МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Н.В. Бондаренко
З.І. Наголкіна
М.С. Пастухова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Київ 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Н.В. Бондаренко, З.І. Наголкіна, М.С. Пастухова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей

Київ 2017

УДК 519.2
ББК 22.17
Б 84

Рецензенти: *Є.В. Бондаренко*, д-р. фіз.- мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
Ю.О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, доцент,
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;
Я.М. Якимів, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Київський національний університет будівництва і архітектури

Відповідальний за випуск В.К. Чибіряков, доктор техн. наук, професор

Затверджено на засіданні Вченої Ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 44 від 27 травня 2016 року.

Бондаренко Н.В. Теорія ймовірностей: навчальний посібник / : Н.В. Бондаренко, З.І. Наголкіна, М.С. Пастухова. – К.: КНУБА, 2017. – 116 ст.

Висвітлено основні розділи курсу «Теорії ймовірностей» - випадкові події та випадкові величини. Викладено також елементи комбінаторики, потрібні для опанування матеріалу курсу. Навчальний матеріал поділений на логічно завершені розділи, які містять стислі теоретичні відомості, приклади розв’язанням типових задач, практичну частину, в якій наведено вправи для аудиторних та самостійних робіт, а також індивідуальні контрольні завдання.

Призначено для студентів всіх спеціальностей.

УДК 519.2
ББК 22.17

Зміст

Вступ

Теорія ймовірностей є розділом математики, який вивчає випадкові явища та випадкові процеси. Виникнення теорії ймовірностей пов'язують з комбінаторними задачами азартних ігор, які почали досліджувати в XVI-XVII століттях. Наприкінці XIX століття з'явилися запити з боку економіки та природознавства, які і привели до її інтенсивного розвитку. Імовірнісні методи знайшли широке застосування в різних галузях науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії похибок спостережень, теорії автоматичного управління та ін. Теорія ймовірностей є важливим компонентом знань сучасного фахівця, оскільки надає змогу правильно оцінювати і прогнозувати як технологічні так і економічні аспекти своє діяльності.

Навчальний посібник укладено відповідно до навчальної програми курсу «Теорія ймовірностей», який вивчається як окрема дисципліна або є складовою курсу «Вищої математики». Мета посібника – забезпечити студентів математичним апаратом, необхідним для значно глибшого і чіткішого розуміння багатьох фізичних законів і співвідношень, які мають ймовірнісний характер, для розв'язування задач, в яких присутні елементи випадковості, для опрацювання результатів експериментів. Теорія ймовірностей є базою для вивчення курсу «Математична статистика».

Посібник складається з трьох розділів: елементи комбінаторики, випадкові події, випадкові величини. Кожен розділ розбитий на підрозділи по темах, які містять теоретичну частину, практичну частину та завдання для аудиторних та самостійних робіт. У теоретичній частині в стислій формі викладено необхідний для опанування розглянутої теми матеріал – основні означення, теореми та формули для розрахунків. Практична частина містить зразки розв'язання типових задач, які ілюструють застосування теоретичного матеріалу. Наприкінці підрозділів наведено завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів. У кінці посібника вміщено варіанти індивідуальних завдань для контролю засвоєння студентами розглянутого матеріалу.

У результаті вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей» студенти повинні

знати: основні поняття і теореми теорії ймовірностей такі як випадкові події, означення та властивості ймовірностей, випадкові величини, основні закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин, їх числові характеристики, граничні теореми теорії ймовірностей;

уміти: знаходити ймовірності простих і складених подій, аналізувати дискретні та неперервні випадкові величини, вміти застосовувати граничні теореми до розв'язування задач.

Розділ 1. Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає розміщення та вибір об'єктів відповідно до певних правил і методи підрахунку кількості всіх можливих способів, якими ці розміщення та вибір можуть бути виконані.

Методи комбінаторики відіграють важливу роль в обчисленні ймовірностей різноманітних подій, пов'язаних з експериментами, що мають скінченну кількість результатів.

Сформулюємо два універсальні правила, які застосовують для розв'язання комбінаторних задач.

Правило суми. *Якщо деякий об'єкт* A_1 *можна вибрати* n_1 *способами, об'єкт* A_2 *– іншими* n_2 *способами,* A_3 *– відмінними від перших двох* n_3 *способами і т.д., об'єкт* A_k *–* n_k *способами, відмінними від перших* $(k-1)$*, то вибір «або* A_1*, або* $A_2, \ldots,$ *або* A_k*» можна здійснити* $(n_1+n_2+\ldots+n_k)$ *способами.*

Приклад 1.1. В ящику лежать дві червоних, три зелених і чотири чорних кулі. Скількома способами можна вибрати кольорову кулю?

Розв'язок. Вибрати кольорову кулю – це вибрати червону або зелену кулю. Червону кулю можна вибрати двома способами, а зелену кулю – трьома способами. Отже, кольорову кулю можна вибрати $2+3$ способами.

Приклад 1.2. В будівельно-конструкторському відділі працюють двоє аналітиків, п'ятеро програмістів і 10 інженерів. Для понадурочної роботи в святковий день керівник відділу повинен вибрати одного співробітника. Скільки у керівника є способів це зробити?

Розв'язок. Керівник відділу може вибрати одного аналітика $n_1=2$ способами, одного програміста – $n_2=5$ способами, а одного інженера $n_3=10$ способами. Оскільки за умовою задачі керівник відділу може вибрати будь-кого із своїх співробітників, то згідно з правилом суми в нього є $n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 5 + 10 = 17$ різних способів вибрати співробітника для понадурочної роботи.

Правило множення (основне правило комбінаторики). *Якщо деякий об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт A_2 (після того, як об'єкт A_1 вже вибраний) можна вибрати n_2 способами і т.д., об'єкт A_k (після того як всі попередні об'єкти вже вибрано) можна вибрати n_k способами, то вибрати всі об'єкти $A_1\, A_2 \ldots A_k$ у такій послідовності можна $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Приклад 1.3. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр «1», «2», «3», «4», якщо 1) цифри не повторюються; 2) цифри можуть повторюватися?

Розв'язок. 1) Маємо чотири різних способи, щоб вибрати цифру на першому місці зліва в тризначному числі. Після того як перше місце зайняте якоюсь цифрою, залишилося три цифри для заповнення другого місця в числі. Для заповнення третього місця залишився вибір з двох цифр. Тому, згідно з правилом множення маємо $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способи розставляння цифр, тобто з даних чотирьох цифр можна скласти 24 тризначних числа (ось деякі з цих чисел: 143, 321, 124, ...).

2) Зрозуміло, якщо цифри можуть повторюватись, то тризначних чисел буде $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ (наприклад, 244, 333, 313).

Приклад 1.4. З трьох студентських груп потрібно обрати делегацію на конференцію, взявши по одному студенту з кожної групи. Скільки різних делегацій можна скласти, якщо в першій групі навчається 18, в другій – 20, в третій – 22 студенти?

Розв'язок. Скористаємося правилом множення. З першої групи одного студента можна вибрати 18 способами, з другої – 20, з третьої 22 способами. Кількість команд дорівнює добутку чисел 18, 20 і 22, тобто становить 7920.

Схема вибору без повторень

Нехай дана деяка скінченна множина A, що містить n різних елементів $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

1. Перестановки. ***Перестановкою з n елементів*** називається довільне розміщення всіх n різних елементів множини A у визначеному порядку. Кількість всіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = n!, \tag{1}$$

де $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, $0!=1$.

Приклад 1.5. 1) $A=\{a,b,c\}$. Випишемо всі перестановки з трьох елементів: $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b,),(c,b,a)$ – всього шість перестановок.

2) Скількома способами можна на полиці шафи розставити шість книг? Кількість таких способів дорівнює $6!=720$.

Приклад 1.6. Дванадцять осіб розсаджуються випадковим чином в ряд. Скільки є можливостей того, що дві особи сядуть поруч?

Розв'язок. Множину людей поділяємо на дві підмножини: 10 осіб і дві певні особи. 10 осіб можуть бути впорядковані 10! способами, дві особи можуть бути впорядковані 2! способами, крім того, є 11 можливостей розмістити ці дві конкретні людини поруч з десятьма іншими. Таким чином,

$$n = 10!\cdot 2!\cdot 11 = 11!\cdot 2.$$

2. Розміщення. ***Розміщеннями з n елементів по k елементів*** ($k \le n$) називаються впорядковані k - елементні підмножини множини A, що складаються з k різних елементів і відрізняються одна від одної складом елементів або порядком їх розміщення. Кількість всіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають як A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot(n-k+1). \tag{2}$$

Приклад 1.7. 1) $A=\{a,b,c\}$. Випишемо всі розміщення з трьох елементів по два елементи: $(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)$ – всього шість розміщень.

2) Студентська рада складається з семи чоловік. Зі свого складу вони обирають президію у складі трьох осіб: голови ради, заступника та секретаря. Скільки є різних способів утворення президії ради?

Президію студентської ради можна обрати $A_7^3 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способами.

3. Комбінації. ***Комбінаціями з*** n ***елементів по*** k ***елементів*** $(k \le m)$ називаються k - елементні підмножини множини A, які містять k різних елементів і відрізняються одна від одної тільки складом елементів; порядок в якому вони розміщені, не має значення. Кількість всіх можливих комбінацій з n елементів по k позначають символом C_n^k й обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}. \tag{3}$$

Для кількості комбінацій справедливі такі формули:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 1.8. 1) $A = \{a, b, c\}$. Випишемо всі комбінації з трьох елементів по два елементи: $(a,b), (a,c), (b,c)$ – всього три комбінації.

2) Скількома способами можна вибрати дві деталі з ящика, що містить 10 деталей? Це можна зробити $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами.

Приклад 1.9. З колоди, у якій 36 карт, виймають 10 карт. Скільки є можливостей, що серед цих 10 карт буде: а) рівно два тузи; б) не менш як два тузи?

Розв'язок. а) Всіх тузів у колоді карт є чотири. Вибрати два тузи з чотирьох можна C_4^2 способами. Решта вісім карт повинні бути вибрані з карт, що не є тузами, тобто з 32 карт. Це можна зробити C_{32}^8 способами. За правилом множення вибрати 10 карт з 36, серед яких рівно два тузи, можна $C_4^2 \cdot C_{32}^8$ способами.

б) Кількість всіх способів вибрати 10 карт з - поміж 36 дорівнює C_{36}^{10}. Вибрати 10 карт з 36, серед яких взагалі немає тузів, можна C_{32}^{10} способами. Вибрати 10 карт з 36, серед яких рівно один туз, можна $C_4^1 \cdot C_{32}^9$ способами. Тому, якщо ми від загальної кількості способів вибору 10 карт з 36 віднімемо кількість способів вибору 10 карт, серед яких немає тузів, і рівно один туз, ми отримаємо кількість можливостей вибору 10 карт, серед яких не менш як два тузи. Тобто вибрати 10 карт, серед яких не менш як два тузи, можна $C_{36}^{10} - C_{32}^{10} - C_4^1 \cdot C_{32}^9$ способами.

Схема вибору з повтореннями

1. Перестановки з повтореннями. Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множина, що має n елементів m різних типів ($m \le n$). Елементи одного типу не відрізняються між собою. Нехай k_1 елементів належать до першого типу, k_2 елементів належать до другого типу і т.д., k_m елементів належать до m - го типу, причому $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Всі можливі різні n - елементні впорядковані набори з цих n елементів називаються ***перестановками з повтореннями***. Їх кількість дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot ... \cdot k_m!}. \qquad (4)$$

Приклад 1.10. Скільки різних семизначних чисел можна утворити з двох «1», однієї «2» і чотирьох «3»?

Це можна зробити $P_7(2;1;4) = \frac{7!}{2! \cdot 1! \cdot 4!} = 105$ способами.

2. Комбінації з повтореннями. Нехай маємо m типів елементів (в кожній групі достатньо багато елементів) таких, що елементи всередині групи однакові, елементи різних груп відрізняються між собою. Із сукупності всіх елементів візьмемо підмножину, що містить n елементів. Ця підмножина із n елементів визначається кількістю взятих елементів з першої групи, кількістю взятих елементів з другої групи і т.д. Ці числа можуть набувати значень від 0 до n, але так, щоб сума елементів дорівнювала n.

Кількість різних способів утворення n - елементної невпорядкованої множини знаходять за так званою ***формулою кількості різних комбінацій з повтореннями***:

$$\overline{C}_m^n = C_{m+n+1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n. \tag{5}$$

Приклад 1.11. На пошті є сім різних типів марок. Скільки є способів купити 12 марок?

Розв'язок. В розгляданому випадку $m = 7$ типів марок. Марки, що належать до різних типів, відрізняються між собою, а ті, що належать до одного типу, не відрізняються. Потрібно вибрати підмножину з $n = 12$ куплених марок. Спосіб утворення такої множини визначається кількістю куплених марок 1-го типу, 2-го типу,..., 7-го типу, причому їх загальна сума має дорівнювати 12. Отже, маємо справу з комбінаціями з повтореннями, де $m = 7, n = 12$. Тому кількість різних способів купити 12 марок знаходимо за формулою (5):

$$\overline{C}_7^{12} = C_{12+7-1}^{12} = C_{18}^{12} = \frac{18!}{12! \cdot 6!} = 18564.$$

3. Розміщення з повтореннями. ***Розміщеннями з повтореннями з n елементів по m елементів*** називається довільне впорядковане розміщення m елементів (серед яких можуть бути й однакові) з даних n різних елементів. Кількість всіх можливих розміщень з повтореннями з n елементів по m дорівнює

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Приклад 1.12. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти, використовуючи цифри «2», «5», «7», «8»?

Таких чисел буде $\tilde{A}_4^5 = 4^5 = 1024$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Скількома способами можна вибрати одну квітку з кошика, в якому 10 гвоздик, 15 троянд та вісім хризантем?

2. Скільки є двозначних чисел, у яких обидві цифри парні?

3. Цифри «0», «1», «2», «3» написані на чотирьох карточках. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цих карточок?

4. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з множини цифр «1», «2», «3», «4», «5», «6», якщо а) цифри не повторюються; б) цифри повторюються; в) числа парні і цифри можуть повторюватися?

5. Скількома способами семеро людей можуть розміститися в черзі в касу?

6. Скількома різними способами можна рознести кореспонденцію п’ятьом адресатам?

7. Скількома способами можна переставити цифри числа 123456789 так, щоб парні цифри залишились на парних місцях?

8. Скільки різних чотирицифрових числа можна скласти з цифр «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6» так, щоб у кожному числі була цифра «2», за умови, що цифри не повторюються?

9. Скільки можна скласти чотиризначних чисел так, щоб довільні дві сусідні цифри були різними?

