МІНІСЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки та завдання
до курсової роботи з теорії ймовірності, ймовірнісних процесів і математичної статистики для студентів спеціальності 125 «Кібербезпека», спеціальності 123 «Комп`ютерна інженерія»

Київ 2018

УДК 519.2
ББК 22.171

Укладачі: Н.І. Полтораченко, канд. техн. наук., доцент

Рецензент В.М. Міхайленко, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування і прикладної математики, протокол № 4 від 20 листопада 2017 року.

Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси і математична статистика: Методичні вказівки та завдання до курсової роботи з теорії ймовірності, ймовірнісних процесів і математичної статистики/ Уклад.: Н.І. Полтораченко. − К.: КНУБА, 2018. − 108с.

Містять основні прийоми дослідження випадкових величин, ймовірнісних процесів та результатів статистичних дослідів

Призначено для студентів спеціальності 125«Кібербезпека», спеціальності 123«Комп`ютерна інженерія»

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Після вивчення курсу «Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси і математична статистика» студент повинен вміти:

а) обчислювати ймовірність події, використовуючи елементи комбінаторики, класичне визначення ймовірності, теореми про добуток та суму подій, формули повної ймовірності і Байєса;

б) працювати в рамках схеми Бернуллі, використовуючи теорему Бернуллі, граничні теореми;

в) досліджувати дискретні випадкові величини;

г) досліджувати неперервні випадкові величини;

д) досліджувати системи випадкових величин;

е) досліджувати марковські процеси з дискретним та неперервним часом;

ж) обчислювати числові характеристики та граничні ймовірності систем масового обслуговування;

з) будувати варіаційні ряди, емпіричну функцію розподілу та геометрично їх зображувати;

и) обчислювати числові характеристики варіаційних рядів;

к) знаходити довірчі інтервали для точкових оцінок варіаційних рядів;

л) перевіряти достовірність гіпотез про характер випадкових величин;

м) робити кореляційний аналіз двовимірного статистичного розподілу.

Методичні вказівки містять завдання, що розраховані на групу з 30 осіб.

Класичне та статистичне визначення ймовірності. Елементи комбінаторики

При класичному визначенні ймовірність події виражається формулою

$$P(A) = m/n,$$

де m - кількість елементарних випробувань, що сприяють появі події A;
n – кількість можливих елементарних випробувань.

Відносна частота події A визначається формулою

$$W(A) = m/n,$$

де m – кількість випробувань, в яких подія A з'явилася;
n – загальна кількість випробувань.

Основний принцип комбінаторики. Якщо дію A_1 можна виконати n_1 способами, дію A_2 – n_2 способами і т.д., а дію A_k – n_k способами, то ці дії одночасно можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Задача про сполуки. Скількома способами можна серед n різних елементів вибрати m елементів: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Задача про розміщення. Скількома способами можна серед n різних елементів вибрати m елементів та розмістити по m різних місцях:

$$A_n^m = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-m})!}.$$

Задача про перестановки. Скількома способами можна переставити n різних елементів по n різних місцях: $P_n = n!$

Приклад . В бригаді, що складається з 6 робітників, працюють 3 робітники 6 розряду. За табельними номерами на виконання роботи направляються 3 робітники. Яка ймовірність, що серед них буде 2 робітника 6 розряду?

Розв'язання. Нехай A={серед трьох робітників, які працюють, двоє мають 6 розряд}. $P(A) = \frac{m}{n}$, де $m = C_3^2 \cdot C_3^1 = 9, n = C_6^3 = 20, P(A) = \frac{9}{20} = 0{,}45.$

Теореми про додавання та добуток ймовірностей

Сума двох подій A та B – це подія, що полягає у появі або події A, або B, або подій A та B одночасно.

Добуток двох подій A та B – це подія, що полягає у появі подій A та B одночасно.

Теорема про додавання ймовірностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{якщо } A \text{ та } B - \text{несумісні події},$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \text{якщо } A \text{ та } B - \text{сумісні події}.$$

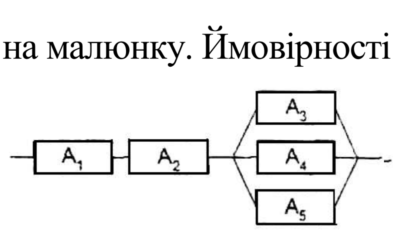
Теорема про добуток ймовірностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \text{якщо } A \text{ та } B - \text{незалежні події}.$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A), \text{якщо } A \text{ та } B - \text{залежні події},$$

де $P(B/A)$ - умовна ймовірність (ймовірність появи події A при умові, що подія B мала місце.

Приклад. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_3)=p(A_1)=p(A_2)=0{,}4$, $\mathrm{p}(A_4)=\mathrm{p}(A_5)=0{,}2$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



Розв'язання. Нехай A={вихід з ладу елементів A_1 та A_2}, B={вихід з ладу елементів A_3, A_4 та A_5}. $P(A) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1) \cdot p(A_2) = 0{,}64$, $P(B) = p(A_3) \cdot p(A_4) \cdot p(A_5) = 0{,}016, P = p(\mathrm{A}) + p(B) - p(A) \cdot p(B) =$

0,64576.

Формула повної ймовірності та формула Байєса

Ймовірність події A, яка може з'явитися лише при появі однієї з несумісних подій (гіпотез) H_1, H_2,…, H_n дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

$$\text{де } P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1.$$

Ця формула називається формулою повної ймовірності.

Якщо подія A вже відбулася, то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулою Байєса: $P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$, $i=1,\ldots,n$.

Приклад . На виробництво надходить електронне обладнання з трьох заводів у співвідношенні 2:3:5. Ймовірність поставки бракованої партії з першого заводу – 0,1, другого – 0,2, третього – 0,3. Знайти ймовірність, що нова партія буде стандартною.

Розв'язання. Нехай A={нова партія паперу стандартна}, H_1 ={партію поставив перший комбінат}, H_2={ партію поставив другий комбінат}, H_3={ партію поставив третій комбінат}. Тоді $P(H_1) = 0{,}2, P(H_2) = 0{,}3, P(H_3) = 0{,}5, P(A/H_1) = 0{,}9, P(A/H_2) = 0{,}8, P(A/H_3) = 0{,}7$.

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}77.$$

Приклад . Розглядається задача з попереднього прикладу. На виробництво надійшла партія обладнання, що задовольняє стандарту. Знайти ймовірність того, що це була поставка з першого заводу.

Розв'язання. $P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{0{,}77} = 0{,}234.$

Повторні випробування. Формула Бернуллі. Формула Пуассона

Якщо відбуваються випробування, при яких ймовірність появи події A є незмінною, тобто не залежить від номера випробування, то такі випробування називаються повторними, або схемою Бернуллі.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p ,подія A з'явитися рівно k разів, дорівнює:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Найбільш ймовірна кількість появ події A в повторних випробуваннях оцінюється за формулою:

$$n \cdot p - q \leq k_0 < n \cdot p + q, \text{ де } q = 1 - p.$$

У випадку, коли n велике, а p мале, замість формули Бернуллі використовується наближена *формула Пуассона:*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ де } \lambda = n \cdot p.$$

Приклад 4.1. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прилад, дорівнює 0,01. Яка ймовірність, що при 100 вимірюваннях буде допущено більше однієї похибки?

Розв'язання. Нехай A={допущено більше однієї похибки}.

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$. $\quad P(\bar{A}) = P_{100}(0) + P_{100}(1) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} \approx 0{,}74$, де

$$\lambda = 0{,}01 \cdot 100 = 1. \quad P(A) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26.$$

Граничні теореми Муавра-Лапласа

Ці теореми працюють в умовах схеми Бернуллі та застосовуються при великій кількості випробувань.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p, подія з'явитися рівно k разів, наближено обчислюється за формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), де\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}, q = 1 - p.$$

Таблиця значень функції $\varphi(x)$ наведена в [1].

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p, подія з'явиться не менше k_1 разів та не більше k_2, наближено обчислюється за формулою:

$$P_n(k_1, k_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

$$\text{де } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx,\ x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця значень функції Лапласа $F(x)$ наведена в [1].

Закони розподілу дискретних випадкових величин

Дискретною називають випадкову величину X, значеннями якої є окремі ізольовані числа, котрі вона приймає з визначеною ймовірністю, при цьому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Математичне сподівання: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Дисперсія: $D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2$ *або* $D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2$.

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Закони розподілу дискретних випадкових величин.

Біноміальний закон: $P_n(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, M(X) = np, D(X) = npq$.

Закон Пуассона: $P(x = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$.

Геометричний закон: $P(x = k) = q^{k-1}p, M(X) = \frac{1}{p},\ D(X) = \frac{q}{p^2}$.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Неперервна випадкова величина X приймає значення на числовому відрізку та характеризується *функцією розподілу*

$$F(x) = P(X < x),$$

де $0 \le F(x) \le 1, \quad P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Щільність розподілу: $f(x) = F'(x)$. Відповідно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Математичне сподівання: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$.

Дисперсія: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(x - M(X)\big)^2 f(x)dx$ *або*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \big(M(X)\big)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Закони розподілу неперервних випадкових величин.

Рівномірний закон: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$ $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Нормальний закон: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$,

$M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $P(\alpha < X < \beta) = F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, де $F(x) -$ функція Лапласа.

Показниковий закон: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \end{cases}$ $M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Варіаційні ряди

Вихідним пунктом статистичних досліджень будь-якої випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$ є сукупність із n незалежних спостережень, в результаті яких випадкова величина X набуває значення x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Набір значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається *вибіркою* об’єму n, взятою з генеральної сукупності випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$.

Впорядкована за величиною послідовність вибіркових значень $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ називається *варіаційним рядом*. Різні значення x_i у вибірці називаються варіантами, а n_i – кількість появ x_i у вибірці – *частотою варіанта*. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. *Відносною частотою* варіанта x_i називається відношення частоти n_i до об’єму вибірки n і позначається ω_i. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$. Таблиця, що встановлює відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами, називається *статистичним розподілом*:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

Якщо варіанти вибірки можуть відрізнятися один від одного на скільки завгодно малу величину, тобто випадкова величина набуває довільних значень у деякому інтервалі (генеральна сукупність неперервна), або коли вибірка містить досить велику кількість варіантів, то на практиці такі вибірки перегруповуються. Для цього всю ширину вибірки об’єму n розбивають інтервалами довжиною h і дані спостережень подаються таблицею частот, де вказані часткові інтервали $(a_i;a_{i+1})$ і n_i – кількість тих вибіркових значень, які потрапили до i-го інтервалу розбиття:

I	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	…	$(a_k; a_{k+1})$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Таблиця називається інтервальним варіаційним рядом. Для визначення оптимальної ширини інтервалу варіаційного ряду користуються формулою

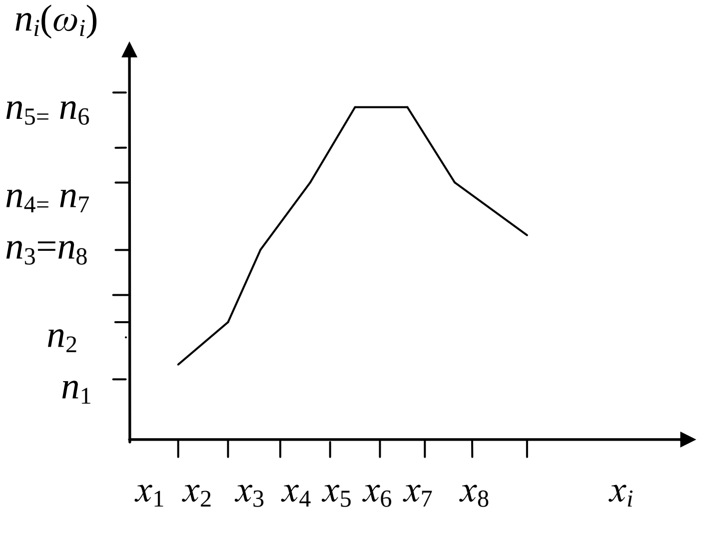
$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{1+3{,}2*\lg n},$$

де $x_{\max}$, $x_{\min}$ – максимальні та мінімальні варіанти. Якщо h – дробове число, то за h беруть найближче ціле число або найближчий простий дріб. За початок першого інтервалу беруть $a_1= x_{\min} - h/2$, тоді $a_2= a_1+ h$ і т.д. Процес продовжується доти, поки початок наступного інтервалу не буде більшим за $x_{\max}$. Число h називається *кроком* вибірки.

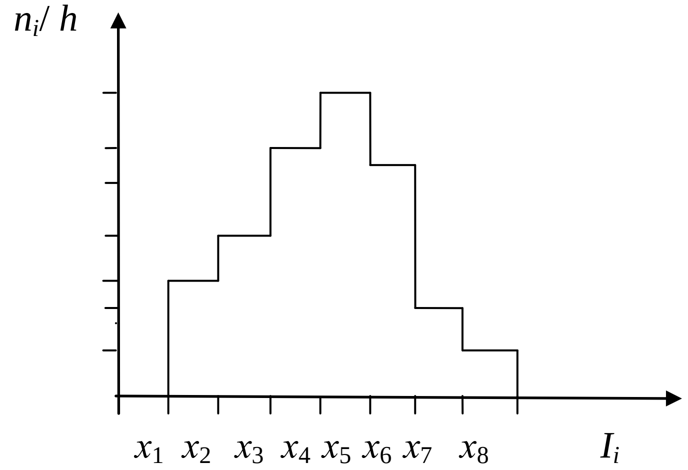
Статистичним розподілом називають таблицю, де вказують середини x_i інтервалів розбиття та їх відносні частоти.

Графічне зображення варіаційних рядів

Для ілюстрації варіаційних рядів використовують *полігон частот* $(x_i; n_i)$ або *полігон відносних частот* $(x_i; \omega_i)$:



Для ілюстрації інтервальних варіаційних рядів будують діаграми, які називають *гістограмами*.



Емпірична функція розподілу

Нехай x_1, x_2,…, x_n - вибірка об'єму n з генеральної сукупності випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$. Визначимо для кожного значення x функцію $\mu^*(x)$, що дорівнює кількості елементів вибірки, значення яких не перевищують x.

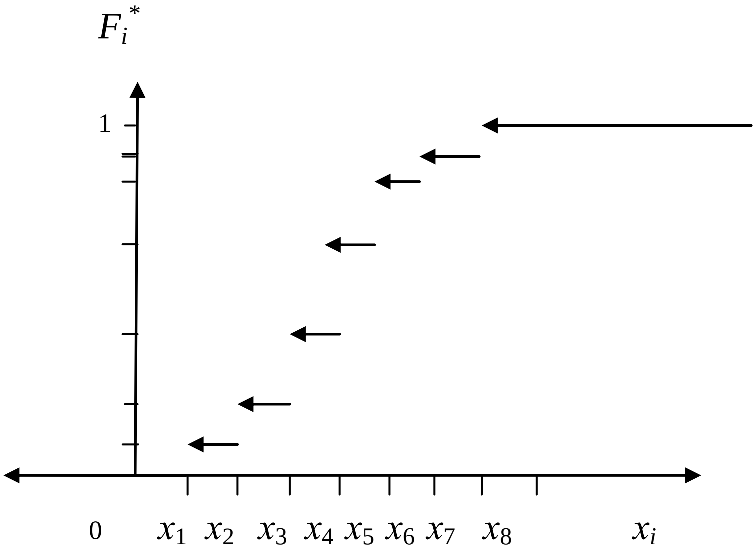
Емпіричною функцією розподілу вибірки $x_1, x_2,\ldots, x_n$ називається функція $F^*(x)=\mu^*(x)/n$. На відміну від емпіричної функції розподілу вибірки функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. Якщо вибірка має лише k ранжованих варіант, то

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, при\ x \le x_1, \\ \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n}, при\ x_i < x \le x_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1, \\ 1, при\ x > x_k \end{cases}$$

та має такі властивості:

1) $F^*(x)\in[0;1]$; 2) $F^*(x)$ – неспадна, зростає в точках x_i стрибками $\frac{n_i}{n}$.

Графік емпіричної функції розподілу має ступінчастий характер:



Числові характеристики вибірки

Основні числові характеристики статистичного ряду:

1) вибіркове середнє $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \omega_i$;
2) вибіркова дисперсія $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 n_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 \omega_i$ або $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - (\overline{x_в})^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \omega_i - (\overline{x_в})^2$;
3) вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;
4) вибіркові виправлена дисперсія $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в}$.

