон ідемпотентності: $A \cap A = A \qquad A \cup A = A$	Закон комутативності: $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
Закон доповнення: $A \cap \overline{A} = \varnothing \quad \overline{V} = \varnothing$ $A \cup \overline{A} = V \qquad \overline{\varnothing} = V$	Закон тотожності: $A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cap V = A$ $A \cup \varnothing = A \qquad A \cup V = V$
Закон асоціативності: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Закон дистрибутивності: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Закони де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Закон поглинання: $(A \cup B) \cap A = A$ $(A \cap B) \cup A = A$
Закон інволюції: $\overline{\overline{A}} = A$	Вираз для різниці: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Приклад 7. Довести тотожність, використовуючи закони алгебри множин, та за допомогою діаграм Венна : $A\backslash B \ \backslash C = A\backslash C \ \backslash \ B\backslash C$.

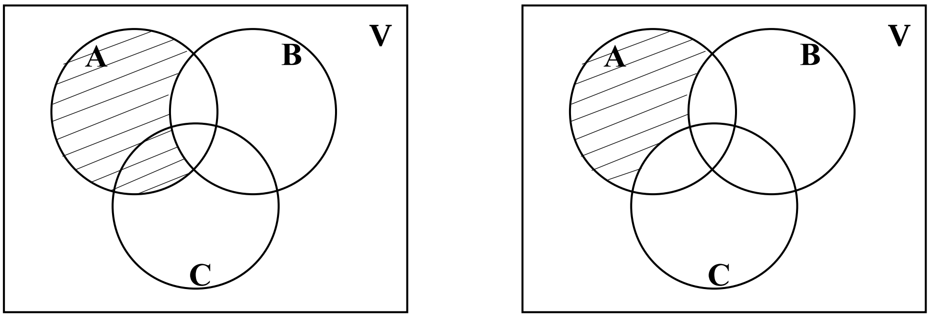
Розв'язання:

а) Спочатку доведемо тотожність, використовуючи закони алгебри множин. Нехай $x\in$ (A\B)\C, тоді x повинен обов'язково належати лише A, інакше не буде виконуватись твердження. А якщо $x\in$A, то $x\in$(A\C)\(B\C).

Нехай тепер $x\in$(A\C)\(B\C), тоді x повинен обов'язково належати лише A, інакше не буде виконуватись твердження. А якщо $x\in$A, то $x\in$(A\B)\C.

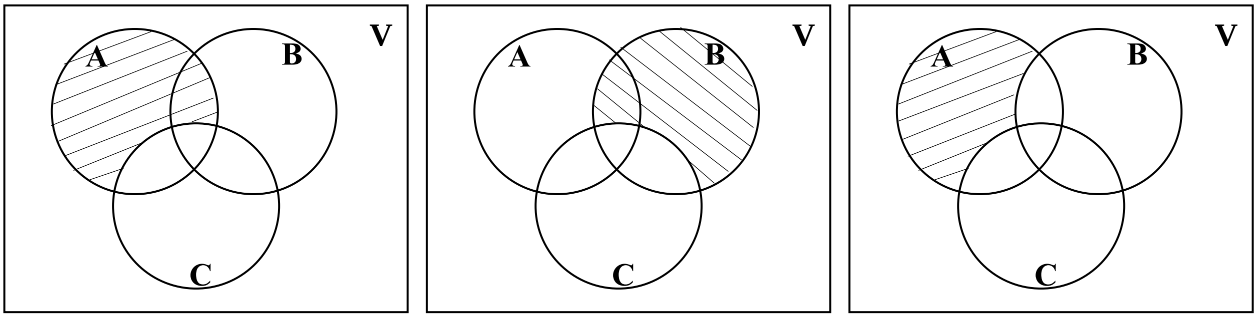
b) Тепер доведемо цю саму тотожність за допомогою діаграм Венна. Ліва сторона тотожності (рис.10): A\B (рис. 10, *а*), (A\B)\C (рис.10, *б*).

Права сторона тотожності (рис. 11): A\C (рис.11, *а*), B\C (рис. 11, *б*), (A\C)\(B\C) (рис. 11, *в*).



а *б*

Рис. 10. Діаграми Венна



а *б* *в*

Рис. 11. Діаграми Венна

Як видно з останніх діаграм (рис. 10) та (рис. 11) тотожність доведена.

Приклад 8. Спростити вираз:

а) $\overline{\overline{(\overline{A}\cup B)}\cup(A\cup\overline{B})}$; b) $\overline{\overline{A\cup B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}$.

Розв'язання:

а) $\overline{\overline{(\overline{A}\cup B)}\cup(A\cup\overline{B})} = \overline{\overline{\overline{A}\cup B}} \cap \overline{A\cup\overline{B}} = (\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}) = (\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cap B) =$

$= (\overline{A}\cup B\cap\overline{A})\cap(\overline{A}\cup B\cap B) = \overline{A}\cap B = B\backslash A;$

б) $\overline{\overline{A\cup B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})} = \overline{\overline{A\cup B}}\cup\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})} = A\cup B\cup(\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}) = A\cup B\cup(A\cap B) = A\cup B.$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1:

а) Задати множини переліком елементів, характеристичним предикатом та за допомогою діаграм Венна.

б) Виконати операції:

$A\cup B; A\cap C; A\cap B\cap C; A\cup B\cup C; A\setminus C; A\setminus B; C\setminus A; B\setminus A.$

в) На заданих множинах продемонструвати справедливість основних законів алгебри множин.

г) Які з даних множин є рівними? Відповідь пояснити.

д) Знайти булеан для множини А,Р(А).

Варіанти:

1	$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $B = \{x \vert x^2 - 8x + 12 \leq 0; x \in Z\}$ $C = \{x \vert \log_2 x \leq 4; x \in Z\}$
2	$A = \left\{x \middle\vert \log_{\frac{1}{2}} x \geq -4; x \in Z\right\}$ $B = \{x \vert x^2 - 9x + 8 \leq 0; x \in Z\}$ $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
3	$A = \{x \vert x -$ цілий множник числа $10\}$ $\mathrm{B} = \{x \vert x^2 - 1 = 0$ та $x^2 - 11x + 10 = 0\}$ $C = \{-2; 2; 4; 6; 5; 10\}$
4	$A = \{x \vert \vert x - 2\vert \leq 4;\ x \in Z\}$ $B = \{-2; -1; 0; 1; 5; 6\}$ $C = \{x \vert x^2 - 4x - 12 = 0$ та $x^2 - 1 = 0\}$
5	$A = \{x \vert x -$ цілий дільник числа $10\}$ $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 10\}$ $C = \left\{x \middle\vert \sqrt{x - 1} \leq 3; x \in Z\right\}$
6	$A = \{x \vert \vert x - 3\vert \leq 2; x \in Z\}$ $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $C = \{x \vert x^2 - 9x \leq 0; x \in Z\}$
7	$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ $B = \{x \vert x^2 - 8x + 7 \leq 0\}$ $C = \left\{x \middle\vert \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \frac{1}{9}\right\}$
8	$A = \{x \vert (x^2 - 10x + 8)' \leq 0$ і $x \geq 0; x \in Z\}$ $B = \{0; 1; 2; 3; 5; 7\}$ $C = \{x \vert x^3 - 27 = 0;\ x^5 - 32 = 0;\ x^2 = 0\}$
9	$A = \{5; 7; 9; 11; 13; 15\}$ $B = \{x \vert x^2 - 20x + 75 \leq 0; x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert \sqrt{x - 4} \leq 3; x \in Z\right\}$

10	$A=\left\{x\middle\|2^{\log_4 x}\le 8; x\in Z\right\}$ $B=\{0;1;2;3;4;5\}$ $C=\{x\|\|x\|<5; x\in Z\}$
11	$A=\{x\|x^2-1\ge 0;\ x^2-16\le 0; x\in Z\}$ $B=\{x\|x-$ цілий дільник числа $4\}$ $C=\{\overline{0,10}\}$
12	$A=\{1;2;3;4;5;6\}$ $B=\{x\|x^2-7x+6=0\}$ $C=\left\{x\middle\|4^{\log_2 x}\le 16\right\}$
13	$A=\{0;2;4;6;8;10\}$ $B=\{x\|x^2-12x+20\le 0; x\in Z\}$ $C=\{x\|\log_2 x\le 3; x\in Z\}$
14	$A=\{x\|x^2-9x+8=0;\ x^2-49=0\}$ $B=\{0;7;9;1\}$ $C=\left\{x\middle\|\log_{\frac{1}{2}} x\ge -3; x\in Z\right\}$
15	$A=\{1;3;5;7;9;11\}$ $B=\{x\|x^2-12x+11\le 0;\ \ x\in Z\}$ $C=\left\{x\middle\|\log_{\frac{1}{3}} x\ge -3; x\in Z\right\}$
16	$A=\left\{x\middle\|\log_{\frac{1}{5}} x\ge -2; x\in Z\right\}$ $B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ $C=\{x\|x^2-6x+5\le 0;\ \ x\in Z\}$
17	$A=\{x\|x^2-25=0;\ x^4-16=0\}$ $B=\{0;-5;5;-4;4;10\}$ $C=\left\{x\middle\|2^{x^2-64}\le 1;\ \ x\in Z\right\}$
18	$A=\{-6;-4;-2;0;2;4;6\}$ $B=\{x\|x^2-36=0\ \text{і} x^4-256=0\}$ $C=\left\{x\middle\|2^{x^2-125}\le 1;\ \ x\in Z\right\}$
19	$A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ $B=\{x\|x^3-27=0\ \text{і} x^2-9\le 0; x\in Z\}$ $C=\left\{x\middle\|2^{\log_{\sqrt{2}} x}\le 4;\ \ x\in R\right\}$

20	$A = \{0; 1; 3; 5; 7; 9\}$ $B = \{x \mid x^3 - 125 = 0;\ \ x^2 - 81 \leq 0;\ \ x \in R\}$ $C = \left\{x \middle\vert 4^{\log_2 x} \leq 16;\ \ x \in R\right\}$
21	$A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ $B = \{x \mid x^2 - 625 \leq 0; x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert \log_{\frac{1}{5}} x \geq -2; x \in Z\right\}$
22	$A = \{5; 7; 9; 11; 13; 15\}$ $B = \{x \mid x^2 - 10x - 75 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert \log_{\frac{1}{7}} x \geq -2;\ \ x \in Z\right\}$
23	$A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ $B = \{x \mid x^2 - 11x + 24 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert 5^{\log_{25} x} \leq 25;\ \ x \in Z\right\}$
24	$A = \{1; 6; 11; 17; 23; 29\}$ $B = \{x \mid x^2 - 30x + 29 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert 7^{\log_{49} x} \leq 49;\ \ x \in Z\right\}$
25	$A = \left\{x \middle\vert 8^{\log_{64} x} \leq 64;\ \ x \in Z\right\}$ $B = \{x \mid x^2 - 36x + 180 \leq 0; x \in Z\}$ $C = \{0; 6; 12; 18; 24; 30\}$
26	$A = \left\{x \middle\vert 9^{\log_{81} x} \leq 81;\ \ x \in Z\right\}$ $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $C = \{x \mid \lvert x - 1 \rvert \leq 6;\ \ x \in Z\}$
27	$A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$ $B = \{x \mid x^2 - 35x + 150 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \left\{x \middle\vert 6^{\log_{36} x} \leq 36;\ \ x \in Z\right\}$
28	$A = \{-6; -1; 4; 9; 14; 19\}$ $B = \{x \mid x^2 - 13x - 114 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \{x \mid \log_5(x + 1) \leq 2;\ \ x \in Z\}$
29	$A = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$ $B = \{x \mid x^2 - 28x + 96 \leq 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \{x \mid \log_4(x - 4) \leq 3;\ \ x \in Z\}$

30	$A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$ $B = \{x \mid x^2 - 35x + 150 \le 0;\ \ x \in Z\}$ $C = \{x \mid \log_5(x-5) \le 2;\ \ x \in Z\}$

Завдання 2. Довести тотожність, використовуючи закони алгебри множин та за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Варіанти:

1	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \div B = B \div A$.
2	$A \cup A = A \cap A = A$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$.
3	$A \cap B = B \cap A$; $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.
4	$A \cup B = B \cup A$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $A \div (A \div B) = B$.
5	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$.
6	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$; $A \setminus B = A \div (A \cap B)$.
7	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$; $(A \div \varnothing) = A$.
8	$(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$; $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$; $A \div U = \overline{A}$.
9	$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$; $A \div A = \varnothing$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
10	$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.
11	$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) = U$;

	$\overline{\overline{A}} = A$; $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$.
12	$A \div B = B \div A$; $\overline{\overline{(\overline{A} \cup B)} \cup (A \cup \overline{B})} = B \setminus A$; $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
13	$A \cap \overline{A} = \varnothing$; $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; $\overline{(A \cup B) \cap A} = \overline{(A \cap B) \cup A} = \overline{A}$.
14	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; $\overline{\overline{A \cap (B \cup C)}} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $\overline{A \div B} = \overline{B \div A}$.
15	$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subset B$ та $A \subset C$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \div (B \div C)} = \overline{(A \div B) \div C}$.
16	$A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A,\ A \subseteq (\overline{B} \cup C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; $\overline{A} \cup A = U$.
17	$\overline{A \cap B} = \overline{B \cap A}$; $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$; $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
18	$\overline{A \cap (B \setminus A)} = U$; $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$; $\overline{A \div (B \div C)} = \overline{(A \div B) \div C}$.
19	$A = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ та $A \cup B = U$; $\overline{A \cap (B \setminus A)} = U$; $C \cap (B \setminus C) = \varnothing$.
20	$\overline{A \cup \overline{A}} = \varnothing$; $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$; $\overline{(\overline{A} \cup B) \cap A} = \overline{A \cap B}$.
21	$A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$; $\overline{A \cup \overline{A}} = U$; $\overline{(A \setminus B \setminus C)} = \overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(A \cap B)}$.
22	$A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$; $\overline{(A \cup B) \cap A} = \overline{A}$; $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \div B \div (A \cap B)}$.
23	$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup (B \setminus A)}$; $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$; $\overline{A \div (A \div B)} = \overline{B}$.
24	$\overline{A \div \varnothing} = \overline{A}$; $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

	$(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\cap B)\setminus C$.
25	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$; $(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$; $\overline{(A\cup B)\cap A}=\overline{A}$.
26	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$; $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subseteq C$; $\overline{(A\cap B)\cup A}=\overline{A}$.
27	$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$; $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq\overline{B}\cup C$; $\varnothing\subseteq A\subseteq U$.
28	$A\subseteq B\cap C\Leftrightarrow A\subseteq B$ та $A\subseteq C$; $\overline{A\setminus(B\cup C)}=\overline{(A\setminus B)}\cap\overline{(A\cap C)}$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$.
29	$\overline{(A\cup B)\setminus C}=\overline{A\setminus C}\cap\overline{(A\cap C)}$; $A\cup U=U$; Якщо $A\subseteq\varnothing$, то $A=\varnothing$; якщо $U\subseteq A$, то $A=U$.
30	$\overline{A}\cup\overline{(B\setminus A)}=U$; $A\cup C\subseteq B\Leftrightarrow A\subseteq B$ та $C\subseteq B$; $\overline{A\setminus(A\setminus B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

***Завдання 3*: **Спростити вираз алгебри множин.

Варіанти:

1.	$\overline{(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}\cap A}$;
2.	$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cap B)\cup\overline{(\overline{A}\cap B)}}$;
3.	$\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{A}}\cap\overline{A\cup\overline{B}}$;
4.	$\overline{\overline{A\cup B\cup\overline{A}}\cup(A\cap\overline{B})}$;
5.	$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{(B\cup A)}}\cup\overline{A}$;
6.	$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{(\overline{A}\cap B)}}\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$;
7.	$\overline{\overline{\overline{A}\cup B}\cup(\overline{B}\cap A)\cup\overline{A}}$;
8.	$\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{A\cap B}}\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})$;
9.	$\overline{(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(A\cap\overline{B})}$;
10.	$\overline{(\overline{A\cap B})\cup\overline{B}\cap\overline{\overline{A}\cup B}}$;
11.	$\overline{(A\cup B)\cap(\overline{A\cup\overline{B}})}\cup\overline{A}$;
12.	$A\cup\overline{B}\cap\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{B}\cup\overline{A}}$;

13.	$\overline{\overline{\overline{A\cap B}\cup\overline{A}\cup\overline{B}}\cup\overline{A}\cap B}$;
14.	$\overline{B}\cup\overline{(A\cap B)\cup\overline{\overline{B}\cup A}}\cap A$;
15.	$A\cup\overline{\overline{\overline{A}\cup B}\cup\overline{\overline{B}\cup A}\cap B}$;
16.	$\overline{\overline{\overline{B}\cup A}\cup\overline{\overline{B\cap A}\cap B}}$;
17.	$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cap B}\cup\overline{\overline{A\cup B}\cup A}$;
18.	$\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{\overline{A}\cap B}\cup(\overline{A\cap B\cup\overline{A}})}$;
19.	$\overline{\overline{A\cap B}\cup\overline{\overline{B}\cap\overline{A}}}\cup\overline{B}\cap\overline{A}$;
20.	$\overline{(A\cup\overline{B})\cap\overline{A}}\cup\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{\overline{A}}}$;
21.	$A\cap\overline{(\overline{B}\cup A)\cap(\overline{\overline{A}\cup B})}\cup\overline{B}$;
22.	$\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{\overline{A}\cup B}\cap\overline{B}}$;
23.	$\overline{\overline{\overline{B}\cap A}\cup B}\cap\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{B}}$;
24.	$\overline{(B\cup A)\cap\overline{\overline{A}}\cup(A\cap\overline{B})}\cup B$;
25.	$\overline{\overline{(A\cap B)\cup\overline{A}}\cap B}\cup A$;
26.	$B\cap\overline{\overline{\overline{A}\cup B\cap B}\cup\overline{A\cup B}}$;
27.	$\overline{\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}\cup A}$;
28.	$\overline{\overline{A\cup\overline{B}}\cap\overline{A\cup B}\cap\overline{B}}$;
29.	$\overline{(B\cap\overline{A})\cap\overline{(B\cup A)}}\cup\overline{\overline{A}\cup B}$;
30.	$\overline{(A\cap\overline{B})\cup\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cup B)}}$.

Розділ 2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Відношення. Основні поняття та визначення

Під *прямим* або *декартовим добутком* (позначається $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$) розуміють множину впорядкованих пар $a_i \in A, b_j \in B$, а саме $\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \{(a_i, b_j)|a_i \in A, b_j \in B\}$. $\mathrm{A}\times\mathrm{B} \neq \mathrm{B}\times\mathrm{A}$. Операція прямого добутку узагальнюється на їх довільну кількість:

$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1 a_2, \dots, a_n)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

Впорядкована послідовність $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається *кортежем*, вектором довжини *n* або *n*-ю послідовністю.

Приклад 1. Знайти $A \times B$ для множин A та B: $A = \{1; 9; 10\}$; $B = \{3; 21; 28\}$.

Розв'язання. $A \times B =$ $\{(1;3);(1;21);(1;28);(9;3);(9;21);(9;28);(10;3);(10;21);(10;28)\}$.

Підмножина $R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається n-місним відношенням на множині $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Бінарним відношенням між елементами множин $a \in A$ та $b \in B$ називають підмножину R множини $A \times B$ ($R \subset A \times B$). Позначаються: $(a, b) \in R$ або aRb.

Використовують декілька способів задання відношень:

1) **Матричний спосіб.** Введемо символ $\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, aRb \\ 0, a\bar{R}b \end{cases}$.

Тоді бінарне відношення задається двомірною таблицею – матрицею суміжності, якій взаємоднозначно співпадають елементи множини A та B.

Кожна клітинка (i, j) взаємно відповідає елементам множини $A \times B$. Якщо aRb, то в клітинці (i, j) ставлять одиницю, якщо $a\bar{R}b$ - нуль.

2) **Табличний спосіб.** Для табличного задання відношення $R \subset A \times B$ проводять вертикалі, кожну з яких позначають деяким елементом з A і горизонталі, позначаючи їх елементами з B. Потім точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношення R.

3) **Графічне зображення.** У процесі графічного зображення відношення $R \subset A \times B$, елементи A та B зображаються точками, після чого спрямованими від *a* до *b*стрілками, з'єднуються ті і тільки ті $a \in A$ та $b \in B$, для яких $(a, b) \in R$.

4) **Фактор-множина.** Якщо $C \subset A \times B$, то *проекцію* C на A називають множину тих елементів з A, які являються проекціями елементів із C на A. *Перетином x=a* множини C називають множину $b \in B$, для яких $(a, b) \in C$. Множина перетинів відношення $R \subset A \times B$ називається *фактор-множиною*.

Приклад 2. Задати бінарне відношення на множинах усіма можливими способами (матричним, табличним, графічним та за допомогою фактор-множин):

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad B = \{2,9,18,19,20\};$$

$$R = \{(a, b) | a \in A, b \in B; a - \text{дільник } b\}$$

Розв'язання:

1) Задання бінарного відношення на множинах матричним способом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \mathrm{C} = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{20} \end{array} \end{array}.$$

2) Задання бінарного відношення на множинах табличним способом (рис. 12).

3) Задання бінарного відношення на множинах графічним способом (рис. 13).

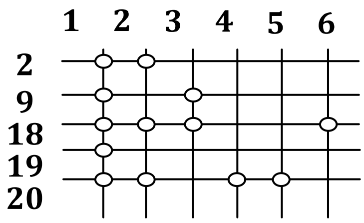


Рис. 12. Табличний спосіб

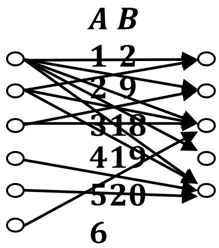


Рис. 13. Графічний спосіб

4) Задання бінарного відношення на множинах за допомогою фактор-множини (перетинів):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \{2,9,18,19,20\} & \{2,18,20\} & \{9,18\} & \{20\} & \{20\} & \{18\} \end{pmatrix}.$$

Областю визначення бінарного відношення R називають множину:

$$\delta_R = \{x | \text{існує } y, \text{таке, що } (x, y) \in R\}.$$

Областю значень бінарного відношення R називають множину:

$$\rho_R = \{y | \text{існує } x, \text{таке, що } (x, y) \in R\}.$$

Для бінарних відношень визначаються загальним чином теоретико-множинні операції об'єднання, перетину і та ін.