10. У картці спортлото 36 клітинок. Гравець повинен відмітити шість. Скільки є можливих варіантів?

11. У хокейному турнірі бере участь шість команд. Кожна команда повинна зіграти з кожною одну гру. Скільки ігор зіграно в турнірі?

12. Скільки прямих можна провести через вісім точок, з яких жодні три точки не лежать на одній прямій?

13. У ящику міститься 20 деталей, серед них – п’ять стандартних. Скільки є способів вибрати три деталі, щоб серед них хоча б одна була стандартна?

14. Група студентів вивчає 10 різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок, якщо в цей день повинно бути чотири різні заняття?

15. В електропоїзді 12 вагонів. Скільки є способів розмістити чотирьох пасажирів, якщо в одному вагоні повинно бути не більше одного пасажира?

16. З 10 хлопчиків і 10 дівчаток спортивного класу для участі в естафеті потрібно вибрати три команди, кожна з яких складається з хлопчика та дівчинки. Скількома способами це можна зробити?

17. З групи, в яку входять семеро юнаків та чотири дівчини, треба скласти команду з шістьох осіб так, щоб у ній було не менш як двоє дівчат. Скількома способами це можна зробити?

18. Скількома способами можна розставити на полиці сім різних книжок, щоб три певні книги стояли поряд? Не поряд?

19. Десятеро студентів, серед яких Олександр та Василь, випадковим чином займають чергу в бібліотеку. Скільки є варіантів розміщення студентів, коли між Олександром та Василем опиниться шестеро студентів?

20. В одного студента є сім різних книжок для обміну, а в другого – 16. Скількома способами вони можуть здійснити обмін: книжка на книжку? Дві книжки на дві книжки?

21. В урні 12 білих і вісім чорних куль. Скількома способами можна вибрати п’ять куль, щоб серед них було: а) п’ять чорних; б) три білих і дві чорних кулі?

22. Скількома способами можна розділити шість різних книжок між чотирма студентами, якщо а) не обов’язково кожен студент отримає подарунок; б) кожен студент отримає хоча б один подарунок?

23. Скількома способами можна скласти узор із шістьох облицювальних плиток, якщо є чотири сорти плитки?

24. Скількома способами можна розділити 15 випускників на трьох будівництвах, якщо в одному з них є вісім, в другому п’ять, в третьому два вакантні місця?

25. Скільки є способів розмістити дев’ятьох людей в двомісному, тримісному і чотиримісному номері готелю?

26. Група студентів з восьми чоловік вирушає в подорож. Скількома способами можна скласти групу із студентів 2 – 4 - го курсів?

27. Скількома способами можна розмістити 16 видів товарів у трьох магазинах, якщо в перший магазин потрібно доставити дев’ять, в другий – чотири, а в третій – три види товарів?

Розділ 2. Випадкові події

2.1. Класифікація подій

Дослід, експеримент, спостереження деякого явища називається ***випробуванням***. Випробування, результат якого не можна передбачити наперед, в теорії ймовірностей називається ***випадковим***, або ***стохастичним експериментом***. При цьому розглядаються тільки такі експерименти, які можна повторювати, хоча б теоретично, за незмінного комплексу умов довільну кількість разів.

Випадковою подією, або ***подією***, називається довільний результат випробування, який може відбутися або ні.

Події звичайно позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$.

Прикладами подій є випадіння герба чи цифри підкинутої монети, влучання в ціль чи промах при пострілі в мішень, випадіння кількості очок на підкинутому гральному кубику, вихід бракованого виробу з конвеєра підприємства, випадіння більш як 1 000 мм опадів в певній географічній місцевості за визначений рік.

Подія називається ***достовірною***, якщо вона обов'язково відбудеться в результаті випробування.

Подія називається ***неможливою*** (позначається символом $\varnothing$), якщо вона не відбудеться за жодних умов під час випробування.

Події називаються ***несумісними***, якщо виникнення однієї з них унеможливлює виникнення інших подій в одному й тому самому випробуванні. В іншому випадку події називаються ***сумісними***.

Події називаються ***рівноможливими***, якщо немає підстав вважати одну з них більш або менш можливою, ніж інші.

Елементарною подією називається певний фіксований результат стохастичного експерименту, який не можна виразити через сукупність інших результатів (чи спричинити ними), і позначають символом грецького алфавіту «ω». Зокрема, різні елементарні події не можуть відбутися одночасно.

Множину всіх елементарних подій називають ***простором елементарних подій***, і позначають як «Ω».

Будь-яка випадкова подія A є підмножиною множини Ω.

Дії над подіями є цілком відповідними основним операціям над множинами.

Об'єднанням (***сумою***) ***подій*** A і B називається випадкова подія $A \cup B$ (або $A + B$), яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з них (тобто або A, або B, або A і B разом).

Перетином (добутком) подій A і B називається випадкова подія $A \cap B$ (або $A \cdot B$), яка полягає в тому, що події A і B відбудуться одночасно.

Різницею подій A ***і*** B називається випадкова подія $A \setminus B$ (або $A - B$), яка полягає в тому, що відбудеться подія A і одночасно не відбудеться подія B.

Протилежною подією до A називається випадкова подія $\bar{A} = \Omega \setminus A$ ($A + \bar{A} = \Omega$), яка полягає в тому, що не відбувається подія A.

Зауважимо, якщо події A і B несумісні, то $A \cap B = \varnothing$.

Послідовність подій $H_1, H_2, ..., H_n$ називається ***повною групою подій*** (гіпотез) для даного випробування, якщо вони попарно несумісні, $H_i \cap H_j = \varnothing$ для всіх $i \neq j$, та $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega$. Або що те саме – в результаті проведення стохастичного експерименту відбудеться одна і тільки одна подія з повної групи.

Приклад 2.1. Випробування: підкидання грального кубика.

Приклади подій за такого випробування: подія A – випало п'ять очок, подія B – випала парна кількість очок, подія C – випало сім очок, подія D – випало ціле число очок, подія E – випало не менш як троє очок.

Елементарними подіями в такому випробуванні є w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, де подія w_i означає, що в результаті підкидання кубика випало i очок, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Простір елементарних подій: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6,\}$ або $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

У цьому випробуванні події A, B, E – випадкові, подія C – неможлива, подія D – достовірна. Крім того, події A і B несумісні, події A і E – сумісні. Події $w_1 - w_6$ утворюють повну групу подій, $w_1 - w_5$ не утворюють. Елементарні події w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 – рівноможливі.

У цьому випробуванні $A=\{5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $D=\{1,2,3,4,5,6\}$, $E=\{3,4,5,6\}$, тоді $B\cup E=\{2,3,4,5,6\}$, $B\cap E=\{4,6\}$, $B\setminus E=\{2\}$, $\bar{A}=\{1,2,3,4,6\}$, $D=\Omega$.

2.2. Класичне означення ймовірності

Нехай проводиться випробування, що має n несумісних, рівноможливих результатів, які утворюють повну групу подій: $\Omega=\{w_1,w_2,...,w_n\}$. Таке випробування називається ***класичною ймовірнісною схемою***. Випадкова подія A відбудеться в результаті випробування, якщо відбудеться якась з m елементарних подій $\{w_{i_1},w_{i_2},...,w_{i_m}\}$. При цьому $A=\{w_{i_1},w_{i_2},...,w_{i_m}\}$, а елементарні події $w_{i_1},w_{i_2},...,w_{i_m}$ називаються ***сприятливими*** події A.

Означення. Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається відношення кількості m результатів, сприятливих події A, до загальної кількості n результатів випробування, тобто

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (6)$$

Таке означення ймовірності називається ***класичним***.

Імовірність події – це чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події.

З класичного означення ймовірності випливають такі її властивості:

1. Імовірність довільної випадкової події A є додатним числом з відрізку $[0;1]$, тобто $0\le P(A)\le 1$.
2. Імовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто $P(\varnothing)=0$.
3. Імовірність достовірної події дорівнює одиниці, тобто $P(\Omega)=1$.

Приклад 2.2. В урні міститься 10 білих і шість чорних куль. Якою є ймовірність того, що а) навмання витягнута куля буде білою? б) навмання витягнуті дві кулі виявляться білими?

Розв'язок. а) Позначимо подію A = {витягнута куля виявилася білою}. Кількість всіх рівноможливих результатів випробування $n=10+6=16$ (загальна кількість куль). Кількість результатів сприятливих події A, дорівнює $m = 10$ (кількість білих куль). Отже, за формулою (6) маємо

$$P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

б) Позначимо подію B = {навмання витягнуті дві кулі виявилися білими}. Проведене випробування (діставання двох куль) має $n = C_{16}^2$ рівноможливих результатів (способів вибору двох куль з наявних 16 незалежно від порядку). Кількість результатів, сприятливих події B – вибору двох білих куль, дорівнює $m = C_{10}^2$ (способів вибору двох куль з наявних 10 білих куль незалежно від порядку). Отже, за класичним означенням ймовірності маємо

$$P(B) = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{45}{120} = 0,375.$$

Приклад 2.3. В партії з 12 деталей є п'ять бракованих. Якою є ймовірність того, що з п'яти навмання вибраних деталей дві – браковані?

Розв'язок. Загальна кількість способів вибрати п'ять деталей з 12 дорівнює C_{12}^5. Кількість сприятливих елементарних подій дорівнює добутку кількості способів, якими можна вибрати дві браковані деталі з наявних п'ятьох бракованих, на кількість способів вибору трьох якісних деталей із наявних сімох якісних деталей, тобто $C_5^2 \cdot C_7^3$ (правило множення у комбінаториці). За класичним означенням ймовірності маємо

$$P = \frac{C_5^2 \cdot C_7^3}{C_{12}^5} = \frac{175}{396} \approx 0,442.$$

Приклад 2.4. У три вагони потяга заходить дев'ятеро пасажирів. Кожний пасажир вибирає вагон навмання. Якою є ймовірність того, що в першому вагоні їхатиме три людини?

Розв'язок. Кожний пасажир вибирає будь-який з трьох вагонів. Загальна кількість способів розміщення дев'ятьох пасажирів у трьох вагонах дорівнює 3^9. Вибрати трьох пасажирів з дев'яти можна C_9^3 способами. Решта шість пасажирів навмання вибирають два вагони, що залишилися. Кількість таких варіантів дорівнює 2^6. Кількість сприятливих елементарних подій становить $C_9^3 \cdot 2^6$.

Шукана ймовірність дорівнює $P = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} \approx 0{,}27$.

Приклад 2.5. У ліфт на 1-му поверсі дев'ятиповерхового будинку зайшли три людини, кожна з яких може вийти незалежно одна від одної на довільному поверсі з 2-го по 9-й. Якою є ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на 5-му поверсі; б) на одному поверсі?

Розв'язок. а) Позначимо подію A = {усі пасажири вийдуть на 5-му поверсі}. Кожний пасажир може вийти з 2-го по 9-й поверх вісьмома способами. За правилом множення у комбінаториці загальна кількість способів виходу трьох пасажирів з ліфта дорівнює $n = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$. Кількість випадків, сприятливих події A, дорівнює $m = 1$. Таким чином,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8^3} = 0{,}0019.$$

б) Позначимо подію B = {усі пасажири вийдуть на одному поверсі}. Тепер події B будуть сприятливі $m = 8$ випадків (всі пасажири вийдуть або на 2-му поверсі, або на 3-му поверсі, …, або на 9-му поверсі).

Тому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{8^3} = \frac{1}{64} = 0{,}0156.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. У партії 20 деталей високої якості, з них п'ять таких, що мають дефект.

а) Навмання беруть одну деталь. Якою є ймовірність того, що вона якісна?

б) Навмання беруть дві деталі. Якою є ймовірність того, що обидві деталі якісні, обидві браковані?

в) Навмання беруть чотири деталі. Якою є ймовірність того, що серед вибраних деталей дві – браковані?

2. З цифр «1», «2», «3», «4», «5» навмання складають п'ятизначне число, в якому цифри не повторюються. Визначте ймовірність того, що це буде парне число.

3. Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні цифри, але пам'ятає, що всі вони різні. Визначте ймовірність того, що абонент правильно набере останні цифри.

4. Викладач пропонує кожному з трьох студентів задумати довільне число від 1 до 10. Знайдіть імовірність того, що в когось із них задумані числа будуть однаковими.

5. Студент прийшов захищати типовий розрахунок, знаючи 10 питань із 16. Викладач поставив йому три запитання. Якою є ймовірність того, що студент відповів: а) на всі три запитання? б) не знає відповіді на жодне запитання?

6. Серед 10 людей двоє знайомі між собою. Всі розсаджуються в ряд біля столу. Якою є ймовірність, що дві знайомі людини будуть сидіти поруч?

7. З колоди з 36 карт витягають три карти. Визначте ймовірність того, що серед них буде два тузи.

8. Підкинуто дві гральні кості. Визначте ймовірність того, що сума очок, які випали, ділиться на 6.

9. У гральних кубиках протилежні грані зафарбовані в однакові кольори: зелений, червоний, жовтий. Підкидають три кубики. Якою є ймовірність того, що верхні грані виявляться різного кольору?

10. Підкинуто дві гральні кості. Визначте ймовірність того, що цифра “6” випаде хоча б один раз.

11. В урні чотири білих і три чорних кульки. Навмання виймають три з них. Якою є ймовірність того, що: а) одна з них біла; б) хоча б одна біла?

12. На 12 картках написано всі натуральні числа від 1 до 12. З цих карток навмання вибирають дві. Визначте ймовірність того, що на одній з них написане число, більше від дев’яти, а на другій – менше, ніж дев’ять.

13. На книжковій полиці випадковим чином розставлені чотири підручники і три задачники. Визначте ймовірність того, що всі підручники виявляться поряд.

14. Квитки на стадіон розділені на сім категорій – за секторами. Визначте ймовірність того, що чотири конкретних покупці куплять квитки різних категорій, якщо вважати, що придбання квитка в довільний сектор кожним покупцем є однаково ймовірним.

15. У ліфт 10 - поверхового будинку зайшло троє пасажирів. Кожен незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі, починаючи з другого. Визначте ймовірність того, що: а) усі вийшли на різних поверхах; б) хоча б двоє вийшли на одному поверсі.

16. Визначте ймовірність того, що у довільно взятому 8 - значному числі чотири цифри однакові, а решта будуть різними.

2.3. Геометричне означення ймовірності

Класична формула (6) обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних результатів випробування є нескінченна або навіть незлічення множина, наприклад, деяка область на прямій, площині чи в просторі. В цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірності.