Основні числові характеристики інтервального статистичного ряду:

1) вибіркове середнє $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} n_i = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} \omega_i$, де $\overline{x_i} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$;
2) вибіркова медіана M_e^* - це точка частинного інтервалу (медіанного інтервалу) такого, що $F^*(x_m) < 0,5$, а $F^*(x_{m+1}) \geq 0,5$, $M_e^* = x_m + \frac{0,5 - F^*(x_m)}{F^*(x_{m+1}) - F^*(x_m)} \cdot h$;
3) вибіркова мода M_o^* - це точка частинного інтервалу (модального інтервалу), якому відповідає найбільше значення частоти n_m, $M_o^* = x_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} \cdot h$;
4) вибіркова дисперсія $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x_i} - \overline{x_в})^2 n_i = \sum_{i=1}^{k}(\overline{x_i} - \overline{x_в})^2 \omega_i$ або $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 n_i - (\overline{x_в})^2 = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 \omega_i - (\overline{x_в})^2$;

5) вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;

6) вибіркові виправлена дисперсія $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в}$.

Інтервальне оцінювання

Довірчим (надійним) інтервалом для невідомого параметра Θ розподілу ознаки генеральної сукупності називається інтервал $(\Theta^* - \delta; \Theta^* + \delta)$, $\delta > 0$, який містить в собі невідомий параметр Θ з ймовірністю γ, тобто $\gamma = P\{|\Theta^* - \Theta| < \delta\}$, γ називається надійністю, число $\alpha = 1 - \gamma$ – рівнем значущості, а δ – точністю оцінки.

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$ та відоме σ, то $a \in (\overline{x_в} - c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x_в} + c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, де $\Phi(c_\gamma) = \gamma/2$, $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$ та невідоме σ, то $a \in (\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}})$, де t_γ –коефіцієнт Стьюдента.

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$, то $\sigma \in (S(1-q); S(1+q))$, де q – коефіцієнт χ-розподілу.

Перевірка статистичних гіпотез

Критерій перевірки гіпотези H_0 – це правило, за яким приймається рішення залишити чи відхилити H_0. Статистика критерію – це випадкова величина K, що використовується для перевірки гіпотези H_0. Емпіричним значенням статистики $K_в$ називається значення статистики K, що обчислюється за вибіркою.

Множина значень статистики K розбивається критичними точками на область прийняття гіпотези H_0 та критичну область критерію (множину значень K, при яких H_0 відхиляється).

Алгоритм застосування критерію згоди Пірсона.

1) Обчислити теоретичні частоти n_i' гіпотетичного закону розподілу ознаки генеральної сукупності: $n_i' = n(\Phi_0(z_{i+1}) - \Phi_0(z_i))$, де $z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x_в})/\sigma_в$; $z_i = (x_i - \overline{x_в})/\sigma_в$.

2) Обчислити емпіричне значення статистики критерію Пірсона

$$\chi_{в}^{2}=\sum_{i=1}^{k}(n_i-n_i')^2/n_i'.$$

3)За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α та $s=k$-1-r кількості ступенів свободи (r – кількість параметрів гіпотетичного розподілу, які оцінюються за вибіркою) знайти критичну точку $\chi_{кр}^{2}(\alpha; s)$.

4)Якщо $\chi_{в}^{2} < \chi_{кр}^{2}(\alpha; s)$, то гіпотеза H_0 не відхиляється (спостереження узгоджуються з гіпотетичним розподілом); якщо $\chi_{в}^{2} > \chi_{кр}^{2}(\alpha; s)$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Алгоритм застосування критерію згоди Колмогорова.

1)Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ за вибіркою об'єму n та знайти $F^*(\overline{x_i})$.

2)Обчислити значення гіпотетичної функції розподілу

$$F(\overline{x_i})=0,5+\Phi_0\left(\frac{\overline{x_i}-\overline{x_в}}{\sigma_в}\right).$$

3)Обчислити емпіричне значення статистики Колмогорова

$$D^*=\max|F^*(\overline{x_i})-F(\overline{x_i})|.$$

4)За таблицею критичних точок розподілу Колмлгорова при заданому рівні значущості α знати критичну точку $D_{кр}(\alpha; n)$.

5)Якщо $D^* < D_{кр}(\alpha; n)$, то гіпотеза H_0 не відхиляється; якщо $D^* > D_{кр}(\alpha; n)$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

33 28 16 39 21 28 15 32 17 26 10 23 20 26 28 16 21 18 24 14 26 9 21 20 27 19 14 24 8 23 5 22 23 22 24 27 24 13 29 7 22 19 12 6 30 19 31 12 36 17 $\alpha = 0,05$

Розв'язання. а) Для побудови групового статистичного ряду знайдемо за вибіркою x_{min}=5, x_{max}=39, lg$n$=lg50≈1,7,

$$h=\frac{39-5}{1+3{,}2*1{,}7}\approx 5,\ x_1=5,\ x_8=40,\ k=7,$$

де k – кількість частинних інтервалів, x_1 та x_8 – відповідно нижня та верхня межі інтервального ряду. Для кожного I_i (i=1,2,…,7) підрахуємо частоти n_i, результати обчислень занесемо до таблиці 1(рядки 1,2).

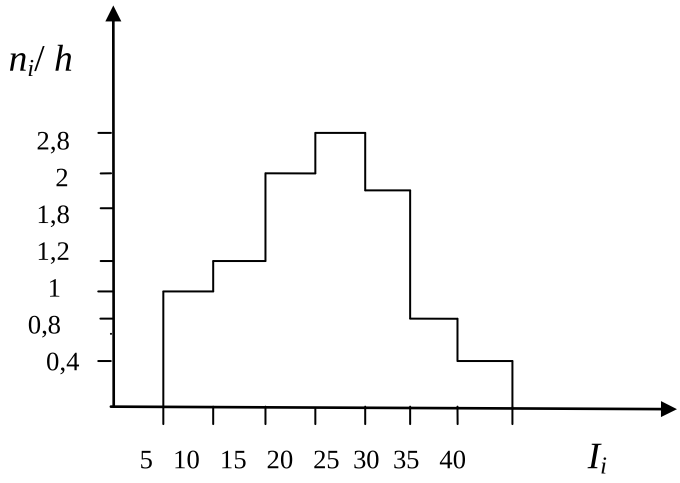
б) Для побудови гістограми частот та емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ обчислимо щільність частот n_i/h, відносні частоти ω_i та накопичені відносні частоти F_i^* відповідних частинних інтервалів I_i (табл.1, рядки 3-5).

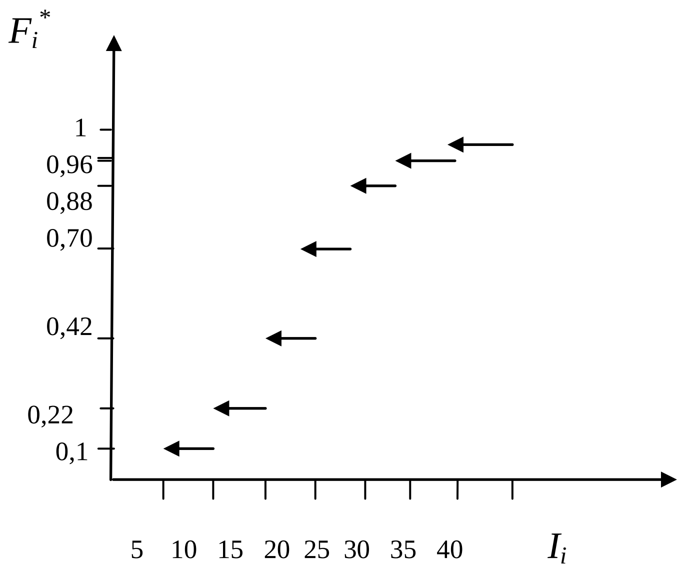
Гістограму частот та графік емпіричної функції розподілу зображено відповідно на рис.1 та рис.2.

Таблиця1

	1	2	3	4	5	6	7	8
I_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	$\sum$
n_i	5	6	10	14	9	4	2	50
ω_i	0,1	0,12	0,2	0,28	0,18	0,08	0,04	1
F_i^*	0,1	0,22	0,42	0,70	0,88	0,96	1	-
n_i/h	1	1,2	2	2,8	1,8	0,8	0,4	-
$\overline{x_i}$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	-
$\overline{x_i}\,\omega_i$	0,75	1,5	3,5	6,3	4,95	2,6	1,5	21,1
$\overline{x_i}^2\,\omega_i$	5,625	18,75	61,25	141,75	136,125	84,5	56,25	504,25
z_i	-2,10	-1,45	-0,79	-0,14	0,51	1,16	1,81	-
z_{i+1}	-1,45	-0,79	-0,14	0,51	1,16	1,81	2,46	-
$\Phi_0(z_i)$	-0,482	-0,426	-0,285	-0,056	0,195	0,377	0,465	-
$\Phi_0(z_{i+1})$	-0,426	-0,285	-0,056	0,195	0,377	0,465	0,493	-
n_i'	2,8	7,05	11,45	12,55	9,10	4,40	1,40	48,75
n_i'/h	0,56	1,41	2,29	2,51	1,82	0,88	0,28	-
$(\overline{x_i}-\overline{x_в})/\sigma_в$	-1,77	-1,12	0,469	0,182	0,833	1,484	2,135	-
$F(\overline{x_i})$	0,038	0,131	0,319	0,571	0,797	0,931	0,982	-
$\lvert F_i^*-F(\overline{x_i})\rvert$	0,062	0,089	0,101	0,129	0,083	0,029	0,018	-

Гістограму частот та графік емпіричної функції розподілу зображено на рисунках.





в) Обчислення точкових оцінок числових характеристик вибірки зручно виконувати за допомогою проміжних розрахунків, що виконані в табл..1:

$\overline{x_в} = 21{,}1$; $D_в = 504{,}25\text{-}(21{,}1)^2 \approx 59{,}04$; $\sigma_в = \sqrt{59{,}04} \approx 7{,}68$;

$S^2 = \frac{50}{50-1} \cdot 59{,}04 \approx 60{,}24$; $S = \sqrt{60{,}24} \approx 7{,}76$;

модальний інтервал $I_4=[20;25]$; $M_o^* = 20 + \frac{14-10}{2*14-10-9} \cdot 5 = 22{,}22$;

медіанний інтервал $I_4=[20;25]$; $M_e^* = 20 + \frac{0{,}5-0{,}42}{0{,}7-0{,}42} \cdot 5 = 21{,}43$.

г) Перевіримо, чи узгоджуються результати спостережень з гіпотезою про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності при рівні значущості α=0,05.

I. Застосуємо критерій згоди Пірсона. Обчислимо теоретичні частоти частинних інтервалів за формулою $n_i'=n(\Phi_0(z_{i+1})-\Phi_0(z_i))$, де

$z_{i+1}=(\overline{x_{i+1}}-\overline{x_в})/\sigma_в$; $z_i=(\overline{x_i}-\overline{x_в})/\sigma_в$.

Результати обчислень занесемо у табл..1 (рядки 9-13).

Обчислимо емпіричне значення статистики Пірсона

$$\chi_в^2=\frac{(5-2{,}8)^2}{2{,}8}+\frac{(6-7{,}05)^2}{7{,}05}+\frac{(10-11{,}45)^2}{11{,}45}+\frac{(14-12{,}55)^2}{12{,}55}+\frac{(9-9{,}10)^2}{9{,}10}+$$
$$+\frac{(4-4{,}4)^2}{4{,}4}+\frac{(2-1{,}4)^2}{1{,}4}\approx 2{,}497.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 знаходимо $\chi_{кр}^2(0{,}05;4)=9{,}5$. Отже, $\chi_в^2<\chi_{кр}^2$, тому гіпотеза про нормальний розподіл ознаки не відхиляється.

II. Застосуємо критерій згоди Колмогорова. Обчислимо значення теоретичної (нормальної) функції розподілу в точках $\overline{x_i}$(i=1,2,…,7) та значення $|F_i^*-F(\overline{x_i})|$ (табл.1). Тоді $D^*=0{,}129$. За таблицею критичних точок розподілу Колмогорова знаходимо при $\alpha=0{,}05$ $D_{кр}\sqrt{n}=1{,}358$; $D_{кр}=\frac{1{,}358}{\sqrt{50}}\approx 0{,}192$. Так як $D^*<D_{кр}$, тому гіпотеза про нормальний розподіл ознаки не відхиляється.

е) Побудуємо довірчі інтервали для невідомих математичного сподівання a та середньоквадратичного відхилення σ з надійністю γ=0,95. Для невідомого a довірчій інтервал будуємо за результатами таблиці 1 ($\overline{x_в}$ = 21,1; $S=\sqrt{60{,}24}\approx 7{,}76$; $\sqrt{n}\approx 7{,}07$; $t_\gamma(0{,}95;50)=2{,}009$):

$$21{,}1-7{,}76\cdot\frac{2{,}009}{7{,}07}<a<21{,}1+7{,}7\cdot\frac{2{,}009}{7{,}07}.$$

Остаточно, $a\in(18{,}89;23{,}31)$ з надійністю γ=0,95.

Побудуємо довірчій інтервал для невідомого σ (табл..1). За таблицею χ-розподілу знаходимо $q(0{,}95;50)=0{,}21$, тому $7{,}76\cdot(1-0б21)<\sigma<7{,}76\cdot(1+0б21)$.

Остаточно, σ ∈(6,13;9,39) з надійністю γ=0,95.

Лінійна кореляція

Якщо з генеральної сукупності (X,Y) добута вибірка об'єму n, то вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y записуються наступним чином $\overline{y_x}=\overline{y}+r^*\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}(x-\overline{x})$, $\overline{x_y}=\overline{x}+r^*\frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*}(y-\overline{y})$, де $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x^*, σ_y^* - вибіркові середні та вибіркові середні квадратичні відхилення; r^* - вибірковий коефіцієнт кореляції, які обчислюються за формулами $\overline{x} = \frac{\sum n_x x}{n}$, $\overline{y} = \frac{\sum n_y y}{n}$, $\sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum n_x x^2}{n} - \overline{x}^2}$,

$\sigma_y^* = \sqrt{\frac{\sum n_y y^2}{n} - \overline{y}^2}$, $r^* = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^* \sigma_y^*}$, x, y, (x,y) – варіанти величин X, Y, (X,Y); n_x, n_y, n_{xy} - відповідно частоти варіант, для яких виконуються рівності $\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n$.

Рівняння прямих ліній регресії відображають залежність умовних математичних сподівань від заданих значень x та y. Для коефіцієнта кореляції має місце нерівність $|r| \leq 1$. Якщо величини X та Y незалежні, то $r = 0$. Якщо $r = 0$, то величини X та Y називаються некорельованими, але вони можуть бути залежними у випадках, коли їх розподіл відрізняється від нормального. При лінійній функціональній залежності X та Y $r = 1$ або $r = -1$. Тому вважають, що цей коефіцієнт при $|r| < 1$ характеризує ступінь тісноти лінійної ймовірнісної залежності між випадковими величинами X та Y.

Надалі розглядатимуться вибірки з рівновіддаленими варіантами, а двомірний статистичний розподіл вибірки задається у вигляді кореляційної таблиці:

$Y \backslash X$	…	x	$x + h_1$	…	n_y
…					
y		n_{xy}			n_y
$y + h_2$					
…					
n_x		n_x			n

У першому рядку та у першому стовпчику таблиці відповідно містяться варіаційні ряди величин X та Y , тобто зростаючі послідовності рівновіддалених варіант x та y. Останні рядок та стовпчик вказують відповідно частоти n_x, n_y варіант x та y. У правому нижньому куті вказано об'єм вибірки $n = \sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy}$. Решта клітинок таблиці містить частоти n_{xy} варіант (x,y).

Щоб уникнути обчислень з великими числами у варіантах, доцільно скористатися умовними варіантами $u = \frac{x - C_1}{h_1}$, $v = \frac{y - C_2}{h_2}$, де C_1, C_2 –

“фіктивні нулі” (або нові початки відліку) відповідно варіант x та y; h_1, h_2 - кроки варіант x та y. Надалі будемо приймати значення C_1, C_2, що відповідають найбільшому значенню частоти n_{xy} або знаходяться в околі цієї точки. Формули для $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u^*, σ_v^*, r^* набувають вигляду

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \quad \overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n}, \quad \sigma_u^* = \sqrt{\frac{\sum n_u u^2}{n} - \overline{u}^2}, \quad \sigma_v^* = \sqrt{\frac{\sum n_v v^2}{n} - \overline{v}^2},$$

$$r^* = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u^* \sigma_v^*}.$$

Обчисливши ці величини, можна визначити величини, що входять до рівнянь регресії за формулами:

$$\overline{x} = h_1\overline{u} + C_1, \overline{y} = h_2\overline{v} + C_2, \sigma_x^* = h_1\sigma_u^*, \sigma_y^* = h_2\sigma_v^*.$$

Оскільки r^* - вибірковий коефіцієнт кореляції, то виникає задача оцінки наскільки він відтворює корельованість величин X та Y генеральної сукупності (X,Y), тобто задача перевірки нульової гіпотези H_0 про рівність нулю коефіцієнта кореляції.