Доповненням бінарного відношення R між елементами A та B вважається множина $-R = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \backslash R$.

Оберненим відношенням для бінарного відношення R називається множина $R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$.

Образом множини X відносно R називають множину $R^{-1}(\mathrm{X})$.

Добутком (композицією) відношень $R_1 \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ та $R_2 \subseteq B \times C$ називається відношення:

$R_2 \circ R_1 = \{(x, y) | \text{існує } z, \text{ таке, що } (x, z) \in R_1 \text{ та } (z, y) \in R_2\}$.

2.2. Властивості бінарних відношень

Нехай $C = \mathrm{A} \times \mathrm{B}, aRb, R \subseteq C$.

1) ***Рефлексивність.*** Якщо для довільного елемента *c* виконується $\mathrm{c}R\mathrm{c}$, тобто елемент $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$ знаходиться у відношенні R до самого себе, відношення R називається *рефлексивним.*

2) ***Антирефлексивність.*** Якщо із $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ слідує, що $\mathrm{C}_1 \neq \mathrm{C}_2$, відношення R називають *антирефлексивним.*

3) ***Симетричність.*** Якщо для пари $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ слідує, що $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_1$, то відношення R називають *симетричним*.

4) ***Асиметричність.*** Якщо із $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ не виконується $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_1$, то відношення R називають *асиметричним*.

5) ***Антисиметричність.*** Якщо із $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ та $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_1$ слідує $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$, відношення R називають *антисиметричним*.

6) ***Транзитивність.***Якщо $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ та $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_3$ слідує, що $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_3$, то відношення R називають *транзитивним*.

7) ***Антитранзитивність.*** Якщо $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ та $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_3$ виходить, що не виконується $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_3$, то відношення R називають *антитранзитивним*.

2.3. Спеціальні бінарні відношення

Рефлексивне, транзитивне та антисиметричне відношення на множині С називаються *еквівалентними* на С.

Рефлексивне, транзитивне та антисиметричне відношення на множині С називаються *відношеннями часткового порядку*, позначається $\mathrm{c}_1 \leq \mathrm{c}_2$, $c_1, c_2 \in \mathrm{C}$.

Частковий порядок $\leq$ на множині С називається *лінійним*, якщо довільні елементи С порівняльні по $\leq$.

Елемент a частково впорядкованої множини називається максимальним (мінімальним), якщо з того, що $a \leq x$ $(x \leq a)$ слідує $a=x$. Верхньою (нижньою) межею підмножини B частково впорядкованої множини A називається елемент $a \in A$, такий, що $b \leq a$ $(a \leq b)$ для всіх $b \in B$. Точною верхньою (нижньою) межею підмножини $B \subseteq A$ називається найменша верхня (найбільша нижня) межа для B, позначається $\sup B$ та $\inf B$ відповідно.

Антирефлексивне, асиметричне, транзитивне відношення називають *відношенням строгого порядку,* позначається $c_1 < c_2$, $c_1, c_2 \in C$.

Приклад 3. Які з наведених відношень на множині студентів 1-го курсу є відношеннями еквівалентності?

а) a і b однакового віку;б) a і b знайомі;в) a і b студенти різних груп.

Розв'язання:

а) aRb, bRa; якщо aRb та bRc, то aRc; aRa, отже R – відношення еквівалентності;

б) aRb та bRc, не слідує, що обов'язково aRc, отже дане відношення не являється еквівалентним.

в) aRa – не виконується, отже відношення не є еквівалентним.

2.4. Функціональні відношення

Відношення R між множинами X та Y $(R \leq X \times Y)$ є функціональними, якщо всі його елементи $\big((x,y) \in R\big)$ різні за першим елементом: кожному $x \in X$ або відповідає елемент множини $y \in Y$, або таких елементів не існує.

1. Функціональне відношення R називається *сур'єкцією,* якщо область його значень співпадає з Y (рис. 14).

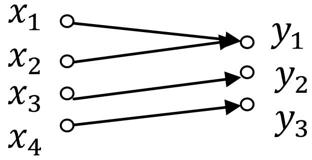


Рис. 14. Сур'єктивне відношення

Із будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, до будь-якої вершини Y.

2. Функціональне відношення R називається *ін'єкцією*, якщо з $x_1 \neq x_2$ слідує $y_1 \neq y_2$ (рис.15).

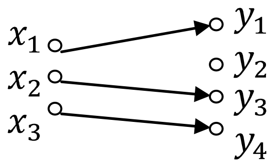


Рис. 15. Ін'єктивне відношення

Із будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини $y \in Y$ заходить не більше однієї дуги.

3. Функціональне відношення R називається *бієкцією*, якщо воно сур'єктивне та ін'єктивне (рис. 16).

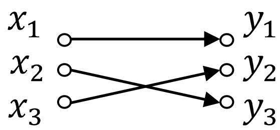


Рис.16. Бієктивне відношення

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задати бінарні відношення $R \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ списком, за допомогою матриці $V = V(R)$, таблицею, графічно та за допомогою фактор-множини.

Завдання 2. Встановити властивості відношень. Чи дані відношення є функціональними? Якщо так, то до якого виду вони належать?

Варіанти:

	Множина	$\boldsymbol{R_1} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$	$\boldsymbol{R_2} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$
	$A = \{\overline{1,10}\}$ $B = \{\overline{2,20}\}$	$(a;b) \in R_1, a > b$	$(a;b) \in R_2$, $a -$ дільник b
	$A = \{\overline{5,25}\}$ $B = \{\overline{4,20}\}$	$(a;b) \in R_1, a < b$	$(a;b) \in R_2$, $a - b > 6$
	$A = \{\overline{3,13}\}$ $B = \{\overline{4,18}\}$	$(a;b) \in R_1, a^2 > b^2$	$(a;b) \in R_2$, a є дільником b
	$A = \{\overline{1,10}\}$ $B = \{\overline{5,15}\}$	$(a;b) \in R_1$, $a^2 + b^2 > ab$	$(a;b) \in R_2$, $a - b < 3$

	$A=\{\overline{1,10}\}$ $B=\{\overline{5,15}\}$	$(a;b)\in R_1$, a є дільником b	$(a;b)\in R_2$, $a^2-b^2\leq 0$
	$A=\{\overline{1,10}\}$ $B=\{\overline{5,20}\}$	$(a;b)\in R_1$, $\sin a=\sin b$	$(a;b)\in R_2$, $a^2=b$
	$A=\{-20;-10;0;10;$ $20;49;25;36\}$ $B=\{-10;-9;0;1;25\}$	$(a;b)\in R_1, a=b$	$(a;b)\in R_2$, $a+b\geq 0$
	$A=\{0;\overline{1,10}\}$ $B=\{0;\overline{2,15}\}$	$(a;b)\in R_1$, $\log_5 a=\log_5 b$	$(a;b)\in R_2$, $b=a^2$
	$A=\{\overline{1,10}\}$ $B=\{\overline{25,49}\}$	$(a;b)\in R_1, a^2=b$	$(a;b)\in R_2$, $a=b^3$
0	$A=\{\overline{1,11}\}$ $B=\{\overline{8,18}\}$	$(a;b)\in R_1, a-b<0$	$(a;b)\in R_2$, $a-$ дільник b
1	$A=\{\overline{10,20}\}$ $B=\{\overline{5,15}\}$	$(a;b)\in R_1, a^2>b^2$	$(a;b)\in R_2$, $b-$ дільник a
2	$A=\{\overline{10,20}\}$ $B=\{\overline{4,16}\}$	$(a;b)\in R_1$, $b-$ дільник a	$(a;b)\in R_2$, $2^a\geq 2^b$
3	$A=\{-10;-9;\dots;0;1\}$ $B=\{\overline{1,15}\}$	$(a;b)\in R_1, \lvert a\rvert=\lvert b\rvert$	$(a;b)\in R_2$, $a^2<b^2$
4	$A=\{1;3;5;\dots;15\}$ $B=\{\overline{1,10}\}$	$(a;b)\in R_1, a^2\geq b^2$	$(a;b)\in R_2$, $\lvert a-1\rvert=\lvert b+1\rvert$
5	$A=\{\overline{1,10}\}$ $B=\{-5;-4;0;1;2;$ $10;15;16\}$	$(a;b)\in R_1$, $\lvert a-1\rvert>\lvert b-3\rvert$	$(a;b)\in R_2$, $a-$ дільник b
6	$A=\{\overline{3,13}\}$ $B=\{\overline{5,15}\}$	$(a;b)\in R_1, a^2\geq b^2$	$(a;b)\in R_2$, $a+b\geq 8$
7	$A=\{\overline{4,16}\}$ $B=\{\overline{3,18}\}$	$(a;b)\in R_1$, $a-$ дільник b	$(a;b)\in R_2$, $a-b\leq 0$
8	$A=\{\overline{1,10}\}$ $B=\{\overline{4,20}\}$	$(a;b)\in R_1, 2a=b$	$(a;b)\in R_2$, $\lvert a-b\rvert\leq\lvert a+b\rvert$

9	$A = \{0; 10; 20; 30; 40; 50; 60\}$ $B = \{\overline{10,80}\}$	$(a;b) \in R_1$, $a \geq b$	$(a;b) \in R_2$, $a -$ дільник b
10	$A = \{-20; -19; \dots; 0\}$ $B = \{-10; -9; \dots; 1\}$	$(a;b) \in R_1$, $\lvert a \rvert \leq \lvert b \rvert$	$(a;b) \in R_2$, $2b = a$
11	$A = \{\overline{4,14}\}$ $B = \{\overline{2,12}\}$	$(a;b) \in R_1$, $a - b \geq 0$	$(a;b) \in R_2$, $a -$ дільник b
12	$A = \{-10; -9; \dots; 0; \dots; 8\}$ $B = \{-8; -7; \dots; 0; \dots; 9\}$	$(a;b) \in R_1$, $a + b < 0$	$(a;b) \in R_2$, $a^2 = b$
13	$A = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$ $B = \{0; \overline{1,9}\}$	$(a;b) \in R_1$, $2^b = a$	$(a;b) \in R_2$, $a -$ дільник b
14	$A = \{\overline{10,20}\}$ $B = \{\overline{5,15}\}$	$(a;b) \in R_1$, $\lvert a - b \rvert \geq 5$	$(a;b) \in R_2$, $a^2 \geq b^2$
15	$A = \{\overline{10,20}\}$ $B = \{\overline{6,16}\}$	$(a;b) \in R_1$, $\log a \geq \log b$	$(a;b) \in R_2$, $b -$ дільник a
16	$A = \{\overline{5,15}\}$ $B = \{\overline{7,27}\}$	$(a;b) \in R_1$, $a - b \geq 0$	$(a;b) \in R_2$, $a^2 \geq b^3$
17	$A = \{\overline{3,13}\}$ $B = \{\overline{7,17}\}$	$(a;b) \in R_1$, $\lvert a - b \rvert \geq 4$	$(a;b) \in R_2$, $\log a \geq \log b$
18	$A = \{\overline{1,15}\}$ $B = \{\overline{2,16}\}$	$(a;b) \in R_1$, $b -$ дільник a	$(a;b) \in R_2$, $a^3 \leq b^3$
19	$A = \{\overline{3,13}\}$ $B = \{\overline{5,15}\}$	$(a;b) \in R_1$, $\lvert a - 4 \rvert \leq \lvert b - 3 \rvert$	$(a;b) \in R_2$, $a^2 \geq b^3$
20	$A = \{\overline{3,13}\}$ $B = \{\overline{4,14}\}$	$(a;b) \in R_1$, $a -$ дільник b	$(a;b) \in R_2$, $\log a \leq \log b$

Розділ 3. АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

3.1. Алгебраїчні операції та їх властивості

Операцією на множині S називається функція f, яка є відображенням виду $S^n \to S, n \in N$, де S^n – декартовий добуток $S \times S \times \ldots \times S$, до якого S входить n разів (S – називається множиною-носієм).

$S^n \to S$ має порядок n, або є n-арною операцією; $S \to S$ називають унарною, $S^2 \to S$ – бінарною. Елементи набору S^n із області визначеності S^n називають операндами, операції позначають символами, що називають операторами.

Крім стандартних відомих операцій існує багато інших. Будемо використовувати символи $\otimes$ і $\oplus$ для позначення абстрактних бінарних операцій. Якщо множина S скінченна, операцію зручніше виконувати за допомогою таблиць, які називають таблицями Келі.

Рядки таблиці та стовпці нумеруються елементами множини S, елемент таблиці $x_{ij} = x_i \otimes x_j$.

Приклад 1. Нехай операція $\oplus$ визначена на множині $\{x, y, z\}$ за допомогою таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

$\oplus$	x	y	z
x	y	z	x
y	x	y	x
z	x	x	x

Отже: $x \oplus x = y, \quad y \oplus y = y, \ldots$

Використання таблиць має велике значення, оскільки деякі операції в комп'ютерній математиці не придатні для словесного завдання.

Операції мають мати властивості комутативності, асоціативності та дистрибутивності:

1. $a \otimes b = b \otimes a$; $a, b \in S$;
2. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$; $a, b, c \in S$;
3. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$; $a, b, c \in S$ – справа.

4. $(a \oplus \mathrm{b}) \otimes \mathrm{c} = (a \otimes \mathrm{c}) \oplus (b \otimes \mathrm{c}) a,$ b, c ∈ S – зліва.

Для всіх $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in$ S.

Для розв'язання рівнянь відносно кожної операції у множині – носії алгебраїчної структури виділяється елемент, який називають *одиничним*.

Якщо для бінарної операції $\oplus$ на множині S існує елемент $e \in$ S,такий що для всіх $x \in \mathrm{S} x \oplus e = e \oplus x = x$, його називають *одиницею* відносно до операції $\oplus$, якщо $x, \mathrm{y} \in$ S задовольняють умови $x \oplus y = y \oplus x = e$, y називають оберненим елементом до x відносно операції $\oplus$ і x оберненим елементом до y відносно операції $\oplus$.

Іноді розглядають ліві і праві одиниці $x \oplus e_{\text{пр}} = x$ або $x \oplus e_{\text{лів}} = x$.

Наприклад, $\{\mathrm{R}; +\mathrm{y}\}$. $x \in \mathrm{R}, e = 0, x + (-x) = 0$; отже – x є оберненим до x відносно операції +, і навпаки x обернений до $-x$ відносно даної операції.

Визначимо операції додавання та множення за модулем $n \in$ N на множині цілих чисел.

Нехай $x, \mathrm{y} \in Z, n \in N$.

Додавання за модулем n цілих чисел x та y називається алгебраїчна операція, результатом якої є решта від ділення суми $x + y$ на n.

Множенням за модулем n чисел x та y називається алгебраїчна операція, результатом якої є решта від ділення добутку $a \cdot b$ на n.

Ці операції (позначимо $\oplus_n$, $\otimes_n$) визначені на множені цілих невід'ємних чисел Z.

$x \oplus_n y = Z$, так, що $x + y = k \cdot n + \mathrm{Z}$; $0 \leq \mathrm{Z} < n$; $x, y, k \in \mathrm{Z}$;

$x \otimes_n y = Z$, так що $x \cdot n = k \cdot n + \mathrm{Z}$; $0 \leq \mathrm{Z} < n$; $x, y, k \in \mathrm{Z}$.

Приклад 2:

$3 \oplus_3 3 = 0$;	$3 \otimes_3 5 = 0$;
$3 \oplus_3 4 = 1$;	$4 \otimes_3 5 = 2$;
$3 \oplus_3 5 = 2$;	$5 \otimes_3 5 = 1$;

3.2. Найпростіші алгебраїчні структури

Алгебраїчною структурою називається множина S разом із заданими Q операціями, визначеними і замкненими на цій множині. S – носій алгебраїчної структури.

Розглянемо основні типи структур з однією бінарною операцією.

Алгебраїчна структура з носієм S та бінарною операцією $\oplus$: $S^2 \to S$, що задовольняє властивості асоціативності: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, де $x, y, z \in S$, називається *півгрупою*.

Моноїдом називають алгебраїчну структуру з носієм S і бінарною операцією $\oplus$: $S^2 \to S$ такою, що:

1. $\oplus$ асоціативна: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, для всіх $x, y, z \in S$.
2. Існує $e \in S$ – одиниця, відносно $\oplus$: $e \oplus x = x \oplus e = x$, для всіх $x \in S$.

Групою називають множину S з бінарною операцією $\oplus : S^2 \to S$, такою, що:

1. $\oplus$ асоціативна: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, для всіх $x, y, z \in S$.
2. Існує $e \in S$ – одиниця, відносно $\oplus$: $x \oplus e = e \oplus x = x$, для всіх $x \in S$.
3. Кожному елементу $x \in S$ відповідає обернений елемент $x' \in S$ відносно $\oplus$: $x' \oplus x = x \oplus x' = e$.

Якщо в групі $x \oplus y = y \oplus x$, то групу називають *комутативною* або *абелевою.*

Приклад 3:

1. (Z ; +) – півгрупа (e = 0).
2. (R ; +) – група, оскільки існує одиничний елемент *e*=0, та обернений x' до x, $x' + x = 0$, $x' = -x$.
3. Розглянемо групу $(Z_5; \oplus_5)$. Побудуємо для операції таблицю Келі (табл. 2).

Таблиця 2

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Одиницею відносно операції $\oplus_5 e$=0, таблиця симетрична відносно діагоналі – операція комутативна, існують обернені елементи x=1 , x'=4; y=2, y'=3; x=3, x'=2…

3.3. Кільця і поля

Кільцем (R, $\oplus$,$\otimes$) називається множина R з визначеними на ній бінарними операціями $\oplus$ і $\otimes$ такими, що:

1. $\oplus$ асоціативна: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, для всіх x, y, z∈R.
2. $\oplus$ комутативна: $x \oplus y = y \oplus x$, для всіх x, y∈R.
3. $\oplus$ має одиницю, яка називається нулем і позначається 0.
4. Існує обернений елемент відносно $\oplus$ для кожного x∈R:

$(-x) \oplus x = x \oplus (-x) = 0$, для всіх x∈R.

5. $\otimes$ асоціативна:$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$, для всіх x, y, z∈R.
6. $\otimes$ дистрибутивна відносно $\oplus$ зліва і справа:

$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$;

$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$, для всіх x, y,z∈R.

Якщо множення $\otimes$ комутативне і є кільцем з одиницею, якщо існує одиниця відносно $\otimes$, її позначають 1. Кільце з одиницею називають *алгеброю.*

*Поле (*R, $\otimes$,$\oplus$*)* – це комутативне кільце з одиницею 1 (що відрізняється від 0), в якому кожен елемент x (що відрізняється від 0) обернений за множенням.

3.4. Решітки

Решітка – це множина M з двома бінарними операціями $\wedge$ та $\vee$, для яких виконуються аксіоми решітки:

1. Ідемпотентність: $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. Комутативність: $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
3. Асоціативність: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4. Поглинання: $(a \wedge b) \vee a = a$; $(a \vee b) \wedge a = a$.
5. Решітка дистрибутивна, якщо: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Якщо в решітці існує 0, такий, що для всіх $a \in M$ $0 \bigcap a = 0$, то 0 називають нулем або *нижньою межею решітки*.

Якщо існує 1∈М така, що $1 \bigcup a = 1$, то 1 називають *одиницею* або *верхньою межею* решітки. Якщо межа існує, то вона *єдина*.

Решітка, яка має нижню та верхню межі називається *обмеженою*. В обмеженій решітці елемент $\bar{a}$ називають *доповненням* до a, якщо $a \bigcap \bar{a} = 0$ та $a \bigcup \bar{a} = 1$.

При цьому доповнення єдине, інволютивне, тобто $\bar{\bar{a}} = a$, $\bar{1} = 0$; $\bar{0} = 1$, виконуються закони де Моргана: $\overline{a \vee \mathrm{b}} = \bar{a} \wedge \bar{\mathrm{b}}$ та $\overline{a \wedge \mathrm{b}} = \bar{a} \vee \bar{\mathrm{b}}$.

Приклад 4. Розглянемо алгебраїчну структуру $(\mathrm{Z}_n; \otimes_n; \oplus_n)$, *n*=8. Побудуємо для операції таблиці Келі (табл. 3, 4).

Таблиця 3

$\oplus_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Таблиця 4

$\otimes_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	4	3
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	3	4	3	2	1

Існують випадки, коли добуток ненульових членів дорівнює 0, а саме (2;4), (4;6), (4;4), отже $(\mathrm{Z}_8; \otimes_8; \oplus_8)$ не є полем, а є комутативним кільцем з одиницею.

Приклад 5. Розглянемо алгебраїчну структуру $(Z_n; \otimes_n; \oplus_n)$, n=5. Побудуємо таблиці Келі (табл. 5, 6).

Таблиця 5

$\otimes_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Таблиця 6

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Алгебра $(Z_5; \otimes_5; \oplus_5)$, є полем, бо існує 0 для $\oplus_5$, 1 для $\otimes_n$; протилежні елементи для $\oplus_5$: $3 \oplus_5 2 = 0$; $4 \oplus_5 1 = 0$; обернені для операції $\otimes_5$: $3 \otimes_5 2 = 1$; $4 \otimes_5 4 = 1$.

Завдання для самостійної роботи

1. Задано (S; $\oplus$) та (S;$\otimes$), де $\otimes$, $\oplus -$ оператори, S – множина-носій. Встановити тип алгебраїчних структур (якщо вони є алгебраїчними структурами), існування одиничних та обернених елементів (x∈S; y∈S). Відповіді пояснити.
2. Для алгебраїчної структури $(Z_n; \otimes_n; \oplus_n)$ побудувати таблиці Келі, встановити існування нуля для $\oplus_n$ та одиниці для $\otimes_n$. Знайти для кожного елемента протилежні та обернені елементи. Встановити тип структури.