Випробування інтерпретується як випадкове позначення точки в області Ω, а подія A – як попадання цієї точки в підобласть A області Ω. Тоді для випадкової події $A \subset \Omega$ її ймовірність визначається за формулою

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{7}$$

де $m(\cdot)$ – міра на прямій, площині або в просторі (довжина, площа чи об'єм відповідно). Крім того, розглядаємо випадки, коли $0 < m(\Omega) < +\infty$.

Приклад 2.6. У колі радіусом R навмання позначають точку. Якою є ймовірність того, що вибрана точка виявиться від центра кола на відстані, більшій ніж $R/2$?

Розв'язок. Випробування полягає в тому, що навмання позначають точку в колі радіусом R. Простором елементарних подій є внутрішня частина кола радіусом R, тобто $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$. Міра області Ω в просторі $\mathbf{R}^2$ дорівнює площі круга радіусом R, тобто $m(\Omega) = S(\Omega) = \pi R^2$.

Випадкова подія A – множина точок круга, що знаходяться від центра на відстані, більшій, ніж $R/2$, тобто $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid R^2/4 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$. Тоді

$$m(A) = \pi R^2 - \pi (R/2)^2 = 3\pi R^2 / 4.$$

За геометричним означенням ймовірності маємо:

$$P(A) = \frac{3\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 2.7. «Задача про зустріч» Два студенти домовились про зустріч у визначеному місці між 12-ю та 13-ю годиною дня. Відомо, що моменти їхнього приходу до місця зустрічі – випадкові. Той, хто прийшов першим, чекає другого студента протягом 15 хвилин, після чого йде геть (якщо зустріч не відбулася). Визначити ймовірність того, що зустріч відбудеться.

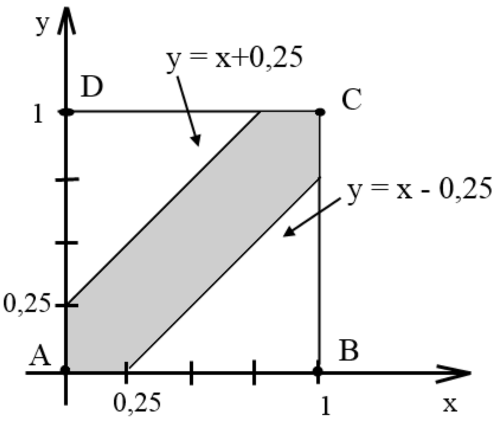


Рис. 1

Розв'язок. Позначимо як x та y час приходу першого та другого студента відповідно. В прямокутній системі координат Oxy візьмемо за початок відліку 12 год, а за одиницю виміру – 1 год. За умовою $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Цим нерівностям задовольняють координати довільної точки $(x;y)$, що належить квадрату $ABCD$ зі стороною, рівною 1 (рис. 1), тобто

$$\Omega = \{(x;y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Подія A – зустріч двох студентів відбудеться, якщо різниця між моментами приходу x та y студентів буде не більшою, ніж 1/4 години (за модулем), тобто $A = \{(x;y) \in \Omega : |x - y| \le 1/4\}$. Або, що те саме, точки з координатами $(x;y)$ смуги між лініями $y = x + 1/4$ і $y = x - 1/4$ сприятливі події A.

Площа $S(\Omega)$ області Ω дорівнює 1. Площа смуги A (на рисунку заштрихована область) дорівнює площі квадрата мінус площа двох однакових за площею трикутників, тобто

$$S(A) = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{\text{трик.}} = 1 - (9/16) = 7/16.$$

За геометричним означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16}.$$

Приклад 2.8. На площині проведено паралельні лінії, відстань між якими дорівнює $2a$. На площині навмання малюють коло радіусом r, ($r < a$). Якою є ймовірність того, що коло не буде перетнуто жодною з цих ліній?

Розв'язок. Навмання намальоване на площині коло не буде перетнуте жодною прямою, якщо центр кола потрапить на смугу шириною $2a-2r$. Завдання зводиться до такого: на відрізку довжиною $2a$ навмання ставлять точку, потрібно знайти ймовірність того, що вона попаде на частину цього відрізка довжиною $2a-2r$. За геометричним означенням ймовірності отримаємо

$$P = \frac{2a-2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. У крузі радіусом R навмання позначено точку. Якою є ймовірність того, що вона опиниться всередині вписаного в цей круг правильного трикутника?

2. У крузі радіусом R навмання позначено точку. Визначте ймовірність того, що вона опиниться за межами квадрата, вписаного в цей круг.

3. На площині накреслили два концентричні кола зі спільним центром, радіуси яких дорівнюють $r=5$ см і $R=10$ см. Визначте ймовірність того, що точка, яку навмання вибрано у великому колі, попаде в маленьке коло.

4. Два дійсні числа x та y вибирають навмання так, що $|x| \le 3$, $|y| \le 5$. Якою є ймовірність того, що дріб $\frac{x}{y}$ – додатний?

5. Два дійсних числа x та y вибирають навмання так, що $|x| \le 1$, $0 \le y \le 1$. Якою є ймовірність того, що $x^2 < y$?

6. Абонент чекає телефонного виклику протягом однієї години. Якою є ймовірність того, що виклик відбудеться в останні 20 хвилин цієї години?

7. Два судна можуть підійти до одного причалу незалежно один від одного в будь-який момент протягом доби. Визначте ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки для обох суден – одна година

8. Навмання обрано два дійсні числа так, що $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Визначте ймовірність того, що $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$.

9. У прямокутнику зі сторонами 2 см і 3 см навмання вибрано точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої вершини не перевищує 1 см.

10. На відрізку OA завдовжки L числової осі Ox навмання вибрано точку B. Визначте ймовірність того, що відрізки OB і BA мають довжину, більшу за $L/4$.

11. На відрізку довжиною l навмання позначено дві точки. Визначте ймовірність того, що відстань між ними менша за $0{,}5 \cdot l$?

12. На відрізку AB довжиною l навмання позначено дві точки L і M. Визначте ймовірність того, що точка L буде ближче до точки M, ніж до точки A.

13. Квадрат зі стороною a поділено на чотири частини відрізками прямих, що з'єднують середини протилежних сторін. В цей квадрат кинуто монету радіусом $r < a/4$. Визначте ймовірність того, що монета не перетне жодної з сторін квадратів, на які поділений основний квадрат.

2.4. Статистичне означення ймовірності

Класична формула означення ймовірності (6) є незастосовною, якщо простір Ω елементарних результатів – це нескінченна множина або немає достатніх підстав вважати результати випробування ω_i рівноможливими.

У таких випадках застосовують ***статистичне*** означення ймовірності події, яке ґрунтується на понятті ***відносної частоти події***. Це поняття, як і ймовірність, належить до основних понять теорії ймовірностей.

Експериментальне означення ймовірності події A полягає в проведенні серії n випробувань, в кожному з яких відбувається чи не відбувається подія A.

Відносна частота $W(A)$ події A – це відношення кількості m випробувань, в яких подія A відбулася, до кількості n всіх фактично проведених випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Повторення серії випробувань дасть в загальному випадку інший результат – $m_1 / n_1 \neq m / n$. Але в разі збільшення кількості n випробувань відносна частота появи події виявляє тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякої сталої величини. Кажуть, що відносній частоті притаманна стійкість.

Приклад 2.9. Багато разів проводили випробування – підкидання симетричної монети і підраховували кількість випадінь «герба». Результати деяких випробувань наведено в таблиці.

Експериментатор	Кількість підкидань	Кількість випадінь «герба»	Відносна частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

Імовірність появи «герба» після одного підкидання, що визначається за класичним означенням ймовірності, дорівнює 0,5. Результати, наведені в таблиці, переконують в тому, що за збільшення кількості випробувань відносна частота наближається до теоретично обчисленої ймовірності випадіння «герба».

Якщо дослідним шляхом встановлено відносну частоту деякої події, то її можна вважати наближеним значенням імовірності.

Відносну частоту події називають її ***статистичною ймовірністю*** і позначають так:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Я. Бернуллі показав, що за необмеженого збільшення кількості однорідних незалежних випробувань можна стверджувати, що відносна частота події буде досить мало відрізнятись від її ймовірності в окремому випробуванні.

Таким чином, імовірність може бути визначена статистично, дослідним шляхом. Для цього треба мати можливість виконати необмежену кількість випробувань. При цьому відносна частота повинна виявити стійкість в різних серіях випробувань.

Зіставляючи означення ймовірності за класичною формулою (6) і означення відносної частоти, доходимо висновку: ймовірність обчислюють безпосередньо до випробування, а відносна частота є характеристикою експериментальною, обчислюваною після випробування.

2.5. Теореми додавання і множення ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема 1. Якщо події A і B несумісні ($A \cap B = \varnothing$), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{8}$$

Теорема узагальнюється у разі трьох і більше несумісних подій:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C); \tag{9}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{10}$$

Приклад 2.10. Виконують стрільбу по мішені, що містить три концентричні кола. Імовірність влучення в центральну зону (1) дорівнює 0,05; в кільце (2) – 0,1; в кільце (3) – 0,17 (рис. 2). Якою є ймовірність влучити в мішень?

Розв'язок. Нехай $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ – подія, що полягає у влученні в мішень; A_1 – попадання в першу зону; A_2 – влучення в другу зону; A_3 – влучення в третю зону.

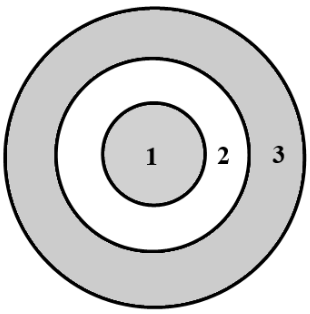


Рис. 2

Події A_1, A_2, A_3 – несумісні (не можна одним пострілом влучити у дві різні частини мішені), тому

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}32.$$

Приклад 2.11. Прилад складається з трьох блоків, які працюють незалежно один від одного, ймовірність відмови кожного з них $p = 0{,}2$. Прилад працює, коли працює хоча б один блок. Визначити ймовірність роботи приладу.

Розв'язок. Нехай подія A – працює хоча б один блок. Тоді подія $\overline{A}$ – не працює жодний блок.

$$P(\overline{A}) = (1-p)^3 = (0{,}8)^3, \text{ тому } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0{,}8)^3.$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 2. Якщо події A і B – сумісні, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{11}$$

Наслідок. Імовірність об'єднання трьох сумісних подій

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Приклад 2.12. Підкидають два гральні кубики. Якою є ймовірність того, що випаде хоча б одна «шестірка»?

Розв'язок. Нехай подія A – випадіння «шестірки» на першому кубику, подія B – випадіння «шестірки» на другому кубику. Події A і B у розгляданому випадку сумісні.

Тоді подія $A \cup B$ – випадіння хоча б однієї «шестірки» під час підкидання двох кубиків. За теоремою 2 маємо

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Тут подія $A \cap B$ – це випадіння «шестірки» і на першому, і на другому кубику.

Умовна ймовірність події

Теорема множення ймовірностей

Подія A ***називається незалежною від події*** B, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Подія A ***називається залежною від події*** B, якщо ймовірність події A змінюється залежно від того, відбулася подія B чи не відбулася.

Приклад 2.13. 1) Підкидають дві монети. Нехай подія A – випадіння цифри на 1-й монеті, подія B – випадіння цифри на 2-й монеті. Тоді події A і B незалежні одна від одної.

2) В урні дві білі і дві чорні кулі. Дві людини по черзі виймають по одній кулі. Нехай подія A – перша людина витягнула білу кулю, подія B – друга людина витягнула білу кулю.

Якщо подія A відбулася, то $P(B)=\frac{1}{3}$.

Якщо відбулася подія $\overline{A}$ (перша людина витягнула чорну кулю), то $P(B)=\frac{2}{3}$.

Якщо не відбулася ні подія A, ні подія $\overline{A}$, то $P(B)=\frac{1}{2}$.

Таким чином, подія B є залежною від події A.

Імовірність події B, обчислена за умови, що подія A відбулася, ***називають умовною ймовірністю події*** B і позначають символом $P(B/A)$ та обчислюють за формулою

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\text{ де } P(A)\neq 0. \qquad (12)$$

У загальному випадку $P(B/A)\neq P(B)$.

Помноживши ліву та праву частини рівності (12) на $P(A)$, отримаємо

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Теорема (правило) множення ймовірностей. Імовірність перетину (добутку) двох подій дорівнює добутку ймовірностей одного з них на умовну ймовірність іншого, обчислену за умови, що перша подія відбулася:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (13)$$

При застосуванні цієї теореми не важливо, яку подію вважати першою, яку – другою, формулу (13) можна записати у вигляді

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (14)$$

Наслідок 1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A.

Наслідок 2. Якщо події A і B незалежні, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (15)$$

У разі n незалежних подій

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Приклад 2.14. Імовірність влучення в ціль для першого стрільця становить 0,8, для другого – 0,7, для третього – 0,9. Кожний із стрільців виконує по одному пострілу. Якою є ймовірність того, що в мішені три пробоїни?

Розв'язок. Позначимо події: A_i – влучення в ціль i-го стрільця, $i = 1, 2, 3$. Подія B – в мішені три пробоїни. Зрозуміло, що $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, причому події A_1, A_2, A_3 – незалежні. За теоремою множення ймовірностей для незалежних випадкових подій маємо:

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Приклад 2.15. Два стрільці, для яких імовірність влучити в мішень дорівнює відповідно 0,7 та 0,8, виконують по одному пострілу. Знайти ймовірність хоча б одного влучення в мішень.

Розв'язок. Позначимо події:

A – відбулося хоча б одне влучення; A_1 – влучив перший стрілець; A_2 – влучив другий стрілець.

За умовою $P(A_1)=0{,}7$, $P(A_2)=0{,}8$, тоді $P(\overline{A}_1)=0{,}3$, $P(\overline{A}_2)=0{,}2$.

1-й спосіб. Подія $A=A_1\cup A_2$, причому події A_1 і A_2 сумісні і незалежні, тому за формулами (11) і (15)

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=$$
$$=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

2-й спосіб. Подія A полягає в тому, що відбулася одна з несумісних подій $A_1\overline{A}_2$, $\overline{A}_1A_2$, A_1A_2, тобто $A=A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2$. Оскільки події $A_1\overline{A}_2$, $\overline{A}_1A_2$, A_1A_2 – незалежні, то

$$P(A)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)+P(A_1)P(A_2)=0{,}94.$$

3-й спосіб. Розглянемо протилежну подію $\overline{A}$ – жоден зі стрільців не влучив. Оскільки $\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$, то $P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}06$. Тоді за формулою (10) маємо $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}06=0{,}94$.

Приклад 2.16. У двох скриньках знаходяться кульки, які відрізняються лише кольором, причому в першій скриньці три білих, п’ять чорних та чотири червоних кульки, а в другій відповідно, шість білих, чотири чорних і дві червоні. З обох скриньок навмання витягують по одній кульці. Якою є ймовірність того, що обидві кульки будуть одного кольору?