Ця задача розв’язується за наступним правилом. Для того, щоб для заданого рівня значущості α перевірити гіпотезу H_0 при конкуруючій гіпотезі H_1: $r \neq 0$, необхідно обчислити значення критерія $T = \frac{r^*\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^{*2}}}$.

По значенню α та кількості ступенів свободи $k=n-2$ знайти в таблиці критичних точок розподілу Стьюдента критичну точку $t_{кр}(\alpha, k)$ двобічної критичної області. Якщо $|T| > t_{кр}$, то гіпотезу H_0 відкидають; якщо $|T| < t_{кр}$, то гіпотезу H_0 приймають.

У випадку прийняття гіпотези H_1 (тобто кореляція між X та Y вважається суттєвою) наближений довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r має вигляд $r^* - u_\alpha \frac{1-r^{*2}}{\sqrt{n}} \le r \le r^* + u_\alpha \frac{1-r^{*2}}{\sqrt{n}}$,

де u_α - критична границя для нормального розподілу, що відповідає рівню значущості α ($\frac{1-\alpha}{2} = \Phi_0(u_\alpha)$, $\Phi_0(x)$ - функція Лапласа). При $n \geq 50$ можна прийняти $u_\alpha = 3$.

Приклад. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Y \ X	25	30	35	40	45	n_y
21	3	5	3	-	-	11
31	1	9	15	3	-	28
41	-	2	17	17	2	38
51	-	-	2	11	6	19
61	-	-	-	2	2	4
n_x	4	16	37	33	10	100

Розв'язання. Покладемо C_1=35 і C_2=41 та перерахуємо таблицю частот на умовні варіанти u та v. Тоді

v \ u	-2	-1	0	1	2	n_u
-2	3	5	3	-	-	11
-1	1	9	15	3	-	28
0	-	2	17	17	2	38
1	-	-	2	11	6	19
2	-	-	-	2	2	4
n_v	4	16	37	33	10	100

Знайдемо $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u^*, σ_v^*:

$$\overline{u} = \frac{4(-2) + 16(-1) + 37 \cdot 0 + 33 \cdot 1 + 10 \cdot 2}{100} = 0{,}29.$$

$$\overline{v} = \frac{11(-2) + 28(-1) + 38 \cdot 0 + 19 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{100} = -0{,}23.$$

$$\sigma_u^* = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 + 16 \cdot 1 + 33 \cdot 1 + 10 \cdot 4}{100} - 0{,}29^2} = 0{,}98,$$

$$\sigma_v^* = \sqrt{\frac{11 \cdot 4 + 28 \cdot 1 + 19 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{100} - 0{,}23^2} = 1{,}01.$$

Обчислення суми $\sum n_{uv} uv$, що входить до формули коефіцієнта кореляції, зручно виконати за допомогою наступної таблиці:

v \ u	-2	-1	0	1	2	U	$v \cdot U$
-2	-6 3	-5 5	0 3	-	-	-11	22
-1	-2 1	-9 9	0 15	3 3	-	-8	8
0	-	-2 2	0 17	17 17	4 2	19	0
1	-	-	0 2	11 11	12 6	23	23
2	-	-	-	2 2	4 2	6	12

$$\sum n_{uv}uv = 65.$$

По-перше, добутки частот n_{uv} на варіанту u, тобто $n_{uv}u$, записуємо у правих верхніх кутках клітинок, де розташовані значення частот n_{uv}. По-друге, знаходимо суми всіх чисел, що розташовані у правих верхніх кутках клітинок одного рядка і записуємо їх в клітинки відповідних рядків стовпчика “ U ”. По-третє, обчислюємо добуток $v \cdot U$ та записуємо його у відповідну клітинку “ $v \cdot U$ ”. Нарешті, складаємо всі числа стовпчика “ $v \cdot U$ ” і отримуємо суму $\sum n_{uv}uv$. Вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнює:

$$r^* = \frac{65 - 100 \cdot 0{,}29(-0{,}23)}{100 \cdot 0{,}98 \cdot 1{,}01} = 0{,}72.$$

Перехід до вихідних варіант дає наступні результати:

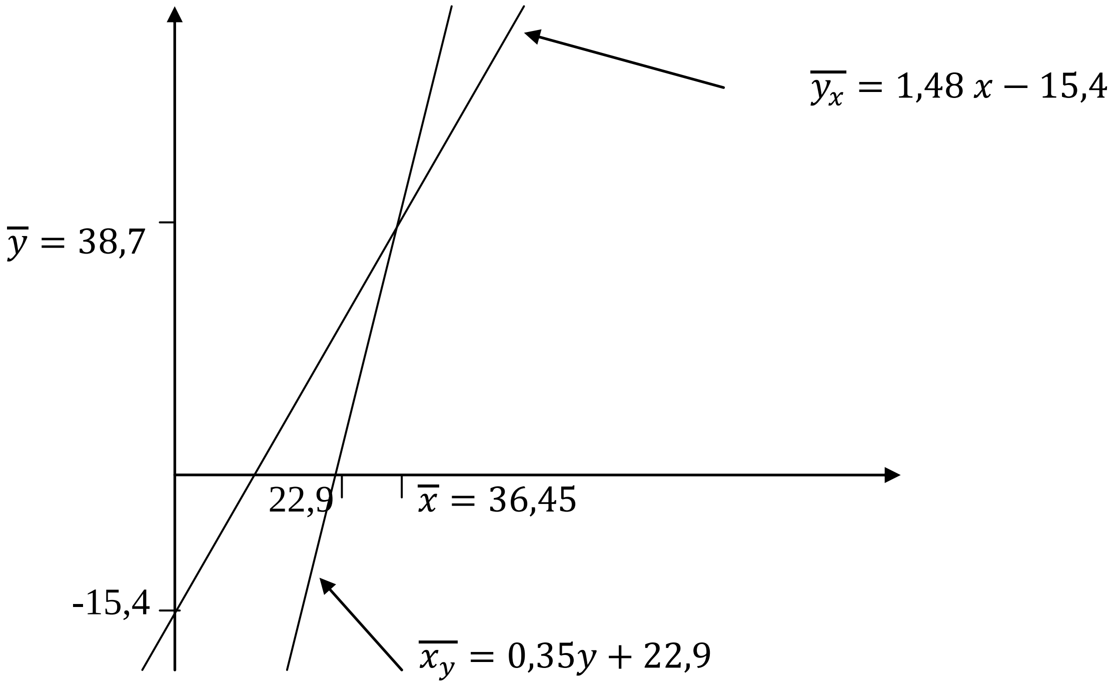
$$\overline{x} = 5 \cdot 0{,}29 + 35 = 36{,}45; \qquad \sigma_x^* = 5 \cdot 0{,}98 = 4{,}9;$$
$$\overline{y} = 10 \cdot (-0{,}23) + 41 = 38{,}7; \quad \sigma_y^* = 10 \cdot 1{,}01 = 10{,}1.$$

Таким чином, рівняння ліній регресії набувають наступного вигляду

$$\overline{y_x} = 38{,}7 + 0{,}72 \cdot \frac{10{,}1}{4{,}9}(x - 36{,}45), \qquad \overline{x_y} = 36{,}45 + 0{,}72 \cdot \frac{4{,}9}{10{,}1}(y - 38{,}7)$$

або, після спрощень, $\overline{y_x} = 1{,}48\,x - 15{,}4$; $\overline{x_y} = 0{,}35y + 22{,}9$.

На малюнку зображені ці лінії.



Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і знайденого вибіркового коефіцієнта кореляції $r^* = 0{,}72$ перевіримо гіпотезу H_0 при конкуруючій гіпотезі H_1: $r \neq 0$. Обчислимо

$$T = \frac{0{,}72\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0{,}72^2}} = 10{,}3.$$

Далі з таблиці Стьюдента для $\alpha = 0{,}05$ та k=100-2=98 знаходимо $t_{\text{кр}}(0{,}05{,}98)=1{,}665$. Так як $T = 10{,}3 > 1{,}665$, то гіпотезу H_0 відкидаємо, тобто величини X та Y є корельованими і для r маємо наступний наближений довірчий інтервал:

$$0{,}72-3\cdot\frac{1-0{,}72^2}{\sqrt{100}} \leq r \leq 0{,}72 + 3\cdot\frac{1-0{,}72^2}{\sqrt{100}} \qquad \text{або} \qquad 0{,}56 \leq r \leq 0{,}88.$$

Марковські ланцюги

Нехай маємо систему, що може знаходитися у станах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при цьому переходи системи із стану в стан можливі тільки у моменти $t_1, t_2, \ldots$ Будемо називати ці моменти кроками, а процес, що відбувається у системі, розглядатимемо як функцію цілочисельного аргументу (номера кроку).

Умовимося позначати через A_i^k подію, яка полягає у тому, що система за k кроків опинилася у стані A_i. При будь-якому k події $A_1^k, A_2^k, \dots, A_n^k$ утворюють повну групу подій. Тоді $p_1^k + p_2^k + \dots + p_n^k = 1$. Ці ймовірності називаються *абсолютними ймовірностями* станів.

Для будь-якого кроку існують ймовірності переходу системи з будь-якого стану у будь-який інший стан за один крок, а також ймовірності затримки системи у даному стані. Такі ймовірності називаються *перехідними* і задаються *стохастичною* матрицею

$P = \begin{pmatrix} p_{11}\ p_{12} \cdots p_{1n} \\ p_{21}\ p_{22} \cdots p_{2n} \\ \cdots \\ p_{n1}\ p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix}$, де p_{ij} – ймовірність переходу системи з стану i у стан j.

Матриця перехідних ймовірностей P разом з початковими ймовірностями p_j^0 $(j = 1,2, \dots, n)$ повністю задає *марковський ланцюг.*

Марковський ланцюг називається *однорідним*, якщо перехідні ймовірності не залежать від номера кроку, у протилежному випадку марковський ланцюг називається *неоднорідним*.

Розглянемо однорідний марковський ланцюг. Якщо абсолютні ймовірності визначені у векторній формі $p^{(k)} = \{p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k\}$, то $p^{(k)} = p^{(0)} P^k$. Ці рівняння відомі як рівняння Колмогорова-Чепмена.

Приклад. Розглянемо марковський ланцюг з двома станами,

$$p^{(0)} = (0{,}7\ \ 0{,}3),\ P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Визначимо $p^{(1)}, p^{(4)}, p^{(8)}$.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = P^2 P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix},$$

$$P^8 = P^4 P^4 = \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4281 & 0{,}5719 \\ 0{,}4274 & 0{,}5726 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$p^{(1)}$= (0,7 0,3) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$=(0,32 0,68),

$p^{(4)}$= (0,7 0,3) $\begin{pmatrix} 0,443 & 0,557 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}$=(0,7435 0,565),

$p^{(8)}$= (0,7 0,3) $\begin{pmatrix} 0,4281 & 0,5719 \\ 0,4274 & 0,5726 \end{pmatrix}$=(0,4279 0,5721).

Цікаво відмітити, що рядки матриці P^8 несуттєво відрізняються одна від одної. Окрім цього, вектор $p^{(8)}$ також несуттєво відрізняється від кожного рядка матриці P^8 . Цей результат пов'язаний з довгостроковими властивостями марковських ланцюгів, згідно з якими довгострокові абсолютні імовірності не залежать від $p^{(0)}$. Такі ймовірності називаються сталими.

Марковський ланцюг із неперервним часом

Нехай маємо ряд дискретних станів $A_1, A_2, \dots, A_n$, перехід системи з стану у стан може відбуватися у будь-який момент часу.

Позначимо через $p_i(t)$ ймовірність того, що в момент t система буде знаходитися у стані A_i $(i = 1,2, \dots, n)$. . Очевидно, що для будь-якого моменту *t* сума ймовірностей станів дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$$

так як події $A_1, A_2, \dots, A_n$ є повною групою.

Інтенсивністю переходу системи з стану i у стан j називається границя відношення ймовірності переходу системи за час Δt з стану i у стан j до довжини Δt:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \qquad ,$$

де $p_{ij}(\Delta t)$ - ймовірність того, що система, яка знаходилася в момент t у стані A_i за час Δt перейде з нього у стан A_j.

Запишемо систему рівнянь Колмогорова у матричному вигляді.

Матриця $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ називається *матрицею інтенсивностей* переходів марковського ланцюга з неперервним часом. Її властивості:

1) $\lambda_{ij} \geq 0$ *для* $i \neq j$;
2) $\lambda_{ij} \leq 0$ *для* $i = j$;

3) $\sum_j \lambda_{ij} = 0, i = 1,2,\dots,n.$

Знаючи матрицю інтенсивностей переходів або граф станів, можна визначити вектор ймовірностей станів

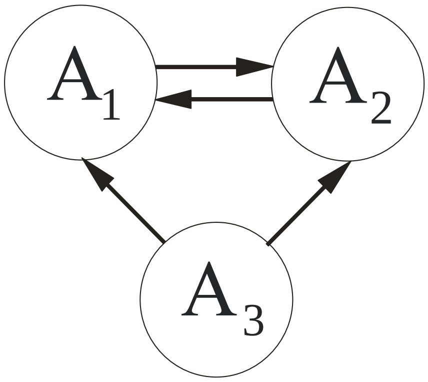
$$\overline{p(t)} = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$$

через матричне рівняння $\overline{p(t)}' = \overline{p(t)} \cdot \Lambda.$

Приклад. За матрицею інтенсивностей переходів побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Побудуємо граф станів.



Знайдемо стаціонарний розподіл ймовірностей.

Для цього запишемо диференціальні рівняння Колмогорова:

$$p_1'(t) = -5p_1(t) + p_2(t) + p_3(t),$$

$$p_2'(t) = 5p_1(t) - p_2(t) + p_3(t),$$

$$p_3'(t) = -2p_3(t).$$

Для знаходження стаціонарного розподілу досить покласти в останній системі всі похідні рівними нулю. Тоді

$$-5p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

$$5p_1 - p_2 + p_3 = 0,$$

$$-2p_3 = 0,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Розв'язком системи буде $(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; 0)$.

Процес загибелі та розмноження

Марковський неперервний ланцюг називається «процесом загибелі та розмноження», якщо його граф станів має вигляд, що представлений на рисунку, тобто всі стани можна витягнути в один ланцюг, в якому кожний стан зв'язаний прямим та оберненим зв'язком з кожним із сусідніх станів, а крайні стани A_0 та A_n – тільки з сусідніми станами.

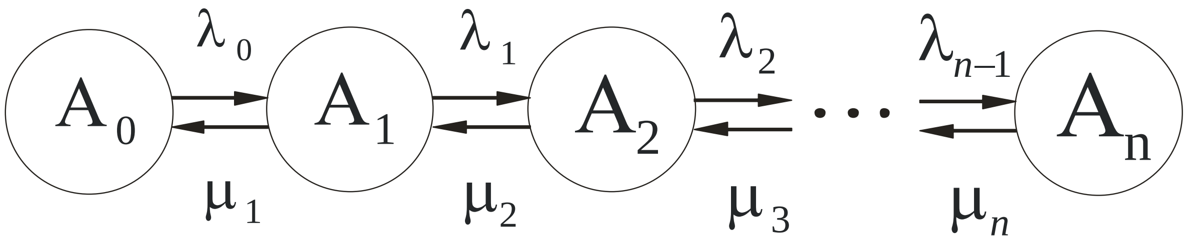


Схема загибелі та розмноження дуже часто зустрічається в самих різних практичних задачах, тому є сенс розглянути цю схему у загальному вигляді. У цій схемі $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ – інтенсивності переходів системи зліва направо, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – інтенсивності переходів системи справа на ліво.

Запишемо алгебраїчні рівняння для ймовірностей станів. Для стану A_0 маємо:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1.$$

Для стану A_1:

$$\lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2.$$

Враховуючи попередню залежність, можна скоротити справа та зліва члени $\lambda_0 p_0 \mu_1 p_1$ та отримати:

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2.$$

Аналогічні залежності для інших станів:

$$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3$$

…………..