Варіанти:

№	S	$\oplus$	$\otimes$	n
1	{-5;-4;-3;-2;0;1}	$\oplus$: *max*(*x; y*)	$\otimes$:’+’	10
2	{-1;0;1;2;5;7;8}	$\oplus$:’+’	$\otimes$: *min*(*x; y*)	12
3	{*x*| *x* N}	$\oplus$: ‘≤’	$\otimes$:$\frac{x}{y}$	14
4	{*x*| *x* N}	$\oplus$: ‘–’	$\otimes$:‘•’	16

№	S	⊕	⊗	*n*
5	$\{x \mid x\ Z\}$	⊕: ‘–’	⊗:$\frac{x}{y}$	9
6	S-множина всіх квадратних матриць	⊕: ‘+’	⊗:‘•’	7
7	$\{\overline{1-15}\}$	⊕: ‘≥’	⊗:‘≤’	11
8	$\{ x \mid x \in [0;1] \}$	⊕: ‘+’	⊗:$\frac{x}{y}$	13
9	$\{ x \mid x \in [1;2] \}$	⊕: $max(x; y)$	⊗:$\frac{x}{y}$	15
10	{-10;-9; …;-1;0}	⊕: ‘≤’	⊗:‘•’	17
11	{1;2; …;10}	⊕: ‘≥’	⊗:$max(x; y)$	19
12	{-40;-35;-30;…;0}	⊕: ‘>’	⊗:‘–’	21
13	$\{ x \mid x \in [0;2] \}$	⊕: ‘+’	⊗:$\frac{x}{y}$	20
14	$\{ x \mid x \in [1;5] \}$	⊕: ‘+’	⊗:$min(x; y)$	22
15	$\{ x \mid x \in R\}$	⊕: ‘+’	⊗:‘•’	23
16	{0;3;6;9; …;27}	⊕: $min(x; y)$	⊗:‘•’	24
17	{0;4;8; …;36}	⊕: $max(x; y)$	⊗:$\frac{x}{y}$	18
18	Множина різних рядків, що складаються з букв українського алфавіту.	⊕: конкатенація	—	26
19	{0;1;2; …;15}	⊕: ‘<’	⊗:‘•’	28
20	{-1;0;1;2;…;10}	⊕: ‘>’	⊗:’+’	25
21	{-5;-4;-3;…;3;4;5}	⊕: ‘+’	⊗:$min(x; y)$	27
22	{-10;-9; …;0;1}	⊕: ‘–’	⊗:$max(x; y)$	28
23	{5;6; …;21}	⊕: ‘+’	⊗:’<’	18
24	$\{ x \mid x \in R \}$	⊕: ‘–’	⊗:$\frac{x}{y}$	20
25	$\{ x \mid x \in R \}$	⊕: $max(x; y)$	⊗: $\lvert x + y \rvert$	22
26	$\{ x \mid x \in N\}$	⊕: ‘<’	⊗:$\frac{x}{y}$	24
27	{-3;-2;-1;0;1;2;3}	⊕: ‘+’	⊗:‘•’	26
28	{5;10;…;50}	⊕: ‘+’	⊗:$min(x; y)$	30
29	$\{ x \mid x \in [2;4] \}$	⊕: ‘–’	⊗:$max(x; y)$	32
30	$\{ x \mid x \in [3;5] \}$	⊕: ‘+’	⊗:$min(x; y)$	34

Розділ 4. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ

4.1. Булеві змінні та булеві функції

Для зображення інформації в комп’ютерах використовується двійкова система числення, тобто всі операції, які виконує комп’ютер, проводяться на множині {0;1}. Джорджем Булем у середині XIX ст. було створено апарат двійкової логіки, алгебри, яку називають *булевою*.

Ця алгебра використовується під час проектування інтелектуальних систем, у процесі роботи з базами даних та інше.

Розглянемо двохелементну множину B={0;1}.

Змінні, що набувають значень із множин B, називаються *булевими* або *логічними змінними*. Значення 0 і 1 булевих змінних називаються *булевими константами.*

Функція виду $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$, де аргументи x_i і значення*y* належать B, називається n-*місною булевою функцією*.

Такі функції називаються також*перемикальними* або *логічними.*

Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретних значень називається *двійковим словом* (n-словом) або б*улевим набором довжинип.*

Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$, конкретне значення булевого набору називається *інтерпретацією булевої функції.*

Змінне $x_\text{к}$ у фунції $y = f(x_1, \dots x_{\text{к}-1};\ x_\text{к}; x_{\text{к}+1}, \dots, x_n)$, називається *неістотною (*або *фіктивною)*, якщо: $y = f(x_1, \dots x_{\text{к}-1};\ 0; x_{\text{к}+1}, \dots, x_n) =$ $= f(x_1, \dots x_{\text{к}-1};\ 1; x_{\text{к}+1}, \dots, x_n)$.

4.2. Способи задання булевих функцій

Булеві функції можна задати такими способами:

1. За допомогою таблиці істинності (значення на кожній з інтерпретацій).
2. Порядковим номером, який має ця функція.
3. Аналітично – формулою.

4.3. Таблиці істинності

Таблиця, в якій кожному набору аргументів поставлено у відповідність значення функції, називається *таблицею істинності.*

Розглянемо функцію однієї змінної $y = f(x)$ (табл. 7).

Таблиця 7

Булеві функції однієї змінної $\boldsymbol{y = f}(x)$

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Кожній функції привласнимо назви:

- f_0 = 0 – константа 0;
- $f_1 = x$ – повторення аргументу x;
- $f_2 = \bar{x}$ – заперечення аргументу або функція інверсії;
- $f_3 = 1$ – константа 1;

Розглянемо булеву функцію двох змінних $y = f(x_1, x_2)$ (табл. 8).

Таблиця 8

Булеві функції двох змінних $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2)}$

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Більшість із 16 функцій використовуються на практиці. Позначення, назви і прочитання функції зображено в табл. 9.

Таблиця 9

Позначення, назви і прочитання булевих функції

Функція	Позначення	Назва	Інші позначення	Прочитання
$f_0\,(x_1, x_2)$	0	Константа 0	—	Будь-яке 0, константа 0
$f_1(x_1, x_2)$	$x \wedge x_1 = x x_2$	Кон'юнкція	AND, і,&	x_1 і x_2
$f_2(x_1, x_2)$	$x_1 \leftarrow x_2$	Заперечення імплікації	\	x_1і не x_2
$f_3(x_1, x_2)$	x_1	Повторення 1-го аргументу	—	як x_1, x_2– фіктивне
$f_4(x_1, x_2)$	$x_2 \leftarrow x_1$	Заперечення оберненої імплікації	\	не x_1іx_2
$f_5(x_1, x_2)$	x_2	Повторення другого аргументу	—	як x_2, x_1– фіктивне
$f_6(x_1, x_2)$	$x_1 \oplus x_2$	Сума за модулем 2 (виключне «або»)	$\neq; <>$; XOR	x_1 не як x_2
$f_7(x_1, x_2)$	$x_1\ x_2$	Диз'юнкція (логічне «або»)	OR; АБО;+	x_1 або x_2
$f_8(x_1, x_2)$	$x_1 \downarrow x_2$	Заперечення диз'юнкції, стрілка Пірса	$x_1 \bar{} x_2$; $x_1\ x_2$	не x_1і не x_2
$f_9(x_1, x_2)$	$x_1 \sim x_2$	Еквівалентність	$\leftrightarrow$; $\equiv$	x_1 як x_2
$f_{10}(x_1, x_2)$	$\overline{x_2}$	Заперечення другого аргументу	$\urcorner x_2$	не x_2
$f_{11}(x_1, x_2)$	$x_2 \to x_1$	Обернена імплікація	$\subset$	x_1, якщо x_2 (x_1або не x_2)
$f_{12}(x_1, x_2)$	$\overline{x_1}$	Заперечення першого аргументу	$\urcorner x_1$	не x_1
$f_{13}(x_1, x_2)$	$x_1 \to x_2$	Імплікація	=>; Imp	Якщо x_1, то x_2, не x_1 або x_2
$f_{14}(x_1, x_2)$	$x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)	$x_1 \bar{\wedge} x_2$	не x_1або не x_2
$f_{15}(x_1, x_2)$	1	Константа 1	—	Будь-яка 1, константа 1

4.4. Номери булевих функцій

Кожній функції привласнюється порядковий номер у вигляді натурального числа, двійковий код якого зображує стовпчик значень функції у таблиці істинності. Молодшим розрядом вважається самий нижній рядок, інтерпретація (1;1;…;1), а старшим – самий верхній (0;0;…;0). Вказаний порядковий номер функції як двійковий, так і десятковий, повністю означає функцію.

Приклад 6. Таблиця істинності функції$f(x_1, x_2)$ (табл. 10).

Таблиця 10

x_1	x_2	$f(x_1;\ x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Двійковий код 1010. Переведемо двійкове число 1010_2 у десяткову систему числення:

$$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10_{10}.$$

Отже, десятковий номер функції – 10 – заперечення x_2. Функцію $f_{10}(x_1; x_2)$ можна задати за допомогою двійкового коду (1010_2).

Приклад 7. Задана $f(x_1; x_2; x_3)$ таблицею істинності (табл. 11). Знайти порядковий номер функції.

Таблиця 11

x_1	x_2	x_3	$f(x_1;\ x_2; x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Двійковий код, що відповідає значенням цієї функції (01010111_2). Переведемо двійкове число 01010111_2 у десяткову систему числення.

$$01010111_2 = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47_{10}.$$

Отже десятковий номер цієї функції 47_{10}.

4.5. Булеві формули і пріоритет операцій. Перехід від формули до таблиці істинності

Булеві функції можуть бути задані аналітично, тобто формулами.

Формула – це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.

Суперпозицією називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки одних функцій замість значень аргументів інших функцій.

У формулі потрібно визначити порядок виконання операцій. Якщо у формулі існують дужки, то операції в них виконуються у першу чергу. За відсутності дужок операції виконуються у такій послідовності: заперечення, кон’юнкція, диз’юнкція, імплікація та еквівалентність. Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються *еквівалентними* або *рівносильними.*

Еквівалентність формул можна перевірити за допомогою таблиць істинності. Їх будують для кожної формули; отримані результати порівнюють для всіх можливих інтерпретацій. Еквівалентність формул позначають знаком рівності. Якщо формули еквівалентні, їх можна замінювати одну на іншу.

Приклад 8. Побудувати таблицю істинності для формули $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left((\overline{\overline{x_1} \equiv x_2 \equiv \overline{x_3} \equiv \overline{x_4}})\right) \downarrow (x_1\, x_2) \downarrow (x_1\, \overline{x_4})).$

Функція залежить від чотирьох змінних, отже для неї є $2^4 = 16$ інтерпретацій.

Розмістимо в таблиці істинності інтерпретації в порядку *збільшення* відповідних їм двійкових номерів і знайдемо значення функції на кожній інтерпретації (табл. 12).

Таблиця 12

Таблиця істинності формули $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_4}$	$\overline{x_1} \equiv x_2 \equiv \overline{x_3} \equiv \overline{x_4}$ $= g_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$\overline{g_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge \overline{x_4}$	$g_2 = \overline{g_1} \downarrow$ $\downarrow (x_1 \wedge x_2)$	$f = g_2 \vee$ $\vee (x_1 \wedge \overline{x_4})$
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1

4.6. Двоїстість. Принцип двоїстості

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$. Функція, двоїста сама собі, тобто $f = f$, називається *самодвоїстою.*

Сумістимо таблиці істинності булевої функції $f(x_1, x_2)$ і двоїстої $f(x_1, x_2)$, враховуючи у стовпчику значень f рівність $\bar{f}(1,1) = \bar{f}(0,0) = \overline{= f}(0,1) = \bar{f}(1,0)$ тощо. Порівняння двоїстих функцій наведено у табл. 13.

Таблиця 13

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$f'(x_1, x_2)$
0	0	$f(0, 0)$	$\bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0, 1)$	$\bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1, 0)$	$\bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1, 1)$	$\bar{f}(0,0)$

Кожне значення функції $f(x_1, x_2)$ дорівнює запереченню симетричного йому значення $f'(x_1, x_2)$ відносно горизонтальної лінії середини таблиці.

Отже, щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, треба побудувати таблицю істинності даної функції, кожне значення її замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у протилежній послідовності.

Розглянемо таблицю істинності самодвоїстої функції (табл. 14).

Таблиця 14

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	$f(0, 0) = \bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0, 1) = \bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1, 0) = \bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1, 1) = \bar{f}(0,0)$

Проведемо лінію симетрії посередині таблиці, кожне значення функції дорівнює запереченню симетричного йому значення. Отже, за таблицею істинності завжди можна встановити самодвоїстість.

Приклад 9. Знайти функцію, яка двоїста функції $f(x_1, x_2, x_3)$, що задана таблицею істинності.

Для стовпця значень f генеруємо набір протилежних (інверсних) значень i, записавши його у зворотній послідовності, одержимо таким чином стовпчик значень двоїстої функції f' (табл. 15).

Таблиця 15

Таблиця істинності f та f'

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f'(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Стовпчик f(00110110), протилежний f'(11001001).

Розглянемо функції, що двоїсті до елементарних функцій логіки:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2;$$
$$f(x) = \bar{x};$$
$$f(x) = 0;$$
$$f'(x) = 1;$$
$$f'(x) = \bar{1} = 0 = \overline{f(x)};$$
$$f'(x) = \bar{0} = 1 = \overline{f(x)};$$
$$f'(x) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \bar{x} = f(x);$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$$
$$f'(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2;$$
$$f'(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = x_1 \wedge x_2.$$

Функція «0» двоїста функції «1» і навпаки, заперечення – самодвоїста функція, кон’юнкція – двоїста диз’юнкція і навпаки.

Можна сформулювати так званий принцип двоїстості, що вказує на одержання двоїстих формул у булевій алгебрі. «Для того, щоб одержати двоїсту формулу булевої алгебри, необхідно замінити в ній всі кон’юнкції на диз’юнкції, диз’юнкцію на кон’юнкцію, 0 на 1, 1 на 0 і використовувати дужки, де необхідно, щоб порядок операцій залишався попереднім.»

Приклад 10. Знайти функцію двоїсту до функції $f = x_1 \vee \overline{x_2} x_3$ 1.

Розв’язання. Скористуємося правилом одержання двоїстих функцій $f = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge 0$.

4.7. Закони булевої алгебри

Одна і та сама булева функція може мати різні реалізації. Формули, що реалізують одну і ту ж функцію, називаються еквівалентними. Позначаються F $_1$:F $_2$:funcF $_i = f \wedge$ funcF $_2 = f$.

Відношення еквівалентності характеризуються основними законами булевої алгебри.

1. Комутативність кон'юнкції та диз'юнкції:

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$;

$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$.

2. Асоціативність диз'юнкції та кон'юнкції:

$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$;

$(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$.

3. Дистрибутивність кон'юнкції та диз'юнкції відносно одна одної:

$(x_1 \wedge x_2) \vee x_3 = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$;

$(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

4. Ідемпотентність кон'юнкції та диз'юнкції:

$x \vee x = x$; $\quad x \wedge x = x$.

5. Закон виключення третього:

$x \vee \bar{x} = 1$.

6. Закон протиріччя:

$x \wedge \bar{x} = 0$.

7. Тотожності з константами:

$x \vee 0 = x$; $\quad x \wedge 1 = x$; $\quad x \vee 1 = 1$; $\quad x \wedge 0 = 0$.

8. Закони елімінації:

$x \wedge (x \vee \text{y}) = x$; $\quad x \vee (x \wedge \text{y}) = x$.

9. Закон подвійного заперечення:

$\bar{\bar{x}} = x$.

10. Закони де Моргана:

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$;

$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

Довести закони можна, побудувавши таблиці істинності правих та лівих частин рівностей.

4.8. Диз'юнктивне розкладення булевих функцій

Серед множин еквівалентних формул, що зображають булеву функцію f, виділяється одна формула, яка називається *доскональною нормальною формою* f (ДНФ).

Введемо двійковий параметр α і позначимо x^{α} таким чином: $x, \alpha \in \mathrm{B} = \{0,1\}$;

$$x^{\alpha} = \begin{cases} \bar{x}, \text{ якщо } \alpha = 0; \\ x, \text{ якщо } \alpha = 1; \end{cases} \quad x^{\alpha} = \begin{cases} 1, \text{якщо } x = \alpha; \\ 0, \text{якщо } x \neq \alpha. \end{cases}$$

Бінарна функція $f(x, \alpha) = x^{\alpha}$ і зображується формулою $x^{\alpha} = x\alpha \;\; \bar{x}\bar{\alpha}$.

Теорема Шеннона про диз'юнктивне розкладення булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за *k*-змінними: будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такійформі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \, x_2^{\alpha_2} \dots \, x_k^{\alpha_k} \, f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_n).$$

$\vee_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$, означає багатократну диз'юнкцію, яка береться за всіма наборами значень $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ за будь-якого k (0$\leq k \leq n$).

Наслідок. Диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$ за всіма змінними:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \, x_2^{\alpha_2} \dots \, x_n^{\alpha_n}.$$

Запис $\bigvee_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1}}$ означає, що диз'юнкція береться за всіма наборами значень $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, на яких $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$=1.

Елементарною кон'юнкцією називається кон'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу.

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

Елементарна кон'юнкція $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ називається *конституентою одиниці (мінтермом)* функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = 1$, тобто інтерпретація, яка обертає в одиницю функцію f.

Конституента одиниці має такі властивості:

1. Конституента одиниці дорівнює одиниці тільки на відповідній їй інтерпретації.

2. Значення конституенти одиниці однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.

3. Кон'юнкція будь-якого числа різних конституент одиниці функції дорівнює нулеві.

Приклад 11. Елементарна кон'юнкція $\overline{x_1} \wedge x_2$ конституентою одиниці на інтерпретації (0; 1), оскільки $\overline{x_1} \wedge\ x_2 = x_1^0 \wedge x_2^1$ і $\overline{x_1} \wedge x_2 = 1$.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) булевої функції називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції конституент одиниці даної функції.

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ

1. Виділити всі інтерпретації $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, на яких значення функції дорівнює одиниці.

2. Записати конституенти одиниці виду $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, що відповідають відзначеним інтерпретаціям.

3. Одержати ДДНФ функції за допомогою з'єднання операцією диз'юнкції записаних конституент одиниці.

4.9. Кон'юнктивне розкладення булевих функцій

Елементарною диз'юнкцією називається диз'юнкція будь-якого числа кон'юнкцій булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною диз'юнкцією, що містить нуль змінних, вважатимемо константу 0. Наприклад, елементарними диз'юнкціями є: x; $\bar{x}$; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \vee \overline{x_2}$ і т. д.

Кон'юнктивою нормальною формою (КНФ) називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

Елементарна диз'юнкція $x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$ називається *конституентою нуля (макстермом)* функції, якщо $f = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, тобто інтерпретація, яка обертає в нуль дану елементарну диз'юнкцію, обертає в нуль і функцію f.

Конституента нуля має такі властивості:

1. Конституента нуля дорівнює нулю тільки за відповідної інтерпретації.

2. Конституента нуля однозначно визначається номером відповідної їй інтерпретації.

3. Диз'юнкція будь-якого числа різних конституент нуля функцій дорівнює нулю.

ДДНФ функції є результатом диз'юнктивного розкладення функції, містить тільки $\wedge$, $\vee$, $-$, застосуємо до ДДНФ принцип двоїстості. Отримаємо двоїсте зображення, яке називається *кон'юнктивним розкладенням*.

Теорема. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0}} x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$$

Кон'юнктивне розкладення булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за всіма змінними.

Доскональною кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції конституент нуля даної функції.

Висновки:

1. Для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ існує зображення у вигляді формули булевої алгебри, що містить тільки операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

2. Для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ існує зображення ДДНФ.

3. Для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ існує зображення у вигляді ДКНФ.

4. Дві різні буллеві функції не можуть мати однакові ДДНФ або ДКНФ.

4.10. Алгебра Жегалкіна. Тотожності алгебри Жегалкіна

Алгебра $(B, ; \oplus; 0, 1)$, що утворена множиною B{0;1} разом з операціями $\wedge$ (кон'юнкцією), $\oplus$ (XOR, сума за модулем 2) і константами 0, 1 називається *алгеброю Жегалкіна.*

В алгебрі Жегалкіна операція кон'юнкції повністю ідентична множенню, а операція $\oplus$ зображує додавання за модулем для скінчених множин.

Властивості операції кон'юнкції:

1. $(x_1 \wedge x_2)\wedge x_3 = x_1\wedge(x_2\wedge x_3)$– асоціативність.
2. $x_1\wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ – комутативність.
3. $x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$ – дії з константами.
4. $x \wedge x = x$ – ідемпотентність.

Властивості операції XOR (додавання за модулем 2):

1. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ – комутативність.
2. $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$ – асоціативність.
3. $x \oplus x = 0$ – закон зведення подібних доданків.
4. $x \oplus 0 = x$ – операція з константою 0.
5. $x_1\wedge(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$ – дистрибутивність $\wedge$ відносно $\oplus$.

Всі тотожності доводяться за допомого таблиці істинності.

Операція $\oplus$ відіграє важливу роль у програмуванні, бо має важливу властивість – наявність оберненого елемента x' для кожного $x \in \{0; 1\}$ $(x = x)$. Це дозволяє розв'язувати рівняння шляхом додавання до обох його частин однакових елементів.

Наприклад, рівняння виду $a \oplus x = b$ розв'язується так:

$a \oplus a \oplus x = a \oplus$ b; $0 \oplus x = a \oplus$ b; $x = a \oplus$ b.

Можливість розв'язання рівнянь, яка відсутня в булевій алгебрі, обумовила широке застосування операцій XOR.

Алгебра Жегалкіна є кільцем з одиницею.

Будь-яку булеву функцію можна зобразити через диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення (див. 4.9). Для зображення будь-якої булевої функції формулою алгебри Жегалкіна достатньо виразити диз'юнкцію та заперечення через кон'юнкцію і XOR.

Операція заперечення наведена в табл.16.

Таблиця 16

x	$\bar{x}$	$x\oplus 1$
0	1	1
1	0	0

Операція диз'юнкції $x_1\ x_2$.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x}} = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = \overline{(x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1.$$

Отже будь-яка логічна функція може бути зображена формулою в алгебрі Жегалкіна.

4.11. Поліном Жегалкіна. Лінійні функції

Із всіх еквівалентних формул в алгебрі Жегалкіна виділяється формула, що називається *поліномом Жегалкіна.*

Поліномом Жегалкіна називається скінченна сума за модулем 2 попарно різних елементарних кон'юнкцій над множиною змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції називається *рангом елементарної кон'юнкції.* Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається *довжиною полінома.*

Теорема. Для будь-якої функції існує єдиний поліном Жегалкіна.

Отримати поліном Жегалкіна можна двома способами.

Перший спосіб. Для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ записують ДДНФ, потім виражають диз'юнкцію та заперечення через операції кон'юнкції та XOR. Використовуючи тотожності алгебри Жегалкіна, отримують поліном.