Розв’язок. Розглянемо події: D – обидві кульки виявились одного кольору, A_1 – біла кулька з першої скриньки, A_2 – біла кулька з другої скриньки, B_1 – чорна кулька з першої скриньки, B_2 – чорна кулька з другої скриньки, C_1 – червона кулька з першої скриньки, C_2 – червона кулька з другої скриньки.

Події A_1 та A_2 незалежні, аналогічно B_1 та B_2, C_1 та C_2 також незалежні. Крім того, позначимо події: $A=A_1\cap A_2$ – обидві вийняті кульки білі; $B=B_1\cap B_2$ – обидві кульки чорні; $C=A_1\cap A_2$ – обидві кульки червоні. Події A, B, C – несумісні. Подія $D=A\cup B\cup C$. За формулами (9) та (15) маємо

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=$$
$$=P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap B_2)+P(C_1\cap C_2)=$$
$$=P(A_1)P(A_2)+P(B_1)P(B_2)+P(C_1)P(C_2)=$$

$$=\frac{3}{12}\cdot\frac{6}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}+\frac{4}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{23}{72}=0{,}319.$$

Приклад 2.17. На рис. 3 зображено схему з’єднання елементів. Вважаючи, що відмови елементів незалежні в сукупності, знайти ймовірність безвідмовної роботи схеми, якщо ймовірність відмови елементів дорівнюють відповідно 0,1; 0,2; 0,05.

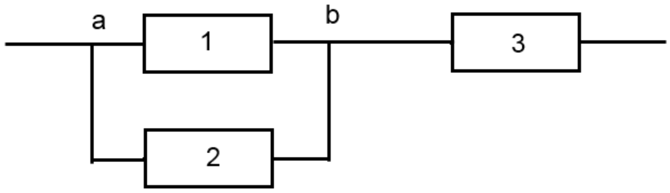


Рис. 3

Розв’язок. Розглянемо події: A – схема працює безвідмовно, A_1 – 1-й елемент працює безвідмовно, A_2 – 2-й елемент працює безвідмовно, A_3 – 3-й елемент працює безвідмовно, B – ланцюг $a-b$ працює безвідмовно. Тоді $\overline{B}$ – ланцюг $a-b$ відмовив. Відмова ланцюга $a-b$ можлива, тільки коли одночасно відмовили елементи 1 і 2, отже, $\overline{B}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$. Тепер за формулою (15)

$$P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02.$$

Звідси ймовірність протилежної події

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}98=0{,}02.$$

Схема на рис. 3 працює, якщо одночасно працюють ланцюг $a-b$ і елемент 3, тому $A=B\cap A_3$. За формулою (15) маємо

$$P(A)=P(B)\cdot P(A_3)=0{,}98\cdot(1-0{,}05)=0{,}931.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. В урні 10 білих, 15 чорних, 20 синіх і 25 червоних куль. Витягли одну кулю. Визначте ймовірність того, що витягнута куля: біла; чорна; синя; червона; біла або чорна; синя або червона; біла, чорна або синя.

2. Двоє стрільців виконують по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучити в мішень дорівнює відповідно 0,7 та 0,8. Визначте ймовірності таких подій: а) в мішень влучає тільки один стрілець;

б) в мішені будуть два влучення; в) в мішені буде хоча б одне влучення; г) мішень не буде вражена.

3. В ящику 10 деталей, з яких чотири пофарбовані. Механік навмання взяв три деталі. Визначте ймовірність того, що хоча б одна з взятих деталей пофарбована.

4. Імовірність хоча б одного влучання в ціль після трьох пострілів дорівнює 0,875. Визначте ймовірність влучення після одного пострілу.

5. Троє стрільців одночасно стріляють по мішені. Імовірність влучення кожного $p_1 = 0{,}7;\ p_2 = 0{,}8;\ p_3 = 0{,}9$. Визначте ймовірність того, що буде: а) тільки одне влучення; б) хоча б два влучення.

6. З колоди з 36 карт виймають дві карти. Визначте ймовірність того, що хоча б одна з них буде тузом.

7. Навмання кидають дві гральні кістки. Якою є ймовірність того, що а) хоча б на одній з них випаде число 6; б) сума очок, що випали, парна; в) на одній кістці кількість очок парна, а на другій – непарна?

8. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, становить 0,9. Визначте ймовірність того, що з двох перевірених деталей тільки одна є стандартною.

9. Імовірність того, що під час одного вимірювання деякої фізичної величини станеться помилка, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Виконано три незалежних вимірювання. Визначте ймовірність того, що тільки в одному з них помилка перевищить задану точність.

10. На кожному з трьох верстатів виготовлено по одній деталі. Імовірність браку на першому верстаті становить 0,05, на другому – 0,06, а на третьому – 0,07. Якою є ймовірність того, що серед виготовлених деталей немає бракованих? Тільки дві браковані? Хоча б одна бракована?

11. Відрізок завдовжки a розділений у співвідношенні 2:1. Всередині відрізка навмання позначають дві точки. Якою є ймовірність того, що на кожну частину відрізка припаде по точці.

12. На рис. 4-7 наведено схеми з'єднання елементів, що утворюють ланцюг з одним входом й одним виходом. Припускається, що відмови є незалежними у сукупності подіями. Надійність 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го елементів дорівнюють відповідно $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5, p_6$. Визначте ймовірність безвідмовної роботи кожної з наведених схем.

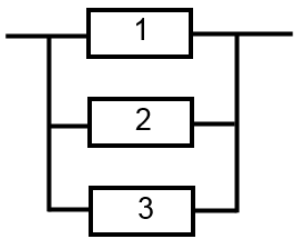


Рис. 4

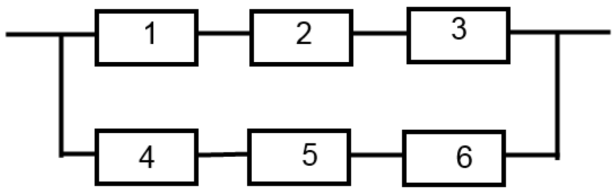


Рис. 5

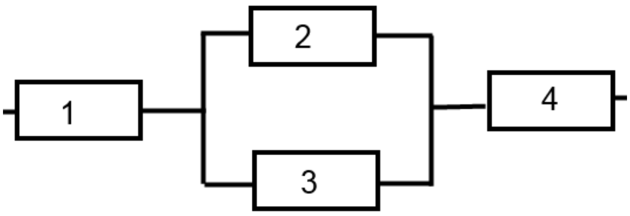


Рис. 6

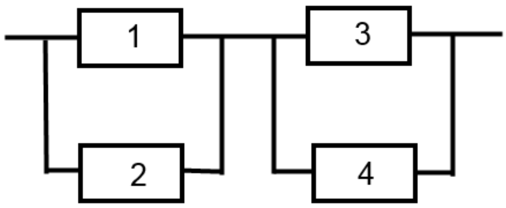


Рис. 7

13. У двох урнах знаходяться кулі, що відрізняються між собою тільки кольором. В першій урні п'ять білих куль, 11 чорних і вісім червоних. В другій урні відповідно: 10 білих куль, вісім чорних і шість червоних. З кожної урни навмання дістають по одній кулі. Якою є ймовірність того, що кулі будуть одного кольору?

14. З урни, що містить шість білих і чотири чорні кулі, навмання послідовно по одній дістають кулі до появи кулі чорного кольору. Визначте ймовірність того, що доведеться витягти чотири кулі, якщо кулі беруть: а) без повернень; б) з поверненням в урну.

15. Визначте ймовірність того, що навмання вибране натуральне число: а) не ділиться ні на два, ні на три; б) не ділиться або на два, або на три.

16. На шести картках написано по одній букві так, що вони складають слово «карета». Картки перемішують, а потім розкладають навмання знову в ряд. Якою є ймовірність того, що отримають слово «ракета»?

17. Для сигналізації про аварію встановлено два сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що в разі аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95, а того, що спрацює другий сигналізатор, – 0,9. Визначте ймовірність того, що а) в разі аварії спрацює тільки один сигналізатор; б) в разі аварії спрацює хоча б один сигналізатор.

18. Абонент забув останню цифру номера телефона, а потім набирає її навмання. Визначте ймовірність того, що йому доведеться телефонувати не більше, ніж в три місця.

19. Із урни, що містить дві чорних і дві білих кулі, двоє гравців по черзі без повернення дістають кулі. Виграє той, хто першим дістане білу кулю. Визначте ймовірність виграшу для кожного з гравців.

20. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться «герб». Визначте ймовірність виграшу для кожного з гравців.

2.6. Формула повної ймовірності

Формула повної ймовірності – наслідок теорем додавання і множення ймовірностей.

Нехай деяка подія A може відбутися лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу подій. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій $H_1, H_2, ..., H_n$ відбудеться подія A, то їх називають ***гіпотезами***.

Теорема. Імовірність події A, яка може відбутися лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цієї події на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{16}$$

Формула (16) називається ***формулою повної ймовірності***.

Приклад 2.18. Маємо три однакові кошики. В першому кошику п'ять білих і три чорні кулі, в другому кошику – чотири білих і шість чорних, в третьому – сім білих і чотири чорних кулі. Пропонується, стоячи спиною до корзин, вийняти одну кулю. Якою є ймовірність того, що вийнята куля буде білою?

Розв'язок. Оскільки кошики однакові, то можна вважати, що ймовірність вибору довільного кошика однакова і дорівнює $\frac{1}{3}$. Нехай H_1, H_2, H_3 – події, що полягають у виборі першого, другого чи третього кошика. Тоді $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Нехай подія A – вийняли білу кулю. A/H_1 – подія, коли білу кулю витягнуть з першої корзини, A/H_2 – з другої корзини, A/H_3 – з третьої корзини. Обчислимо умовні ймовірності цих подій:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{8};\ P(A/H_2)=\frac{4}{10};\ P(A/H_3)=\frac{7}{11}.$$

Застосовуючи формулу повної ймовірності (16) для $n=3$, отримуємо, що ймовірність дістати білу кулю (не важливо з якої корзини) дорівнює

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{11}=0{,}551.$$

Зауваження. Для розв'язання задач за формулою повної ймовірності висувають гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$. Важливо перевірити, що сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці: $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)=1$.

2.7. Формула Байєса

Нехай деяка подія A відбулася разом з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що становлять повну групу подій. Не можна достовірно сказати, з якою з подій $H_1, H_2, ..., H_n$ відбулася подія A, але можна поставити питання про ймовірність однієї з цих гіпотез за умови, що подія A відбулася. В загальному випадку подія A змінює ймовірність гіпотези, тобто $P(H_i/A)\neq P(H_i)$.

Теорема. Нехай події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій. Тоді умовна ймовірність події H_k $(k=1,2,...,n)$ за умови, що подія A відбулася, задається формулою

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}. \tag{17}$$

Формула (17) називається ***формулою Байєса***.

Приклад 2.19. Електричні лампи виготовляють на трьох заводах. Перший завод виробляє 30% загальної кількості електричних ламп, другий – 25%, а третій – решту. Вироби першого заводу містять 1% бракованих електричних ламп, другого – 1,5%, третього – 2%. В магазин надходить продукція всіх трьох заводів.

1) Якою є ймовірність того, що випадково куплена електрична лампа є бракованою?

2) Куплена в магазині лампа виявилася бракованою. Якою є ймовірність того, що вона виготовлена першим заводом?

Розв'язок. Сформулюємо три гіпотези: H_1 – куплена в магазині лампа виготовлена першим заводом, H_2 – другим, H_3 – третім заводом.

Нехай подія A – куплена електрична лампа є бракованою.

За умовою задачі маємо: $P(H_1) = 0,30$; $P(H_2) = 0,25$; $P(H_3) = 0,45$; $P(A/H_1) = 0,01$; $P(A/H_2) = 0,015$; $P(A/H_3) = 0,02$.

1) Імовірність події A (куплена лампа – бракована) визначають за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$
$$= 0,3\cdot 0,01 + 0,25\cdot 0,15 + 0,45\cdot 0,02 = 0,01575.$$

2) Для визначення ймовірності того, що випадково взята електрична лампа була виготовлена першим заводом, потрібно скористатися формулою Байєса, згідно з якою

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$
$$= \frac{0,3\cdot 0,01}{0,3\cdot 0,01 + 0,25\cdot 0,15 + 0,45\cdot 0,02} = \frac{0,003}{0,01575} \approx 0,19.$$

Приклад 2.20. У першій урні лежать три білих і п'ять чорних кульок, а у другій – дві білі і шість чорних кульок. Із першої урни навмання вибрали дві кульки і переклали в другу. Після цього з другої урни витягли кульку, яка виявилася білою. Визначити ймовірність того, що у другу урну перекладено тільки білі кульки.

Розв'язок. Нехай подія A – з другої урни після перекладання витягнули білу кулю. Визначимо гіпотези: H_1 – перекладено дві кульки білого кольору, H_2 – перекладено дві кульки різних кольорів, H_3 – перекладено дві кульки чорного кольору. Події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу подій. Крім того, подія A відбулася одночасно тільки з однією з подій H_1, H_2, H_3. Потрібно знайти $P(H_1/A)$.

Визначимо ймовірності $P(H_i)$ і $P(A/H_i)$, $i = 1, 2, 3$.

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}; \quad P(H_2) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^1}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28};$$

$$P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{5}{14}.$$

$$P(A/H_1) = 0{,}4; \;\; P(A/H_2) = 0{,}3; \;\; P(A/H_3) = 0{,}2.$$

Тоді за формулою Байєса маємо:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{\frac{3}{28} \cdot 0{,}4}{\frac{3}{28} \cdot 0{,}4 + \frac{15}{28} \cdot 0{,}3 + \frac{5}{14} \cdot 0{,}2} =$$

$$= \frac{1{,}2}{7{,}7} \approx 0{,}1558.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Статистика запитів кредитів в банку така: 10% – державні органи, 20 % – інші банки, решта – фізичні особи. Імовірність того, що взятий кредит не буде повернений, становить 0,01; 0,05 і 0,2 відповідно. Визначити, яка частка кредитів в середньому не повертається.

2. На будівництво надходять будівельні блоки однієї марки з трьох різних заводів. Перший завод постачає 45% всіх матеріалів, другий – 30%, а третій – 25%. Імовірність браку в продукції відповідно дорівнює 0,05; 0,06; 0,07. а) Якою є ймовірність того, що навмання взятий блок буде якісним? б) Взятий навмання блок виявився бракованим. Якою є ймовірність того, що його виготовили на першому заводі?