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n.$$

Граничні ймовірності станів $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ у будь-якій схемі загибелі та розмноження задовільняють системі рівнянь

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1,$$

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2,$$

$$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3,$$

…………..

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} = \mu_n p_n.$$

Разом з нормуючою умовою $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

Будемо розв'язувати цю систему наступним чином. З першого рівняння виразимо p_1:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0,$$

З другого рівняння, з урахуванням p_1, виразимо p_2:

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}p_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0,$$

з третього рівняння:

$$p_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}p_0,$$

і загалом

$$p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}p_0.$$

Підставляючи всі ймовірності $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ у нормуючу умову, отримаємо

$$p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}p_0 + \cdots + \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}p_0 = 1,$$

звідки $$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \cdots + \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)^{-1}.$$

Інші ймовірності виражаються через p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0, p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0, p_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}p_0, \dots, p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}p_0.$$

Приклад. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою 5 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікета 90 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає 3 години. Знайти її граничні ймовірності.

Розв'язання. Маємо процес загибелі та розмноження. Стани системи:

A_0 – усі турнікети справні;

A_1 – один турнікет ремонтується, чотири справні;

A_2 – два турнікети ремонтується, три справні;

A_3 – три турнікети ремонтується, два справні;

A_4 – чотири турнікети ремонтується, один справний;
A_5 – всі турнікети ремонтуються.

Потоки виходу з ладу і відновлення турнікетів найпростіші, їх інтенсивності:

$$\lambda = \frac{1}{90} \text{ (відновл./год.)}, \quad \mu = \frac{1}{3} \text{ (відновл./год.)}.$$

Оскільки в стані A_0 працюють 5 турнікетів, кожен з яких має змогу відмовити з інтенсивністю λ, тому система переходить зі стану A_0 у стан A_1 з інтенсивністю $\lambda_0 = 5\lambda$; перехід з A_1 у A_2 має інтенсивність $\lambda_1 = 4\lambda$; аналогічно обчислюються інтенсивності $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Зі стану A_5 у стан A_4 система переходить з інтенсивністю $\mu_5 = 5\mu$, тому що відновлюються всі 5 турнікетів, перехід з A_4 у стан A_3 відбувається з інтенсивністю $\mu_4 = 4\mu$, аналогічно визначаються μ_3, μ_2, μ_1 за кількістю відновлених турнікетів. Обчислимо граничні імовірності:

$$p_0 = (1 + \frac{5\lambda}{\mu} + \frac{5\lambda \cdot 4\lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{5\lambda \cdot 4\lambda \cdot 3\lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} + \frac{5\lambda \cdot 4\lambda \cdot 3\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot 4\mu} +$$

$$\frac{5\lambda \cdot 4\lambda \cdot 3\lambda \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot 4\mu \cdot 5\mu})^{-1} = (1 + 5\rho + 10\rho^2 + 10\rho^3 + 5\rho^4 + \rho^5)^{-1},$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{30}$ - коефіцієнт завантаження системи.

Звідси $p_0 \approx 0{,}849,\ p_1 = 5\rho p_0 \approx 0{,}141,\ \ p_2 = 10\rho^2 p_0 \approx 0{,}009,$
$p_3 = 10\rho^3 p_0 \approx 3 \cdot 10^{-4},\ p_4 = 5\rho^4 p_0 \approx 10^{-5},\ p_5 = \rho^5 p_0 \approx 3 \cdot 10^{-8}.$

Перевірка $\sum_{i=0}^{5} p_i = 1.$

Одноканальна СМО з обмеженою чергою

Розглянемо найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – одноканальну систему (n=1), на яку поступає потік заявок з інтенсивність λ, інтенсивність обслуговування заявок позначимо через μ. Заявка, що поступає у момент, коли канал зайнятий, стає у чергу та очикує обслуговування.

У цьому пункті розглядається система з обмеженою кількістю місць у черзі (m). Граф такої системи має наступні стани:

A_0 – канал вільний;

A_1 – канал зайнятий, черги немає;

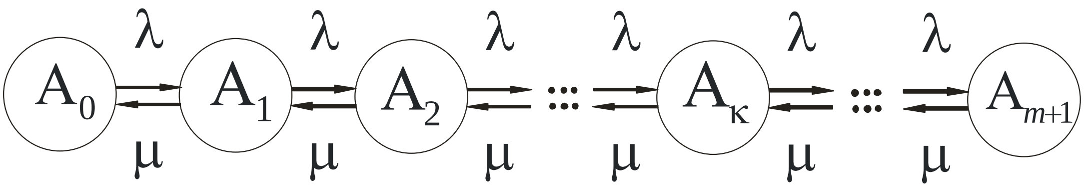
A_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть у черзі;

…………………………………………………

A_k – канал зайнятий, k-1 заявки стоять у черзі;

…………………………………………………

A_{m+1} – канал зайнятий, m заявок стоять у черзі.



Схема, що зображена на малюнку, є схемою загибелі та розмноження. Запишемо для неї граничні імовірності:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m+1})^{-1},$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \ldots, p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0, \text{ де } \ \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Звернемо увагу, що вираз у дужках першої формули є геометричною прогресією з першим членом 1 та знаменником ρ , тоді: $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0, \ldots,\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Ці формули є вірними при $\rho \neq 1$. Якщо $\rho = 1$, то сума геометричної прогресії дорівнює $m + 2$, $p_0 = \frac{1}{m+2}$.

Визначимо характеристики СМО:

1) ймовірність відмови $P_{відм} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$;

2) відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$;

3) абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q$;

4) середня кількість заявок, що знаходяться у черзі

$$\bar{r} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \cdots + (k-1) \cdot p_k + \cdots + m \cdot p_{m+1} =$$

$$\rho^2 p_0 (1 + 2\rho + \cdots + (k-1)\rho^{k-2} + \cdots + m\rho^{m-1}) = \frac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-mp))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)};$$

5) середня кількість заявок, що знаходяться під обслуговуванням

$$\overline{\varpi} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0);$$

6) середня кількість заявок, що знаходяться у СМО,

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\varpi};$$

7) середній час очікування заявки у черзі

$$\overline{t_{оч}} = \frac{1}{\rho\mu}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \ ;$$

8) середній час перебування заявки у системі

$$\overline{t_{пер}} = \overline{t_{оч}} + \frac{Q}{\mu}.$$

Приклад. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше трьох автомобілів одночасно (m=3). Якщо у черзі вже знаходиться три авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність $\lambda = 1$(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому 1,25 хвилин. Визначити основні характеристики системи.

Розв'язання. $\mu = \dfrac{1}{1,25} = 0,8; \quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{0,8} = 1,25.$

За формулами граничного розподілу

$$p_0 = \frac{1-1,25}{1-3,05} \approx 0,122, p_1 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,152,$$

$$p_2 = (1,25)^2 \cdot 0,122 \approx 0,191, p_3 = (1,25)^3 \cdot 0,122 \approx 0,238,$$

$$p_4 = (1,25)^4 \cdot 0,122 \approx 0,297.$$

Імовірність відмови $P_{відм} \approx 0,297.$

Відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{\hat{a}\hat{\imath}\ddot{a}\grave{\imath}\,.} = 0,703.$

Абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q = 0,703.$

Середня кількість авто у черзі

$$\bar{r} = \frac{1,25^2\left(1-1,25^3\left(3+1-3,75\right)\right)}{\left(1-1,25^5\right)\left(1-1,25\right)} \approx 1,56.$$

Додаючи до цієї величини середню кількість автомобілів, що знаходяться під обслуговування $\bar{\omega} = \dfrac{1,25-1,25^5}{1-1,25^5} \approx 0,88,$ отримуємо середню кількість машин, що знаходяться на території АЗС $\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} \approx 2,44.$

Середній час очікування автомобіля у черзі $\overline{t_{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1,56(хв).$

Середній час перебування заявки у системі $\overline{t_{пер}} = \overline{t_{оч}} + \frac{Q}{\mu} \approx 2,44.$

Багатоканальна СМО з відмовами

Для СМО з відмовами визначають наступні показники ефективності роботи:

A − абсолютна пропускна спроможність СМО (середня кількість заявок, яка обслуговує система за одиницею часу).

Q − відносна пропускна спроможність СМО (ймовірність обслуговування заявки, що надійшла)

$$Q = \frac{A}{\lambda}.$$

$P_{відм}$ − ймовірність відмови (ймовірність того, що заявка не буде обслугована), $P_{відм} = 1 - Q$.

$\bar{k}$ − середнє число каналів, що зайняті.

Нехай СМО має k каналів, вхідний потік має інтенсивність $\boldsymbol{\lambda}$, потік обслуговування одним каналом має інтенсивність μ. Пропонуємо стани СМО за кількістю зайнятих каналів:

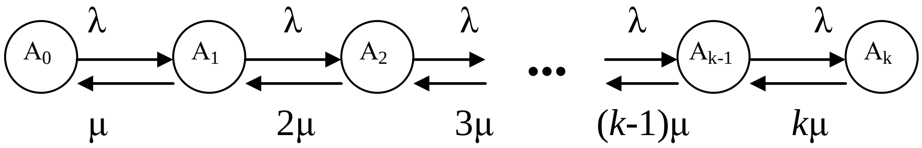
A_0 − всі канали вільні;

A_1 − один канал зайнятий;

A_2 − два канали є зайнятими;

…

A_k − всі канали зайняті.



Цей граф є графом загибелі і розмноження, для якого

$\lambda_{i-1} = \lambda$, $\mu_i = i\mu$ ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Граничний розподіл імовірностей станів можна обчислити, поклавши $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (ρ − коефіцієнт завантаження системи):

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!})^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0.$$

Отримані формули називаються формулами Ерланга. Спираючись на формули Ерланга, визначають показники ефективності СМО:

$A = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1} - p_k)$; $Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_k$; $P_{відм} = p_k$; $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_k)$Приклад. Диспетчерська служба має 5 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю 0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає 3 хвилини. Знайти абсолютну та відносну пропускні спроможності диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середню кількість зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати система, щоб ймовірність відмов не перевищувала 0,01?

Розв'язання. Знайдемо інтенсивність потоку обслуговування: $\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{3}$.

Коефіцієнт завантаження системи складає: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2,4.$

При $n = 5$ маємо:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{2,4}{1!} + \frac{(2,4)^2}{2!} + \frac{(2,4)^3}{3!} + \frac{(2,4)^4}{4!} + \frac{(2,4)^5}{5!}\right)^{-1} \approx 0,094,$$

$$p_5 = \frac{\rho^5}{5!} p_0 = \frac{(2,4)^5}{5!} 0,094 \approx 0,062.$$

За формулами знаходимо:

1) пропускну спроможність A=0,8(1-0,062)≈0,75;
2) відносну пропускну спроможність $Q = 1 - 0,062 = 0,938$;
3) імовірність відмови $P_{відм.}$ ≈0,062;
4) середня кількість зайнятих каналів $\bar{n}$=2,4·0,938≈2,251.

Диспетчерська служба в середньому має половину ліній зв'язку, які постійно зайняті.

Оскільки ймовірність відмови даної служби 0,062 перевищує 0,01, то кількість ліній зв'язку необхідно збільшити.

Припустимо, що ліній зв'язку стало 6. Тоді за формулами (3.3) маємо:

$$p_0=\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{6!}\right)^{-1}=$$

$$=\left(1+\frac{2,4}{1!}+\frac{(2,4)^2}{2!}+\frac{(2,4)^3}{3!}+\frac{(2,4)^4}{4!}+\frac{(2,4)^5}{5!}+\frac{(2,4)^6}{6!}\right)^{-1}\approx 0,092,$$

$$p_6=\frac{\rho^6}{6!}p_0=\frac{(2,4)^6}{6!}0,092\approx 0,024.$$

Знову $P_{відм.}$ ≈0,024 перевищує 0,01, тому кількість каналів знову збільшуємо:

$$p_0=\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{6!}+\frac{\rho^7}{7!}\right)^{-1}=$$

$$=\left(1+\frac{2,4}{1!}+\frac{(2,4)^2}{2!}+\frac{(2,4)^3}{3!}+\frac{(2,4)^4}{4!}+\frac{(2,4)^5}{5!}+\frac{(2,4)^6}{6!}+\frac{(2,4)^7}{7!}\right)^{-1}\approx$$ Таким

$$\approx 0,091, p_7=\frac{\rho^7}{7!}p_0=\frac{(2,4)^7}{7!}0,091\approx 0,008.$$

чином, при $n=7$ ймовірність відмови 0,008 не перевищує 0,01. Тому для забезпечення необхідної ймовірності відмови треба збільшити кількість ліній зв'язку до 7.

Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

Нехай система має k каналів обслуговування. Всі потоки найпростіші, інтенсивність потоку заявок λ, потоку обслуговування однієї заявки − μ. Коефіцієнт завантаження СМО $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$.

Позначимо відношення коефіцієнта завантаження до числа каналів системи черзі $\chi=\frac{\rho}{k}$. Граничний розподіл ймовірностей станів в СМО з необмеженою чергою існує тільки за умови:

$$\chi<1.$$

Позначимо через p_i граничну ймовірність того, що в системі зайняті i каналів ($0\leq i\leq k$), а через p_{k+r} − граничну імовірність того, що в системі зайняті k каналів і r заявок стоять в черзі на обслуговування. При $\chi<1$ граничний розподіл ймовірностей станів має вигляд:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{1-\chi})^{-1};$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0 \ (0 \le i \le k);$$

$$p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r \cdot k!} p_0 \ (r \ge 1).$$

Виходячи з того, що черга в СМО необмежена, кожна заявка згодом буде обслугована, тому очевидним є співвідношення:

$$P_{відм} = 0; \ Q = 1; \ A = \lambda Q = \lambda.$$

Крім розглянутих в попередній задачі для даної СМО обчислюються такі показники ефективності:

1) $\bar{z}$ – середнє число заявок СМО (усі заявки, і такі, що обслуговуються, і такі, що стоять у черзі);
2) $\bar{r}$ – середнє число заявок у черзі;
3) $\overline{t_{сист}}$ – середній час перебування заявки в системі (як у черзі, так і під обслуговування);
4) $\overline{t_{чер}}$– середній час перебування заявки у черзі.

Вказані показники ефективності обчислюються за формулами:

$\bar{r} = \frac{\rho^{k+1} \cdot p_0}{k \cdot k!(1-\chi)^2}$; $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}$,; $\overline{t_{сист}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}$; $\overline{t_{чер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$.

Приклад. Квиткові каси обслуговуються k касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касирів зайнятими ; середню кількість пасажирів у черзі за квитками; середню кількість пасажирів у касах; середній час перебування пасажирів у черзі; середній час перебування пасажирів у касах.

Розв’язання. Нехай $n = 5, \lambda = 20, t = 12$. Розглядаємо квиткові каси як багатоканальну СМО з необмеженою чергою. Інтенсивність потоку заявок $\lambda = 20$(пас/год). Інтенсивність потоку обслуговування однієї заявки $\mu = \frac{1}{t} = \frac{60}{12} = 5$ (1/год). Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4.$ Відношення коефіцієнта завантаження до кількості каналів $\chi = \frac{\rho}{n} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1,$ таким чином для даної системи існує граничний розподіл ймовірностей станів. За формулами (3.9) обчислюємо ці імовірності:

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{5\times5!}\cdot\frac{1}{1-\chi}\right]^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+...+\frac{4^5}{5!}+\frac{4^6}{5\cdot5!}\cdot\frac{1}{1-0,8}\right]^{-1}=0,013,$$

$$p_1=\frac{\rho}{1!}p_0=0,052;\, p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0=0,104;\, p_3=\frac{\rho^3}{3!}p_0=0,139;$$

$$p_4=\frac{\rho^4}{4!}p_0=0,139;\, p_5=\frac{\rho^5}{5!}p_0=0,111.$$

Імовірність того, що пасажир застане всіх касирів зайнятими

$$P_{çàí.}=p_5+p_6+p_7+...=1-\left(p_0+p_1+p_2+p_3+p_4\right)=$$
$$=1-\left(0,013+0,052+0,104+0,139+0,139\right)=0,553.$$

Показники ефективності роботи СМО:

1) середня кількість пасажирів у черзі $\bar{r}=\dfrac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!(1-\chi)^2}=\dfrac{4^6\cdot0,013}{5\cdot120(1-0,8)^2}=2,218,$

2) середній час перебування пасажира у черзі $\bar{t}_{î÷.}=\dfrac{\bar{r}}{\lambda}=\dfrac{2,218}{20}=0,110$ (год)=6,654(хв),

3) середня кількість зайнятих кас $\bar{z}=\rho=4,$

4) середня кількість пасажирів у касах $\bar{k}=\bar{r}+\bar{z}=2,218+4=6,218.$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ КУРСОВОЇ РОБОТИ

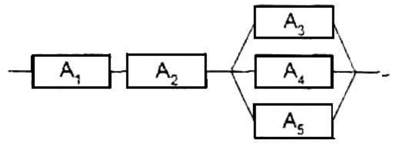
Варіант 1

1. Будинки мікрорайону обслуговуються бригадою, що складається з 5 електромонтажників V розряду та 3 електромонтажників VI розряду. На виклик виїжджає бригада з 4 осіб, яка комплектується випадковим чином. Знайти ймовірність того, що на виклик виїде 2 електромонтажники V розряду та 2 електромонтажники VI розряду.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні:

$p(A_1)=p(A_2)=0{,}1$, $p(A_4)=p(A_3)=p(A_5)=0{,}2$

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. На склад електронної техніки системні блоки поступають від 3 фірм у співвідношенні 3:4:3. Ймовірність поставки бракованого виробу від кожної фірми складає відповідно 0,01, 0,05, 0,02. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний системний блок буде бракованим.