Приклад 12. Зобразити поліном Жегалкіна для функції $x \sim y$.

$$x \sim y = xy\ \ \bar{x}\bar{y} = xy\bar{x}\bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x}\bar{y} = xy(\bar{x}\bar{y} \oplus 1) \oplus \bar{x}\bar{y} = xy \oplus \bar{x}\bar{y} =$$
$$= xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1.$$

Другий спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів. На основі теореми про єдність полінома Жегалкіна можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад 13. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $x \sim y$, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання. Запишемо поліном для даної функції у вигляді суми за модулем 2 всіх можливих елементарних кон'юнкцій для *x* та *y*:

$f_9(x, \text{y}) = x \sim \text{y} = a_1 x\text{y} \oplus a_2 x \oplus a_3 \text{y} \oplus a_4$, де коефіцієнти a_1, a_2, a_3, a_4 беруть значення з множини {0;1} і визначають присутність або відсутність елементарної кон'юнкції у поліномі. Шукаємо послідовно значення коефіцієнтів, підставляючи значення змінних і функції на різних інтерпретаціях:

$f(0;0) = 1; \quad 1 = a_4; \quad a_4 = 1;$

$f(0;1) = 0; \quad 0 = a_3 \oplus 1;\ 0 \oplus 1 = a_3 \oplus 1 \oplus 1;\ a_3 \oplus 0 = 1;\ a_3 = 1;$

$f(1;0) = 0; \quad 0 = a_2 \oplus 1;\ 0 \oplus 1 = a_2 \oplus 1 \oplus 1;\ a_2 = 1;$

$f(1;1) = 1; \quad 1 = a_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1;\ 1 = a_1 \oplus 1;\ 0 = a_1 \oplus 0;\ a_1 = 0;$

Отже, $x \sim y = x \oplus y \oplus 1$.

Як бачимо, результат однаковий під час розв'язання різними способами, що і треба було довести.

Булева функція називається *лінійною,* якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

$x \sim y = x \oplus y \oplus 1$ – лінійна булева функція.

4.12. Функції, що зберігають нуль та одиницю. Монотонні функції

Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *функцією, що зберігає* 0, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0:

$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$

Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *функцією, що зберігає* 1, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1:

$f(1, 1, \dots, 1) = 1.$

Булева функція f називається *монотонною*, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, для яких виконується відношення $(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (y_1, y_2, \dots, y_n)$ правильна і нерівність $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Приклад 14. Дослідити на монотонність функції $f(x, y) = x \sim y$ та $g(x, y) = x \wedge y$.

Розв'язання. Для функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$ запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функцій на данних наборах та порівняємо їх:

$f(x, y) = x \sim y;$

$(0;0) \le (0;1)\ f(0;0) = 1\ f(0;1) = 0\ f(0;0) \nleq f(0;1);$

$(0;0) \leq (1;0)$ $f(0;0) = 1$ $f(1;0) = 0$ $f(0;0) \nleq f(1;0)$;

$(0;0) \leq (1;1)$ $f(0;0) = 1$ $f(1;1) = 1$ $f(0;0) \leq f(1;1)$;

$(0;1) \leq (1;1)$ $f(0;1) = 0$ $f(1;1) = 1$ $f(0;1) \leq f(1;1)$;

$(1;0) \leq (1;1)$ $f(1;0) = 1$ $f(1;1) = 1$ $f(1;0) \leq f(1;1)$.

Висновок: функція $f(x, y) = x \sim y$ не є монотоною.

$g(x, \mathrm{y}) = x \wedge y$;

$(0;0) \leq (0;1)$ $f(0;0) = 0$ $f(0;1) = 0$ $f(0;0) \leq f(0;1)$;

$(0;0) \leq (1;0)$ $f(0;0) = 0$ $f(1;0) = 0$ $f(0;0) \leq f(1;0)$;

$(0;0) \leq (1;1)$ $f(0;0) = 0$ $f(1;1) = 1$ $f(0;0) \leq f(1;1)$;

$(0;1) \leq (1;1)$ $f(0;1) = 0$ $f(1;1) = 1$ $f(0;1) \leq f(1;1)$;

$(1;0) \leq (1;1)$ $f(1;0) = 0$ $f(1;1) = 1$ $f(1;0) \leq f(1;1)$.

Висновок: функція $g(x, y) = x \wedge \ y$ є монотонною.

Приклад 15. Визначити, чи зберігає 0 та 1 функція $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee x_2 x_3$.

Розв'язання. Перевіримо значення даної функції на 0 та 1 наборі:

$f(0;0;0) = 1 \vee 0 = 1$;

$f(1;1;1) = 0 \vee 1 = 1$.

Дана функція зберігає 1 і не зберігає 0.

4.13. Теорема Поста про повноту

Класами Поста називаються такі п'ять множин булевих функцій:

T_0 – клас функцій, що зберігає 0;

T_1 – клас функцій, що зберігає 1;

S – клас самодвоїстих функцій;

M – клас монотонних функцій;

L – клас лінійних фнкцій.

Булева функція $f(x_1, .., x_n)$ може належати одному або кільком класам, та не належати до жодного.

Теорема 1. Кожний з класів Поста замкнений.

Це означає, що будь-яка суперпозиція функцій з одного й того ж класу Поста призводить до функції того ж класу.

Теорема 2. Критерій повноти Поста. Система $\sum$ булевих функцій повна тоді і тільки тоді, коли вона містить хоча б одну функцію, що не зберігає нуль, хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю, хоча б одну немонотонну функцію, хоча б одну несамодвоїсту функцію і хоча б одну нелінійну.

Приклад 16. Визначити за допомогою теореми Поста, чи є система $\{x \vee \text{y}, \bar{x}\}$ функціонально повною.

Розв'язання. Таблиці істинності $f(x) = x \vee \text{y}$ (табл. 17) та $g(x) = \bar{x}$ (табл. 18).

Таблиця 17

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблиця 18

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Заперечення $\bar{x}$ зображується поліномом Жегалкіна $\bar{x} = x \oplus 1$, функція лінійна:

$g(0) = 1,\ g(1) = 0$, не зберігає 0, не зберігає 1, немонотонна, самодвоїста.

Нелінійна функція $f(x) = x\ \ \text{y} = x\text{y} \oplus x \oplus \text{y}$ – монотонна, зберігає 0, зберігає 1, несамодвоїста. Побудуємо табл. 19, в якій відзначимо «+» відповідні властивості функцій, «–» – їх відсутність.

Таблиця 19

Назва властивості	$\bar{x}$	$x \vee \text{y}$
Лінійність	+	–
Монотонність	–	+
Зберігання 0	–	+
Зберігання 1	–	+
Самодвоїстість	+	–

У кожному рядку таблиці присутній знак «–». Отже, для кожного класу є хоча б одна функція, яка цьому класу Поста не належить. За теоремою Поста така система функцій є функціонально повною.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Побудувати таблицю істинності для функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, визначити номер булевої функції, побудувати для даної функції двоїсту $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ і визначити її номер функції.

Варіанти:

1. $f\Big((\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4}}) \downarrow (x_1 \to x_2) \downarrow (x_3 \to x_4) \downarrow (x_4 \to \overline{x_3})\Big) \oplus \Big(\overline{\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}}\Big) \oplus (\overline{x_1} \to \overline{x_2}) \oplus (\overline{\overline{x_2} \to (x_3 \vee x_4)}) \vee x_1;$

2. $f = \Big(\Big((\overline{x_1|x_2|\overline{x_3}|x_4}) \to (\overline{\overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3}})\Big) \to \Big((x_1 \oplus x_2) \vee (\overline{x_1} \oplus x_3) \vee (\overline{\overline{x_1} \oplus \overline{x_4}})\Big)\Big) \vee (\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4});$

3. $f = \Big((\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus \overline{x_4}}) \to (\overline{\overline{x_1}|\overline{x_2}|x_3|x_4})\Big) \vee \Big((x_1 \to\to x_2) \wedge (x_1 \to \overline{x_2}) \wedge (x_2 \to \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2 \to \overline{x_4}})\Big);$

4. $f = \Big((\overline{x_1 \to \overline{x_2}}) \vee (\overline{\overline{x_2} \to \overline{x_3}}) \vee (\overline{\overline{x_3} \to \overline{x_4}})\Big) \oplus \Big(x_1 \to (x_1 \downarrow x_2)\Big) \oplus (\overline{x_2} \to \overline{x_3}|\overline{x_4}) \oplus \Big(x_3 \to (\overline{x_1} \downarrow x_4)\Big);$

5. $f = \Big(\Big((\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow \overline{x_3} \downarrow \overline{x_4}}) \to (\overline{x_1} \downarrow x_2)\Big) \oplus (\overline{x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}}) \oplus (\overline{x_1 \vee \overline{x_2}})\Big) \equiv (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4});$

6. $f = \Big(\Big((\overline{x_1 + x_2}) \oplus (\overline{x_2 + x_3}) \oplus (\overline{x_1 + \overline{x_4}})\Big) \to \Big(\overline{x_1|\overline{x_2}|\overline{x_3}|x_4}\Big)\Big) \to \Big((\overline{x_1} \downarrow x_2) \vee (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \vee (x_3 \downarrow \overline{x_4})\Big);$

7. $f = \overline{\Big(\overline{(x_1 \oplus x_2)} \vee (\overline{x_1} \oplus \overline{x_3}) \vee (x_3 \oplus \overline{x_4})\Big)} \Rightarrow \Big((x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus \overline{x_4}) \vee (x_1 \downarrow \overline{x_2} \downarrow x_3) \vee (x_3|\overline{x_4}|\overline{x_1})\Big);$

8. $f = \Big(\overline{(x_1 \downarrow \overline{x_2} \downarrow \overline{x_3} \downarrow x_4)} \oplus \overline{(\overline{x_1}|x_2|x_3|x_4)} \oplus (x_1\, \overline{\overline{x_2}})\Big) \Rightarrow \Big((x_1 \to x_2) \equiv (x_1 \to x_3) \equiv (x_1 \to \overline{x_4})\Big);$

9. $f =$

$$\Big(\Big(\overline{(x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_4)} \downarrow (\bar{x}_1|\bar{x}_2|x_3) \downarrow (x_1|\bar{x}_4)\Big) \to$$

$$\overline{\big((x_1 \to \bar{x}_2)\ \ (\bar{x}_2 \to x_3)\big)}\Big) \vee \Big(\overline{(x_3 \to x_4)} + (x_3 + x_4)\Big);$$

10. $f = \Big(\Big(\overline{\big(x_1 \to \overline{(x_2 \downarrow x_3)}\big)} \oplus \overline{\big(x_2 \to (x_3|\bar{x}_4)\big)} \oplus \overline{\big(\bar{x}_1 \to (x_2 \downarrow \bar{x}_4)\big)}\Big) \to$

$$\overline{(x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3)}\Big) \oplus (x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

11. $f =$

$$\Big(\Big(\overline{(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)} + \overline{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}\Big) \to$$

$$\Big((x_1|\bar{x}_2|\bar{x}_3|\bar{x}_4) \vee \overline{(\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4)}\Big)\Big) \vee \overline{\overline{(x_1 \to x_2)}} \vee (\bar{x}_2 \to \bar{x}_1) \vee \overline{(\bar{x}_3 \to x_4|x_1)};$$

12. $f = \Big(\overline{(x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3 \oplus x_4)} \oplus (\bar{x}_1|\bar{x}_2|\bar{x}_3|\bar{x}_4) \oplus (x_1 \to \bar{x}_2)\Big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big(\overline{(x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4)} \to \big(x_1 \to (x_2 x_3)\big)\Big) \vee x_1;$$

13. $f = \Big(\overline{\Big(\overline{(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_3 \oplus x_4)} \to (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4)\Big)} \oplus (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow$

$$\bar{x}_4) \oplus \big(x_1|(x_2 \vee x_3)\big)\Big) \to \big((x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) x_1\big);$$

14. $f = \Big(\Big(\overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \overline{x_4})} \oplus \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)}\Big) \to (x_1|x_2|x_3|x_4)\Big) \to$

$$\to \big((x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \vee (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4)\big) \vee x_1;$$

15. $f = \Big(\Big(\big((x_1 \downarrow \overline{x_2)}|\bar{x}_4\big) \to x_1 x_2 \bar{x}_3\Big) \oplus \big((\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3)|(x_1 + x_2 + x_3)\big) \to$

$$\overline{x_1 \bar{x}_2 x_4}\Big) \vee x_3;$$

16. $f = \Big(\Big(\overline{(x_1 + \bar{x}_2 + x_4)}|\overline{(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)}\Big) \downarrow \overline{(x_1 \overline{x_2 x_4})}\Big) \to$

$$(x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \overline{x_1 x_4}) \wedge x_1 \vee x_2;$$

17. $f = \Big(\big(\overline{(x_1|x_2) \to \bar{x}_4}\big) \vee \big((\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2)|x_4\big) \vee (x_1 x_2 \bar{x}_3)\Big) \to$

$$\to \Big((x_1 + x_2 + x_3) \vee \overline{(\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)}\Big);$$

18. $f = \Big((\overline{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4} \to \bar{x}_1) \vee \overline{(x_1 \oplus x_2 \oplus x_4)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_4)}\Big) \to$

$$\big((x_1 \downarrow x_2) \downarrow \bar{x}_4\big) \vee \big((x_1|\bar{x}_2)|\bar{x}_3\big);$$

19. $f = \overline{\big((x_1 \downarrow x_2) \downarrow \bar{x}_4\big)} \wedge \overline{\big((x_1|x_2)|x_3\big)} \rightarrow \Big(\overline{(x_1 + x_2 + x_4)} \vee (x_1 \rightarrow$
$\bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_4) \wedge (x_2 \rightarrow \bar{x}_3)\Big);$

20. $f = \big(\overline{(x_1\overline{x_2x_3})} \vee \overline{(\overline{x_1\bar{x}_2}\bar{x}_4)}\big) \oplus \big((x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \vee (x_2 \rightarrow \bar{x}_4) \vee (x_1|x_2) \vee (x_1 \downarrow$
$\bar{x}_3) \vee (\bar{x}_4 \downarrow x_2)\big);$

21. $f = \Big(\overline{(x_1 + x_2 + x_3)} \downarrow (\bar{x}_1 + x_2 + x_3)\Big) \rightarrow$
$\Big(\overline{\big((x_1 \downarrow x_4)|\bar{x}_3\big)} \vee \overline{(x_1x_2x_4)} \vee \big(x_1 \rightarrow \overline{(x_2|x_3)}\big)\Big) \rightarrow \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)};$

22. $f = \Big(\Big((x_1 \oplus \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_4) \vee \overline{(x_3 \oplus x_4)}\Big) \downarrow (\overline{x_1x_2} \vee \overline{x_2x_3} \vee \overline{x_3x_4})\Big) \rightarrow$
$\rightarrow \big((\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3 \downarrow x_4) \vee (x_1 \equiv x_2 \equiv x_3)\big);$

23. $f = \Big(\big((x_1 \equiv x_2) \vee (x_2 \equiv \bar{x}_4) \vee (x_2 \equiv \bar{x}_3)\big) \oplus \overline{(x_1x_2x_3x_4)}\Big) \rightarrow$
$\rightarrow \Big(\big((x_1 \downarrow x_2)|x_3\big)|x_4\Big) \vee \big(\overline{(x_1 \vee \bar{x}_2)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_3)} \vee \overline{(x_3 \vee x_4)}\big);$

24. $f = \Big(\overline{(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4)} \downarrow \overline{(x_1 \rightarrow x_2)} \downarrow (x_3 \rightarrow x_4) \downarrow (\bar{x}_4 \rightarrow x_3)\Big) \oplus$
$\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \oplus (\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2)|\overline{\big(\bar{x}_2 \rightarrow (x_3 \vee x_4)\big)}x_1;$

25. $f = \Big(\Big(\overline{\overline{(x_1 + x_2)} \oplus \overline{(x_2 + x_3)}} \oplus \overline{(x_1 + \bar{x}_4)}\Big) \rightarrow \overline{(x_1|\bar{x}_2|\bar{x}_3|x_4)}\Big) \rightarrow$
$\Big((x_1 \downarrow \bar{x}_2) \vee (x_2 \downarrow \bar{x}_3) \vee \big(\bar{x}_3 \overline{\downarrow x_4}\big)\Big);$

26. $f = \overline{(x_1 \equiv x_2) \downarrow (x_3 \equiv \bar{x}_4)} \vee \Big(\overline{(x_1 \downarrow x_2)|(x_3 \downarrow x_4)} \vee \overline{\big((x_1 \wedge x_2) \oplus x_3 \oplus x_4\big)} \rightarrow$
$x_4\Big);$

27. $f = \Big(\overline{(x_1|x_2|x_3|x_4)} \vee (x_1 \oplus x_2)\Big) \rightarrow \Big((x_4 \vee \bar{x}_3) \oplus \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)} \downarrow$
$(\bar{x}_1 \downarrow x_2)\Big);$

28. $f = \overline{(\bar{\bar{x}}_1 \oplus \bar{x}_2) \equiv (x_1 \oplus \bar{\bar{x}}_4)} \vee \overline{(x_1 \downarrow x_2) \vee (x_1|x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_4)};$

29. $f = \Big(\overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4)} \vee (\bar{x}_1|x_2|\bar{x}_3|\bar{x}_4) \vee \big((x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \equiv x_4\big)\Big) \rightarrow$
$\big((x_1 \rightarrow x_2) \downarrow (x_3 \rightarrow x_4)\big);$

30. $f = \Big(\overline{(x_1 \equiv x_2 \equiv \bar{x}_3 \equiv \bar{x}_4)} \downarrow (x_1 \wedge x_2) \downarrow (x_3 \wedge \bar{x}_4)\Big) \rightarrow \Big((\bar{x}_1 \oplus x_2) \rightarrow$
$\overline{(x_2 \oplus \bar{x}_3)}\Big).$

Завдання 2. Побудувати ДКФ для функцій $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Знайти мінімальну ДДКФ.

Варіанти:

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15;
2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15;
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15;
4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 11, 13, 15;
5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15;
6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15;
7. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14;
8. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14;
9. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15;
10. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15;
11. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15;
12. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11;
13. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14;
14. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 15;
15. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14;
16. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15;
17. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 13, 15;
18. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15;
19. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14;
20. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 15;
21. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13;
22. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15;
23. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13,14, 15;
24. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14;
25. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0,1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 15;
26. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15;
27. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 2, 4, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15;
28. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15;
29. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13;
30. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на наборах 0, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Завдання 3. За допомогою теореми Поста перевірити чи є система булевих функцій функціонально повною.

Варіанти:

Варіант	Система функцій	Варіант	Система функцій
1	$\{x \oplus y;\ x \vee y \vee \bar{z}\}$	2	$\{1;\ \bar{x}; x \oplus y\}$
3	$\{\bar{x}; 0; x \oplus y\}$	4	$\{\bar{x};\ (x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)\}$
5	$\{x\vee y;\ (x\wedge y) \oplus (x\wedge z)\}$	6	$\{x\wedge(y \oplus x); x\sim z\}$
7	$\{x\wedge(y\sim z); 0\}$	8	$\{x\wedge(y \oplus z); 1\}$
9	$\{x \downarrow y; x \vert z\}$	10	$\{x \vert y \oplus x; z \downarrow y\}$
11	$\{x \to y; y \to z\}$	12	$\{1; x \to \bar{y}\}$
13	$\{x\vee y\vee z;\ \bar{x}\overline{\wedge y}\}$	14	$\{\bar{x}\vee y\vee z; x \oplus y\}$
15	$\{x\sim y; 1; x\vee z\}$	16	$\{x\sim z;\ \bar{y}; 1\}$
17	$\{\bar{x};\ (x\vee y)\wedge(x\vee z)\}$	18	$\{x \oplus z; y \oplus z; 1\}$
19	$\{\bar{x}\overline{\vee y}; x\overline{\wedge z}\}$	20	$\{\bar{x}\vee z\overline{\vee y}; x \oplus y\}$
21	$\{x\sim y; x \oplus z; 0\}$	22	$\{x \oplus \bar{z}; x \downarrow y\}$
23	$\{x \to \bar{z}; x \to \bar{y}; 1\}$	24	$\{(x\wedge y) \to z;\ (x\wedge y) \oplus \bar{z}\}$
25	$\{x \oplus \bar{z}; x\vee(y\sim z)\}$	26	$\{0; x \to (x \oplus z);\ \bar{y}\}$
27	$\{x \downarrow y; x \vert (z \oplus y)\}$	28	$\{x \to (x \downarrow y); x\sim(z \vert y)\}$
29	$\{\bar{x}\overline{\wedge y\wedge z}; x \downarrow y\}$	30	$\{x\vee y\overline{\vee z}; x \downarrow (x \oplus z)\}$

Розділ 5. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

5.1. Поняття логіки висловлювань

У природних мовах інформація передається за допомогою слів, об'єднаних у речення. Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи увагу на форму і відволікаючись від змісту.

Математична логіка вивчає та моделює тільки оповідальні речення. Наказові, окличні та питальні речення знаходяться поза сферою розгляду.

Під *висловлюванням* будемо розуміти граматично правильне оповідальне речення, про яке можна сказати, що воно або істинне, або хибне. Наприклад: «Київ – столиця України», «Лондон – столиця Франції». Перше – істинне, друге – хибне.

Істина або хибність, що приписана деякому висловлюванню, називається *істинним значенням* цього висловлювання. Позначається: «Істина» – I, T (True) або 1; «Хибність» – X, F (False) або 0.

Атомами (елементарними висловлюваннями) називаються висловлювання, які відповідають простим оповідальним реченням. Позначаються великими буквами латинського алфавіту A, B, C…, або великими буквами з індексами. Кожна буква у міркуванні повинна визначати одне і тільки одне висловлювання.

Логіка висловлювань – це алгебраїчна структура $(\{X; I\}, \ , \ , \sim, \ , \rightarrow X, I)$ – з носієм двійковою множиною {I=1, X=0; операціями: кон'юнкцією – $\wedge$, диз'юнкцією – $\vee$, еквівалентністю – $\sim$, запереченням – $\neg$, $\overline{\ }$, імплікацією – $\rightarrow$} і константами X і I.

Можна стверджувати, що існує однозначна відповідність між алгеброю логіки і логікою висловлювань. Тому всі твердження відносно алгебри логіки справедливі і для логіки висловлювань.

За допомогою п'яти логічних операцій можна утворювати складні висловлювання, що називаються *формулами* або *молекулами*.