3. У першій урні міститься п’ять білих і 10 чорних куль, в другій – три білі і сім чорних куль. Із другої урни в першу переклали одну кулю, а потім з першої урни витягнули навмання одну кулю. Визначте ймовірність того, що витягнута куля є білою.

4. У групі спортсменів 20 лижників, шість велосипедистів і чотири бігуни. Імовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника –

0,9, для велосипедиста – 0,8, для бігуна – 0,75. Визначте ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає кваліфікаційний норматив.

5. Екзаменаційний білет містить три із 40 запитань. Перший студент знає відповіді на всі запитання, другий – тільки на половину, а третій – на 30 запитань. Визначте ймовірність того, що викликаний навмання студент відповість на всі запитання білета. Якою є ймовірність того, що це буде перший студент?

6. Зібрано геодезичну інформацію з певної території. Перший геодезист дає 30% усіх відомостей, другий – 45%, третій – решту. Помилкові результати першого геодезиста становлять 1%, другого – 3%, третього – 5%. Перевірено якість вимірів одного об’єкта – виміри виявилися помилковими. Визначте ймовірність того, що виміри виконав третій геодезист.

7. На базу надійшло з 1-го комбінату 20 бетонних блоків, серед яких 15 – першого сорту і п’ять другого; з 2-го комбінату надійшло 30 блоків – 20 першого сорту і 10 другого сорту. З бази взяли бетонний блок. Якою є ймовірність, що він першого сорту?

8. Відбувається стрільба по мішені двома снарядами. Імовірність влучення після кожного пострілу дорівнює 0,6. За одного влучення мішень вражається з ймовірністю 0,5, після двох – з ймовірністю 0,8. Визначте ймовірність враження мішені.

9. На складі є 20 однотипних приладів. Причому ймовірність безвідмовної роботи 10 з них протягом місяця – 0,9, а інших 10 – 0,7. Взяли навмання два прилади. Визначте ймовірність їх безвідмовної роботи протягом місяця.

10. На складі знаходяться однакові мішки з цементом 1-го та 2-го сорту, усього 15 мішків з цементом 1-го сорту і п’ять мішків з цементом 2-го сорту. Навмання взяли один мішок і не відмітили. Після цього навмання видали ще два мішки. Якою є ймовірність того, що вони обидва 1-го сорту?

11. На базу надходять бетонні панелі з двох комбінатів в однаковій кількості. Імовірність браку на першому заводі становить 0,2, на другому – 0,1. Довільно взята на базі панель виявилася бракованою. Якою є ймовірність, що вона з першого комбінату?

12. На базу надійшли прилади від трьох виробників. Відомо, що 1-й виробник має 0,3% браку, 2-й – 0,2%, а 3-й – 0,4% браку. Навмання беруть один прилад. Визначте ймовірність, що цей прилад бракований,

якщо на базу від 1-го виробника надходить 1 000, від другого – 2 000 і від третього – 2 500 приладів.

13. Визначте ймовірність того, що 100 лампочок, взятих навмання із 1000, виявляться справними, якщо відомо, що кількість зіпсованих лампочок на 1000 штук становить від 0 до 5.

14. У тирі є п’ять рушниць, ймовірності влучення в разі одного пострілу кожною з них дорівнює відповідно: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Стрілець бере навмання рушницю і виконує один постріл. Визначте ймовірність влучення.

15. Імовірність влучення снаряда в ціль у разі одного пострілу дорівнює 0,7, а ймовірність руйнування цілі в разі влучення в неї одного снаряда становить 0,9. Виконано поспіль три постріли. Якою є ймовірність того, що ціль буде зруйнована?

16. У коробці знаходиться 15 тенісних м’ячів, з яких дев’ять – нові. Для першої гри навмання беруть три м’ячі, які після гри повертаються в коробку. Для другої гри також навмання беруть три м’ячі. Визначте ймовірність того, що всі м’ячі, взяті для другої гри, – нові.

2.8. Повторні випробування. Формула Бернуллі

На практиці часто трапляються задачі, в яких одне і те саме випробування виконують не один раз.

Нехай виконують n випробувань в однакових умовах, причому ймовірність того, що подія A може відбутися в кожному випробуванні, однакова й не залежить від результату інших випробувань (незалежні випробування). Таку послідовність випробувань називають ***схемою Бернуллі***. Якщо ймовірність появи події A в усіх випробуваннях дорівнює p, то ймовірність її непояви дорівнює $q=1-p$.

Імовірність того, що за n випробувань в схемі Бернуллі подія A з’явиться m разів ($m \le n$), обчислюють за ***формулою Бернуллі*** :

$$P_n(m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{18}$$

Приклад 2.21. Визначити ймовірність того, що «герб» випаде рівно три рази за 10 підкидань монети.

Розв’язок. Тут випробування – підкидання монети. Кількість випробувань $n=10$. Подія A – випадіння «герба» відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $p = \frac{1}{2}$, однаковою для всіх випробувань. Тоді шукана ймовірність за формулою Бернуллі становить:

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}12.$$

Приклад 2.22. Визначити ймовірність того, що «герб» випаде не менш як три рази за 10 підкидань монети.

Розв'язок. Позначимо як m кількість випадків випадіння «герба» після 10 підкидань монети, тоді ймовірність $P_{10}(3 \le m \le 10)$ може бути визначена за формулою

$$P(3 \le m \le 10) = P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + \\ + P_{10}(9) + P_{10}(10).$$

Але простіше спочатку обчислити ймовірність протилежної події $P_{10}(0 \le m \le 2) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2)$ і застосувати формулу $P_{10}(3 \le m \le 10) = 1 - P_{10}(0 \le m \le 2)$.

Тоді

$$P_{10}(3 \le m \le 10) = 1 - \left(C_{10}^{0} \cdot \frac{1}{2^{10}} + C_{10}^{1} \cdot \frac{1}{2^{10}} + C_{10}^{2} \cdot \frac{1}{2^{10}}\right) = 1 - \frac{7}{128} \approx 0{,}945.$$

Найбільш імовірна кількість успіхів у схемі Бернуллі

Для різних m імовірність $P_n(m)$ набуває різних значень. Те значення m_0, для якого ймовірність $P_n(m)$ появи події A в схемі Бернуллі є максимальною, називають ***найбільш імовірним*** і визначають з подвійної нерівності

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p. \tag{19}$$

Кількість випробувань n, які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не меншою за p_1, можна було б стверджувати, що подія A відбудеться принаймні один раз, знаходять за формулою

$$n \ge \frac{\ln(1 - p_1)}{\ln(1 - p)}. \tag{20}$$

Приклад 2.23. Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Імовірність того, що кожен із зразків буде визнаним придатний до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найбільш ймовірну кількість зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

Розв'язок. За умовою $n = 24,\ p = 0{,}6,\ q = 0{,}4$. Підставляючи дані завдання, маємо

$$24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6;$$

$$14 \le m_0 \le 15.$$

Найбільш ймовірних значень маємо два: $m_0^{(1)} = 14,\ m_0^{(2)} = 15$.

Приклад 2.24. Якою є найбільш ймовірна кількість випадінь грані з однією точкою в разі шістьох підкиданнях грального кубика? Визначити відповідну цій кількості ймовірність.

Розв'язок. Кількість випробувань $n = 6$ (підкидань грального кубика), ймовірність випадіння грані з однією точкою $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Крім того, $np - q = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$, $np + p = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$. У розгляданому випадку $\frac{1}{6} \le m_0 \le \frac{7}{6}$. Отже, $m_0 = 1$, оскільки $m_0 \in \mathbf{N}$.

Імовірність $P_6(1)$ може бути визначена за формулою Бернуллі $P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot \frac{5^5}{6^6} \approx 0{,}4$.

2.9. Наближена формула Пуассона

Застосування формули Бернуллі (18) за великих значень n і малих значень p викликає значні труднощі, оскільки пов'язане з громіздкими обчисленнями. Виникає потреба знайти наближені формули для обчислення $P_n(m)$.

Теорема Пуассона [6] Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні прямує до нуля ($p \to 0$) за необмеженого збільшення кількості n випробувань ($n \to \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа λ ($np \to \lambda$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m разів в n незалежних випробуваннях, задовольняє граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (21)$$

Строго кажучи, умова теореми Пуассона $p \to 0$ при $n \to \infty$, так що $np \to \lambda$, суперечить означенню схеми випробувань Бернуллі, згідно з якою ймовірність появи події в кожному випробуванні $p = const$. Проте, якщо ймовірність p – постійна і мала, кількість випробувань n – велика і число $\lambda = np$ – незначне (будемо вважати, що $\lambda = np \le 10$), то з граничної рівності (21) випливає наближена ***формула Пуассона:***

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \qquad (22)$$

Формула Пуассона використовується в задачах, в яких розглядають події, що рідко відбуваються.

Приклад 2.25. Завод відправив на базу 5 000 доброякісних виробів. Імовірність того, що в дорозі виріб пошкодиться, дорівнює 0,0002. Визначити ймовірність того, що на базу привезуть три неякісні вироби.

Розв'язок. За умовою $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $m = 3$, $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. За формулою Пуассона (22) шукана ймовірність дорівнює

$$P_{5000}(3) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6 \cdot e} \approx 0{,}06.$$

2.10. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m раз в n незалежних випробуваннях за достатньо великому числі n, наближено дорівнює

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (23)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – ***функція Гаусса*** і $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Зауваження. Чим більше n, тим точніша наближена формула (23), яка називається ***локальною формулою Муавра-Лапласа***. Наближені значення ймовірності $P_n(m)$, які знаходять за формулою (23), на практиці використовують як точні за умови $npq > 10$.

Таблицю значень функції $\varphi(x)$ для додатних значень x наведено в дод. 2. Властивості функції $\varphi(x)$:

1. Функція $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2. Функція $\varphi(x)$ монотонно спадає для додатних значень x, причому $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (практично можна вважати, що $\varphi(x) \approx 0$ при $x > 4$).

Приклад 2.26. Імовірність влучення в мішень після одного пострілу становить 0,2. Визначити ймовірність того, що за 400 пострілів мішень буде вражена 80 разів.

Розв'язок. За умовою $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. За локальною теоремою Муавра-Лапласа отримуємо:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(0).$$

За таблицею в дод. 2 знаходимо $\varphi(0) = 0{,}3989$. Шукана ймовірність

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

2.11. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, що подія A відбудеться в n незалежних випробуваннях від m_1 до m_2 разів, приблизно дорівнює

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{24}$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Тут $\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – ***функція Лапласа***. Таблицю значень функції Лапласа вміщено в дод. 2. Властивості функції $\Phi(x)$:

1. Функція $\Phi(x)$ є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функція $\Phi(x)$ монотонно зростає, причому $\Phi(x) \to 1$ при $x \to +\infty$, (практично можна вважати, що $\Phi(x) \approx 1$ вже при $x > 4$).

Формула (24) називається ***інтегральною формулою Муавра-Лапласа***. Чим більше значення n, тим точніша ця формула.

Приклад 2.27. Кількість студентів на потоці – 150 чоловік. Припустимо, що кожний із студентів відвідує лекцію з ймовірністю $0{,}8$. Визначити ймовірність того, що на лекції присутні від 115 до 140 студентів.

Розв'язок. За умовою $n = 150$, $m_1 = 115$, $m_2 = 140$, $p = 0{,}8$. Крім того, $q = 1 - p = 0{,}2$. Застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{115 - 150 \cdot 0{,}8}{\sqrt{150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}021;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 150 \cdot 0{,}8}{\sqrt{150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 4{,}082.$$

За таблицею дод. 2 знаходимо $\Phi(-1{,}021) = -0{,}3464$, $\Phi(4{,}082) = 0{,}4999$. Тоді шукана ймовірність дорівнює:

$$P_{150}(115 \le m \le 140) = \Phi(\mathrm{x}_2) - \Phi(\mathrm{x}_1) = 0{,}4999 - (-0{,}3464) = 0{,}8463.$$

Приклад 2.28. З усієї кількості виготовлених бетонних плит 60% становить продукція вищого сорту. Складальник бере 200 плит. Визначити ймовірність того, що кількість плит вищого сорту знаходиться в межах від 120 до 150 включно.

Розв'язок. Імовірність взяти плиту високої якості з усієї кількості плит дорівнює $p = 0{,}6$, тоді $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Крім того, кількість випробувань $n = 200$, $m_1 = 120$, $m_2 = 150$ і $npq = 200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 48$. Застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P_{200}(120 \le m \le 150) = \Phi\left(\frac{150 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{120 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{48}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{48}}\right) - \Phi(0) = \Phi(4{,}33) - \Phi(0) \approx 0{,}5.$$

Розглянемо наслідок інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

Наслідок. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля й одиниці, то за достатньо великої кількості n незалежних випробувань імовірність того, що:

а) кількість m появ події A відрізняється від добутку np не більше, ніж на величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right);$$

б) частка $\frac{m}{n}$ події A, що знаходиться в межах від α до β, тобто

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\big(\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\big),$$

де $z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}}$, $z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}}$;

в) частка $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на величину $\Delta > 0$ (за абсолютним значенням), тобто

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Із партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться вищого сорту, становить 0,8. Визначте ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два – вироби вищого сорту.

2. Монету підкидають вісім разів. Якою є ймовірність того, що «герб» випаде: а) шість разів; б) жодного разу не випаде; в) випаде хоча б один раз?

3. Що більш ймовірно – виграти у рівносильного противника-шахматиста (нічия до уваги не береться): три партії з чотирьох чи п'ять з восьми?

4. Вироби деякого підприємства містять 5% браку. Визначте ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання виробів: а) немає жодного бракованого; б) два бракованих.

5. Імовірність виграшу в лотерею на один білет становить 0,2. Куплено сім білетів. Визначте ймовірність того, що серед них буде: а) три виграшних білети; б) хоча б один виграшний.

6. Відомо, що будівельна компанія здає об'єкти в експлуатацію вчасно в середньому у 60% випадків. Якою є ймовірність того, що шість з десяти об'єктів буде здано в експлуатацію вчасно? Визначте ймовірність того, що не більш як три об'єкти не будуть готові вчасно.

7. Залік складається з п'ятьох тестових питань. На кожне питання пропонується три можливих відповіді. Визначте ймовірність того, що за методом вгадування можна правильно відповісти більш ніж на два питання.

8. Імовірність призупинення будівельних робіт на один день через погодні умови в зимовий період становить 0,2. Якою є ймовірність того, що роботи будуть призупинені на три дні протягом одного тижня? Не менш як на п'ять днів протягом тижня?

9. В урні 10 білих і 40 чорних куль. Виймають 14 куль, причому колір реєструють, а потім кулю повертають в урну. Визначте найбільш ймовірну кількість появи білої кулі.