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що при 1000 вимірюваннях буде допущено не більше двох похибок?

5. Знайти ймовірність того, що із 400 виробів, які виготовлено на заводі, 80 вищого гатунку. Відомо, що ймовірність кожного виробу мати виший гатунок дорівнює 0,2.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини *X*- кількість електромонтажників V розряду, що виїжджає на виклик. Знайти *M*(*X*), *D*(*X*).

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin x, x\in(0;\pi), \\ 0, x\in(0;\pi); \end{cases}$

Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*), $\sigma(x)$.

8. Довжина деталі, що виточується на станку, підкоряється нормальному закону розподілу *N*(7см,2см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитись в інтервалі (6.5см,8см).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} 3e^{-(3x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\in(0;\infty), \vee y\notin(0;\infty) \end{cases}$

Знайти: *F*(*x*,*y*), *M*(*X*), *M*(*Y*), *D*(*X*), *D*(*Y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
21 29 20 19 21 39 28 21 19 10 16 37 31 14 18 27 26 21 32 19 12 24 27 18 14 10 37 24 12 13 32 26 18 12 23 24 17 30 23 10 11 36 17 10 22 16 26 22 35 16	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	3	3	-	-	-	-	6
18	1	5	4	-	-	-	10
21	-	2	8	35	4	-	49
24	-	-	5	10	5	1	21
27	-	-	-	4	5	5	14
n_x	4	10	17	49	14	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}2\ \ 0{,}8)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ переходів побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

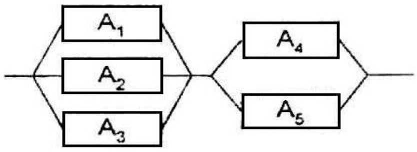
14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=80 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає ($100/k$) % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 2

1. При налагодженні роботи комп'ютерної мережі треба виконати 10 операцій. Послідовність операцій не має значення. Знайти ймовірність того, що перша та друга операції будуть виконані послідовно, перша за другою.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні:
$p(A_1)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$, $p(A_2)=p(A_3)=0{,}15$.
Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3.Кабельне обладнання виробляється на трьох місцевих заводах, які забезпечують 25%, 35% та 40% відповідно потреб фірми у своїй продукції. Ймовірність поставки бракованої партії обладнання з першого заводу складає 3%, другого - 2%, а з третього - 4%. Яка ймовірність того, що отримана бракована партія буде вироблена на першому заводі?

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,001. Яка ймовірність того, що при 2000 вимірюваннях буде допущено рівно три похибки?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 70 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Системи управління зв'язком поступають у виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,002. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількість поставлених систем управління зв'язком. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos x, x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ Знайти: C,$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром $\lambda = 1$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (1;2).

9. Дано: $f(x) = \begin{cases} Ce^{-(3x+2y)}, x \in (0;\infty) \wedge y \in (0;\infty), \\ 0, x \notin (0;\infty) \vee \notin (0;\infty). \end{cases}$

Знайти: $C,\ f_1(x),\ f_2(y), M(X), M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
17 36 34 38 31 10 25 23 29 26 11 27 17 26 21 34 30 35 17 32 29 16 27 11 19 31 27 12 32 18 33 40 6 30 33 24 19 24 19 21 22 24 19 21 13 14 16 7 23 25	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	4	9	14	19	24	29	n_y
4	4	2	-	-	-	-	6
10	1	5	5	-	-	-	11
16	-	5	25	17	7	1	55
22	-	-	8	9	1	1	19
28	-	-	-	-	5	4	9
n_x	5	12	38	26	13	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)}=(0{,}3\ \ 0{,}7)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

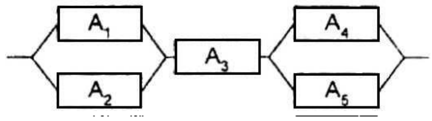
14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=19 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=6 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,75(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 3

1. Бригада комплектується з робітників першого, другого і т.д. до шостого розряду. Знайти ймовірність того, що бригада з трьох осіб не буде включати робітників з однаковими розрядами.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні:
$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}15$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}05$.
Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Першою фірмою виробляється 25% базової моделі процесора та 75% модифікованої, на другій - відповідно 30% та 70%, на третій - 20% та 80%. Знайти ймовірність того, що поставлений процесор буде: а) базовою моделлю, б) модифікованою, якщо поставки з кожної фірми рівноможливі.

4. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі - 0,06. Скільки деталей повинно бути у партії, щоб найвірогідніше число нестандартних деталей було рівним 65.

5. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде більше 70 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Випадкова величина X приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1 та p_2. Відомо, що p_1=0.2, $M(X)$=0,6, $D(X)$=0,64. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-x}, x\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Вага блока підкоряється нормальному закону розподілу $N(2m, 0.01m)$. Знайти ймовірність відхилення ваги блока від середнього на 200 кг.

9. Дано: $f(x)=\begin{cases} Cx\cos y, x\in(0;\frac{\pi}{2})\wedge y\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2})\vee y\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
33 28 16 39 21 28 15 32 15 26 10 23 20 26 28 16 21 18 24 14 26 9 18 20 27 19 14 24 8 23 22 19 12 6 30 19 31 12 36 17 5 22 23 22 24 27 24 13 29 7	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	23	28	33	38	43	48	n_y
10	3	2	-	-	-	-	5
16	2	4	6	-	-	-	12
22	-	5	9	35	6	-	55
28	-	-	6	11	2	-	19
34	-	-	-	3	3	3	9
n_x	5	11	21	49	11	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}4\ \ 0{,}6)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix}-5 & 5 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 5 & 0 & -5\end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

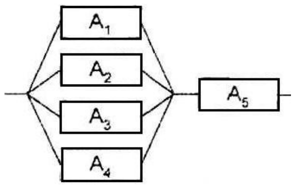
14. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,2 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,05?

15. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=20 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=9 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 4

1. Будівельний технікум випускає спеціалістів за 10 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається по 2 відмінника. Організація планує взяти до себе на роботу 11 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них будуть представлені всі спеціальності.

2. Схема електричного ланцюга наведена н малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементі наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}1$.
Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга якщо його елементи працюють незалежно.



3. Ймовірність збою при роботі за комп'ютером через електронне обладнання складає 2%. Якою повинна бути ймовірність збою за рахунок програмного забезпечення, щоб з ймовірністю 1/3 стверджувати, що збій виник саме через програмне забезпечення?

4. Ймовірність отримання бракованого діода дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 5 отриманих діодів буде рівно 2 бракованих?

5. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде у межах інтервалу (20,70) в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Закон розподілу випадкової величини X:

X	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$. Знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x) = \begin{cases} Ce^{-|x|}, x \in (-1;1), \\ 0, x \notin (-1;1). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу N(20;4). Дня якого відхилення від середнього значення ймовірності дорівнює 0,9.

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} C\cos(x+y), x \in (0,\frac{\pi}{4}) \wedge y \in (0,\frac{\pi}{4}), \\ 0, x \notin (0,\frac{\pi}{4}) \vee \notin (0,\frac{\pi}{4}). \end{cases}$ Знайти: C, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;
д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
19 26 24 21 20 22 26 25 34 17 26 15 28 27 29 9 8 6 31 23 17 28 25 24 26 30 29 28 17 21 19 32 13 33 31 12 24 12 19 24 29 28 15 35 14 32 36 17 16 26	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	12	17	22	27	32	37	n_y
3	4	3	-	-	-	-	7
13	1	6	4	-	-	-	11
23	-	9	30	12	4	-	55
33	-	-	10	5	4	1	20
43	-	-	-	1	2	4	7
n_x	5	18	44	18	10	5	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}4\ \ 0{,}6)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

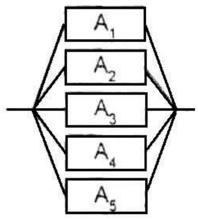
13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має k=4 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,2 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

Варіант 5

1. Технічне оснащення бригади комплектується з електричного обладнання 7 типів. Яка ймовірність того, що серед 5 перших відібраних приборів не буде обладнання 1 типу? Не буде обладнання 2 типу?



2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)$=0,2, $p(A_2)=p(A_3)$=0,3, $p(A_4)=p(A_5)$=0,4. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Дві фабрики поставляють на склад фірми кабельну продукцію. Перша фабрика допускає 1% браку. Оцінити допустимий відсоток браку на другій фабриці, щоб з ймовірністю не більшою за 3% стверджувати, що чергова партія продукції, яка поступила на склад, є бракованою. Поставки з фабрик рівноможливі.

4. Ймовірність отримання бракованого діода дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 5 отриманих діодів буде не більше 2 бракованих.

5. Знайти ймовірність того, що серед 200 випускників будівельного технікуму буде 20 відмінників, якщо відомо, що ймовірність отримати диплом з відзнакою дорівнює 0,1.

6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром $\lambda = 1$. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin^2 x, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Довжина деталі, що виточується на станку, підкоряється нормальному закону розподілу *N*(6см, 1см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (5.5см,6.5см).

9. Дано: $f(x)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty) \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty) \end{cases}$

Знайти: $F(x,y)$, $M(X)$, $D(X)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
22 23 5 27 10 31 14 15 11 24 26 13 22 22 21 14 13 23 21 20 20 22 21 22 23 38 29 18 40 39 16 26 18 18 34 25 36 17 27 39 27 25 23 30 19 17 23 36 22 14	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	14	18	22	26	30	34	n_y
20	2	3	1	-	-	-	6
25	2	7	1	-	-	-	10
30	-	9	20	16	-	-	45

35	-	3	15	9	2	-	29
40	-	-	-	1	6	3	10
n_x	4	22	37	26	8	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0,6\ \ 0,4)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

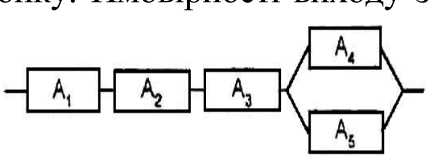
14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,75(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=70 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 6

1. У відділ, що складається з 6 програмістів, прийшли на практику 2 студенти. Для виконання поставленої задачі навмання призначають 4 особи. Яка ймовірність того, що серед них виявиться один практикант?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні:



$p(A_1)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}15$, $p(A_2)=p(A_3)=0{,}05$.

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. На завод, що виготовляє електронне обладнання, поступають транзистори з трьох комбінатів у співвідношенні 2:2:6. Ймовірність поставки бракованої партії транзисторів з першого комбінату складає 0,1, з другого - 0,1, з третього - 0,05. Знайти ймовірність того, що нова партія буде задовольняти стандарту.

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,001. Яка ймовірність того, що при 1000 вимірюваннях буде допущено більше двох похибок?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 50 в партії із навмання взятих 12000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,006.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини X- кількість студентів у сформованій команді. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos^2 x, x\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром λ = 2. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;2).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: $F(x,y)$, $M(X)$, $D(X)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
23 22 23 21 27 26 33 13 15 24 20 19 23 18 22 21 13 15 21 12 26 19 25 18	0,99

17 19 21 28 6 27 25 23 17 19 8 7 23 9 29 22 23 21 24 32 30 29 24 17 15 12	

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	3	13	23	33	43	53	n_y
14	5	4	2	-	-	-	11
17	3	9	10	3	-	-	25
20	-	5	28	12	3	-	48
23	-	-	6	3	2	1	12
26	-	-	-	-	1	3	4
n_x	8	18	46	18	6	4	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}7 \;\; 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=23 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=8 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

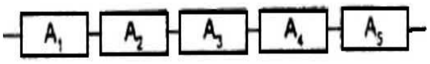
15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=3 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз.

Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,70(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 7

1. При обладнанні приміщення треба виконати 10 операцій. Послідовність операцій не має значення. Знайти ймовірність того, що перша, друга та третя операції будуть виконані послідовно, одна за одною.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні:



$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}1$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Три заводи забезпечують будівництво електричним обладнанням у співвідношенні 20%, 30%. 50% відповідно. Ймовірність того, що партія обладнання буде бракованою для першого заводу складає 5%, другого - 4%, третього - 1%. Яка ймовірність того, що отримана бракована партія була виготовлена на третьому заводі.

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що при 1000 вимірюваннях буде допущено рівно 4 похибки?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде більше 70 в партії із навмання взятих 12000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,007.

6. Навігаційна система поставляється на виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,002. Побудувати закон розподіли випадкової величини X — кількість поставлених навігаційних систем. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7.Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin x, x\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Вага конструкції підкоряється нормальному закону розподілу N(3m,0.05m). Знайти ймовірність відхилення ваги конструкції від середнього значення на

200кг.

9.Дано: $f(x)=\begin{cases} Cye^{-2x}, x\in(0;1)\wedge y\in(0;1), \\ 0, x\notin(0;1)\vee y\notin(0;1). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
24 23 20 28 32 28 12 19 18 40 17 39 38 22 24 23 31 22 30 23 15 14 24 30 23 12 34 27 28 22 13 11 24 8 24 26 19 7 24 27 22 29 24 18 26 25 24 15 20 25	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \\ X	3	8	13	18	23	28	n_y
30	6	4	2	-	-	-	12
32	1	12	7	3	-	-	23
34	-	8	30	8	2	-	48
36	-	-	4	4	2	1	11
38	-	-	-	-	1	5	6
n_x	7	24	43	15	5	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}8\ \ 0{,}2)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

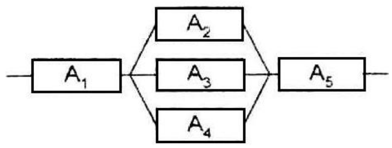
14. Диспетчерська служба має k=5 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,5 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

15. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=21 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=6 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 8

1. Бригада комплектується з електриків першого, другого і т.д. до шостого розряду. Знайти ймовірність того, що бригада з трьох осіб буде включати двох робітників з однаковими розрядами.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу кого елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}1$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$.



Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Першим заводом випускається 40% процесорів 1 типу та 60% процесорів 2 типу, а другим відповідно - 40% та 60%. Знайти ймовірність того, що поставлений на склад черговий процесор буде: а)1 типу, б)2 типу, якщо поставки з кожного заводу рівноможливі.

4. Нестандартна деталь виготовляється з ймовірністю 0,04. Чому дорівнює найвирогідніше число нестандартних деталей серед 100 виготовлених?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (50,70), якщо досліджується партія із навмання взятих 12000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Закон розподілу випадкової величини

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y=X^2$, знайти $M(X)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos x, x\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу $N(0;5)$. Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,8.