У логіці висловлювань правильно побудована формула визначається рекурсивно так:

1. Атом є формула.
2. Якщо A і B – атоми, то $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \sim B)$, – А-формули.
3. Ніяких формул, крім породжених вказаними правилами, не існує.

Приписування істинності значенням атомів, з яких побудована молекула, називається інтерпретацією висловлювання. Таблиця істинності логічних зв'язків – табл. 20.

Таблиця 20

Таблиця істинності логічних зв'язків

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$
X	X	I	X	X	X	I
X	I	I	X	I	I	X
I	X	X	X	I	I	X
I	I	X	I	I	I	I

Розглянемо приклади і вирази природної мови, які відповідають логічним зв'язкам.

Візьмемо два простих висловлювань (атоми):

A={йде мокрий сніг};

B={над моєю головою розкрита парасолька}.

1. Заперечення: $\bar{A} =$ {не йде мокрий сніг}.

2. Диз'юнкція: $\bar{A} \vee B =$ {не йде мокрий сніг або над моєю головою відкрита парасолька}.

3. Кон'юнкція: $A \wedge \bar{B} =$ {йде мокрий сніг і над моєю головою не розкрита парасолька}.

4. Імплікація: $A \to B =$ {якщо йде мокрий сніг, то над моєю головою розкрита парасолька}.

5. Еквівалентність: $A \sim B =$ {над моєю головою розкрита парасолька тоді і тільки тоді, коли йде мокрий сніг}.

Прочитання формул складних висловлень може бути неоднозначне, якщо не ввести дужки, що вказують, в якому порядку зв'язуються між собою символи. Деякі дужки можна опустити, увівши послідовність виконання або пріоритет операцій, а саме: $\neg, \wedge, \vee, \to, \sim$.

Наприклад. $A \to (B \wedge \bar{C}) = A \to \overline{B \wedge C}$.

Будь-якій формулі логіки висловлювань можна поставити у відповідність деяке складне речення природної мови і навпаки. Щоб записати складне речення формальною мовою слід виділити прості речення (атоми) та взяти їх в дужки, залишаючи поза дужками службові слова, що поєднують прості речення. Процес взяття у дужки повторюється доти, доки цілком все складне речення не виявиться взятим у дужки. Після цього сполучення та звороти природної мови замінюються відповідними логічними зв'язками, а прості речення атомарними формулами.

Приклад 1. Побудувати формулу і таблицю істинності для висловлень: «Якщо студент не підготувався до іспиту, або йому попався складний білет, то він не складе іспит на позитивну оцінку».

Розв'язання. Позначимо атоми:

A_1 – «Студент підготувався до іспиту».

A_2 – «Студенту попався складний білет».

A_3 – «Студент склав екзамен на позитивну оцінку».

Одержана формула: $\overline{A_1} \vee A_2 \to \overline{A_3}$. Побудуємо відповідну таблицю істинності. Таблиця істинності $(\overline{A_1} \vee A_2) \to \bar{C}$ (табл. 21).

Таблиця 21

A_1	A_2	A_3	$\overline{A_1}$	$\overline{A_1} \vee A_2$	$\neg A_3$	$\overline{A_1} \vee A_2 \to A_3$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

В інтерпретації (0; 1; 1) – студент не підготувався до іспиту, йому попався важкий білет, але все одно він склав іспит на позитивну оцінку. В інтерпретації (1; 0; 1) – студент підготувався до іспиту, отримав легкий білет, проте не склав іспит на позитивну оцінку.

Формули логіки висловлень розділяють на *тотожно істинні* (тавтологія або загальнозначуща), у яких «істина» на всіх інтерпретаціях; *тотожно хибними* (суперечливими або нездійсненими), у яких «хибність» на всіх інтерпретаціях, незагальнозначущих, нейтральних або несуперечливих, якщо вони на одних інтерпретаціях беруть значення «Істина», на інших «Хибність».

Усі формули, що не належать до суперечливих, утворюють множину здійснених формул.

Міркування називають *правильним*, якщо воно виражається тотожно істинною формулою.

Отже, щоб перевірити правильність міркування, слід побудувати відповідну до нього формулу і визначити чи вона є тавтологією.

5.2. Побудова доведення в логіці висловлювань

Логіка – наука про способи доведення.

У булевій логіці всі доведення будувалися на відношенні еквівалентності («=»). У логіці висловлювань доведення будуються на відношенні порядку, тобто на відношенні, яке існує між причиною та наслідком, яке необхідно довести в логіці висловлювань оформляється у вигляді такого причинно-наслідкового відношення:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \to \mathrm{C}, \quad (5.1)$$

де P_i – посилка (причина), C – заключення (наслідок).Читається: «Якщо причини $P_1, P_2, \dots, P_n$, істинні, то наслідок C – істинний», або «Якщо причини $P_1, P_2, \dots, P_n$ мали місце, то і C – має місце». Домовимося, речення типу 5.1 називати *клаузою* (clause).

Відношення порядку задовольняє трьом законам:

1. $A \to A$ – рефлективності.
2. Якщо $A \to B, \bar{B} \to \bar{A}$ – антисиметричності.
3. Якщо $A \to B$ і $B \to C$, то $A \to C$ – транзитивності.

З відношення порядку можна отримати: якщо $A \to B$ і $B \to \mathrm{A}$, то A=B.

Клауза – це формальний запис речення, що доводиться. Якщо замість букв в ній підставити об’єктивні висловлювання, клауза заповнюється конкретним змістом, який називають *семантикою* або *легендою*.

Існують різні методи доведення справедливості логічних клауз. Розглянемо аксіоматичний, конструктивний та метод натурального числення.

Відношення порядку є більш загальним випадком відношення еквівалентності. Наприклад, відношення симетричності якщо A=B, то B=A, можна записати в антисиметричній формі: якщо A=B, то $\bar{B} = \bar{A}$.

Всі істинні закони логіки Буля автоматично стають законами логіки висловлювань. Наприклад, закон склеювання $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$, можна записати клаузами: $(A \vee B) \vee (A \vee \bar{B}) \Rightarrow A; A \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}); 1 \Rightarrow \big((A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})\big) \sim A; A \vee B \to (A \vee \bar{B}) \to A$.

Незалежна система аксіом логіки Буля, яка складається із чотирьох законів – комутативність, асоціативність, дистрибутивність, 0 та 1 – автоматично стає системою аксіом і в логіці висловлювань.

Розглянемо елементарне висловлювання, до якого можна зводити всі інші більш складні висловлювання.

Очевидна сентенція: «Істину може висловити кожний». На формальній мові: $A \rightarrow B \rightarrow A$ або $A \wedge B \rightarrow A$ (5.2). Семантика зміниться і стане приблизно такою, «якщо раніше було встановлено, що A істинно, то істинність B не може проявитися так, що A стане хибним» або «істинність одного висловлювання B не може вплинути на істинність другого висловлювання A».

5.3. Аксіоми логіки висловлювань та правила висновків логіки висловлювань

Історично першою системою аксіом була система Г. Фреге:

1. $1 \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
2. $1 \rightarrow \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$.
3. $1 \rightarrow \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big(B \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$.
4. $1 \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$.
5. $1 \rightarrow A \rightarrow \bar{\bar{A}}, 1 \rightarrow \bar{\bar{A}} \rightarrow A$.

У сучасній логіці замість 4-ї аксіоми використовують «аксіому» виду: $1 \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow A$, що витікає із закону склеювання.

Правила для доведення логічного наслідку будуються на підставі висловлення виду $A \rightarrow B$, ці правила часто записують у такому вигляді $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$ .A_i – причини; B – наслідок.

Найбільш часто використовувані правила наведено в табл. 22.

Таблиця 22

Правила доведення логічних наслідків

№	Правило	Тавтологія	Назва правила
1	$\frac{A}{A \vee B}$	$A \to (A \vee B)$	Правило введення диз'юнкції (ПД)
2	$A, \frac{B}{A \wedge B}$	$\big((A) \wedge (B)\big) \to (A \wedge B)$	Правило введення кон'юнкції (ПК)
3	$A \vee B, \frac{\urcorner A}{B}$	$(A \vee B) \vee \urcorner A \to B$	Правило видалення диз'юнкції (диз'юнктивний силогізм) (ВД)
4	$\frac{A \to B}{\urcorner B \to \urcorner A}$	$(A \to B) \to (\urcorner B \to \urcorner A)$	Правило контрапозиції імплікації (КІ)
5	$\frac{A \wedge B}{A}$	$(A \wedge B) \to A$	Правило видалення кон'юнкції (ВК)
6	$A \to B, \frac{A}{B}$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$	Правило виділення (Modus Ponens) (MP)
7	$\urcorner B, \frac{A \to B}{A}$	$(\urcorner B \wedge (A \to B)) \to \urcorner A$	Від'ємна форма правила відділення (ModusTollens)
8	$A \to B, \frac{B \to C}{A \to C}$	$\begin{pmatrix} (A \to B) \wedge \\ (B \to C) \end{pmatrix} \to (A \to C)$	Гіпотетичний силогізм
9	$\frac{B}{A \to B}$	$B \to (A \to B)$	Правило введення імплікації (ПІ)
10	$\frac{A}{A \to B}$	$A \to (A \to B)$	Правило введення імплікації (ПІ)
11	$\frac{A}{B}, A \to B$	$A \wedge (A \to B) \to B$	Правило виключення імплікації (ПІ)

Окрім перечислених правил існує ще одне – *базове правило (БП)*, яке спочатку сформулюємо словами: по-перше, довільна посилка може виступати у ролі наслідку, тобто $A, B, C \to A$; $A, B, C \to B$; $A, B, C \to C$; по-друге, до переліку посилок істинності клаузи можна добавляти інші посилки, тобто, якщо клауза $A, B, C \to X$ – істинна, то будуть істинні всі інші, побудовані на її основі – A, B, C, D,…$\to X$.

Для доведення тавтологій використовують також правило введення заперечення (ПЗ). $\big((A \to \bar{B}) \wedge (A \to B)\big) \to \bar{A}$ та правило видалення заперечення: $(A(A \to B) \wedge (A \to \bar{B}) \to 0$.

5.4. Побудова доведення в логіці висловлювань

1. Аксіоматичний метод оснований на аксіомах логіки висловлювань – продемонстрований на прикладі.

Приклад 2. Нехай задана система аксіом.

A1: $1 \to \big(A \to (B \to A)\big)$.

A2: $1 \to \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$.

A3: $1 \to (A \to B) \to \big((A \to \bar{B}) \to \bar{A}\big)$.

Та правило Modus Ponens (MP): $(A \wedge A \to B) \to B$.

Довести справедливість закону рефлексивності: $1 \to (A \to A)$.

Доведення:

1. $A \to \big((A \to A) \to A\big). (A1)$.
2. $(A \to \big((A \to A) \to A)\big) \to (A \to (A \to A)) \to (A \to A). (A2)$.
3. $\big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to A).\ (1, 2, MP)$.
4. $A \to (A \to A). (A1)$.
5. $A \to A. (3, 4, MP)$.

2. Метод натурального числення оснований на правилах логіки висловлювань. Продемонструємо на прикладі.

Приклад 3. Методом натурального числення довести тавтологію: $1 \to (A \to B) \to \big((A \to \bar{B}) \to \bar{A}\big)$.

Розв'язання:

1. $\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B$. (ВІ).
2. $(A \wedge (A \to \bar{B})) \to \bar{B}$. (ПІ).
3. $\big(A \wedge (A \to B)\big) \wedge (A \to \bar{B}) \to B$. (1; БП).
4. $\big(A \wedge (A \to \bar{B})\big) \wedge (A \to B) \to \bar{B}$. (2; БП).
5. $A \wedge (A \to B)) \wedge (A \to \bar{B}) \to 0$. (3, 4, виділені заперечення).
6. $(A \to B) \wedge (A \to \bar{B}) \to \bar{A}$. (5, введене заперечення).
7. $(A \to B) \to \big((A \to \bar{B}) \to \bar{A}\big)$. (6, видалення імплікації).
8. $1 \to (A \to B) \to \big((\mathrm{A} \to \bar{B}) \to \bar{A}\big)$. (7, ВІ).

3. Конструктивний метод оснований на таблицях істинності.

Приклад 4. Приведено легенду, записати клаузу. За допомогою таблиці істинності знайти МНФ, мінімальне та всі трансверсальні покриття. Мінімальне покриття – це покриття з найменшим числом термів, трансверсальне включає всі терми, які відповідають конкретній причині та наслідкам.

Легенда. Якщо в одному місці щось зменшиться, то в другому – щось прибуде. Це істинне, що не вимагає доведення. Проте, існує теорія, яка стверджує, що десь у далекому космосі існують «чорні дірки», куди все провалюється, але звідти не з’являється. Ця теорія нічого не стверджує про наявність «білих дірок», які б діяли протилежно чорним. Один іноземний журнал інформував про координати «чорної дірки». Російський астроном Іванов направив туди свій телескоп проте нічого не виявив…, «так, так – сказав Іванов, – але «білу дірку» я все одно знайду».

Розв’язання. Розглянемо атоми:

A – десь там щось там зникне;

B – десь там щось там прибуде;

C – «чорна дірка» існує;

D – «біла дірка» існує;

E – неможливо нічого побачити.

Запропонуємо клаузу: $((A \sim B), (C \to \mathrm{A}), (D \to B), (C \to E), E) \to (C \to B)$.

Складемо таблицю істинності (табл. 23). З таблиці видно, що три одиниці узагальненої посилки (P) не покриваються одиницями хибного наслідку (D); одиниці істинного наслідку $(C \to B)$ цілком покривають одиниці узагальненої посилки. За таблицею складемо ДДНФ: A,B,C,D,E; A,B,$\overline{\mathrm{C}}$,D,E;A,B,C,$\overline{\mathrm{D}}$,E;A,B,$\overline{\mathrm{C}}$,$\overline{\mathrm{D}}$,E; $\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{C}}, \overline{\mathrm{D}}, \mathrm{E}$.

Мінімізуючи отриману ДДНФ, отримаємо МДФ:

$A \wedge B \wedge D \wedge E \vee \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D} \wedge E$.

Трансверсальні покриття:

$\bar{A} \vee (\bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D} \wedge E)$; $(A \wedge B) \vee (\bar{C} \wedge \bar{D} \wedge E)$; $(A \wedge B \wedge E) \vee (\bar{C} \wedge \bar{D})$.

Мінімальне покриття *E.*

Висновок:E – «Неможливо нічого побачити».

Таблиця 23

Застосування конструктивного методу для доведення в логіці висловлювань

A	B	C	D	E	$A \sim B$	$C \to A$	$D \to B$	$C \to E$	P	D	$C \to B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1

5.5. Операції над предикатами і кванторами

Предикат – це функціональне висловлювання, а висловлювання – предикатна константа. *Логіка предикатів* – це розширення логіки висловлювань за рахунок використання предикатів у ролі логічних функцій.

Визначимо предикат, якщо задана деяка (довільна) множина S, що називається областю визначення предиката (предметна область), фіксована множина $B = \{1; 0\}$, що називається областю значень та вказане правило, за допомогою якого кожному елементу, що взятий з предметної області S ставиться у відповідність один з двох елементів множини значень *B*. Для позначення предикатів часто обирають слово, що відбиває його змістове значення, або іншого алфавіту. Предикат P, що має n аргументів називається *n-місним предикатом*, позначається $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кількість аргументів предиката називається його *порядком*.

Якщо: n=0 – предикат є висловленням; n=1 – одномісний предикат, що відповідає властивості «x – натуральне число»; n=2 – двомісний предикат «x – дільник *у*», – бінарне відношення; n=3 – трьохмісний предикат «x – батьки *z*» і т. д.

Нехай *P(x)* – предикат, визначений на S. Висловлення «для всіх $x \in S, P(x)$ істинно» позначається $\forall x P(x)$. Знак ∀ називається *квантором*.

Наприклад, предикат «Всі студенти складають іспити», предметна область S – множина студентів, тоді вихідний вираз набуде виду: $\forall x P(x)$.

Висловлення «існує таке $x \in S$, що *P(x)* істинно» позначається $\exists x P(x)$, де знак ∃ називається *квантором існування.* Квантор існування застосовується, коли треба визначити, що існує хоча б одне значення змінної, для якого істинне це висловлення.

Наприклад, предикат P – «скласти іспити на відмінно» набуде виразу $\exists x P(x)$, S – множина студентів, $x \in P$.

Перехід від *P(x)* до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називається зв'язуванням змінної *x,* а сама змінна x у цьому випадку – зв'язана змінна, що не зв'язана квантором, називається вільною.

Квантор загальності можна інтерпретувати як узагальнення кон'юнкції, а квантор існування – диз'юнкції. Наприклад, якщо область визначення скінченна $S = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$, то висловлювання $\forall x P(x)$

еквівалентне кон'юнкції $P(b_1) \wedge P(b_2) \wedge \ldots \wedge P(b_n)$, а висловлення $\exists x P(x)$ – диз'юнкція $P(b_1) \vee P(b_2) \vee \ldots \vee P(b_n)$.

Обидва квантори можна заперечувати і виражати один через другий на основі закону де Моргана:

$\overline{\forall} x P(x) = \overline{P(b_1) \wedge P(b_2) \wedge \ldots \wedge P(b_n)} = \bar{P}(b_1) \vee \bar{P}(b_2) \vee \ldots \vee \bar{P}(b_n) = \exists x P(x)$,

$\overline{\exists} x P(x) = \overline{P(b_1) \wedge P(b_2) \wedge \ldots \wedge P(b_n)} = \bar{P}(b_1) \vee \bar{P}(b_2) \vee \ldots \vee \bar{P}(b_n) = \forall x P(x)$.

Звідси: $\overline{\forall} x \bar{P}(x) = \exists x P(x)$; $\overline{\exists} x \bar{P}(x) = \forall x P(x)$.

Нехай предметна область $S = \{a, b\}$. Тоді: $\forall x P(x) = P(a) \wedge P(b)$; $\exists x P(x) = P(a) \vee P(b)$.

Складемо таблицю, із якої витікають три елементарні клаузи: $\forall x P(x) \Rightarrow P(a); P(a) \Rightarrow \exists x P(x); \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

$P(a)$	$P(b)$	$\forall x P(x)$	$\exists x P(x)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Замість *P(a)* можна взяти *P(b)* – семантика клауз від цього не зміниться, а вона така, якщо вираз «для всіх x властивість P виконується» являється істинним, то і для конкретного $x = a$ властивість виконується. Перша клауза являється предикатною формою аксіоми порядку: $\forall x P(x) = P(a); P(a) \to P(b)$.

Дії її продемонструємо на прикладі:

1. «Для всіх *x* справедливо: якщо *x* – людина, то *x* смертний». Сократ – людина. Отже, Сократ смертний.

Введемо предикати:

$A(x) = \{x - \text{людина}\}; B(x) = \{x - \text{смертний}\}$;а – Сократ.

$$\Big(\forall x\big(\mathrm{A}(x) \to B(x)\big)\Big) \wedge \big(A(a) \to B(a)\big).$$

Перенесемо другу посилку вправо за знак «мета імплікації», тоді клауза задовольняє аксіомі порядку в предикатній формі: $\forall(x)(A(x) \to B(x)) \to A(a) \to B(a)$.

Тобто, клауза доведена.

2. «Деякі люди геніальні. Сократ – людина. Отже, Сократ – геніальний». Висновок, що Сократ геніальний є хибним, так як приводиться до клаузи $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) \to A(a) \to B(a)$, що протилежить аксіомі порядку.

У логіці предикатів діє принцип двоїстості. Клауза залишається в силі, якщо її посилки і заключення поміняти місцями, але при цьому одночасно провести заміну: $\forall x \Leftrightarrow \exists x$; $\wedge \Leftrightarrow \vee$; $0 \Leftrightarrow 1$. Можна довести істинність клауз, які в подальшому будемо використовувати для побудови доведення в логіці предикатів:

1. $\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$.
3. $\exists x\big(A(x) \to B(x)\big) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$.
4. $\big(\exists x A(x) \to \forall x B(x)\big) \to \forall (x)\big(A(x) \to B(x)\big)$.
5. $\forall x\big(A \to B(x)\big) = A \to \forall x B(x)$.
6. $\forall x(A(x) \to B) = \exists x A(x) \to B$.
7. $\exists x\big(A \to B(x)\big) = \big(A \to \exists x B(x)\big)$.
8. $\exists x(A(x) \to B) = \forall x A(x) \to B$.
9. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.
11. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$.
12. $\forall x \forall y P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$.
13. $\forall x \forall y P(x, y) \to \exists x \exists y P(x, y)$.
14. $\exists x \forall y P(x, y) \to \exists x \exists y P(x, y)$.
15. $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists x \exists y P(x, y)$.
16. $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$.
17. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x P(x, x)$.
18. $\exists x P(x, x) \to \exists x \exists y P(x, y)$.
19. $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow P(a, b)$.
20. $P(a, b) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$.
21. $\forall y P(a, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$.
22. $\forall y P(a, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$.
23. $\forall x P(x, b) \to \exists x \exists \forall x P(x, y)$.

24. $\forall x P(x, b) \to \forall x \exists y P(x, y)$.
25. $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y P(a, y)$.
26. $\exists y \forall x P(x, y) \to \exists y P(a, y)$.
27. $\exists x \forall y P(x, y) \to \exists x P(x, b)$.
28. $\forall y \exists x P(x, y) \to \exists x P(x, b)$.

Клаузи 9-13 особливо важливі, оскільки дають ключ до розуміння процедури складання істинних клауз для багатомісних предикатів довільним числом кванторів.

5.7. Побудова доведення у логіці предикатів

Основною задачею логіки предикатів є встановлення істинності предикатних формул. Позначимо через P_i деякий предикат з довільним числом аргументів, а через r_i – відповідну кванторові групу. Тоді закон дистрибутивності, наприклад, набуває вигляду: $r_1P_1 \vee (r_2P_2 \wedge r_3P_3) = (r_1P_1 \vee r_2P_2) \wedge (r_1P_1 \vee r_3P_3)$.

Для одномісних предикатів його можна довести через процедуру конкретизації:

$$x = \{a, b\};\ r_1 = \forall x;\ r_2 = \exists x;\ P_1 = A(x);\ P_2 = B(x);$$
$$P_3 = C(x); y = \{c, d\}; z = \{e, f\}.$$
$$[A(a) \wedge A(b)] \vee [B(c) \vee B(d)] \wedge [C(e) \wedge C(f)] =$$
$$= ([A(a) \wedge A(b)] \vee [B(c) \vee B(d)]) \wedge ([A(a) \wedge A(b)] \vee [C(e) \wedge C(f)]).$$

З того, що в дужках замість одномісних предикатів з'являються багатомісні предикати, суть тотожності не зміниться. Вона справедлива в силу законів логіки і *принципу суперпозиції*, за яким: заміна якої-небудь константи іншою або групою констант не впливає на істинність тотожності.