10. Імовірність влучення стрільцем в ціль становить 0,7. Виконано 25 пострілів. Визначте найбільш ймовірну кількість влучань в ціль.

11. У результаті багаторічних спостережень встановлено, що ймовірність випадіння дощу 1 жовтня в певному місті дорівнює 1/7. Визначте найбільш ймовірну кількість дощових днів 1 жовтня в цьому місті за 40 років.

12. Визначте ймовірність появи події в кожному з 60 незалежних випробувань, якщо найбільш ймовірна кількість появ події в цих випробуваннях становить 25.

13. Якою повинна бути кількість підкидань гральної кості, щоб найбільш ймовірна кількість випадінь грані з одиницею дорівнювала п'яти?

14. Визначте ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні становить 0,25.

15. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Визначте ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

16. На лекції з теорії ймовірності присутні 200 студентів. Імовірність того, що день народження випадково вибраного студента припадає на визначений день року, становить 1/365. Визначте ймовірність того, що один студент народився 1 січня і двоє студентів народилися 8 березня.

17. Автоматична телефонна станція обслуговує 100 абонентів. Імовірність того, що абонент протягом однієї хвилини зателефонує на комутатор, становить 0,03. Якою є ймовірність, що протягом хвилини зателефонують п'ять абонентів?

18. Гральний кубик підкидають шість разів. Визначте ймовірність того, що чотири рази з'явиться число, кратне 3.

19. Відомо, що 80% спеціалістів в районі має вищу освіту. Визначте ймовірність того, що із 100 навмання відібраних людей вищу освіту мають: а) не менш як 70 людей; б) 90 людей.

20 . Комбінат випускає продукцію, 70% якої – найвищої якості. Якою є ймовірність того, що серед 200 одиниць цієї продукції 110 буде найвищої якості?

21. Імовірність помилки лінійного розміру деталі під час проектування – 0,0025. Якою є ймовірність того, що серед проектованих 800 деталей не більш ніж дві мають помилки в проектуванні?

22. Лабораторним шляхом виявлено, що сходження зерен певної рослини – 80%. Визначте ймовірність того, що із 1 000 посаджених зерен проростуть: а) не менш як 800 зерен; б) від 820 до 840 зерен.

23. У виробництві деталей імовірність браку дорівнює 0,1. Якою є ймовірність того, що із 400 навмання взятих деталей бракованими будуть: а) 50 деталей; б) менш ніж 45 деталей?; в) від 70 до 100 деталей?

24. Імовірність влучення в ціль після одного пострілу становить 0,5. Якою є ймовірність того, що після 250 пострілів ціль буде вражена: а) 145 разів; б) від 100 до 150 разів?

Розділ 3. Випадкові величини

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті випробування набуває одного і тільки одного значення з множини можливих значень, наперед невідомого і залежного від випадкових причин, які заздалегідь неможливо врахувати [3].

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами $X, Y, Z,..$(або маленькими грецькими літерами $\xi, \eta, \theta, \psi\ldots$), а їх можливі значення відповідно маленькими літерами: $x_1, x_2, x_3,\ldots$.

Випадкова величина, яка набуває скінченної або зліченної множини значень, називається ***дискретною***. Дискретна випадкова величина набуває окремих ізольованих один від одного значень з певними ймовірностями. Прикладами дискретної випадкової величини є кількість влучань в мішень після n пострілів, кількість бракованих виробів в партії, кількість очок одного підкидання гральної кості та ін.

Крім дискретних випадкових величин, є випадкові величини, які можуть набувати всіх значень із деякого скінченного або нескінченного числового проміжку. Зрозуміло, що кількість можливих значень такої випадкової величини – нескінченна (незліченна). Наприклад, розглянемо такі випадкові величини: час безвідмовної роботи приладу, її можливі значення належать проміжку $[0; t)$, де $t \geq 0$ (теоретично $t = +\infty$); дальність польоту артилерійського снаряду, її можливі значення належать деякому проміжку $(a; b)$. Серед недискретних випадкових величин виділяють важливий підклас неперервних випадкових величин, які будуть визначені далі.

Після наведених прикладів та тверджень інтуїтивного характеру дамо строге означення випадкової величини, виходячи із теоретико-множинного трактування основних понять теорії ймовірностей.

Випадковою величиною називається функція $X : \Omega \to \mathbf{R}$, визначена на просторі елементарних подій Ω, яка кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ ставить у відповідність число $X(\omega)$, тобто $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

При цьому функція $X(\omega)$ повинна бути такою, щоб для довільних $x \in \mathbf{R}$ множина $A_\omega = \{\omega : X(\omega) < x\}$ належала σ-алгебрі множин S

випадкових подій. Така функція $X = X(\omega)$ на Ω називається вимірною відносно σ-алгебри S. Тоді можна розглядати ймовірність $P(A_\omega) = P(X < x)$. (докладніше див. [2], [5]).

3.1. Закони розподілу ймовірностей випадкових величин

Будь-яка випадкова величина задається своїм законом розподілу.

Законом розподілу дискретної випадкової величини X називається відповідність (таблиця, графік, функція) між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини зазвичай записують у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Перший ряд таблиці містить всі можливі значення x_i дискретної випадкової величини, другий – їх ймовірності p_i $(i = 1,2,...,n)$. Така таблиця називається також ***рядом розподілу***.

Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданий за допомогою формули $p_i = P(X = x_i), i = 1,2,..., n$.

Оскільки в результаті випробування випадкова величина X набуває одного і тільки одного можливого значення, то події $X = x_1$, $X = x_2$, ... , $X = x_n$ утворюють повну групу, тому

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \qquad (25)$$

Якщо множина можливих значень випадкової величини X нескінченна (зліченна), то ряд $p_1 + p_2 + ...$ збігається і його сума дорівнює одиниці.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії з переломами в точках $M_1(x_1; p_1), M_2(x_2; p_2),...,\ M_n(x_n;\ p_n),....$ Задана ламана називається ***полігоном (многокутником) розподілу дискретної випадкової величини***.

Такий спосіб задати закон розподілу ймовірностей випадкових величин прийнятний лише для дискретних випадкових величин і є неприйнятним для недискретних випадкових величин.

Загальною формою закону розподілу ймовірностей, придатною для всіх випадкових величин (як дискретних, так і недискретних) є функція розподілу $F(x)$.

Нехай X – випадкова величина та x – дійсне число.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка кожному числу $x \in \mathbf{R}$ ставить у відповідність ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення меншого, ніж задане x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{26}$$

Функцію $F(x)$ іноді називають ***інтегральною функцією розподілу,*** або ***інтегральним законом розподілу***.

Геометрично функція розподілу інтерпретується як імовірність того, що випадкова точка X опиниться лівіше заданої точки x (рис. 8).

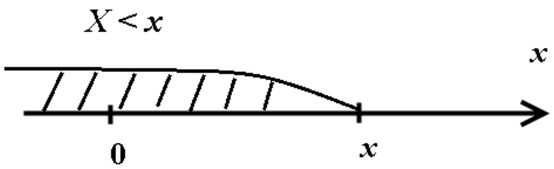


Рис. 8

Випадкову величину X називають ***неперервною (абсолютно неперервною, неперервно розподіленою)*** випадковою величиною, якщо існує така інтегровна та невід'ємна функція $f(x): R \to R$, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ функція розподілу випадкової величини $F(x)$ дорівнює

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

При цьому функція $f(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей*** неперервної випадкової величини.

Функція розподілу дискретної випадкової величини є розривною, кусково-сталою функцією, що визначається таким чином:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \tag{27}$$

Властивості функції розподілу

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Імовірність попадання випадкової величини в інтервал $[a;b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Як наслідок, імовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування набуде одного конкретного значення a, обчислюється за формулою

$$P(X = a) = P(a \le X < a + 0) = F(a + 0) - F(a).$$

Зокрема, якщо в точці a функція $F(x)$ неперервна, то $P(X = a) = 0$. Тому для неперервних випадкових величин маємо:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b).$$

4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

5. $F(x)$ – неперервна зліва в довільній точці x_0, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною в довільній точці і диференційована всюди, крім, можливо, окремих точок. Тому графік функції розподілу неперервної випадкової величини є неперервною кривою, розміщеною в смузі, обмеженій прямими $y = 0$ та $y = 1$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини X є розривною, зі стрибками p_i в точках x_i, але неперервною зліва (при наближенні до точки розриву зліва функція $F(x)$ зберігає значення). Графік функції розподілу дискретної випадкової величини має ступінчастий вигляд.

Щільність розподілу випадкової величини

Щільністю розподілу ймовірностей (щільністю розподілу, щільністю ймовірності або просто щільністю) неперервної випадкової величини X, називають функцію $f(x)$, що дорівнює похідній від її функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (28)$$

З цього означення випливає, що функція розподілу є первісною для щільності розподілу. Крім того, оскільки функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною в усіх точках і диференційованою всюди, за винятком, можливо, скінченої кількості точок, то щільність розподілу визначена всюди, за винятком, можливо, скінченої кількості точок.

Щільність розподілу є однією з форм закону розподілу випадкової величини, але тільки для неперервних випадкових величин. Щільність розподілу показує, як часто з'являється випадкова величина X в деякому околі точки x у разі повторних випробувань.

Щільність розподілу ймовірностей іноді називають також ***диференціальною функцією розподілу, диференціальним законом розподілу, або щільністю.***

Властивості щільності розподілу

1. $f(x) \geq 0$.

2. Імовірність попадання неперервної випадкової величини X в інтервал $(a;b)$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності розподілу в межах від a до b, тобто

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функція розподілу $F(x)$ виражається через щільність розподілу ймовірностей за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

4. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Графік щільності розподілу називається ***кривою розподілу*** і лежить у верхній півплощині. Вся площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox і кривою розподілу, дорівнює одиниці.

3.2. Основні числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу найбільш повно характеризує випадкову величину. Проте часто трапляються випадки, коли закон розподілу невідомий і доводиться обмежуватись меншими відомостями, числами, які описують усереднену характеристику випадкової величини та її розподілу. Такі числа називаються числовими характеристиками випадкової величини. Найбільш важливими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти.

Математичне сподівання

Математичним сподіванням випадкової величини X називається число, яке визначається за формулою:

а) ***для дискретної випадкової величини***

$$M(X) = \sum_i x_i p_i ,$$

де x_i – можливі значення випадкової величини X, а p_i – відповідні їм ймовірності.

Математичне сподівання визначає деяке «середнє» значення, навколо якого згруповані можливі значення випадкової величини. Часто математичне сподівання називають ***центром розподілу***.

Механічний сенс математичного сподівання: якщо на осі Ox розміщені точки $x_1, x_2,..., x_n$ з масами $p_1, p_2,..., p_n$, причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $M(X)$ – абсциса центра мас даної системи матеріальних точок.

б) ***для неперервної випадкової величини***

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx,$$

де $f(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X.

Механічна інтерпретація така сама, як для дискретної випадкової величини, – абсциса центра мас.

Зауважимо, що числовий ряд $\sum_i x_i p_i$ і невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ збігаються абсолютно, в іншому випадку вважають, що $M(X)$ не існує.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C) = C$, де $C - const$.

2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, де $C - const$

3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Зауважимо, що дві випадкові величини називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набула друга величина. В решті випадків випадкові величини називаються ***залежними***. Декілька випадкових величин називаються ***взаємно незалежними***, якщо закони розподілу їх довільної кількості не залежать від того, яких можливих значень набули інші величини. Властивість (3) справедлива для скінченної кількості випадкових величин, а властивість (4) справедлива для скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин.

Дисперсія

Нехай X – випадкова величина, а $M(X)$ − математичне сподівання. Тоді $X - M(X)$ будемо називати відхиленням випадкової величини X від математичного сподівання.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{29}$$

Дисперсія випадкової величини характеризує міру розкиду (розсіяння) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Обчислювати дисперсію за означенням в деяких випадках буває складно, тому можна легко показати, що

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{30}$$

Цю універсальну формулу однаково добре застосовувати як для дискретних випадкових величин, так і для неперервних. Величину $M(X^2)$ обчислюють відповідно для дискретної і для неперервної випадкових величин за формулами:

$$M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i, \qquad M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Властивості дисперсії

1. Для довільної випадкової величини X справедливо $D(X) \geq 0$.

2. $D(C) = 0$, де C – стала.

3. $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$, де C – стала.

4. Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$D(X \cdot Y) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - (M(X))^2 \cdot (M(Y))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається арифметичне значення квадратного кореня з її дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{31}$$

Середнє квадратичне відхилення є ще однією характеристикою розсіяння випадкової величини. Дисперсію вимірюють у квадратних одиницях відносно розмірності самої випадкової величини. Наприклад, якщо можливі значення деякої випадкової величини вимірюють в метрах, то її дисперсію – в квадратних метрах. В тих випадках, коли потрібно мати числову характеристику розсіювання можливих значень в тій самій розмірності, що й випадкова величина, використовують середнє квадратичне відхилення.

Моменти випадкової величини

Початковим моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини в степені k, тобто $M(X^k)$.

Центральним моментом порядку k називається математичне сподівання центрованої випадкової величини $(X - M(X))$ в степені k, тобто $M\left((X - M(X))^k\right)$.

Приклад 3.1. Виконують три незалежних випробування, у кожному з яких імовірність появи події A становить 0,3. Визначити закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості появ події A у вказаних випробуваннях. Скласти функцію розподілу і визначити ймовірність того, що подія A з'явиться не менше двох разів. Побудувати графік функції $F(x)$.

Розв'язок. Випадкова величина X – це кількість появ події A у трьох випробуваннях. Вона набуває значень: 0, 1, 2, 3, де 0 – подія A не відбулася. Знайдемо відповідні їм ймовірності. Імовірність того, що подія A не з'явилася у кожному випробуванні дорівнює $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Тому ймовірність того, що подія A не відбулася у всіх трьох випробуваннях, становить $p_0 = (0{,}7)^3 = 0{,}343$.

Імовірність того, що у n незалежних випробуваннях подія A з'явилася m разів і не з'явилася $n-m$ знаходять за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

де p – ймовірність появи події A.

Тому $p_1 = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}441$,

$p_2 = P_3(2) = C_3^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$,

$p_3 = P_3(3) = (0{,}3)^3 = 0{,}027$.