9.Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Cxe^{-y}, x\in(0,1)\wedge y\in(0,1), \\ 0, x\notin(0,1)\vee y\notin(0,1). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
26 25 27 9 10 11 12 23 28 24 13 20 19 24 22 26 27 28 16 19 24 26 30 5 21 26 22 12 17 25 26 7 24 9 31 28 34 13 18 23 18 23 24 25 26 18 26 22 29 13	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha=0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
X							

Y	10	20	30	40	50	60	n_y
12	3	1	-	-	-	-	4
17	1	9	7	1	-	-	18
22	-	4	23	12	3	-	42
27	-	-	11	8	4	1	24
32	-	-	4	3	3	2	12
n_x	4	14	45	24	10	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}3\ \ 0{,}7)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix}-14 & 7 & 7\\ 3 & -3 & 0\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

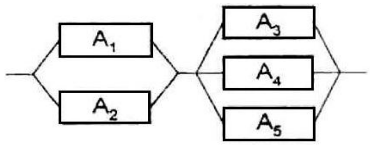
14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,7 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

Варіант 9

1. Будівельний технікум випускає спеціалістів за 10 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається по 2 відмінники. Організація планує взяти до себе на роботу 10 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них буде представлена спеціальність «оператор ЕОМ»?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$, $p(A_2)=p(A_3)=0{,}15$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. В обладнанні приміщення беруть участь бригади електриків та слюсарів, при цьому їх вклади рівноправні. Ймовірність браку за рахунок бригади електриків складає 0,01. Якою повинна бути ймовірність помилки бригади слюсарів, щоб з ймовірністю 1/3 стверджувати, що брак допущений бригадою слюсарів?

4. Ймовірність отримання бракованого конденсатора дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед 6 отриманих конденсаторів буде рівно 2 бракованих?

5. Знайти ймовірність, що серед 500 процесорів, які вироблено на заводі, 20 мають контролер пам'яті на дисках. Статистика свідчить, що ймовірність мати контролер пам'яті на дисках дорівнює 0,1.

6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром $\lambda = 2$. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити $M(X)$, $D(X)$.

7.Дано: $f(x)\begin{cases} Ce^{-2x}, x \in (0;\infty), \\ 0, x \notin (0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Довжина деталі, що виточується на станку, підкоряється нормальному закону розподілу N(8см, 1см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (7,8см, 8,5см).

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} Cy\cos 2x, x \in (0;\frac{\pi}{4}) \wedge \in (0;\frac{\pi}{4}), \\ 0, x \notin (0;\frac{\pi}{4}) \vee y \notin (0;\frac{\pi}{4}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;
д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
40 17 24 25 23 26 20 34 12 26 24 14 26 29 22 16 27 20 24 15 19 21 22 23 15 16 26 9 10 14 34 14 33 23 26 31 19 36 27 19 14 18 24 27 30 32 12 26 18 26	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	5	12	19	26	33	40	n_y
10	4	3	-	-	-	-	7
20	-	5	6	-	-	-	11
30	-	6	17	4	-	-	27
40	-	-	9	25	2	1	37
50	-	-	-	4	7	7	18
n_x	4	14	32	33	9	8	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}6\ \ 0{,}4)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

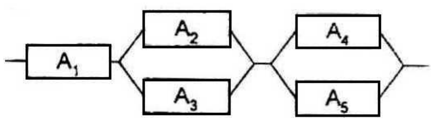
14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=80 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 10

1. Комп'ютерна мережа комплектується з електронного обладнання 7 типів. Яка ймовірність того, що серед 5 перших відібраних машин не буде ні 1, ні 2 типів?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}15$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}05$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. При проведенні електромонтажних робіт перша бригада допускає 2% браку. Оцінити допустимий відсоток браку для другої бригади , щоб з ймовірністю не більшою за 3% стверджувати що брак буде мати місце. Ймовірності виконання електромонтажних робіт обома бригадами однакові.

4. Ймовірність отримання бракованого резистора дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед 6 отриманих резисторів буде не більше двох бракованих?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 60 в партії із навмання взятих 11000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Випадкова величина X приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1 та p_2.

Відомо, що x_1=-1, $M(X)$=0,6, $D(X)$=0,64. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-2|x|}, x\in(-1{,}1), \\ 0, x\notin(-1{,}1). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром $\lambda=3$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;2).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Cx\sin y, x\in(0;\frac{\pi}{2})\wedge y\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2})\vee y\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
13 14 23 33 25 12 13 29 22 10 11 12 21 23 39 23 25 27 20 25 18 19 26 14 25 17 28 26 21 25 7 35 26 22 16 32 17 24 24 19 24 18 20 21 28 26 18 21 32 26	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha=0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	10	20	30	40	50	60	n_y
12	5	4	2	-	-	-	11
17	3	9	10	3	-	-	25

22	-	5	28	12	3	-	48
27	-	-	6	3	2	1	12
32	-	-	-	-	1	3	4
n_x	8	18	46	18	6	4	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}7\ \ 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

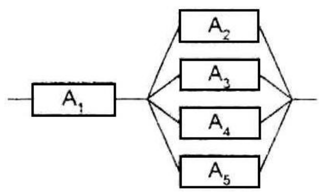
14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=20 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=5 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 11

1. Серед 4 комп’ютерів 1 типу та 4 комп’ютерів 2 типу випадково вибираються 5 машин для побудови комп’ютерної мережі. Яка ймовірність того, що мережу утворять 2 машини 1 типу та 3 машини 2 типу?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементі наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$.



Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Налагодження електронного обладнання може бути виконано першою, другою або третьою бригадами. Ймовірність виконання роботи цими бригадами знаходяться у співвідношенні 3:5:2. Ймовірність успішного виконання роботи першою бригадою складає 0,9, другою - 0,8, третьою - 0,95. Знайти ймовірність успішного виконання завдання.

4. Робітник допускає брак в роботі з ймовірністю 0,02. Яка ймовірність , що при виконанні 100 операцій буде допущено не більше однієї помилки?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде більше 80 в партії із навмання взятих 11000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,002.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини *X* - кількість комп'ютерів 1 типу, що задіяні у побудові комп'ютерної мережі. Знайти *M*(*X*), *D*(*X*).

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin^2 2x, x\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*), $\sigma(X)$.

8. Вага блоку підкоряється нормальному закону розподілу *N*(3m,0,04m). Знайти ймовірність відхилення ваги від середнього значення на 300кг.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Cxe^{-y}, x\in(0;1)\wedge y\in(0;1), \\ 0, x\notin(0;1)\vee y\notin(0;1). \end{cases}$

Знайти: *C*, *F*(*x*,*y*), *M*(*X*), *M*(*Y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
11 29 20 19 21 29 28 21 19 10 16 37 31 24 18 27 26 21 32 19 22 24 37 18 14 10 37 24 12 13 33 26 18 12 23 24 27 30 13 10 11 36 17 10 32 16 26 22	0,99

35 16	

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	12	16	20	24	28	32	n_y
11	3	3	-	-	-	-	6
21	1	5	4	-	-	-	10
31	-	2	8	35	4	-	49
41	-	-	5	10	5	1	21
51	-	-	-	4	5	5	14
n_x	4	10	17	49	14	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}2\ \ 0{,}8)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

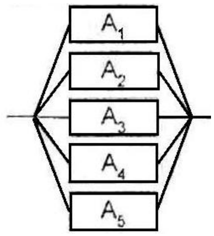
14. Диспетчерська служба має k=4 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,4 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

15. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=23 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=7 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 12

1. При проведенні проектних робіт необхідно розробити 10 проектів, при цьому послідовність виконання робіт не принципова. Знайти ймовірність того, що перший та третій проект будуть виконані послідовно, один за другим.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку Ймовірності виходу з ладу його елементі наступні: $p(A_1)$=0,3, $p(A_2)=p(A_3)$=0,4, $p(A_4)=p(A_5)$=0,2. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо йог елементи працюють незалежно.



3. Комп’ютерна мережа фірми може бути налагоджена одним з трьох робітників. Ймовірності залучення до роботи кожного з них складають 25%, 35%, 40% відповідно. Система запрацює у строк у першому випадку з ймовірністю 0,9, у другому - 0,9, у третьому -0,8. Яка ймовірність того, що комп’ютерна мережа запущена у строк першим робітником?

4. Робітник допускає помилку при виконанні операції з ймовірністю 0,01. Яка ймовірність, що при виконанні 200 операцій 198 буде виконано без помилок?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (30,80) в партії із навмання взятих 12000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Система слідкування поставляється на виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,001. Побудувати закон розподіли випадкової величини X — кількість поставлених систем слідкування. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos^2 2x, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу $N(25;5)$. Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,85.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases}5e^{-(5x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty),\\ 0, x\notin(0;\infty)\vee\notin(0;\infty).\end{cases}$

Знайти: $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
27 36 34 38 31 12 35 23 29 26 13 27 17 26 21 34 30 35 27 32 19 16 27 11 19 31 27 22 37 18 33 20 6 30 33 24 13 24 19 21 12 24 19 21 13 24 16 7 23 25	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha=0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \\ X	1	6	11	16	21	26	n_y
22	4	2	-	-	-	-	6
27	1	5	5	-	-	-	11
32	-	5	25	17	7	1	55
37	-	-	8	9	1	1	19
42	-	-	-	-	5	4	9
n_x	5	12	38	26	13	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)}=(0{,}7\ \ 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

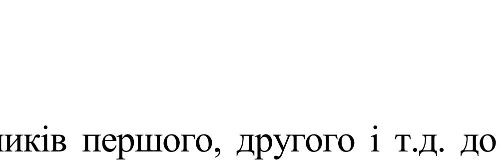
13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=80 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має k=5 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,3 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,04?

Варіант 13

1. Бригада комплектується з електромонтажників першого, другого і т.д. до шостого розряду. Знайти ймовірність того, що бригада з трьох осіб буде складатися з робітників одного розряду.



2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}15$, $p(A_2)=p(A_3)=0{,}05$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елемент працюють незалежно.

3. Першим заводом випускається 70% електронного обладнання найвищого гатунку, другим -80%. Інші частки складає електронне обладнання 1 гатунку. На склад фірми поступає чергова партія електронного обладнання. Знайти ймовірність того, що воно буде: а) найвищого гатунку, б) 1 гатунку, якщо поставки з кожної фабрики рівноможливі.

4. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі - 0,04. Скільки деталей повинно бути у партії , щоб найвірогідніше число нестандартних деталей було рівним 70?

5. Знайти ймовірність того, що серед 1000 випускників будівельного університету буде 70 відмінників, якщо відомо, що ймовірність отримати диплом з відзнакою дорівнює 0,1.

6. Випадкова величина X приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1 та p_2,. Відомо, що p_1=0,3, $M(X)$=0,7, $D(X)$=0,49. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x)\begin{cases} C\sin\dfrac{x}{2}, x\in(0;\pi), \\ 0, x\notin(0;\pi). \end{cases}$

Знайти: $C, M(X), D(X), \sigma(X)$.

8. Довжина деталі, що виточується на станку, підкоряється нормальному закону розподілу N(8см,2см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (7см,9см).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} 4e^{-(2x+2y)}, x\in(0;\infty)\vee y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: $f_1(x), f_1(y), F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
13 28 15 39 21 28 35 32 15 26 10 23 10 26 28 16 21 12 24 14 26 9 18 20 17 29 14 24 8 23 22 29 12 6 30 19 31 15 36 17 8 22 23 22 23 27 24 13 22 7	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	34	36	38	40	42	44	n_y
4	3	2	-	-	-	-	5
7	2	4	6	-	-	-	12
10	-	5	9	35	6	-	55
13	-	-	6	11	2	-	19
16	-	-	-	3	3	3	9
n_x	5	11	21	49	11	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}4\ \ 0{,}6)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,70(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

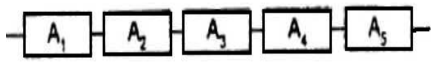
15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 14

1.Будівельний технікум випускає спеціалістів за 8 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається 2 відмінники. Організація планує взяти на роботу 9 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них буде представлена кожна спеціальність?

2.Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=0{,}2$, $p(A_3)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}1$

Знайти ймовірність виходу з лад всього ланцюга, якщо його елемент працюють незалежно.



3. Електротехнічне обладнання може бути з однаковими ймовірностями відремонтованим електриком 4 розряду та електриком 5 розряду. Ймовірність успіху при виконанні роботи для першого робітника складає 0,88. Якою повинна бути ймовірність успіху для другого робітника, щоб з ймовірністю 1/3 стверджувати, що робота успішно виконана робітником 4 розряду?

4. У бригаді 20% стажерів. Яка ймовірність того, що серед відібраних за табельними номерами 6 робітниками буде 2 стажери?

5. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде не більше 55 в партії Із навмання взятих 11500 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,004.

6. Закон розподілу випадкової величини X:

X	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y=X^2$. Знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos\frac{x}{2}, x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(0;\frac{1}{3})$.

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-(x+3y)}, x \in (0;\infty) \wedge y \in (0;\infty), \\ 0, x \notin (0;\infty) \vee y \notin (0;\infty). \end{cases}$ Знайти: $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
29 26 24 11 20 12 36 25 24 17 26 15 28 27 29 9 18 6 31 23 17 28 25 24 26 30 29 18 13 21 19 32 23 33 31 12 14 12 29 26 29 18 15 35 14 32 36 17 16 26	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	11	22	33	44	55	66	n_y
15	4	3	-	-	-	-	7
18	1	6	4	-	-	-	11
21	-	9	30	12	4	-	55
24	-	-	10	5	4	1	20
27	-	-	-	1	2	4	7
n_x	5	18	44	18	10	5	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}7\ \ 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $P = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

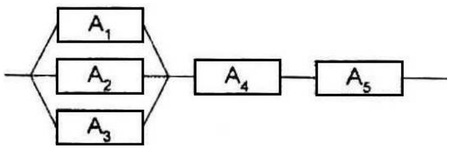
14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=22 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=5 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 15

1. Технічне оснащення бригади комплектується з інструментів 8 типів. Яка ймовірність того, що серед 5 відібраних інструментів не буде: а) 1 типу, б) 4 типу?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}1$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}2$.



Знайти ймовірність виходу з лад всього ланцюга, якщо його елемент працюють незалежно.

3. Збій у комп’ютерній системі може бути залагодженим з однаковими ймовірностями як першим, так і другим інженерами. Ймовірність успіху для першого складає 0,99. Якою повинна бути ймовірність успіху для другого, щоб з ймовірністю не меншою за 97% стверджувати, що робота була виконана успішно?

4. У бригаді 15% стажерів. Яка ймовірність того, що серед 4 відібраних робітників за табельними номерами буде не більше одного стажера?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 90 в партії із навмання взятих 12500 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,006.

6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром $\lambda = 1$. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити *M*(*X*), *D*(*X*).

7. Дано: $f(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{x}{2}}, x \in (0;\infty), \\ 0, x \notin (0;\infty), \end{cases}$ Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*), $\sigma(X)$.

8. Вага колони підкоряється нормальному закону розподілу N(3m,0,05m). Знайти ймовірність відхилення ваги колони від середнього значення на 300кг.

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} 2C\sin(x+y), x \in (0;\frac{\pi}{2}) \wedge y \in (0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x \notin (0;\frac{\pi}{2}) \vee y \notin (0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$ Знайти: *C*, *F*(*x*,*y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
12 23 5 17 12 31 14 15 11 22 26 13 22 22 11 14 13 23 27 20 20 22 21 22 23 38 29 28 20 39 36 26 18 18 24 25 36 17 27 29 27 25 23 33 19 17 23 36 22 14	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
X / Y	4	9	14	19	24	29	

							n_y
10	2	3	1	-	-	-	6
16	2	7	1	-	-	-	10
22	-	9	20	16	-	-	45
28	-	3	15	9	2	-	29
34	-	-	-	1	6	3	10
n_x	4	22	37	26	8	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}2\ \ 0{,}8)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

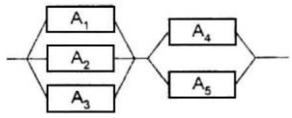
14. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,9 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,7 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

15. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=19 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=8 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 16

1. Житловий фонд мікрорайону обслуговується бригадою, що складається з 6 електромонтажників V розряду та 2 електромонтажників IV розряду. На виклик виїжджає бригада з 5 осіб, яка комплектується за табельними номерами. Знайти ймовірність того, що на виклик виїде 4 електромонтажники V розряду.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}15$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}05$.



Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. На склад фірми електронне обладнання поступає з 3 заводів у співвідношенні 5:3:2. Ймовірність поставки бракованого виробу з кожного заводу складає відповідно 0,1, 0,08, 0,09. Знайти ймовірність того, що поставлена партія буде бракованою.