Основні правила доведення алгебри предикатів:

1. Правило універсальної конкретизації: $\forall x A| = A(y)$, якщо *y* вільне для *x* в *A(x)*.
2. Правило екзинстенціональної конкретизації: $\exists x A(x)| = A(b); b \in D$.
3. Правило екзистенціального узагальнення: $A(y)| = \exists x A(x)$, де *x* вільне для *y* в *A(y)*.
4. Правило всезагальності: $C \to A(x)| = C \to \forall x A(x)$.

5. Правило існування: $A(x) \to C| = \exists x A(x) \to C$.

6. Правило узагальнення: якщо $B| = A(x)$, то $B| = \forall x A(x)$, якщо x не входить до жодної формули з B.

Приклад 5. Нехай дана предикатна клауза:

$\exists x \exists y P(x, y) \to \forall v P(a, v), \forall P(a, x) \to \exists x \exists y P(y, x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall u \exists v P(u, v) \to \exists v \forall u P(u, v)$.

Позначимо:

$A = \forall x \exists y P(x, y) = \forall u \exists v P(u, v)$;

$B = \forall u P(a, u) = \forall x P(a, x)$;

$C = \exists x \forall y P(x, y) = \exists v \forall u P(u, v)$.

Тоді: $A \to B, B \to C, \Rightarrow A \to C$.

Якщо транзитивність вірна, то і предикатна клауза теж.

Приклад 6. Довести істинність клаузи:

$\forall t B(t, t) \to \exists x \overline{\exists} y B(x, y), \exists t \forall y \bar{A}(t, y) \to$

$\to \forall u \forall v B(v, u), \overline{\exists} x A(b, x) \Rightarrow \exists t \exists x \bar{B}(x, t) \wedge \exists t \forall y \bar{A}(\text{t, y})$.

Розв'язання. Процедура ідентифікації приводить до наступного:

$A_1 = \exists t \exists y A(t, y)$; $A_2 = \exists x A(b, x)$;

$B_1 = \forall u \forall v B(v, u) = \forall t \forall x B(x, t)$;

$B_2 = \forall t B(t, t)$; $B_3 = \forall x \exists y B(x, y)$;

$B_2 \to \overline{B_3}, \overline{A_1} \to B_1, \overline{A_2} \Rightarrow \overline{B_1 A_1}$; $\overline{B_2 B_3}$; $A_1 B_1, \overline{A_2} \Rightarrow 0$;

$A_1, \overline{A_2} \Rightarrow 0$; $\forall x \exists y A(x, y), \overline{\exists} y B(k, y) \Rightarrow 0$;

$B_1, \overline{B_2} \Rightarrow 0$; $\forall x \forall y B(x, y), \overline{\forall} x B(x, x) \Rightarrow 0$;

$B_1, \overline{B_3} \Rightarrow 0$; $\forall x \forall y B(x, y), \overline{\forall} x \exists y B(x, y) \Rightarrow 0$.

Приклад 7. Довільна семантика логіки висловлювань може бути виражена в предикатній формі. Дана проста легенда: Якщо Ваня ходить всюди за Ніною, а Ніна знаходиться в кінотеатрі, то де буде знаходитись Ваня?

Розв'язання. $P(x, y)$ = «*x* знаходиться там, де *y*».Складемо клаузу:

$\forall t P(\text{Ніна}, t) \to P(\text{Ваня}, t), P(\text{Ніна}, \quad \text{кінотеатр}) \Rightarrow \exists t P(\text{Ваня}, t)$.

Тобто, треба довести речення: чи існує таке місце t, де знаходився б Ваня.

$\bar{P}(\text{Ніна}, t) \vee P(\text{Ваня}, t), P(\text{Ніна}, \text{кінотеатр}), \bar{P}(\text{Ваня}, t) \Rightarrow 0$.

Квантори всезагальності опускаємо, бо відсутні квантори існування. Доведення оформимо у вигляді дерева (рис.17).

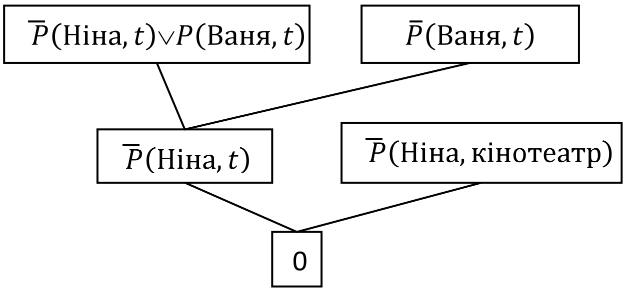


Рис. 17. Дерево розв'язку

Під час конкретизації $t =$ кінотеатр, доводиться, що дійсно існує місце, в якому знаходиться Ваня.

Зауважимо, що метод резолюції [2] можна модифікувати так, щоб доведення дало відповідь у предикатній формі: «Ваня знаходиться в кіно». Це можливо тоді, коли до того, що треба довести дописати диз'юнкцію з протилежним твердженням, утворивши таким чином тавтологію: $\overline{P}(\text{Ваня}, t) \vee P(\text{Ваня}, t)$.

Тоді дерево логічного висновку буде таким (рис.18).

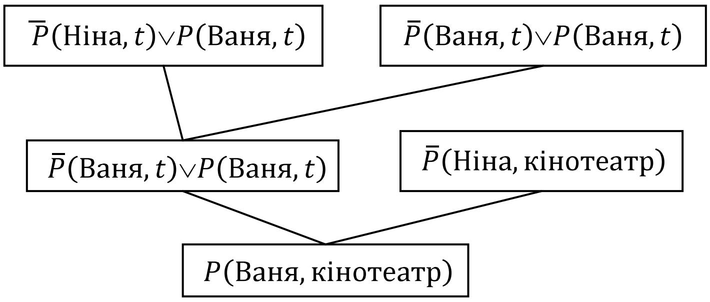


Рис. 18. Дерево логічного висновку

Більшість задач з використанням предикатів носить пошуковий характер. Пошукові задачі реалізуються мовою логічного програмування – ПРОЛОГ. Зупинимося на основних управляючих структурах та функціональних елементах цієї мови. Оскільки логіка висловлювань працює з правильно побудованими реченнями, існує можливість змішування об'єктивних та суб'єктивних речень, а також висловлювань, взятих з різних ієрархічних рівнів предметної області. Щоб обійти таку помилку, задачу, яку доводять, оформляють у вигляді структури деревовидної форми.

За корінь дерева береться деяка ціль A, істинність якої треба довести. Вона є заголовком правила, яке являє собою хорнівську клаузу; клаузи записують в оберненому порядку:

$$A \Leftarrow A_1, A_2, \dots$$

Кожне A_i – підціль основної цілі A і залежить, у свою чергу, від інших правил B_{ij}:

$$A_1 \Leftarrow B_{11}, B_{12}, \dots; \quad A_2 \Leftarrow B_{21}, B_{22}, \dots$$

Взагалі в ролі посилок можуть бути не тільки клаузи, але й елементарні висловлювання – факти. У свою чергу B_{ij} знову можуть бути заголовками правил чи фактами. Так утворюється ієрархічна структура деревовидної форми. У логічних деревах не виникають парадокси.

У мові ПРОЛОГ реалізована процедура уніфікації, за допомогою якої проводиться порівняння цілі з правилами, а правила співставляються фактам. У результаті уніфікації змінним присвоюються конкретні значення так, що предикат цілі стає істинним фактом у випадку сприятливого виходу. Для розуміння утворення уніфікації розглянемо конкретний приклад програми.

Приклад 8. Нехай задана легенда: «Василя цікавлять книги, комп'ютери та автомобілі. Михайла цікавить дещо, що цікавить Василя, але це є техніка, яка вироблена в Японії. Відомо, що комп'ютери та автомобілі – це техніка. Крім того відомо, що комп'ютери випускають в Америці, а автомобілі – в Америці і Японії».

Питання: «Що цікавить Михайла?»

Розв'язання. Щоб краще скористуватися програмою, всі предикати та конкретні значення змінних не кодуються окремими буквами, а приводяться на словах. Зліва від тексту програми приведемо символьні вирази, щоб в аналітичній формі продемонструвати метод резолюції, який лежить в основі інтерпретації ПРОЛОГу. При цьому всі склеювання проводяться з квантором всезагальності, але сам квантор не вказується.

Програма:

1. Інтерес (Василь, комп'ютери) $A(t, a)$.

2. Інтерес (Василь, книги) $A(t, b)$.
3. Інтерес (Василь, автомобілі) $A(t, c)$.
4. Інтерес (Михайло, x) $\Leftarrow A(m, x)$.
5. $\Leftarrow$ Інтерес (Василь, x) $A(t, x)$.
6. Техніка (x) $T(x)$.
7. Виготовлено (x, Японія) $P(x, n)$.
8. Техніка (комп'ютери) $T(a)$.
9. Техніка (автомобілі) $T(c)$.
10. Виготовлено (комп'ютери, Америка) $P(a, r)$.
11. Виготовлено (автомобілі, Америка) $P(c, r)$.
12. Виготовлено (автомобілі, Японія) $P(c, n)$.

Ціль:

13. Інтерес (Михайло, x) $A(m, x)$.

Програма дає можливість скласти протиріччя, яке розв'язується в рамках методу резолюції:

$$A(t, a), A(t, b), A(t, c), T(a), T(c), A(m, x)\bar{A}(t, x)\bar{T}(x)\bar{P}(x, n), P(a, r),$$
$$P(c, r), P(c, n), \bar{A}(m, x) \Rightarrow 0.$$

Нуль можна отримати, коли $x = c$. Тоді $A(m, c) \vee \bar{A}(t, c) \vee \bar{T}(c) \vee \bar{P}(c, n)$ нейтралізується предикатами 3,9,13,12.

Пошук значення x проходить через процедуру уніфікації, яку можна виділити шляхом трасування програми (покрокового протоколювання процесу виконання програми).

Позначимо: B – виклик нового предикату, $П$ – повторний виклик предикату, $У$ – успішне звернення процедури уніфікації, тобто викликаний предикат відповідає якому-небудь факту, $Н$ – неуспішне завершення уніфікації, $У$ – вказує на те, що існує ще один факт з уніфікацією, яка підходить. Символ підкреслення на місці x називається анонімною змінною і повністю замінює x під час трасування програми. Рядок трасування закінчується числом, яке відповідає номеру роздруківки програми.

Наведемо трасування програми:

1. В: ціль ( ) – 13.
2. В: інтерес (Михайло, –) – 1.
3. П: інтерес (Михайло, –) – 2.

4. П: інтерес (Михайло, –) – 3.
5. У: інтерес (Михайло, –) – 4.
6. В: інтерес (Василь, –) – 5.
7. У: інтерес (Василь, комп'ютери) – 1*у*.
8. В: техніка (комп'ютери) – 6.
9. У: техніка (комп'ютери) – 8.
10. В: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 7.
11. П: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 10.
12. П: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 11.
13. Н: виготовлено (комп'ютери, Японія) – 12.
14. П: інтерес (Василь, –) – 5.
15. У: інтерес (Василь, книги) – 2*у*.
16. В: техніка (книги) – 6.
17. П: техніка (книги) – 8.
18. Н: техніка (книги) – 9.
19. П: інтерес (Василь, –) – 5.
20. У: інтерес (Василь, автомобілі) – 3.
21. В: техніка (автомобілі) – 6.
22. П: техніка (автомобілі) – 8.
23. У: техніка (автомобілі) – 9.
24. В: виготовлено (автомобілі, Японія) – 7.
25. П: виготовлено (автомобілі, Японія) – 10.
26. П: виготовлено (автомобілі, Японія) – 11.
27. У: виготовлено (автомобілі, Японія) – 12.
28. У: Ціль ( ) – 13.

Для відповіді на запитання, «Що цікавить Михайла?», або в предикатній формі – інтерес Михайла, ПРОЛОГ – система шукає факти і заголовки правил, які порівнюються з ціллю. Перші три факти не відповідають цілі, далі слідує правило, заголовок якого змінюється трьома підцілями. У рядку 6 викликається підціль, потім ПРОЛОГ – система повертається на початок програми, де її чекає «успіх». Виставляється показник «*у*», до якого система повернеться у випадку «неуспіху», який може з'явитися в іншому місці програми. У рядку 8 викликається виклик другої підцілі – техніка (комп'ютери), для яких знаходиться факт (рядок 9).

Проте для третьої підцілі (комп'ютери, Японія) – потрібного факту не має (рядок 13). Тоді змінна x звільнюється від своєї конкретизації (комп'ютери) і набуває нового значення «книги». Ця конкретизація не задовольняє другу підціль (рядок 18). Змінна знову звільнюється і набуває значення «автомобілі». Під час цієї конкретизації задовольняються всі три підцілі, тобто пошук закінчується успіхом, інтерес (Михайло, автомобілі) є тим конкретизованим предикатом, при якому забезпечена істинність клаузи.

Граф пошуку цілі «інтерес (Михайло, x)» зображений на рис. 19.

Бінарне дерево отримано в результаті підстановок предметних констант на місці змінних, правила замінювалися фактами, а цілі – підцілями.

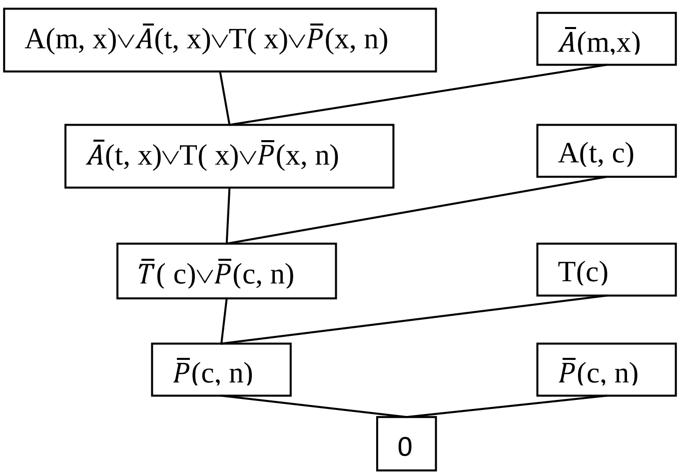


Рис. 19. Граф пошуку цілі

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 1. Наведені нижче клаузи довести відповідними методами: аксіоматичним, натурального числення та резолюції:

a) $(A \to C) \to (\bar{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$;

b) $C \to A, B \vee C, B \to D, D \to A \Rightarrow A$;

c) $AD, B \vee E, D \to C, D \vee C \Rightarrow A \wedge C; E \wedge D; B$;

d) $(A \wedge B) \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$;

e) $(A \vee C) \sim \overline{(B \vee D)} \Rightarrow \bar{A} \sim B;\ \bar{C} \sim D$;

f) $A \to D, C \to D, B \to E; D \to F, E \wedge F, A \to C \Rightarrow \bar{A}$;

g) $A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$;

h) $E \to F, C \to (D \to E), (A \to B) \to C \Rightarrow D \to (A \vee \bar{F})$.

Завдання 2. Нижче наведені легенди. Зробіть висновок, якщо можливо, з кожного набору посилок:

a) Тому, хто лисий, волосся фарбувати не має сенсу. Жодна жаба не має волосся;

b) Розумні люди ходять на руках. Нерозумні люди ходять на руках;

c) Всі кози люблять капусту. Василь любить капусту;

d) Ні одному ішаку не можна відмовити в розумі. Розумна істота не втрапить у халепу;

e) Ні один професор не являється дурнем. Дурні люди гонористі;

f) Сіль солона. Море солоне. Люди люблять море. Ні один будинок не побудований із солі. Деякі будинки дуже гарні;

g) Пісок сипучий. Діти люблять бавитись в піску. Побудований будинок із піску – недовговічний;

h) Якщо пан Івашко – щасливий, то пані Івашко – нещаслива, якщо пан Івашко нещасливий, то пані Івашко щаслива;

i) Якщо Джон піде на танці, то Макс не піде на танці, або Джон не піде на танці, то Макс прекрасно проведе вечір;

j) Необхідна і достатня умова для щастя шейха складається в тому, щоб мати золото, вино, жінок і слухати легкі мелодії;

k) Якщо x додатне, то x^2 – від'ємне;

l) Для того, щоб x було непарним, досить щоб воно було простим.

Завдання 3. Скласти клаузи для приведених нижче легенд та за методом резолюції перевірити логічний наслідок.

a) Якщо Іван – комуніст, то Іван – атеїст. Наслідок: Іван – комуніст;

b) Якщо капіталовкладення будуть постійними, то виростуть державні витрати, або виникне безробіття. Якщо державні витрати не виростуть, то податки будуть зменшені. Якщо податки будуть зменшені, а капіталовкладення не зміняться, то безробіття не зросте. Наслідок: державні витрати зростуть;

c) Дещо, що несе в собі риси чогось доброго, добре само по собі. Дещо, що несе в собі риси поганого, погане само по собі. Війна несе в собі риси миру і страждань. Мир це добре, страждання – погано. Наслідок: деякі речі як хороші, так і погані;

d) Перукарі стрижуть всіх тих, хто не стрижеться сам, і не стрижуть тих, хто стрижеться сам. Чи існують перукарі?

e) Кожний, хто їде у тролейбусі, купує білет. Наслідок: якщо не існує білетів, то ніхто нікуди не їде.

Завдання 4. Чи буде сумісна множина приведених нижче тверджень? Впевнитися в цьому, склавши клаузи, та перевірити їх кон’юнкції на сумісність:

a) Якщо на вечірці не цікаво, то або Аліса починає плакати, або Вася розповідає смішні історії. Якщо Петро приходить на вечірку, то вона або нецікава, або Аліса починає плакати. Якщо Вася розповідає смішні історії, то Аліса не починає плакати. Петро приходить на вечірку, тоді і тільки тоді, коли Вася не розповідає смішні історії. Якщо Аліса починає плакати, то Вася розповідає смішні історії;

b) Або свідок був заляканим, або якщо Джон покінчив життя самогубством, то записка була знайдена. Якщо свідок був заляканим, то Джон не покінчив життя самогубством. Якщо записка була знайдена, то Джон покінчив життя самогубством;

c) Якщо курс цінних паперів росте і процентна ставка зменшується, то або падає курс акцій, або податки не підвищуються. Курс акцій знижується тоді і тільки тоді, коли росте курс цінних паперів і податки зростають. Якщо процентна ставка знижується, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не зростає. Або підвищуються податки, або курс акцій знижується і зменшується процентна ставка.

Завдання 5. Нижче наведені легенди. Записати клаузу, що вміщує 4-6 букв, яка відповідає тексту та підтексту легенди, для чого сформулювати необхідні посилки та два наслідки: один істинний, другий хибний. За допомогою таблиці істинності знайти МНФ, мінімальне та трансверсальне покриття:

a) В одній старій легенді розповідається, що грецький драматург Софокл загинув під час загадкових обставин. На його лису голову орел скинув камінь, вважавши його яйцем. Якби Софокл не творив трагедій, то він один не ходив би в гори і залишався б жити до старості. Проте він міг творити трагедії в горах, якби у нього було волосся на голові та за відсутності пташок.

b) Всі автори літературних описів, що пізнали природу людини, розумні люди. Жодного автора не можна вважати істинним поетом, якщо він не може хвилювати серця людей. Шекспір написав «Гамлета». Жоден автор, який не пізнав природу людини, не може хвилювати серця людей. Тільки істинний поет міг написати «Гамлета». Шекспір – розумна людина.

c) Жоден чоловік, який дарує дружині плаття, не може бути недобрим. Акуратний чоловік повертається додому до вечері. Жінці нелегко слідкувати за одягом чоловіка, якщо повернувшись, він кидає одежу де попало. Хороший чоловік завжди дарує своїй жінці плаття. Жоден чоловік не може бути недобрим, якщо жінка не слідкує за його одягом. Неакуратний чоловік розкидає одяг. Хороший чоловік завжди повертається додому на вечерю.

d) Я не вважаю день нещасливим, якщо начальник не викликає мене. Четверги завжди бувають похмурими. Якщо люди беруть парасольки, то день не буває сонячним. Єдиний день тижня, коли начальник мене викликає – четвер. Кожен візьме парасольку, якщо йде дощ. Мої нещасливі дні завжди сонячні. Дощові дні похмурі.

e) «Ти мене поважаєш?» – «Так». – «Тоді дай мені грошей». – «Якщо я дам гроші, то перестану тебе поважати». – «Ти мене поважаєш за гроші?» – «Ні, як актора». – «Ну тоді тим паче дай мені грошей». – «Я даю лише тим, у кого вони є. Ти ж їх не віддаєш». – «Позич під проценти». – «Добре».

f) «Цей костюм не одягай, ти в ньому як бомж». – «Але це плаття я теж не одягну, бо воно на мені, як на вішалці». – «Вдягни шкіряний піджак та спідницю». – «Піджак весь у фарбі». – «Це – не біда, прикрий фарбу сумкою». – «Ні, я одягну сарафан, якщо ти не заперечуєш». – «Заперечую, одягай костюм».

g) Якщо в електричному ланцюзі протікає великий струм, то перегорить запобіжник, тобто його треба буде замінити. З цілим запобіжником, приймач працює, якщо його ввімкнено в мережу. Якщо приймач працює, я буду слухати улюблену мелодію. Тобто, я слухаю мелодію за умови відсутності перевищення ЛЗО та підключення приймача до мережі.

h) Сьогодні я потраплю на першу пару, якщо не затримається автобус. Автобус не запізнився, але в мене не було грошей на білет. Поїду «зайцем». У салоні з’явився контролер. Контролер мене затримав, але потім відпустив. На першу пару я запізнився.

i) Із твердження «два плюс два дорівнює три» слідує, що Ваня і Папа римський одна особа. Якщо від обох частин рівності відняти по одиниці, то буде справедлива рівність «три дорівнює двом». Якщо знову відняти по одиниці, то буде справедлива рівність «два дорівнює одиниці». Один – це Ваня, два – Ваня і Папа римський. Оскільки вірно, що «один дорівнює двом», Ваня – Папа римський.