Закон розподілу:

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 2 \cdot 0{,}189 + 3 \cdot 0{,}027 = 0{,}9.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 =$$

$$= 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 4 \cdot 0{,}189 + 9 \cdot 0{,}027 - (0{,}9)^2 = 0{,}63.$$

Запишемо функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}343, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}343 + 0{,}441, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}343, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}784, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}973, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Імовірність того, що подія A з'явиться не менш як два рази дорівнює

$$P = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}189 + 0{,}027 = 0{,}216.$$

Цю ймовірність можна знайти, використовуючи функцію розподілу. Імовірність того, що подія A з'явиться не менш як два рази – це ймовірність попадання випадкової величини X в проміжок [2; 3]. Використовуючи властивість (3) функції розподілу, отримуємо:

$$P(2 \le X \le 3) = P(X=3) + P(2 \le X < 3) =$$

$$=F(3+0)-F(3)+F(3)-F(2)=1-0{,}784=0{,}216.$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 9.

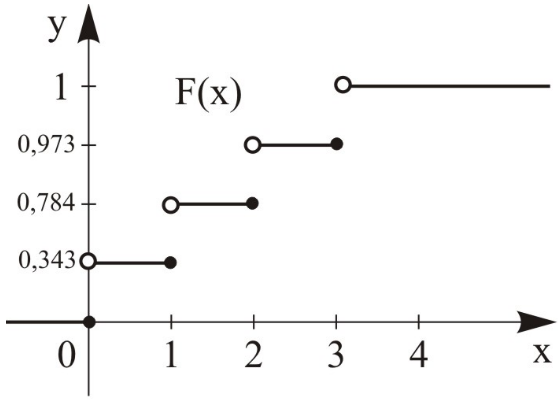


Рис. 9

Приклад 3.2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Знайти значення a, щільність розподілу $f(x)$ та ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(-1;1)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$.

Розв'язок. Оскільки випадкова величина неперервна, то і неперервною є її функція розподілу $F(x)$. Тому $a(x+1)^2=1$ при $x=2$. Звідси $a=\frac{1}{9}$. Оскільки щільність розподілу $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \frac{2}{9}(x+1), & -1<x<2, \\ 0 & x>2. \end{cases}$$

$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{9}\cdot(1+1)^2-0=\frac{4}{9}$ – ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(-1;1)$.

Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$ зображені на рис. 10 та 11.

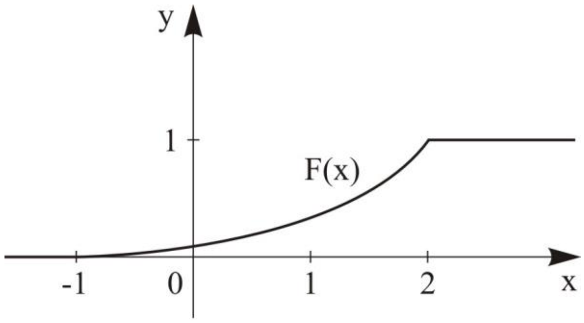


Рис. 10

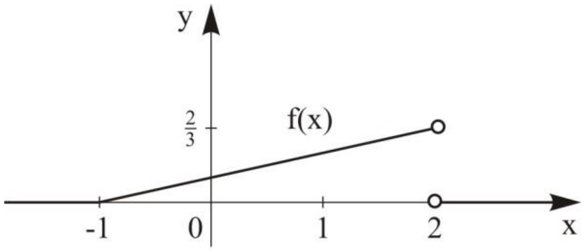


Рис. 11

Приклад 3.3. Неперервна випадкова величина X має щільність імовірності $f(x)$. Знайти: а) коефіцієнт b; б) функцію розподілу $F(x)$; в) числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(0;1)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right],\\ 0 & x\notin\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right].\end{cases}$$

Розв'язок. а) Для визначення коефіцієнта b використаємо основну властивість щільності розподілу: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Оскільки при $x\notin(-1/2;1/2]$ щільність розподілу дорівнює нулю, то інтеграл матиме вигляд:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{b\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{b}\arcsin x\Bigg|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{b}\big(\arcsin(1/2)-\arcsin(-1/2)\big)=$$

$$=\frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3b}=1.$$

Звідки $b=\pi/3$.

б) Функція розподілу пов'язана з щільністю розподілу співвідношенням $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, тому:

– якщо $x\le -1/2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$;

– якщо $-1/2 < x \le 1/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{-1/2}0\cdot du+\int_{-1/2}^{x}\frac{3du}{\pi\sqrt{1-u^2}}=0+\frac{3}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin(-1/2)\right)=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2};$$

– якщо $x > 1/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{-1/2}0\cdot du+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{3du}{\pi\sqrt{1-u^2}}+\int_{1/2}^{x}0\cdot du=$$

$$=0+\frac{3}{\pi}\left(\arcsin(1/2)-\arcsin(-1/2)\right)+0=\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Таким чином, $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1/2, \\ \dfrac{3}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -1/2<x\le 1/2, \\ 1 & x>1/2. \end{cases}$

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення визначимо за формулами:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{3}{\pi}\cdot\int_{-1/2}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{3}{\pi}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2}=0;$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{3}{\pi}\cdot\int_{-1/2}^{1/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\pi}\cdot\int_{-1/2}^{1/2}xd(-\sqrt{1-x^2})=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left(-x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1/2}^{1/2}+\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx\right)=\frac{3}{\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2}\right)=\frac{3}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}-0=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

г) $P(0<X<1)=F(1)-F(0)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості появ «герба» у двох підкиданнях монети.

2. В партії 7% нестандартних деталей. Навмання відбирають три деталі. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості нестандартних деталей серед трьох вибраних. Запишіть функцію розподілу та побудуйте її графік.

3. Пристрій складається з трьох незалежних елементів. Імовірність відмови кожного елемента під час вмикання становить 0,1. Складіть закон розподілу кількості елементів, що відмовили під час вмикання.

4. В урні знаходиться чотири кулі з номерами від 1 до 4. Вийняли дві кулі. Нехай випадкова величина X – сума номерів куль. Запишіть ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X. Побудуйте многокутник розподілу і графік функції розподілу.

5. Імовірність того, що студент складе іспити з фізики та органічної хімії дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості екзаменів, які складе студент. Запишіть функцію розподілу та побудуйте її графік.

6. Троє стрільців стріляють по одній мішені. Імовірність влучання в мішень після одного пострілу для першого стрільця становить 0,2, для другого – 0,4, для третього – 0,5. Нехай X – кількість влучань в мішень після одного залпу. Визначте закон розподілу, математичне сподівання, дисперсію випадкової величини X. Запишіть функцію розподілу та побудуйте її графік.

7. З-поміж шести ключів тільки один підходить до замка. Складіть ряд розподілу кількості спроб відімкнути замок, якщо ключ, що не підійшов до замка, в наступних спробах не бере участі. Визначте математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

8. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	0,5	1,3	2,5	x_4
P	p_1	0,3	0,1	0,4

Знайдіть x_2 і p_1, якщо математичне сподівання $M(X) = 2{,}14$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини в проміжок [0; 3).

9. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	x_2	3	4
P	0,4	p_2	0,1	0,3

Знайдіть x_1, x_2 і p_2, якщо відомо математичне сподівання $M(X) = 2{,}2$ і дисперсія $D(X) = 6{,}55$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини в проміжок [1; 3,5).

10. Дано функцію розподілу неперервної випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \le \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Визначте щільність розподілу $f(x)$.

11. Неперервна випадкова величина X має функцію розподілу $F(X)$. Визначте: 1) коефіцієнт a; 2) щільність розподілу $f(x)$; 3) побудуйте графіки $f(x)$ та $F(X)$; 4) визначте ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2), якщо

а) $x_1 = 0,\ x_2 = \pi/6$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\cos x, & 0 < x \le \pi/3, \\ 1, & x > \pi/3. \end{cases}$$

б) $x_1 = 2,\ x_2 = 2{,}5$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2}, & 2 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

12. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X дорівнює

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\pi/2,\\ \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\pi/2<x<\pi/2,\\ 0, & x\ge \pi/2. \end{cases}$$

Визначте ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях X набуде рівно двох значень з інтервалу $(0;\pi/4)$.

13. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу із щільністю $f(x)$. Визначте: 1) коефіцієнт b; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$; 4) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2), якщо

а) $x_1=-1, x_2=2$,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3,\\ \dfrac{b}{\sqrt{9-x^2}}, & -3<x\le 3,\\ 0, & x>3. \end{cases}$$

б) $x_1=0, x_2=0{,}5$,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^2-b, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1. \end{cases}$$

3.3. Основні розподіли дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл

Розглядають послідовність n випробувань за схемою Бернуллі. Імовірність появи події A в кожному випробуванні постійна і дорівнює p, не залежить від результату інших випробувань. Імовірність непояви події A становить $q=1-p$.

Дискретна випадкова величина X – це кількість появ події A в n випробуваннях. Імовірність того, що за n випробувань подія A з'явиться m разів $(0\le m\le n)$, обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (32)$$

У такому разі випадкова величина X набуває значень $m\ (m=0,1,2,\ldots,n)$ з ймовірностями $p_m=P_n(m)$. Такий закон розподілу ймовірностей випадкової величини X називається ***біноміальним законом розподілу*** з параметрами n і p.

Закон розподілу називається біноміальним тому, що праву частину рівності (32) можна розглядати як загальний член розкладу бінома Ньютона:

$$1=(p+q)^n = p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + q^n$$

.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, дорівнюють відповідно:

$$M(X)=np,\ \ D(X)=npq.$$

Біноміальний закон розподілу широко використовують у теорії і практиці статистичного контролю якості продукції, для опису функціонування систем масового обслуговування, у моделюванні цін активів та в інших сферах.

Приклад 3.4. Дискретна випадкова величина X – кількість появ цифри після підкидання монети п’ять разів. Скласти таблицю і побудувати многокутник розподілу випадкової величини.

Розв’язок. Імовірність випадіння цифри за одного підкидання монети становить 0,5. Випадкова величина X може набувати таких значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Імовірність появи кожного значення визначимо за формулою Бернуллі (32).

$$P(X=0)=C_5^0(0{,}5)^0\cdot(1-0{,}5)^5=(0{,}5)^5=0{,}03125;$$

$$P(X=1)=C_5^1(0{,}5)^1\cdot(1-0{,}5)^4=5\cdot(0{,}5)^5=0{,}15625;$$

$$P(X=2)=C_5^2(0{,}5)^2\cdot(1-0{,}5)^3=10\cdot(0{,}5)^5=0{,}3125;$$

$$P(X=3)=P(X=2)=0{,}3125;$$

$$P(X=4)=C_5^4(0{,}5)^4\cdot(1-0{,}5)^1=5\cdot(0{,}5)^5=0{,}15625;$$

$$P(X=5)=C_5^5(0{,}5)^5\cdot(1-0{,}5)^0=(0{,}5)^5=0{,}03125.$$

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

На рис. 12 побудовано многокутник розподілу.

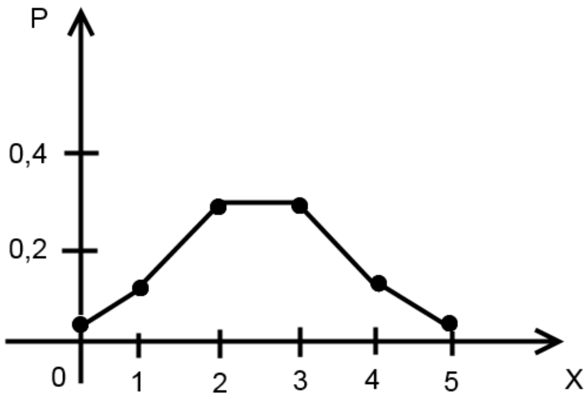


Рис.12

Геометричний розподіл

Нехай проводяться незалежні випробування за схемою Бернуллі, в кожному з яких імовірність появи події A дорівнює p, ймовірність її непояви дорівнює $q = 1 - p$. Випробування проводять до першої появи події A. Якщо подія A з'явилася в k-му випробуванні, то в усіх попередніх вона не з'являлася.

Позначимо через X дискретну випадкову величину – кількість випробувань до першої появи події A. Випадкова величина X набуває значень $k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$ з ймовірностями p_k, які обчислюють за формулою

$$p_k = P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \tag{33}$$

де $q = 1 - p$.

Такий закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X називається ***геометричним законом розподілу*** з параметром p.

Вважаючи, що $k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$ у формулі (33), отримаємо нескінченну, спадну геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q $(0 < q < 1)$:

$$p,\ qp,\ q^2 p, \ldots, q^{k-1} p, \ldots\ . \tag{34}$$

Саме тому розподіл ймовірностей (33) називається геометричним.

Зауважимо, що сума нескінченної геометричної прогресії (34) дорівнює одиниці: $S = p + qp + \ldots + q^k p + \ldots = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1.$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X, що має геометричний розподіл з параметром p: $M(x)=\dfrac{1}{p}$, $D(x)=\dfrac{q}{p^2}$.

Приклад 3.5. Імовірність попадання в ціль після окремого пострілу для стрільця становить 0,1. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – кількості пострілів по цілі до першого влучення.

Розв'язок. Випадкова величина X має геометричний розподіл з параметром $p=0{,}1$, тому $M(X)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$; $D(X)=\dfrac{0{,}9}{(0{,}1)^2}=90$.

Розподіл Пуассона

Проводять n (n – велике число) незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні дуже мала і виконується умова $np=\lambda=const$ ($\lambda\le 10$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m разів в n незалежних випробуваннях за формулою Пуассона приблизно дорівнює:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}. \tag{35}$$

Для простоти знак наближеної рівності опускають.

Випадкова величина X – кількість появ події A в цих випробуваннях. В такому разі дискретна випадкова величина X набуває значень m $(m=0,1,2,\ldots)$ з ймовірностями $p_m=P_n(m)=P(X=m)$. Такий закон розподілу ймовірностей випадкової величини X називається ***розподілом Пуассона*** з параметром λ.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона: $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

Розподіл Пуассона відіграє важливу роль в теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування, теорії надійності.

Потоком подій називається послідовність подій, які виникають у випадкові моменти часу. Приклади потоків: надходження викликів на АТС, на пункт невідкладної медичної допомоги; прибуття літаків в аеропорт, клієнтів на підприємство побутового обслуговування, послідовність відмов деяких елементів та інше.

Якщо потік подій ***найпростіший*** (***пуассонівський)*** [3], то ймовірність появи події A m раз за час t визначають за формулою Пуассона:

$$P_t(X=m)=\frac{(\lambda t)^m\cdot e^{-\lambda t}}{m!}. \qquad (36)$$

Тут $\lambda = M(X)$ – інтенсивність потоку або середня кількість появ події A за одиницю часу.

Приклад 3.6. Під час роботи дистанційно керованої будівельної машини час від часу виникають неполадки (збої). Потік збоїв є найпростішим пуассонівським потоком. Середня кількість збоїв за добу дорівнює 1. Визначити ймовірності таких подій: A – протягом доби буде хоча б один збій, B – за дві доби не буде жодного збою, C – за тиждень роботи машини буде не менш як три збої.