4. Робітник допускає брак в роботі з ймовірністю 0,01. Яка ймовірність того, що при виконанні 200 операцій буде допущено більше двох помилок?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (40,80), якщо досліджується партія із навмання взятих 10000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,006.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини X - кількість електромонтажників V розряду, що виїжджає на виклик. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-\frac{1}{2}|x|}, x\in(-1;1), \\ 0, x\notin(-1;1). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу N(10;8). Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,95.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{C}{2}\sin(x+y), x\in(0;\dfrac{\pi}{4})\wedge y\in(0;\dfrac{\pi}{4}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{4})\vee y\notin(0;\dfrac{\pi}{4}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
33 22 23 31 27 26 33 13 15 14 20 19 23 12 22 21 33 15 21 12 26 19 22 18 17 19 21 28 83 27 25 23 17 13 9 7 23 9 29 22 23 21 34 32 30 29 24 14 15 12	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	12	17	22	27	32	37	n_y
20	5	4	2	-	-	-	11
25	3	9	10	3	-	-	25
30	-	5	28	12	3	-	48
35	-	-	6	3	2	1	12
40	-	-	-	-	1	3	4
n_x	8	18	46	18	6	4	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}5 \;\; 0{,}5)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

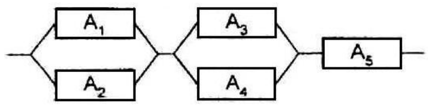
15. Диспетчерська служба має k=5 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,2 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,05?

Варіант 17

1. При налагодженні електричного обладнання треба виконати 8 операцій. Послідовність операцій не має значення. Знайти ймовірність того, що друга та третя операції будуть виконані послідовно, одна за одною.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_5)$=0,2, $p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)$=0,1.

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Електротехнічне обладнання виготовляється на трьох місцевих заводах, які забезпечують 20%, 30% та 50% відповідно потреб будівництва у своїй продукції. Ймовірність поставки бракованої партії обладнання з першого заводу складає 2%, з другого - 3%, з третього - 5%. Яка ймовірність того, що отримана бракована партія була вироблена на другому заводі?

4. Робітник допускає помилку при виконанні деякої операції з ймовірністю 0,01. Яка ймовірність того, що при виконанні 100 операцій 99 буде виконано без помилок?

5. Знайти ймовірність того, що із 400 виробів, які зроблено на фабриці, 80 вищого гатунку. Відомо, що ймовірність кожного виробу мати вищий гатунок дорівнює 0,2.

6. Система зв'язку поставляється на виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,001. Побудувати закон розподіли випадкової величини X — кількість поставлених систем зв'язку. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin^2\dfrac{x}{2}, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}),\\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}).\end{cases}$

Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*).

8. Довжина деталі що виточується на станку, підкоряється нормальному закону *N*(7см,2см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (6,5см,8см).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(2x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty),\\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty).\end{cases}$

Знайти: *C*, *F*(*x*,*y*), *M*(*X*), *M*(*Y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
34 23 20 18 32 28 12 19 18 40 12 39 38 22 24 23 21 22 30 23 15 24 24 30 23 12 34 22 28 22 12 11 24 18 24 26 19 17 24 27 22 21 24 18 26 21 24 15 20 25	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	3	13	23	33	43	53	n_y
12	6	4	2	-	-	-	12
17	1	12	7	3	-	-	23
22	-	8	30	8	2	-	48
27	-	-	4	4	2	1	11

32	-	-	-	-	1	5	6
n_x	7	24	43	15	5	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}7 \;\; 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=3 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,75(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

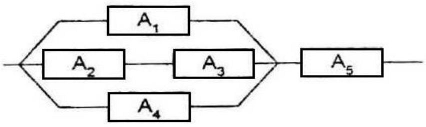
15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=80 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 18

1. Бригада комплектується з електриків першого, другого і т.д. до п'ятого розрядів. Знайти ймовірність того, що бригада з трьох осіб не буде включати робітників з однаковими розрядами.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=0{,}1$, $p(A_5)=0{,}2$.

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Першим заводом виробляється 30% базової моделі комп’ютера та 70% модифікованої, на другому - відповідно 35% та 65%, на третьому - 25% та 75%. Знайти ймовірність того, що поставлений комп’ютер буде: а) базовою моделлю, б) модифікованою, якщо поставки з заводів рівноможливі.

4. Нестандартна деталь виготовляється з ймовірністю 0,05. Чому дорівнює найвірогідніше число нестандартних деталей серед 200 виготовлених?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 70 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Випадкова величина X приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1 та p_2. Відомо, що p_2=0,3, $M(X)$=0,7, $D(X)$=0,49. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos^2\dfrac{x}{2}, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром $\lambda=1$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;2).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+2y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
16 25 27 8 10 11 12 29 28 24 13 20 19 14 22 26 27 28 16 19 14 26 30 5	0,99

21 16 22 12 27 25 26 9 24 9 30 28 34 13 18 23 28 23 24 25 26 28 26 22 29 13	

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	5	12	19	26	33	40	n_y
11	3	1	-	-	-	-	4
21	1	9	7	1	-	-	18
31	-	4	23	12	3	-	42
41	-	-	11	8	4	1	24
51	-	-	4	3	3	2	12
n_x	4	14	45	24	10	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}6 \;\; 0{,}4)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=24 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=9 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

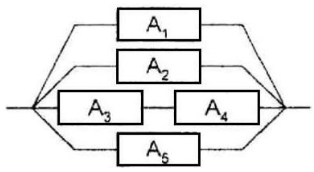
15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=3 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз.

Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,70(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 19

1. Будівельний технікум випускає спеціалістів за 9 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається по 2 відмінники. Організація планує взяти до себе на роботу 9 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них буде спеціальність «оператор ЕОМ»?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=0{,}1$, $p(A_5)=0{,}2$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Ймовірність збою у комп'ютерній мережі за рахунок електроніки складає 1%. Якою повинна бути ймовірність помилки за рахунок програмного забезпечення, щоб з ймовірністю 1/2 стверджувати, що збій виник саме через програмне забезпечення?

4. У бригаді 20% робітників з вищою освітою. Яка ймовірність того, що серед 5 відібраних буде 1 робітник з вищою освітою?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 70 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Закон розподілу випадкової величини

X	-1	0	1	2	3	4	5
P	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y = X^2 -1$, знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x) = \begin{cases} C\sin 3x, x \in (0;\frac{\pi}{3}), \\ 0, x \notin (0;\frac{\pi}{3}). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$.

8. Вага конструкції підкоряється нормальному закону розподілу N(2m,0,01m). Знайти ймовірність відхилення ваги конструкції від середнього значення на 200кг.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(x+2y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
20 17 24 25 23 22 20 34 12 26 14 14 26 29 32 16 27 20 24 25 19 21 22 23 25 16 26 29 10 14 34 14 23 23 26 31 15 36 27 19 14 18 24 21 30 32 11 26 18 16	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	1	6	11	16	21	26	n_y
4	4	3	-	-	-	-	7
7	-	5	6	-	-	-	11
10	-	6	17	4	-	-	27
13	-	-	9	25	2	1	37
16	-	-	-	4	7	7	18
n_x	4	14	32	33	9	8	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}2\ \ 0{,}8)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

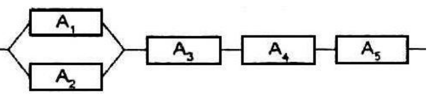
14. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,7 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,04?

15. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=23 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=8 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 20

1. Комп'ютерна мережа комплектується з 10 типів електронного обладнання. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних машин не буде машин: а) 3 типу, б) 4 типу.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)$=0,25, $p(A_4)=p(A_5)$=0,1. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Два заводи поставляють на склад фірми електронне обладнання . Перший завод допускає 2% браку. Оцінити допустимий відсоток браку на другому заводі, щоб з ймовірністю не більшою за 3% стверджувати, що чергова партія, що поступила на склад, є бракованою. Поставки з заводів рівноможливі.

4. У бригаді 10% робітників з вищою освітою. Яка ймовірність того, що серед 4 відібраних буде 2 робітника з вищою освітою?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (20,60), якщо досліджується партія із навмання взятих 10000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,005.
6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром λ=2. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos 3x, x\in(0;\frac{\pi}{6}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{6}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу (20;4). Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,9.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$.
10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:
а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;
б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;
в) знайти точкові оцінки числових характеристик;
г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;
д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
16 25 27 8 10 11 12 29 28 24 13 20 19 14 22 26 27 28 16 19 14 26 30 5 21 16 22 12 27 25 26 9 24 9 30 28 34 13 18 23 28 23 24 25 26 28 26 22 29 13	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha=0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	11	22	33	44	55	66	n_y

22	5	4	2	-	-	-	11
27	3	9	10	3	-	-	25
32	-	5	28	12	3	-	48
37	-	-	6	3	2	1	12
42	-	-	-	-	1	3	4
n_x	8	18	46	18	6	4	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}9 \ \ 0{,}1)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

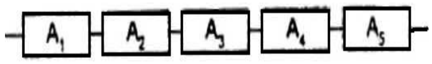
14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою *k*=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету *t*=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає *S*=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/*k)* % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має *k*=4 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає *t*=2,2 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

Варіант 21

1. У відділ, що складається з 5 програмістів, прийшли на практику 3 студенти. Навмання вибираються 5 робітників для виконання завдання. Яка ймовірність того, що серед них виявиться два практиканта?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_5)=0{,}1$, $p(A_2)=p(A_4)=0{,}2$, $p(A_1)=0{,}15$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. На електронне обладнання поступають транзистори з трьох комбінатів у співвідношенні 4:4:2. Ймовірність поставки бракованої партії транзисторів з першого комбінату складає 0,05, з другого - 0,04, з третього - 0,06. Знайти ймовірність того, що нова партія буде задовольняти стандарту.

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що при 2000 вимірюваннях буде допущено не більше однієї похибки?

5. Знайти ймовірність того, що серед 200 випускників будівельного технікуму буде 20 відмінників, якщо відомо, що ймовірність отримати диплом з відзнакою дорівнює 0,2.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини X — кількість студентів, що направляється на виконання завдання. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-3x}, x\in(0;\infty) \\ 0, x\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Довжина деталі що виточується на станку, підкоряється нормальному закону N(6см,1см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (3,5см,6,5см).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x+y), x\in(0;\dfrac{\pi}{2})\wedge y\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2})\vee y\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
32 23 5 27 20 31 14 13 11 24 26 13 12 22 21 14 23 23 21 20 10 22 21 21 23 38 29 18 10 39 26 26 18 18 24 25 36 17 27 31 27 25 23 30 19 17 13 36 22 14	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

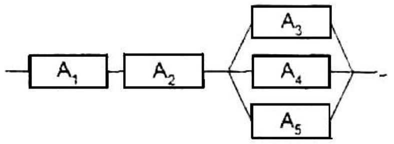
Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	34	36	38	40	42	44	n_y
12	3	3	-	-	-	-	6
17	1	5	4	-	-	-	10
22	-	2	8	35	4	-	49
27	-	-	5	10	5	1	21
32	-	-	-	4	5	5	14
n_x	4	10	17	49	14	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}3 \;\; 0{,}7)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а їде повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=70 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.



Варіант 22

1. При обладнанні приміщення треба виконати 8 операцій. Послідовність операцій не має значення. Знайти ймовірність того, що перша та четверта операції будуть виконані послідовно, одна за одною.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)$=0,15, $p(A_4)=p(A_5)$=0,2.
Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Три заводи забезпечують електронне виробництво резисторами у співвідношенні 20%, 30%, 50% відповідно. Ймовірність того, що партія резисторів буде бракованою для першого заводу складає 5%, другого - 3%, третього - 4%. Яка ймовірність того, що отримана бракована партія була виготовлена на третьому заводі.

4. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прибор, дорівнює 0,001. Яка ймовірність того, що при 1000 вимірюваннях буде допущено 3 похибки?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 50 в партії із навмання взятих 12000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,006.

6. Навігаційна система поставляється на виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,003. Побудувати закон розподіли випадкової величини X — кількість поставлених навігаційних систем. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-3|x|}, x\in(-1;1), \\ 0, x\notin(-1;1). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром λ = 2. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;2).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} C\sin(x+y), x\in(0;\frac{\pi}{2})\wedge y\in(0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{2})\vee y\notin(0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
37 36 34 38 31 10 25 23 19 26 11 17 17 26 22 34 30 35 27 32 29 16 37 11 19 31 27 12 32 18 33 40 26 30 33 24 19 24 19 21 22 14 19 21 13 14 16 27 23 25	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	12	16	20	24	28	32	n_y
30	4	2	-	-	-	-	6
32	1	5	5	-	-	-	11
34	-	5	25	17	7	1	55
36	-	-	8	9	1	1	19

38	-	-	-	-	5	4	9
n_x	5	12	38	26	13	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}8\ \ 0{,}2)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

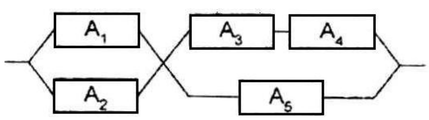
14. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=22 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=7 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,75(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=3 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 23

1. Бригада комплектується з електриків першого, другого і т.д. до п'ятого розрядів. Знайти ймовірність того, що бригада з трьох осіб буде включати двох робітників з однаковими розрядами.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=0{,}2$, $p(A_3)=p(A_4)=p(A_5)=0{,}1$.



Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. Першим заводом виробляється 20% процесорів 1 типу та 80% процесорів 2 типу, а другим - відповідно 30% та 70%. Знайти ймовірність того, що поставлена техніка буде: а) 1 типу, б) 2 типу, якщо поставки з кожного заводу рівноможливі.

4. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі - 0,08. Скільки деталей повинно бути у партії , щоб найвірогідніше число нестандартних деталей було рівним 58?

5. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде не більше за 70 в партії із навмання взятих 12000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,007.

6. Випадкова величина А приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1, та p_2. Відомо, що x_1=1, $M(X)$ =0,7, $D(X)$=0,49. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x) = \begin{cases} C\sin^2 3x, x \in (0; \frac{\pi}{3}), \\ 0, x \in (0; \frac{\pi}{3}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$.

8. Вага блоку підкоряється нормальному закону розподілу N(3т,0,05т), Знайти ймовірність відхилення ваги блоку від середнього значення на 200кг.

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, x \in (0;\infty) \wedge y \in (0;\infty), \\ 0, x \notin (0;\infty) \vee y \notin (0;\infty). \end{cases}$

Знайти: $F(x,y)$, $M(X)$, $D(X)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
23 21 16 39 21 27 15 32 15 26 10 33 20 26 28 16 21 12 24 14 26 19 18 20 27 19 14 21 8 23 22 13 12 26 30 19 11 12 36 17 15 22 23 22 24 27 14 13 29 7	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	3	8	13	18	23	28	n_y
14	3	2	-	-	-	-	5
17	2	4	6	-	-	-	12
20	-	5	9	35	6	-	55
23	-	-	6	11	2	-	19
26	-	-	-	3	3	3	9
n_x	5	11	21	49	11	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}6 \;\; 0{,}4)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

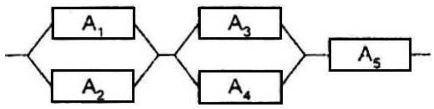
14. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв’язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,9 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,6 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв’язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв’язку. Оцінити, скільки ліній зв’язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

15. Квиткові каси обслуговуються k=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=19 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=5 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 24

1. Будівельний технікум випускає спеціалістів за 9 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається по 2 відмінники. Організація планує взяти до себе на роботу 9 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них буде спеціальність «оператор ЕОМ»?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності *виходу* з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_3)=0{,}1$, $p(A_2)=p(A_4)=0{,}2$, $p(A_5)=0{,}3$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. В обладнанні приміщення приймають участь бригади електриків та слюсарів, при цьому їх вклади рівноправні. Ймовірність браку за рахунок бригади електриків складає 0,02. Якою повинна бути ймовірність помилки бригади електриків, щоб з ймовірністю 1/3 стверджувати, що брак допущений бригадою слюсарів?

4. Ймовірність отримання бракованого діода дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед 6 отриманих грейдерів буде рівно 1 бракований.

5. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (50,80), якщо досліджується партія із навмання взятих 10000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Закон розподілу випадкової величини X:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y=X^2+1$, знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos^2 3x, x\in(0;\frac{\pi}{6}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{6}). \end{cases}$ Знайти: C,$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу $N(10;5)$. Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,8.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} 6C^{-2x+3y)}, x\in(0;\infty)\vee y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$ Знайти: $M(X)$,$M(Y)$, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
39 26 24 21 20 22 26 25 34 27 26 15 21 27 29 9 28 6 31 13 17 28 15 24 26 30 19 28 17 11 19 32 23 33 35 12 24 12 39 24 29 28 15 25 14 32 36 27 16 26	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	14	18	22	26	30	34	n_y
3	4	3	-	-	-	-	7
13	1	6	4	-	-	-	11
23	-	9	30	12	4	-	55
33	-	-	10	5	4	1	20
43	-	-	-	1	2	4	7
n_x	5	18	44	18	10	5	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}2 \;\; 0{,}8)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -14 & 7 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

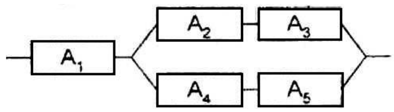
14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=70 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=3 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має k=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає t=2,5 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

Варіант 25

1. Технічне обладнання бригади комплектується з електричних інструментів 8 типів. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних інструментів не буде ні першого, ні восьмого типів?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)$=0,05, $p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=p(A_5)$=0,1. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють , незалежно.



3. При проведенні налагоджувальних робіт перша бригада допускає 1% браку. Оцінити допустимий відсоток браку для другої бригади , щоб з ймовірністю не більшою за 3% стверджувати, що брак буде мати місце. Ймовірності виконання налагоджувальних робіт обома бригадами однакові.

4. Ймовірність отримання бракованого кондиціонера дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед 5 отриманих кондиціонерів буде більше одного бракованого?

5. Знайти ймовірність, що серед 500 комп'ютерів, які вироблено на заводі, 20 мають додаткову комплектацію. Відомо, що ймовірність кожного комп'ютера мати додаткову комплектацію дорівнює 0,1.

6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром $\lambda = 1$. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити *M(X)*, *D*(*X*).

7. Дано: $f(x) = \begin{cases} C \sin x, x \in (0;\pi), \\ 0, x \notin (0;\pi). \end{cases}$

Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*), $\sigma(X)$,

8. Довжина деталі, що виточується на станку, підкоряється нормальному закону *N*(8см, 1см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (7,8см,8,5см).

9. Дано: $f(x,y) = \begin{cases} Cy\cos x, x \in (0;\frac{\pi}{2}) \wedge y \in (0;\frac{\pi}{2}), \\ 0, x \notin (0;\frac{\pi}{2}) \vee y \notin (0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, F(*x*,*y*), *M(X)*, M(*Y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
12 23 16 17 17 32 14 15 11 22 26 13 22 12 11 24 13 23 27 26 20 22 21 24 23 38 21 28 20 19 36 26 38 18 24 25 36 17 27 21 27 25 23 33 9 27 33 31 12 24	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x, y)							
X / Y	23	28	33	38	43	48	n_y

4	2	3	1	-	-	-	6
10	2	7	1	-	-	-	10
16	-	9	20	16	-	-	45
22	-	3	15	9	2	-	29
28	-	-	-	1	6	3	10
n_x	4	22	37	26	8	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}9\ \ 0{,}1)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

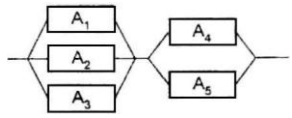
14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=3 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,70(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=80 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає ($100/k$) % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 26

1. Житловий фонд мікрорайону обслуговується бригадою, що складається з 4 електромонтажників V розряду та 2 електромонтажників IV розряду. На виклик виїжджає бригада з 6 осіб, яка комплектується за табельними номерами. Знайти ймовірність того, що на виклик виїде 4 електромонтажники V розряду.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}1$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}15$.



Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

3. На склад фірми електронне обладнання поступає з 3 заводів у співвідношенні 4:3:3. Ймовірність поставки бракованого виробу з кожного заводу складає відповідно 0,07, 0,08, 0,09. Знайти ймовірність того, що поставлена партія буде бракованою.

4. Робітник допускає брак в роботі з ймовірністю 0,01. Яка ймовірність того, що при виконанні 100 операцій буде допущено більше двох помилок?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (30,70), якщо досліджується партія із навмання взятих 10000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,004.

6. Для задачі №1 побудувати закон розподілу випадкової величини X - кількість електромонтажників V розряду, що виїжджає на виклик. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} Ce^{-\frac{1}{2}|x|}, x\in(-1;1), \\ 0, x\notin(-1;1). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу N(10;6). Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,95.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} \frac{C}{2}\sin(x+y), x\in(0;\frac{\pi}{4})\wedge y\in(0;\frac{\pi}{4}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{4})\vee y\notin(0;\frac{\pi}{4}). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;
д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
11 29 20 19 21 29 28 21 19 10 16 37 31 24 18 27 26 21 32 19 22 24 37 18 14 10 37 24 12 13 33 26 18 12 23 24 27 30 13 10 11 36 17 10 32 16 26 22 35 16	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:
а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	3	3	-	-	-	-	6
18	1	5	4	-	-	-	10
21	-	2	8	35	4	-	49
24	-	-	5	10	5	1	21
27	-	-	-	4	5	5	14
n_x	4	10	17	49	14	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}7 \;\; 0{,}3)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

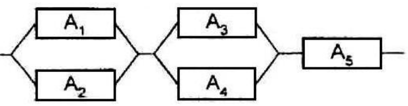
14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=21 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=7 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,80(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилин. Визначити основні характеристики системи.

Варіант 27

1. При налагодженні електричного обладнання треба виконати 7 операцій. Послідовність операцій не має значення. Знайти ймовірність того, що друга та третя операції будуть виконані послідовно, одна за одною.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_5)=0{,}2$, $p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=0{,}1$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Електротехнічне обладнання виготовляється на трьох місцевих заводах, які забезпечують 30%, 30% та 40% відповідно потреб будівництва у своїй продукції. Ймовірність поставки бракованої партії обладнання з першого заводу складає 2%, з другого - 3%, з третього - 4%. Яка ймовірність того, що отримана бракована партія була вироблена на третьому заводі?

4. Робітник допускає помилку при виконанні деякої операції з ймовірністю 0,01. Яка ймовірність того, що при виконанні 100 операцій 97 буде виконано без помилок?

5. Знайти ймовірність того, що серед 300 виробів, які зроблено на фабриці, 80 вищого гатунку. Відомо, що ймовірність кожного виробу мати вищий гатунок дорівнює 0,1.

6. Система зв'язку поставляється на виробництво до появи першої неякісної продукції. Ймовірність появи неякісної системи - 0,002. Побудувати закон розподіли випадкової величини X — кількість поставлених систем зв'язку. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin^2\dfrac{x}{2}, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$ Знайти: *C*, *M*(*X*), *D*(*X*).

8. Довжина деталі що виточується на станку, підкоряється нормальному закону *N*(6см,2см). Знайти ймовірність того, що довжина чергової деталі буде знаходитися в інтервалі (6,5см,8см).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(2x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: *C*, *F*(*x*,*y*), *M*(*X*), *M*(*Y*).

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
37 36 34 38 31 10 25 23 19 26 11 17 17 26 22 34 30 35 27 32 29 16 37 11 19 31 27 12 32 18 33 40 26 30 33 24 19 24 19 21 22 14 19 21 13 14 16 27 23 25	0,95

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	3	8	13	18	23	28	n_y
30	6	4	2	-	-	-	12
32	1	12	7	3	-	-	23
34	-	8	30	8	2	-	48
36	-	-	4	4	2	1	11
38	-	-	-	-	1	5	6

n_x	7	24	43	15	5	6	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}5 \;\; 0{,}5)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Диспетчерська служба має *k*=4 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає *t*=2,4 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

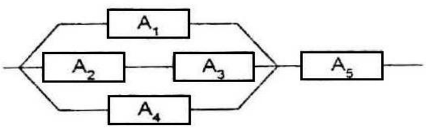
15. Квиткові каси обслуговуються *k*=3 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=20 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає *t*=6 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

Варіант 28

1. Бригада комплектується з електриків першого, другого і т.д. до п'ятого розрядів. Знайти ймовірність того, що бригада з чотирьох осіб не буде включати робітників з однаковими розрядами.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=0{,}1$, $p(A_5)=0{,}2$.

Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Першим заводом виробляється 40% базової моделі комп'ютера та 60%

модифікованої, на другому - відповідно 25% та 75%, на третьому - 25% та 75%. Знайти ймовірність того, що поставлений комп'ютер буде: а) базовою моделлю, б) модифікованою, якщо поставки з заводів рівноможливі.

4. Нестандартна деталь виготовляється з ймовірністю 0,04. Чому дорівнює найвірогідніше число нестандартних деталей серед 200 виготовлених?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 50 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,002.

6. Випадкова величина X приймає значення x_1 та x_2 з ймовірностями p_1 та p_2. Відомо, що p_2=0,2, $M(X)$=0,8, $D(X)$=0,48. Побудувати закон розподілу випадкової величини.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos^2\dfrac{x}{2}, x\in(0;\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, x\notin(0;\dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$

Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється показниковому закону розподілу з параметром $\lambda=1$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;3).

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+2y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
34 23 20 18 32 28 12 19 18 40 12 39 38 22 24 23 21 22 30 23 15 24 24 30 23 12 34 22 28 22 12 11 24 18 24 26 19 17 24 27 22 21 24 18 26 21 24 15 20 25	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;
б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;
в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
$Y \backslash X$	34	36	38	40	42	44	n_y
4	3	2	-	-	-	-	5
7	2	4	6	-	-	-	12
10	-	5	9	35	6	-	55
13	-	-	6	11	2	-	19
16	-	-	-	3	3	3	9
n_x	5	11	21	49	11	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}6\ \ 0{,}4)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

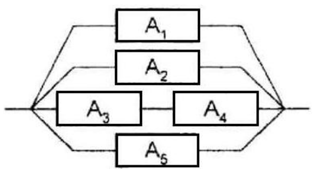
14. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою *k*=4 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету *t*=75 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає *S*=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає $(100/k)$ % своєї номінальної пропускної спроможності.

15. Диспетчерська служба має *k*=3 ліній зв'язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю λ=0,7 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає *t*=2,3 хвилин. Знайти абсолютну і відносну пропускну спроможність диспетчерської служби; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку. Оцінити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмов не перевищувала α=0,03?

Варіант 29

1. Будівельний технікум випускає спеціалістів за 8 спеціальностями. На кожній спеціальності випускається по 3 відмінники. Організація планує взяти до себе на роботу 9 відмінників навчання. Яка ймовірність того, що серед них буде спеціальність «оператор ЕОМ»?

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p(A_4)=0{,}1$, $p(A_5)=0{,}2$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Ймовірність збою у комп'ютерній мережі за рахунок електроніки складає 0,05%. Якою повинна бути ймовірність помилки за рахунок програмного забезпечення, щоб з ймовірністю 1/2 стверджувати, що збій виник саме через програмне забезпечення?

4. У бригаді 10% робітників з вищою освітою. Яка ймовірність того, що серед 5 відібраних буде 1 робітник з вищою освітою?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде не більше 60 в партії із навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

6. Закон розподілу випадкової величини

X	-1	0	1	2	3	4	5
P	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Y = X^2 - 1$, знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\sin 3x, x\in(0;\frac{\pi}{3}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{3}). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$.

8. Вага конструкції підкоряється нормальному закону розподілу N(2m,0,01m). Знайти ймовірність відхилення ваги конструкції від середнього значення на 100кг.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(x+2y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
39 26 24 21 20 22 26 25 34 27 26 15 21 27 29 9 28 6 31 13 17 28 15 24 26 30 19 28 17 11 19 32 23 33 35 12 24 12 39 24 29 28 15 25 14 32 36 27 16 26	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)

Y \ X	1	6	11	16	21	26	n_y
4	4	3	-	-	-	-	7
7	-	5	6	-	-	-	11
10	-	6	17	4	-	-	27
13	-	-	9	25	2	1	37
16	-	-	-	4	7	7	18
n_x	4	14	32	33	9	8	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}8 \;\; 0{,}2)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

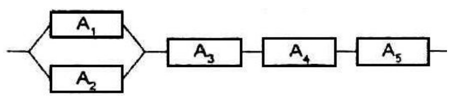
14. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=4 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,75(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилин. Визначити основні характеристики системи.

15. Вхід на станцію метрополітену обладнаний системою k=3 турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмовлень кожного турнікету – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного турнікету t=70 годин. При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілено за показниковим законом і в середньому складає S=2 годин. В початковий момент всі турнікети справні. Знайти середню пропускну спроможність системи турнікетів у відсотках від номінальної, якщо з виходом з ладу кожного турнікету система втрачає (100/k) % своєї номінальної пропускної спроможності.

Варіант 30

1. Комп'ютерна мережа комплектується з 12 типів електронного обладнання. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних машин не буде машин: а) 3 типу, б) 4 типу.

2. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}25$, $p(A_4)=p(A_5)=0{,}1$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.



3. Два заводи поставляють на склад фірми електронне обладнання . Перший завод допускає 4% браку. Оцінити допустимий відсоток браку на другому заводі, щоб з ймовірністю не більшою за 3% стверджувати, що чергова партія, що поступила на склад, є бракованою. Поставки з заводів рівноможливі.

4. У бригаді 10% робітників з вищою освітою. Яка ймовірність того, що серед 4 відібраних буде 2 робітника з вищою освітою?

5. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів буде знаходитися в інтервалі (10,60), якщо досліджується партія із навмання взятих 10000 виробів, а ймовірність кожного з них бути бракованим дорівнює 0,001.

6. Випадкова величина підкоряється закону Пуассона з параметром λ=3. Побудувати закон розподілу випадкової величини, обчислити $M(X)$, $D(X)$.

7. Дано: $f(x)=\begin{cases} C\cos 3x, x\in(0;\frac{\pi}{6}), \\ 0, x\notin(0;\frac{\pi}{6}). \end{cases}$ Знайти: C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу (10;4). Для якого відхилення від середнього значення ймовірність дорівнює 0,9.

9. Дано: $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(x+y)}, x\in(0;\infty)\wedge y\in(0;\infty), \\ 0, x\notin(0;\infty)\vee y\notin(0;\infty). \end{cases}$

Знайти: C, $F(x,y)$.

10. За наведеними результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини потрібно:

а) побудувати інтервальний варіаційний ряд;

б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критеріями Пірсона та Колмогорова при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

д) побудувати довірчі інтервали з певною надійністю для невідомих числових характеристик розподілу.

Результати спостережень	γ
22 23 5 27 10 31 14 15 11 24 26 13 22 22 21 14 13 23 21 20 20 22 21 22 23 38 29 18 40 39 16 26 18 18 34 25 36 17 27 39 27 25 23 30 19 17 23 36 22 14	0,99

11. За заданим двовимірним статистичним розподілом вибірки та рівнем значущості $\alpha=0{,}05$:

а) знайти рівняння прямих ліній регресії;

б) побудувати графіки отриманих функцій регресії;

в) побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнту кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Статистичний розподіл (x,y)							
Y \ X	23	28	33	38	43	48	n_y
4	2	3	1	-	-	-	6
10	2	7	1	-	-	-	10
16	-	9	20	16	-	-	45

22	-	3	15	9	2	-	29
28	-	-	-	1	6	3	10
n_x	4	22	37	26	8	3	100

12. Марковський ланцюг з двома станами заданий матрицею $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ та вектором $a^{(0)} = (0{,}3\ \ 0{,}7)$. Визначити $a^{(1)}$, $a^{(4)}$, $a^{(8)}$.

13. За матрицею інтенсивностей переходів $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ побудувати граф станів, дослідити ланцюг на ергодичність та знайти граничний розподіл у випадку ергодичності.

14. Квиткові каси обслуговуються k=4 касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ=19 пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t=5 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касир зайнятими ; середнє число пасажирів в черзі за квитками; середнє число пасажирів в касах; середній час перебування пасажирів в черзі; середній час перебування пасажирів в касах.

15. Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше m=3 автомобілів одночасно. Якщо у черзі вже знаходиться m авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ =1,70(авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому t=2 хвилин. Визначити основні характеристики системи.

Список літератури

1. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. / Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко. – К.: КНУБА, 2007. – 104 с.
2. Курс теорії ймовірностей: Навч. посіб. / Б. В. Гнєденко— К.: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.
3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : Навч. посіб. / Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015. – 364 с.
4. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. / П. С. Сеньо. — 2-ге вид. — Київ: Знання, 2007. — 556 с.
5. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. / В. В. Барковський. — 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.
6. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 1999. – 479 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки та завдання
до курсової роботи з теорії ймовірності, ймовірнісних процесів і
математичної статистики для студентів спеціальності 125
«Кібербезпека», спеціальності 123
«Комп`ютерна інженерія»

Укладач: **ПОЛТОРАЧЕНКО** Наталія Іванівна