j) Якщо хмари – це гори в небі та гори – це хмари на землі, то гроза – це вулкан на небі і вулкан – це гроза на землі. Вулкан викидає попіл, а гроза воду, які допомагають підняти врожайність. Врожай – це благо. Все благо – від Бога. Отже, попіл, вода, вулкан, грози, хмари – все від Бога.

k) Існує дві теорії виникнення людства на землі – теорія еволюції Дарвіна і теорія створення людини Богом. Якщо справедлива перша теорія, то людина виникла в результаті перетворення живих організмів. Як довели вчені, такі перетворення відбувалися. За теорією створення людини Богом вона була виліплена із глини, а життя вдихнув Господь. Глини завжди багато, а про дихання Бога сумніватися не приходиться, про це написано у Біблії. Отже – обидві теорії правильні;

l) Сліпий та глухий пішли на прогулянку. «Дивись, попереду поле з помідорами, отже, ми поїмо», – сказав глухий. «Ага», – сказав сліпий. «Слухай, десь гримить грім, напевно піде дощ» – сказав сліпий. «Ага» – сказав глухий. Вони набрали помідорів та відкрили парасольки. Все це бачив і чув німий. «Я – їм товариш» – сказав німий.

m) Щоб зварити грибний суп, треба гриби, моркву, цибулю, картоплю, пшоно. Моркви та пшона в нашому магазині не було. Все інше я купив. Проте, супу вже не зварити. Добре, куплю м'ясо і приготую котлети, відварю картоплю – друге уже є. На перше відварю грибний бульйон;

n) Щоб назбирати грибів, треба зранку поїхати до лісу. Поїхати можна або електричкою, або автомобілем. Автомобілем швидше. Петро поїхав на автомобілі. Дорогою автомобіль зламався, Петро його відремонтував, але їхати в ліс було запізно. Грибів Петро не назбирав.

o) Щоб успішно здати екзамен, треба або вивчити весь матеріал, або підготувати шпаргалки, або вивчити і написати шпаргалки. Студент написав шпаргалки, проте забув їх удома. Екзамен не був зданий.

p) Щоб приготувати каву, необхідно купити каву, цукор та мати нагріту воду. Петя купив каву, цукор, але була відсутня вода. Коли Петя приніс воду, згорів кип’ятильник. Петя приготував каву з холодної води.

q) Якщо Джон не зустрічав ввечері Сміта, то або Сміт був вбивцею, або Джон бреше. Якщо Сміт – не вбивця, то Джон його не зустрічав ввечері, і вбивство було після опівночі. Якщо вбивство було після опівночі, то або Сміт – вбивця, або Джон бреше. Отже, Сміт був вбивцею.

r) Оля та Таня – близнюки. Оля з великою швидкістю полетіла у космос, а Таня залишилася на землі. Теорія відносності стверджує, що якщо летіти на великій швидкості, то час сповільнюється, тому Таня постаріла, а Оля ні. Ця ж теорія стверджує, що якщо Оля рухається відносно Тані, то Таня рухається відносно Олі. Проте, ця ж теорія стверджує, що Оля, повернувшись з польоту, буде молодша за Таню. Висновок: теорія відносності має протиріччя.

s) «Хочеш молока?» – «Молоко я не п’ю після риби, а рибу я не їм після борщу. Борщ я сьогодні не їв, але з’їв трохи гречаного супу. Після нього з’їв кусок риби. Якщо я їм гречаний суп, то в цей день не буду відмовлятися від молока, але за умови, що я не пив компоту. Отже, давай сюди молоко».

t) Касир Іванова сказала, що вона бачила водія Петрова в кімнаті відпочинку. Ця кімната за її словами знаходиться поруч з приміщенням складу. Стріляли у складі. Водій заявив, що він пострілів не чув. Отже, якщо касир сказала правду, то водій обманює, не можуть касир і водій одночасно говорити правду.

u) Мотоцикл я спочатку не побачив, так як його закривав бензовоз, а «Волга» вивернула із-за рогу, коли «Жигулі» були біля світлофору. Іномарка проскочила на «червоне світло» і стала, як мені здається, причиною всієї аварії. Із-за неї «Волга» різко загальмувала і мотоцикліст впав на асфальт. «Жигулі», щоб не задавити мотоцикліста, повернули на тротуар, а бензовоз в цей час врізався у «Волгу». Якби не було мотоцикла, то такої ситуації не було б, хоча винен і водій «Волги», тому що він їхав дуже швидко.

Завдання 6. Побудувати таблиці істинності на області інтерпретації $D = \{a, b\}$:

a) $\exists x \forall y \big(P(x) \vee A(y)\big) \to B$;

b) $\exists x \big(P(x) \to \forall y A(y)\big) \to B$;

c) $\forall x \big(P(x) \vee \exists y (Q(y) \to B)\big) \to A$;

d) $\exists x \Big(P(x) \to \exists y \big(B \to A(y)\big)\Big)$;

e) $\forall x \exists y \big(P(x) \vee A(y) \to B(y)\big)$;

f) $\exists x (P(x) \vee \exists y (Q(y) \to A)$.

1. Довести еквівалентність формул:

a) $\exists x \big(A \wedge F(x)\big)$ та $A \wedge \exists x F(x)$;

b) $\forall x (F(x) \to A)$ та $\overline{\exists} \bar{x} \overline{(F(x) \to A)}$;

c) $\forall x \big(A \to F(x)\big)$ та $A \to \forall x F(x)$;

d) $\exists x F(x)$ та $\overline{\forall} x \bar{F}(x)$;

e) $\exists x \big(F(x) \wedge G(x)\big)$ та $\exists x (F(x) \to A)$;

f) $A \vee \forall x F(x)$ та $\forall x \big(A \wedge F(x)\big)$.

Завдання 7. Встановити істинність логічного виразу шляхом конкретизації:

a) $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$;

b) $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$;

c) $\forall x P(x, a) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$;

d) $\exists x P(x, x) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$;

e) $\exists x A(x) \to \forall x B(x) = \forall x \forall y \big(A(x) \to B(y)\big)$;

f) $\forall x \big(A \vee B(x)\big) = A \vee \forall x B(x)$;

g) $\forall y P(a, x) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$.

Розділ 6. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

6.1. Вступ

Комбінаторика або *комбінаторний аналіз* – розділ дискретної математики, яка вивчає комбінації і перестановку предметів, взаємне розташування частин скінченних множин предметів довільного походження, а також нескінченних множин, які задовольняють умови підпорядкованості, дослідження дискретних скінченних математичних структур.

Виділяють такі проблеми комбінаторного аналізу:

1) *Задачі про вибір.* Задачі такого типу досліджують умови, за яких можна здійснити вибір підмножини або деякої сукупності частин множини так, щоб задовольнити певні умови. Для розв'язання таких задач окрім комбінаторних методів використовується алгебраїчний апарат.

2) *Задачі на перелічення*, в яких визначається кількість елементів скінченної множини, що задовольняють певні умови. Для розв'язання таких задач розроблено безліч методів (метод продуктивних функцій, метод перелічення Лойя і т.д.).

3) *Задачі про існування та побудову*, в яких розглядають питання про те, чи має місце визначена конфігурація скінченної множини з визначеними властивостями, якщо так, то як її побудувати. Окрім комбінаторних методів для розв'язання задач такого типу використовують чисельні та алгебраїчні методи.

6.2. Правило суми і добутку

В теорії множин були сформовані *правила суми і прямого добутку* для скінченного числа непересічних множин.

Нехай є дві не порожні множини $A,\ |A| = n_1,\ B - |B| = n_2,\ M = = A \cup B;\ A \cap B = \emptyset$, тоді $|M| = |A| + |B| = n_1 + n_2$.

Нехай $M = A \times B$ – декартовий добуток, тоді $|M| = |A \times B| = n_1 n_2$.

У комбінаториці ці правила можна інтегрувати таким чином:

1. Якщо елементи $a \in A$ можна вибрати n_1 способами, а $b \in B - n_2$ способами, то елемент $x \in A \cup B (A \cap B = \emptyset)$ можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

2. Якщо елементи $a \in A$ можна вибрати n_1 способами, а $b \in B - n_2$ способами, то вибір пари $(a, b) \in A \times B (A \cap B = \emptyset)$ можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило суми і добутку можна поширити на n-множин. Нехай:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_{i,}$$

$M_i \cap M_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$ тоді

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| \, ;$$

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_i| = \prod_{i=1}^{n} |M_1|.$$

Приклад 1. Від зупинки метро «Площа Толстого» до КНУБА курсують два тролейбуси та чотири маршрутних таксі. Скількома способами один студент може доїхати від зупинки до ВУЗу?

Розв'язання. За правилом суми існує 2+4=6 способів.

Приклад 2. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 0; 1; 3; 8; 9?

Розв'язання. Розглянемо множини $A_1 = \{1; 3; 8; 9\} |A_1| = 4$, $A_2 = A_3 = \{0; 1; 3; 8; 9\} |A_2| = |A_3| = 5$. Тоді $A = A_1 \times A_2 \times A_3$ – множина всіх можливих тризначних чисел. За правилом добутку $|A| = |A_1||A_2||A_3| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, тобто, з даних цифр можна скласти 100 тризначних чисел.

6.3. Принцип включення та виключення

Досить часто комбінаторні конфігурації є об'єднаннями інших конфігурацій, кількість яких обчислити досить просто.

В елементарних випадках (з теорії множин):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

У загальному випадку існує формула, відома як принцип включення та виключення, що дозволяє обчислити потужності об'єднання множин, якщо відомі їх потужності та потужності всіх їх перетинів:

$$\left|\bigcup^{n} A_i\right| =$$

$$= \sum^{n} |A_0| - \sum_{1 \le i < j < n}^{n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k < n}^{n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots$$

$$+ \sum^{n} (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Приклад 3. Скільки існує натуральних чисел менших за 1000, які не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7? (Всього чисел 999).

Розв'язання. Скористуємось формулою загального члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + (n-1)d$:

1) знайдемо кількість чисел, що діляться на 3: $a_1 = 3$; $d = 3$;
   $999 = 3 + (n-1)3$; $n = 333$.
2) знайдемо кількість чисел, що діляться на 5: $a_1 = 5$; $d = 5$;
   $999 = 5 + (n-1)5$; $n = 199$.
3) знайдемо кількість чисел, що діляться на 7: $a_1 = 7$; $d = 7$;
   $999 = 7 + (n-1)7$; $n = 142$.

Аналогічно:

4) кількість чисел, що діляться на 3 та 5, дорівнює 66.
5) кількість чисел, що діляться на 3 та 7, дорівнює 47.
6) кількість чисел, що діляться на 5 та 7, дорівнює 28.
7) кількість чисел, що діляться на 3 і 5 і 7, дорівнює 9.

Тоді, за правилом включення та виключення, кількість чисел, що не діляться на 3; 5; 7 (числа менші 1000), дорівнює $999 - 333 - 199 - 142 + {}$ ${} + 66 + 47 + 28 - 9 = 457$.

6.4. Розміщення з повторенням

Класичною задачею комбінаторики є задача визначення числа способів розміщення деяких об’єктів у деякій кількості «урн», так щоб були виконані задані обмеження.

Сформулюємо задачу: нехай маємо n предметів різного виду, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ з яких складають набори довжиною m $(m < n)$. Наприклад, x_1, x_2, x_2; x_1, x_1, x_2; x_2, x_3, x_3 і т. д. Такі набори називають *розміщенням з повторенням* із n по m. Поставимо задачу знаходження числа всіх можливих наборів із n по m (позначаються $V(n, m)$; вважаючи *різними* ті, які відмінні один від одного або видом предметів, що в них входять, або порядком їх розміщення). Зауважимо, що під час складання наборів довжиною m на кожне i-місце можна покласти предмет довільного вигляду.

Для розв’язання задачі розглянемо множини $X_1 = X_2 = \ldots = X_m = \ x_1, x_2, \ldots, x_n$. Розміщення x з повторенням складуть множину $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$. Тоді за правилом прямого складу

$$\left| X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \right| = \overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{m \text{ разів}} = n^m .$$

Тобто число всіх розміщень з повторенням із n по m обчислюється за формулою $\mathrm{V}(n, m) = n^m$.

Якщо ж $|A_1| = n_1$; $|A_2| = n_2 \ldots$, $|A_m| = n_m$, то $\mathrm{V}(n, m) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Приклад 4. Скількома способами можна розфарбувати 6 дошок в 4 кольори?

Розв’язання. $\mathrm{V}(6;\, 4) = 6^4 = 1296$.

6.5. Розміщення без повторення

Нехай маємо n предметів різного виду $X = \; x_1, x_2, ..., x_n$. Розглянемо розміщення з n по m такі, що вважаються відмінними одне від іншого, якщо вони відрізняються видом елементів, що в них входять, та порядком їх розміщення. Такі набори мають назву *розміщення без повторень*.

Наприклад, утворимо всі послідовності наборів із множини $x = \; 1; 2; 3; 4$ по три елементи:

$$1;2;3 \; ; \quad 2;1;3 \; ; \; 3;1;2 \; ; \; 4;1;2 \; ,$$

$$1;2;4 \; ; \quad 2;1;4 \; ; \; 3;1;4 \; ; \; 4;1;3 \; ,$$

$$1;3;2 \; ; \quad 2;3;4 \; ; \; 3;2;4 \; ; \; 4;2;1 \; ,$$

$$1;3;4 \; ; \quad 2;3;1 \; ; \; 3;2;1 \; ; \; 4;2;3 \; ,$$

$$1;4;2 \; ; \quad 2;1;4 \; ; \; 3;4;1 \; ; \; 4;3;1 \; ,$$

$$1;4;3 \; ; \quad 2;4;3 \; ; \; 3;4;2 \; ; \; 4;3;2 \; .$$

Поставимо задачу знайти кількість розміщень без повторень із n по m. Позначається A_n^m. Читається «розміщення з n поm».

Утворюючи такі набори, на перше місце можна поставити довільний із n-предметів, на друге – лише довільний із (n-1)-предметів і т.д. На m-місце – довільний із (n-m+1)-предметів. За правилом прямого добутку отримаємо:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$(0! = 1; \quad n! = 1, 2, ..., n).$$

Приклад 5. У спортивному турнірі з шахів беруть участь десять учасників. Скількома способами можна розподілити призові місця (I, II, III) у змаганнях?

Розв'язання. Вважаючи, що всі учасники можуть зайняти призові місця однаково, отримаємо $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ можливих варіантів трійки призерів.

6.6. Перестановки

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ містить n предметів різного виду.

Розглянемо розміщення з n елементів по n, що відмінні одне від другого лише *порядком* елементів, що в них входять. Такі розміщення називають *перестановками*, їх число позначають P_n:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Приклад 6. Маючи шість олівців різного кольору, малюк малює веселку з шести кольорів. Скільки різних веселок він може намалювати?

Розв'язання. Число веселок – це число перестановок із шести по шість, тому малюк може намалювати $P_6 = 6!$ веселок.

6.7. Комбінації

Розглянемо набори з n різних елементів по m $(m < n)$, в яких нас цікавить склад набору і не цікавить порядок елементів у наборі. Такі розміщення називають *комбінаціями*.

Тобто комбінаціями з n різних елементів по m називають всі можливі розстановки довжини m, утворені з цих елементів і відмінні одна від другої *складом*, але не порядком елементів.

Загальне число комбінацій позначають $C_n^m = \binom{n}{m}$ і читають «число комбінацій із n по m».

Знайдемо це число.

Складемо всі комбінації з n елементів по m, тобто C_n^m. Потім переставимо в кожній комбінації елементи всіма можливими способами. Ми отримали набори, які відмінні або складом, або порядком розміщення елементів у наборі, тобто це всі розміщення без повторень із n по m. Їх число A_n^m. За умови, що кожна комбінація дає $m!$ розміщень, то за правилом добутку можна записати

$$m!C_n^m = A_n^m, \text{ або } C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}.$$

Приклад 7. Студент хоче гарантовано вгадати п’ять номерів лотереї «5 із 36». Скільки білетів йому потрібно купити?

Розв’язання. Очевидно, що мова йде про число комбінацій 5 із 36, а саме: $C_{36}^{5} = \dfrac{36!}{31!5!} = 376992$. Для гарантованого результату студенту слід купити 376992 білети.

6.8. Комбінації з повторенням

Нехай маємо множину з n-предметів різного виду. Число елементів кожного виду необмежене. Поставимо задачу визначити кількість наборів довжиною m, які не залежать від порядку. Такі набори називають *комбінаціями з повторенням*, кількість яких визначають так: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$. Виведемо дану формулу. Нехай $x_1, x_2, ..., x_m$ – вихідні довільні типи елементів, загальне число яких n. Розглянемо довільні комбінації з повтореннями:

$x_1 x_2 x_1 x_2 ... x_m$ з даних елементів.

За урахування того, що порядок елементів у комбінаціях нас не цікавить, побудуємо їх так:

$$x_1 x_1 x_1 ... x_1 | x_2 ... x_2 | ... | x_m x_m ...,$$

де елементи кожного типу впорядковані і відділені один від одного вертикальною рискою, за виключенням останньої серії елементів. За урахування рисок, довжина такого набору становить $m + (n-1) = m + n - 1$, де m – кількість елементів у наборі, $n-1$ – число вертикальних рисок. Такий набір можна задати вибором із $(n+m-1)$ місць $(n-1)$ – чином для положення вертикальних ліній.

Це можна зробити C_{n+m-1}^{n-1} способами, тобто $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$ – число комбінацій з повторенням із n по m.

Приклад 8. Скількома способами четверо дітей можуть поділити між собою 80 цукерок?

Розв’язання. Поставимо у відповідність кожному розподілу цукерок комбінації з повторенням. Нехай типами елементів будуть діти –

$x_1, x_2, x_3, x_4,\ \ n = 4,$ для яких треба скласти всі комбінації довжиною m=80 Належність у наборі будь-якого елемента відповідає належності даної цукерки відповідній дитині x_i причому порядок в такому наборі не має значення, все одно яка з цукерок дістанеться тій чи іншій дитині. За таких умов, число способів розподілу цукерок між дітьми: $\overline{C_{80}^{4}} = C_{4+80-1}^{80} = \dfrac{83!}{3!80!} = 9188.$

Приклад 9. Скількома способами можна розмістити m прибулих гостей серед n гостей, що вже сидять за круглим столом?

Розв'язання. Очевидно, що між n гостями, які сидять за столом, існують m проміжків, у яких можна розмістити m прибулих гостей. Це можна зробити:

$$\overline{C}_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!} \text{ способами.}$$

6.9. Перестановки з повторенням

Розглянемо мультимножину M, яка може вміщувати однакові елементи. Наприклад, $M = \ 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3\ $. Повторення елементів мультимножини можна задати й іншим способом: $M = \ 3\cdot 1; 3\cdot 2; 6\cdot 3\ $.

Сформулюємо задачу. Нехай задано предмети m-типів. Скільки існує перестановок n_1 елементів першого типу, n_2 – другого типу і т.д., n_m–m-го типу?

$$n_1 + n_2 + ... + n_m = n.$$

Такі перестановки називають *перестановками з повторенням*. Практично – це перестановки елементів деякої мультимножини. Нехай, наприклад, $M = \ 5l; 2k; 4f\ $. Розглядаючи елементи M, як різні, тобто $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, k_1, k_2, f_1, f_2, f_3, f_4$, отримаємо 11! перестановок. Без індексів багато з перестановок будуть однакові. Фактично кожна з перестановки множини M зустрілась би рівно 5!2!4! раз, оскільки для елемента l індекси можна поставити (5!) способами, елемента k(2!) способами, для елемента f (4!) способами. Тому число перестановок множини M дорівнює $\dfrac{11!}{5!2!4!}$.

У загальному випадку число перестановок мультимножини (перестановок з повторенням):

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!},$$

де $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ – загальна кількість елементів множини.

Встановимо зв'язок між перестановками з повторенням і комбінаціями. Визначимо кількість перестановок з повторенням. Із усіх n місць перестановки першого типу займають n_1 місце. Вибір місць для них можна зробити $C_n^{n_1}$ способами. Залишилось (n– n_1) місць, на яких можна розмістити n_2 елементи другого типу $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами і т.д. елементи m-го типу – $C_{n-n_1-n_2-\ldots n_{m-1}}^{n_m}$ – способами. За правилом прямого добутку:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Приклад 10. Скільки існує різних перестановок букв у слові «математика»?

Розв'язання. $P(3 \cdot a; 2m; 1e; 2м; 1u; 1к) = \dfrac{10!}{3!\ \ 2!\ \ 1!\ \ 2!\ \ 1!\ \ 1!} = 151200.$

6.10. Впорядковане та невпорядковане розбиття множин

Розглянемо деяку множину A, потужність якої $|A| = n.$ Підрахуємо число розбиттів даної множини на m різних підмножин, таких що:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A;\ A_j \cap A_j = \varnothing;\ i \neq j,\ |A_i| = n_i,\ \sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Розглянемо послідовність підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ як впорядковану. Тоді на перше місце підмножину A_1 можна вибрати $C_n^{n_i}$ способами, на друге місце множину A_2 $-C_{n-n_1}^{n_i}$ способами і т.д. На останнє місце A_m можна вибрати із залишку $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m}$ способами.

За правилом прямого добутку число розбиттів множини A на m підмножин дорівнює:

$$C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!},$$

що співпадає з числом перестановок із повторенням.

Приклад 11. В групі з 30 студентів вибирають делегата на конференцію. «За» дану кандидатуру проголосувало 20 студентів, «проти» – 6, «утрималося» – 4. Скількома способами могло бути проведено таке голосування?

Розв'язання. Розглянемо множини:

$A = \{x \mid x \text{ - студент, } x \in \overline{1,30}\};$

$A_1 = \{x \mid x\text{-студент, що голосує "за", } x \in \overline{1,20}\};$

$A_2 = \{x \mid x\text{-студент, що голосує "проти", } x \in \overline{1,6}\};$

$A_3 = \{x \mid x \text{ - студент, що "утримався", } x \in \overline{1,4}\};$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A.\ |A_1| = 20; \quad |A_2| = 6; \quad |A_3| = 4.$

Кількість способів голосування: $C_{30}^{20} C_{10}^{6} C_4^4 = \dfrac{30!}{20!\ 6!\ 4!}.$

Знову розіб'ємо множину $A, |A| = n$ на підмножини, серед яких для кожного $i = \overline{1,n}$ існує $m_i \geq 0$ підмножин з i-елементами.

Тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} i m_i = n,\ A = \bigcup\limits_{j=1}^{m_1} A_{1j} \bigcup\limits_{j=1}^{m_2} A_{2j} \bigcup\limits_{j=1}^{m_1} \ldots \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_{nj} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_{ij}$,

де A_{ij} – попарно неперетинні та $|A_{i1}| = |A_{i2}| = \ldots |A_{im1}| = i$ для кожного $i = \overline{1,n}$. Порядок підмножин в розбитті неістотний.

Так, наприклад, розбиття множини $A = \{a, b, c, d\}$:

$\{a\};\quad \{b, c\};\quad \{d\};$

$\{b, c\};\quad \{a\};\quad \{d\};$

$\{d\};\quad \{a\};\quad \{b, c\}.$

вважаються однаковими.

Позначимо число невпорядкованих розбиттів множини A через $N(m_1,m_2,...,m_n)$ та розглянемо схему формування впорядкованих розбиттів:

$$n = 1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + ... + i\cdot m_n : \underbrace{C_n^1 C_{n-1}^1 ...}_{m_1} \underbrace{C_{n-1m_1}^2 C_{n-1m_1-1}^2 ...}_{m_2}$$

множини для $\underbrace{...C^i_{n-1m_{1-2m_2-...-(n-1)m_{n-1}}}}_{m_n} = \dfrac{n!}{\underbrace{1!1!...1!}_{m_1}\underbrace{2!2!...2!}_{m_2}...\underbrace{n!n!...n!}_{m_n}} = \dfrac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(n!)^{m_n}}.$

Нехай в n різних урн закладають i кульок $m_1 + m_2 + ... + m_n = n.$ Якщо всі урни вміщують різне число кульок, то вони різні, тобто впорядковані і невпорядковані розклади співпадають. Нехай тепер в урни вміщують однакову кількість кульок. Під час впорядкованого розкладу такі урни різні. Під час невпорядкованого розкладу обмін кульками таких урн можна розглядати як відповідну перестановку вказаних урн, що не приводить до нових розкладів. Тобто число невпорядкованих розкладів буде в $m_1!\ m_2!...m_n!$ разів менше, ніж впорядкованих, а саме

$$N(m_1 m_2,...,m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(n!)^{n_m}\, m_1!m_2!...m_n!}.$$

Приклад 12. Скількома способами можна поділити колоду з 36 карт навпіл, щоб в кожній половинці було дві дами?

Розв'язання. 4 дами розкласти на $\dfrac{4!}{(2!)^2 2!} = 3$ різних коаліцій (невпорядковане розбиття). Кожна половина трьох розкладів дам виконує роль двох «урн», куди необхідно покласти розділені навпіл 32 карти. Розкладання 32 карт – впорядковане, бо «урни» різні, число їх $\dfrac{32!}{16!16!}$.

За правилом прямого добутку: $N = \dfrac{4!}{(2!)^2 2!}\cdot\dfrac{32!}{16!16!} = \dfrac{3\cdot 32!}{16!16}.$

6.11. Поліноміальна формула. Біном Ньютона

Формула $$(x_1 + x_2 + ... + x_i)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_i=n} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_i!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_i^{n_i}$$

називається *поліноміальною*, сума виконується за всіма розв'язками рівняння $n_1 + n_2 + ... + n_i = n$ в цілих невід'ємних числах, $n_j \geq 0$; $j = 1,2,...,i;\ n \in N,\ n_j \in N.$

Окремим випадком поліноміальної формули є біном Ньютона:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Доведення бінома проведемо методом індукції.

Доведення. База $n = 1$:

$$(x+y)^1 = x + y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1 = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = \sum_{n=0}^{1} C_n^1 x^n y^{1-n}.$$

Індукційний перехід:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} x C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} y C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k y^{n-k} + C_n^k x^n y^{n-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \quad C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) x^k y^{n-k} \ + \ C_n^{k-1} x^n y^0 \quad = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Наслідок: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$

Доведення. Скористуємося формулою бінома Ньютона $x = y = 1$:

$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = 2^n.$

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$

2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n.$

3. $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}.$

Із властивості три випливає ефективний спосіб рекурентного обчислення значень біноміальних коефіцієнтів, який можна записати в графічній формі, відомій як трикутник Паскаля.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
– – – – – –

6.12. Твірні функції

У комбінаторних задачах на підрахунки числа об'єктів за деяких обмежень часто шуканим розв'язком є деяка послідовність a_m, наприклад, під час обчислення числа розбиттів $a_m = p(m)$.

У цьому випадку послідовності можна поставити у відповідність формальний ряд $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, який називають твірною функцією послідовності $a_0, a_1, a_2, ..., a_m, ...$ Функція $A(x)$ може бути як функцією дійсної, так і комплексної змінної.

Вираз $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ – це розклад функції $A(x)$ в ряд Тейлора-Маклорена.

Для довільних рядів $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ та $B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$.

Визначимо операції:

1. Додавання $A(x) + B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) x^m$.
2. Множення на число $\alpha A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m x^m$.
3. Добуток Коші $A(x)B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$, де $C_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + ... + a_m b_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}$.

З математичного аналізу відомо:

1. $A(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x_m$; послідовність $a_m = 1;\ m \geq 0.$
2. $A(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m (1+m)$; послідовність $a_m = m+1;\ m \geq 0.$
3. $A(x) = (1+x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m x^m$; послідовність $a_m = C_n^m;\ m \geq 1.$ n – довільне.
4. $A(x) = e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}$; послідовність $a_m = \dfrac{1}{m!};\ m \geq 0$.
5. $A(x) = \ln \dfrac{1}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{m}$; послідовність $a_m = \dfrac{1}{m};\ m \geq 1.\ a_0 = 0.$

6. $A(x)=\ln(1+x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^m}{m}$; послідовність $a_m=\frac{1}{m}$; $m\geq 1$. $a_0=0$.

7. $A(x)=(1-x)^{-n}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{m}x^m$; послідовність $a_m=C_{n+m-1}^{m}$; $m\geq 0$.

$n-$ довільне.

Приклад 13. Знайти твірну функцію послідовності $1,2,4,8,...,2^k$, …

Розв'язання. Відомо, що $\sum\limits_{m=0}^{\infty}x^m=(1-x)^{-1}$; $\sum\limits_{m=0}^{\infty}2^m x^m=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(2x)^m=\frac{1}{1-2x}$,

тобто твірна функція послідовності 1;2;4;… є $\frac{1}{1-2x}$.

Приклад 14. Відомо, що числа Фібоначчі F_n є розв'язком рекурентного рівняння $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$; $n\geq 1$ за початкових умовами $F_0=F_1=1$. Знайти твірну функцію.

Розв'язання. Твірна функція $F(x)$ для послідовності $F_0;F_1;F_2,...$ задовольняє рівняння:

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty}F_m x^m=1+x+\sum_{m=2}^{\infty}\left(F_{m-2}+F_{m-1}\right)x^m=$$
$$=1+x+x^2\sum_{m=2}^{\infty}F_{m-2}x^{m-2}+x\sum_{m=2}^{\infty}F_{m-1}x^{m-1}=1+x+x^2F(x)+$$
$$+x(F(x)-1)=1+(x+x^2)F(x).$$

Звідси твірна функція для чисел Фібоначчі $F(x)=(1-x-x^2)^{-1}$. Знайдемо корені рівняння:

$$1-x-x^2=0;\ 1-x-x^2=(1-ax)(1-bx),\ \text{де}\ a=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Розкладемо $F(x)$ на елементарні дроби:

$$F(x)=\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}=\frac{1}{1-x-x^2};$$

$$A(1-bx)+B(1-ax)=1\Rightarrow \begin{matrix}A+B=1;\\ Ab+Ba=0\end{matrix}\Rightarrow A=\frac{a}{a-b};\quad B=-\frac{b}{a-b},\text{тобто}$$

$$F(x)=\frac{a}{a-b}\sum_{m=0}^{\infty}a^m x^m+\frac{-b}{a-b}\sum_{m=0}^{\infty}b^m x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}x^m.$$

Отже, $F_m=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right)$.

Нехай $A(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ має місце рівняння $A(x)=xA^2(x)+1$ – добуток Коші, $A(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Розкладемо $(1-4x)^{1/2}$ в ряд Маклорена, $m>0$:

$$\sqrt{1-4x}=1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m 1\cdot 3\cdot 5...(2m-3)}{m!}x^m=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}C_{2m-2}^{m-1}x^m.$$

Виберемо додатній розв'язок для $A(x)$:

$$A(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}C_{2m-2}^{m-1}x^{m-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}x^m,\text{ звідси } a_m=\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}.$$

Числа a_m називаються числами Каталана, які з'являються під час розв'язання комбінаторних задач.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Розв'язати пряму задачу комбінаторики:

1. а) У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова – 15, у вокальному гуртку – 12 і в фотогуртку – 20 чоловік. Скількома способами можна утворити бригаду із чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

б) Скільки чотирьохзначних чисел, що утворюються із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, містять цифру 3 (цифри в числах не повторюються)?

2. а) Двадцять вісім кісток доміно розподілено між чотирма гравцями. Скільки може бути різних розподілів?

б) Із групи в 15 чоловік треба виділити бригадира і чотири члени бригади. Скількома способами це можна зробити?

3. а) П'ять учнів треба розподілити у п'ять паралельних класів. Скількома способами це можна зробити?

б) Скільки тризначних чисел, що діляться на 3, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі жодна із цифр не повторюється?

4. а) Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Скількома способами можна розподілити між цими зупинками 8 пасажирів, що знаходяться в кабіні ліфта?

б) Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюються різні п'ятизначні числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких одночасно є цифри 2, 4, 5.

5. а) Скільки різних десятизначних чисел можна написати, використовуючи цифри 1 і 2?

б) У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів третього розряду, 6 – другого і 2 першорозрядники. Визначити кількість таких складів учасників першого туру, щоб шахісти однієї категорії зустрічалися між собою.

6. а) Скільки різних двозначних чисел можна утворити з цифр 1,2,3,4 за умови, що в кожному числі немає однакових цифр?

б) Семеро яблук і три апельсини треба покласти в два пакети так, щоб у кожному пакеті був хоча б один апельсин і, щоб кількість фруктів у них була однаковою. Скількома способами це можна зробити?

7. а) З цифр 0, 1, 2, 3 складені різні чотиризначні числа так, що у кожному числі немає однакових цифр. Скільки таких чисел? Скільки серед них парних чисел?

б) Вісім авторів повинні написати книгу з шістнадцяти глав. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два автори напишуть по три глави, чотири – по дві і два – по одній главі книги?

8. а) Скільки існує шестизначних чисел, усі цифри яких непарні (1, 3, 5, 7, 9)?

б) Знаки азбуки Морзе складаються із символів (крапок і тире). Скільки слів можна зобразити за умови, що кожне слово містить не більше п'яти символів?

9. а) Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо в кожне число кожна дана цифра входить не більше одного разу?

б) Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день?

10. а) Скільки різних двозначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо цифри 0, 1, 2, входять у кожне число не більше одного разу, а цифра 3 – не більше двох разів?

б) Із вази, де стоять 10 червоних і 4 рожевих гвоздики, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?

11. а) Скільки різних п’ятизначних чисел, більших за 20 000, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо цифри 2, 3, 4 входять у кожне число по одному разу, а цифра 1 – два рази?

б) Двадцяти учням видано два варіанти контрольної роботи. Скількома способами можна розсадити учнів в два ряди, щоб у тих, що сидять поруч, не було однакових варіантів, а у тих, що сидять один за одним, був один і той самий варіант?

12. а) Скільки різних п’ятизначних чисел без повторення цифр можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб парні цифри не стояли поруч?

б) Кожний з десяти радистів пункту А намагається встановити зв’язок з кожним із двадцяти радистів пункту В. Скільки можливо різних варіантів такого зв’язку?

13. а) Номер автомобільного причепа складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 букв і 10 цифр ?

б) Шість ящиків із різними матеріалами доставляють на вісім поверхів будови. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах?

14. а) Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд, так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

б) На книжковій полиці книги з математики і логіки – всього 20 книг. Показати, яка найбільша кількість варіантів комплекту, що містить 5 книг з математики і 5 книг з логіки, можлива в тому випадку, коли число книг на полиці з кожного предмета дорівнює 10?

15. а) Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти?

б) «Рано-вранці на рибалку усміхнений Мефодій мчав босоніж». Скільки різних осмислених речей можна скласти, використовуючи частину слів цього речення, але не змінюючи порядку їхнього слідування?

16. а) У шаховій зустрічі беруть участь дві команди, по 8 чоловік у кожній. Кожен з учасників і колір його фігур визначається жеребкуванням. Яке число різних результатів жеребкування?

б) На п’ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо: а) усі путівки різні, б) усі путівки однакові?

17. а) Скількома способами можна розташувати в ряд 5 білих і 4 чорних кулі так, щоб чорні кулі не лежали поруч? Розглянути два випадки: кулі одного кольору не відрізняються одна від одної; усі кулі різні.

б) На першій із двох паралельних прямих лежить 10 точок, на другій – 20. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

18. а) Чотири автори повинні написати книгу із 17 глав, причому перший і третій повинні написати по 5 глав, другий – 4, а четвертий 3 глави книги. Скількома способами можна розподілити глави між авторами?

б) Скількома способами $2n$-елементів можна розбити на пари, якщо розбиття, що відрізняються тільки порядком елементів усередині пар і порядком розташування пар, вважаються однаковими?

19. а) У класі 30 учнів. Скількома способами можна виділити двох чоловік для чергування, якщо: один з них повинний бути старшим; старшого бути не повинно?

б) У розіграші першості по футболу були зіграні 15 матчів. Кожні дві команди зустрічалися між собою один раз. Скільки команд брало участь у розіграші першості?

20. а) У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити одного сержанта і трьох солдатів для патрулювання?

б) Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день має бути 5 занять: з алгебри, геометрії, історії, географії і літератури, причому алгебра і геометрія не повинні слідувати безпосередньо одна за одною?

21. а) Скільки різних перестановок можна утворити з букв таких слів: зебра; баран; водограй; абракадабра?

б) Хокейна команда складається з 2 воротарів, 7 захисників і 10 нападаючих. Скількома способами тренер може утворити стартову шістку, що складається з воротаря, двох захисників і трьох нападаючих?

22. а) На конференції повинні виступити доповідачі A, B, C та D, причому B може виступати раніше за A. Скількома способами можна установити черговість виступів?

б) Скільки дільників має число 462?

23. а) На полиці розташовано m книг у чорних палітурках та n книг у синіх палітурках, причому всі книги різні. Скількома способами можна розставити книги так, щоб книги в чорних палітурках стояли поруч?

б) Скількома способами можна упакувати 9 різних книг у 5 бандеролей, якщо 4 бандеролі повинні містити по 2 книги?

24. а) Скількома способами 12 однакових монет можна розкласти по п'ятьох різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не залишився порожнім?

б) Збори, на яких присутні 30 чоловік, у тому числі дві жінки, вибирають чотирьох чоловік для роботи на виборчій дільниці. Скільки може бути випадків, коли в число обраних ввійдуть обидві жінки?

25. а) Потрібно розподілити викладання в шістьох класах між трьома викладачами. Скількома способами можна зробити цей розподіл, якщо кожний повинний одержати два класи?

б) У лотереї розігрується 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, дістає з неї п’ять квитків. Скількома способами він може їх дістати, щоб 3 з них виявилися виграшними? Усього в урні 100 квитків.

26. а) Туристи розділилися на дві рівні групи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4 чоловік, знайомих з місцевістю. Скількома способами вони можуть розділитися так, щоб у кожну групу ввійшло 2 чоловік, знайомих з місцевістю, якщо всього їх 16 чоловік?

б) На ремонт дитячого будинку будівельна організація виділила бригаду з 5 чоловік. У складі будівельної організації 25 чоловік, у тому числі 5 малярів, 4 теслі і 2 штукатури. Скількома способами можна набрати бригаду, щоб у неї ввійшли робітники всіх цих спеціальностей по одному?

27. а) Для культпоходу придбано $2n$ квитків у театр на місця, що знаходяться в одному ряді партеру (у ряді $2n$ місць). Скількома способами можна розподілити ці квитки між n хлопчиками та n дівчатами, щоб не сиділи поруч двоє хлопчиків чи двоє дівчаток?

б) Дев’ять з десяти карт, серед яких є чирвовий туз, роздаються трьом гравцям так, що перший одержує 3, другий 4, а третій 2 карти. Скільки існує способів роздачі карт, при яких чирвовий туз попадає до третього гравця?

28. а) Скільки різних слів, які складаються з n літер, можна скласти з m літер $(n \neq m)$?

б) У англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен, а загальна кількість імен дорівнює 300 (два способи, які відрізняються лише порядком імен, вважаються різними)?

29. а) Скількома способами можна розставити n нулів та m одиниць таким чином, щоб ніякі дві одиниці не стояли поруч?

б) У сьомому класі вивчаються 14 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на суботу, якщо в цей день тижня повинно бути 5 уроків?

30. а) Є четверо чоловіків і шість жінок. Кожен чоловік одружився з однією з жінок. Скількома способами можливо це зробити?

б) В коробці лежить три синіх кульки, три червоних і чотири зелених. Вісім кульок забрали, по одній за один раз. Скількома способами можливо це зробити?

Завдання 2. Виконати завдання:

1. Знайти середній член розкладу $\left(x^{1/5} + x^{1/3}\right)^{10}$.
2. При яких значеннях x п'ятий член розкладу $(2x+3)^9$ буде більше сусідніх з ним членів?
3. Знайти члени розкладу $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$, які є цілими числами.
4. Знайти члени розкладу $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^8$, які є цілими числами.
5. Знайти суму коефіцієнтів многочлену $(13x^3-7x-5)^{100}$.
6. Знайти суму коефіцієнтів многочлену $(4x-5)^{21}$.
7. Знайти суму коефіцієнтів многочлену $\left(3\sqrt{2}x-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.
8. Записати формулу Ньютона для степеня бінома: $(x+1)^7$.
9. Записати формулу Ньютона для степеня бінома: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5$.
10. Використовуючи формулу Ньютона, обчислити: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5$.
11. Використовуючи формулу Ньютона, обчислити: $\left(\sqrt{7}+i\right)^4+\left(\sqrt{7}-i\right)^4$.
12. Знайти сьомий член розкладу $\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)^{13}$.
13. Знайти член розкладу $\left(a^{1/3} + a^{-1/2}\right)^{15}$, який не залежить від a.

14. Знайти член розкладу $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^{18}$, який містить x^8.

15. Знайти член розкладу $(x^5+1)^{1980}$, який містить x^{1980}.

16. Скільки членів розкладу $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124}$ є цілими числами.

17. Знайти найбільший коефіцієнт многочлена $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$.

18. Знайти найбільший коефіцієнт многочлена $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}x\right)^{20}$.

19. Знайти коефіцієнт многочлена $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8.

20. Знайти коефіцієнт багаточлена $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}.

21. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу $\left(2nx+\frac{1}{2nx}\right)^{3n}$ дорівнює 64. Визначити доданок, що не містить x.

22. Сума біноміальних коефіцієнтів з непарними номерами в розкладі $\left(x+x^{-1/4}\right)^7$ дорівнює 512. Знайти доданок, що не містить x.

23. За яких значень x четвертий доданок розкладу $(5+2x)^{16}$ більший за два суміжних з ним доданки?

24. Який найбільший коефіцієнт розкладу $(a+b)^n$, якщо сума всіх коефіцієнтів дорівнює 4096?

25. У розкладі $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ є член, що містить ab. Знайти цей член.

26. Знайти найбільший біноміальний коефіцієнт розкладу $(n+1/n)^n$, якщо добуток четвертого від початку і четвертого з кінця добутків дорівнює 14400.

27. Сума третього від початку і третього з кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься в цьому розкладі?

28. Третій доданок розкладу $(2x+1/x^2)^m$ не містить x. За яких значень x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $(1+x^3)^{30}$.

29. Знайти найбільший доданок розкладу $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$.

30. За яких значень x найбільшим доданком розкладу $(5+3x)^{10}$ є четвертий?

Завдання 3. Обчислити:

1. 31^{10}.
2. 29^{15}.
3. 49^{13}.
4. 21^{17}.
5. 31^{18}.
6. 39^{21}.
7. 41^{16}.
8. 19^{22}.
9. 21^{20}.
10. 29^{23}.
11. 31^{14}.
12. 39^{17}.
13. 41^{21}.
14. 49^{18}.
15. 51^{20}.
16. 59^{19}.
17. 61^{15}.
18. 69^{22}.
19. 71^{16}.
20. 79^{17}.
21. 81^{22}.
22. 89^{21}.
23. 91^{14}.
24. 99^{18}
25. 49^{20}.
26. 49^{15}.
27. 81^{14}.
28. 61^{23}.
29. 79^{20}.
30. 19^{19}.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Міхайленко В.М.* Дискретна математика: підручник / В.М. Міхайленко, Н.Д. Федоренко, В.В. Демченко. – К.: ЄУ, 2003.– 318 с.

2. *Федоренко Н.Д.* Основи дискретного аналізу: навч. посібник / Н.Д. Федоренко, В.В. Демченко. – К.: КНУБА, 2003.– 108 с.

3. *Акимов О.Е.* Дискретна математика: навч. посібник / О.Е. Акимов. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 349 с.

4. *Михайленко В.М.* Спеціальні розділи математики: навч. посібник / В.М. Міхайленко, Н.Д. Федоренко. – К.: Вища шк., 1992. – 214 с.

5. *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера: учеб. пособие / О.П. Кузнецов, П.М. Адельсон-Вельский. – СПБ.: изд-во «Лань», 2009. – 400 с.

6. *Нікольський Ю.В.* Дискретна математика: підручник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – Львів: Магнолія-2006, 2010.– 431 с.

7. *Шиханович Ю.А.* Введение в современную математику: учеб. пособие / Ю.А. Шиханович. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

8. *Нефедов В.Н.* Курс дискретной математики: учеб. пособие В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М.: ИздМАИ, 1992. – 264 с.

Навчальне видання

ФЕДОРЕНКО Наталія Дмитрівна
БІЛОЩИЦЬКА Світлана Василівна
БІЛОЩИЦЬКИЙ Андрій Олександрович та ін

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник у двох частинах

Частина 1

Редагування та коректура *А.О. Бакієвої*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 2014. Формат 60×84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 6,04. Обл.-вид. арк. 6,5.
Тираж 30 прим. Вид. № 35/І-13. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680
E-mail: red-isdat@ukr.net, тел. (044)241-54-22, 241-54-87

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.