Розв'язок. Позначимо випадкову величину X – кількість збоїв машини за добу. Оскільки математичне сподівання випадкової величини X – це середнє значення випадкової величини, то $M(X)=1$. Дискретна випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, тому $M(X)=\lambda=1$ і ймовірність виникнення збоїв m раз за час t за формулою Пуассона (36) становить $P_t(X=m)=\dfrac{(\lambda t)^m\cdot e^{-\lambda t}}{m!}$, $m=0,1,2,\ldots$.

Отже, ймовірність події A за одну добу, тобто за час $t=1$, дорівнює

$$P(A)=P_1(X\geq 1)=1-P_1(X<1)=1-P_1(X=0)=1-e^{-1}\approx 0{,}6321.$$

Імовірність події B за дві доби, тобто за час $t=2$, становить

$$P(B)=P_2(X=0)=\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}.$$

Імовірність події C за тиждень роботи, тобто за сім діб ($t=7$), становить

$$P(C)=P_7(X\geq 3)=1-P_7(X<3)=$$
$$=1-P_7(X=0)-P_7(X=1)-P_7(X=2)=$$
$$=1-\frac{7^0}{0!}\cdot e^{-7}-\frac{7}{1!}e^{-7}-\frac{7^2}{2!}e^{-7}\approx 0{,}970.$$

3.4. Основні розподіли неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***рівномірним***, якщо її щільність імовірності $f(x)$ на цьому відрізку стала, а поза ним дорівнює нулю, тобто:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0 & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Коротко такий розподіл позначають як $X\sim R[a,b]$. Для рівномірно розподіленої випадкової величини X :

Функція розподілу	Математ. сподівання	Дисперсія
$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1 & b<x.\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Імовірність попадання рівномірно розподіленої випадкової величини X в будь-який інтервал $(c,d)\subset[a,b]$ пропорційна довжині цього інтервалу:

$$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a}. \qquad (37)$$

Рівномірний закон розподілу використовують в аналізі помилок заокруглення у числових розрахунках (наприклад, помилка заокруглення числа до цілого розподілена рівномірно на відрізку $[-0{,}5;+0{,}5]$), в багатьох задачах з масового обслуговування, у статистичному моделюванні спостережень, підпорядкованих заданому розподілу.

Приклад 3.7. На відрізку $[4;\,8]$ вказують точку. Якою є ймовірність того, що точка буде в лівій половині відрізка.

Розв'язок. Випадкова величина X – координата точки на відрізку $[4;\,8]$ має рівномірний розподіл

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[4;8],\\ \frac{1}{8-4}=\frac{1}{4}, & x\in[4;8].\end{cases}$$

Імовірність попадання точки в ліву половину відрізка – це ймовірність попадання точки на відрізок $[4;6]$. Таким чином, за формулою (37) маємо

$$P(4<X<6)=\frac{6-4}{8-4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 3.8. На шосе встановлений автоматичний світлофор, в якому для транспорту протягом однієї хвилини горить зелене світло і 45 секунд – червоне. Автомобіль проїжджає по шосе у випадковий момент часу, не пов'язаний з роботою світлофора. Визначити ймовірність того, що автомобіль проїде мимо світлофора, не зупиняючись.

Розв'язок. Розглянемо випадкову величину t – момент часу проїзду автомобіля мимо світлофора в інтервалі, рівному періоду зміни кольорів у світлофорі, $0\le t\le(1+\frac{3}{4})=\frac{7}{4}$. Випадкова величина t розподілена рівномірно на відрізку $\left[0;\frac{7}{4}\right]$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;7/4],\\ \frac{4}{7}, & x\in[0;7/4].\end{cases}$

Імовірність проїзду автомобіля без зупинки мимо світлофора за формулою (37) дорівнює

$$P(0<t<1)=\frac{1-0}{7/4-0}=\frac{4}{7}.$$

Нормальний закон розподілу (закон Гауса)

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***нормальним законом, або законом Гауса,*** з параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a і σ – сталі такі, що a – математичне сподівання, а σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Коротко позначають як $X \sim N(a,\sigma)$.

Графік щільності ймовірностей $f(x)$ нормального розподілу (рис. 13) називають ***нормальною кривою***, або ***кривою Гауса***.

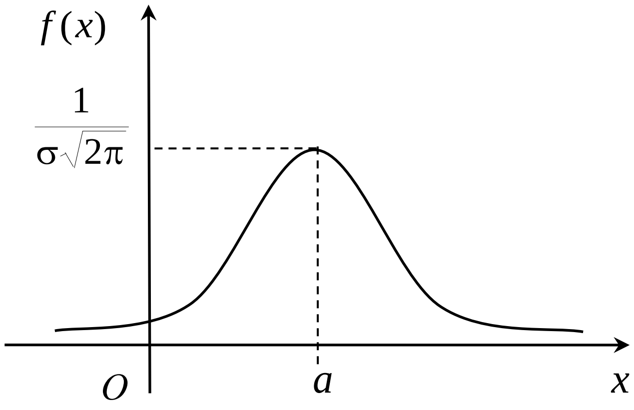


Рис. 13

Нормальний розподіл з параметрами $a=0$ і $\sigma=1$ називається ***стандартним***. Щільність розподілу стандартної випадкової величини має такий вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами a і σ:

Функція розподілу	Математ. сподівання	Дисперсія
$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$	$M(X)=a$	$D(X)=\sigma^2$

Імовірність попадання в інтервал (c,d) нормально розподіленої випадкової величини X визначають за формулою:

$$P(c<X<d)=\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right), \qquad (38)$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – нормована (стандартна) функція Лапласа (значення функції див. в дод. 1, враховуючи $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; $\Phi(0)=0$; $\Phi(+\infty)=0{,}5$).

Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, визначають за формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (39)$$

З цієї формули отримуємо $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973.$

Звідси випливає ***правило трьох сігма***: якщо випадкова величина розподілена нормально, то практично достовірно, що абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання є не більшою за потроєне середнє квадратичне відхилення.

Імовірність того, що абсолютна величина відхилення перевищить потроєне середнє квадратичне відхилення, є дуже малою, а саме становить 0,0027, що, зважаючи на принцип неможливості малоймовірних подій, можна вважати практично неможливими [2].

Нормальний закон широко застосовують на практиці. За його допомогою описують похибки вимірювання різних фізичних величин, лінійні розміри, масу і багато параметрів деталей за масового виробництва.

Приклад 3.9. Визначити ймовірність попадання в заданий інтервал (10; 18) нормально розподіленої випадкової величини, якщо відоме її математичне сподівання $a=8$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=6$.

Розв'язок. Для обчислення шуканої ймовірності скористаємося формулою (38):

$$P(10<X<18)=\Phi\left(\frac{18-8}{6}\right)-\Phi\left(\frac{10-8}{6}\right)=\Phi(1{,}67)-\Phi(0{,}34)=$$

$$=0{,}45254-0{,}13307=0{,}31947.$$

Значення функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо за таблицею (дод. 1).

Приклад 3.10. Похибка спостережень X в обчисленні довжини деталі розподілена нормально з параметрами $a=5$ мм і $\sigma=4$ мм. Визначити ймовірність того, що значення довжини деталі відхилиться від дійсного більш ніж на 10 мм.

Розв'язок. $P(|X|\geq 10)=1-P(|X|<10)$. Оскільки випадкова величина X має нормальний розподіл, то

$$P(|X|<10)=P(-10<X<10)=\Phi\left(\frac{10-5}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right)=$$

$$=\Phi(1{,}25)+\Phi(3{,}75)=0{,}39435+0{,}49989=0{,}8942.$$

Звідси $P(X\geq 10)=1-0{,}8942\approx 0{,}1058.$

Приклад 3.11. Середня квадратична похибка висотоміра становить 15 м. Якою є ймовірність того, що літак відхилиться від розрахункової висоти не більш ніж на 20 м?

Розв'язок. Нехай випадкова величина X (м) – похибка висотоміра. Відомо, що похибки вимірювань підлягають нормальному закону розподілу з параметрами $a=0$ м і $\sigma=15$ м.

За умовою потрібно визначити ймовірність події -20 м $< X < 20$ м. Імовірність цієї події визначаємо за формулою (38):

$$P(-20<X<20)=\Phi\left(\frac{20}{15}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{15}\right)=2\Phi(1{,}33)=0{,}816.$$

Показниковий (експоненціальний) закон розподілу

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***показниковим*** з параметром λ, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

Коротко такий розподіл позначають $X\sim Exp(\lambda)$.

Для випадкової величини X, що має показниковий розподіл з параметром λ:

Функція розподілу	Математ. сподівання	Дисперсія
$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$	$M(X)=\frac{1}{\lambda}$	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Імовірність попадання випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом, в будь-який інтервал (a,b):

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \quad (40)$$

Показниковий розподіл широко застосовують в теорії надійності технічного обладнання для характеристики терміну безвідмовної роботи елементів та пристроїв, в теорії масового обслуговування для характеристики його тривалості.

Нехай T − тривалість безвідмовної роботи деякого елемента. Імовірність відмови елемента за час t становить $F(t) = P(T < t)$. Отже, ймовірність безвідмовної роботи елемента за такий самий час t дорівнює $R(t) = P(T > t) = P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t)$. Функцію $R(t)$ називають ***функцією надійності***.

Випадкова величина T часто має показниковий розподіл, функція розподілу якої $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Звідси її функція надійності має вигляд $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$. При цьому параметр λ є ***інтенсивністю відмов*** цього елемента, тобто середня кількість відмов за одиницю часу.

Приклад 3.12. Випадкова величина T − час безвідмовної роботи радіолампи, має показниковий розподіл. Треба визначити ймовірність того, що лампа буде працювати не менш ніж 800 годин, якщо середній час роботи лампи 400 годин.

Розв'язок. За умовою задачі $M(T) = 400$. Оскільки випадкова величина T має показниковий розподіл, то $M(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 400$. Звідси $\lambda = \dfrac{1}{400}$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P(T \geq 800) = 1 - P(T < 800) = 1 - F(800) = 1 - (1 - e^{-\frac{800}{400}}) = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Приклад 3.13. Час безвідмовної роботи елемента розподілений за показниковим законом $f(t) = 0{,}01 e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$, де t – час, год. Визначити ймовірність того, що елемент працюватиме безвідмовно протягом 100 год.

Розв'язок. За умовою інтенсивність відмов $\lambda = 0{,}01$. Скористаємося формулою функції надійності $R(t) = e^{-\lambda t}$:

$$R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} = e^{-1} \approx 0{,}37.$$

Імовірність того, що елемент працюватиме безвідмовно протягом 100 год, дорівнює приблизно 0,37.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. У партії є 10% нестандартних деталей. Навмання відбирають чотири деталі. Запишіть закон розподілу випадкової величини X – кількості нестандартних деталей серед чотирьох відібраних, побудуйте графік функції розподілу, знайдіть $M(X)$, $D(X)$ і ймовірність $P(X \leq 2)$.

2. Гральний кубик підкидають чотири рази. Випадкова величина X – кількість випадінь «шестірки». Запишіть закон розподілу випадкової величини X, функцію розподілу, знайдіть $M(X)$, $D(X)$ і ймовірність $P(X \geq 1)$.

3. Два гральні кубики одночасно підкидають два рази. Запишіть закон розподілу випадкової величини X – кількості випадінь парної кількості очок на обох гральних кубиках. Побудуйте графік функції розподілу, знайдіть $M(X)$, $D(X)$ і ймовірність $P(X < 2)$.

4. Після відповіді студента на питання екзаменаційного білета екзаменатор ставить студенту додаткові запитання. Викладач перестає ставити додаткові запитання, тільки-но студент не дає відповіді на поставлене запитання. Імовірність того, що студент відповість на довільне додаткове запитання, дорівнює 0,9. Запишіть закон розподілу випадкової величини X – кількості додаткових запитань, які поставить викладач студенту.

5. Імовірність попадання баскетбольного м’яча в кільце спортсменом-початківцем дорівнює $1/4$. М’яч кидають до першого влучення, але дозволено не більш як дві спроби. Визначте ряд розподілу випадкової величини X – кількості промахів. Побудуйте графік функції розподілу, знайдіть $M(X)$ і $D(X)$.

6. Імовірність попадання в мішень становить 0,6 за кожного пострілу. Стрільба ведеться поодинокими пострілами до першого влучення, поки не буде використаний боєзапас. Визначте ряд розподілу випадкової величини X – кількості виконаних пострілів, якщо боєзапас містить три одиниці. Побудуйте графік функції розподілу, знайдіть $M(X)$ і $D(X)$.

7. Імовірність виходу з ладу приладу під час випробування становить $p = 0{,}0004$. Випробувано 10 000 приладів, що працюють незалежно один

від одного. Запишіть закон Пуассона розподілу випадкової величини X – кількості приладів, що вийшли з ладу. Знайдіть $P(1 \le X \le 2)$.

8. У банк надійшло 4 000 пакетів грошових знаків. Імовірність того, що пакет містить недостатню чи надмірну кількість грошових знаків дорівнює 0,0001. Визначте: а) ймовірність того, що під час перевірки буде виявлений хоча б один помилково укомплектований пакет; б) ймовірність того, буде не більш як три помилково укомплектованих пакети; в) математичне сподівання і дисперсію кількості помилково укомплектованих пакетів.

9. Для популяризації своєї продукції на ринку фірма розкладає по поштових скриньках рекламні листівки. Попередній досвід роботи фірми свідчить, що приблизно в одному випадку з 2 000 надходить замовлення. Визначте ймовірність того, що в разі розкладання 10 000 рекламних листівок надійде хоча б одне замовлення, середню кількість і дисперсію замовлень.

10. В бюро обслуговування за одну хвилину в середньому поступає два замовлення. Знайдіть ймовірність того, що за чотири хвилини надійде: а) три замовлення; б) менше трьох замовлень; в) не менше трьох замовлень; г) не надійде жодного замовлення. Потік замовлень вважається найпростішим.

11. Середнє число помилкових з’єднань абонента за місяць дорівнює вісім. Знайдіть ймовірність того, що таких з'єднань за місяць буде більше чотирьох. Потік помилкових з’єднань вважається найпростішим.

12. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 2]$. Складіть графіки функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини X і знайдіть імовірність $P(1 < X < 5)$, математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$.

13. Автобуси деякого маршруту рухаються строго за розкладом з інтервалом 10 хвилин. Визначте ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати на автобус менш ніж сім хвилин.

14. Ціна поділки шкали вимірювального приладу – 0,2. Показання приладу округлюють до найближчого цілого поділу. Визначте ймовірність того, що під час вимірювання буде помилка а) менша за 0,04; б) більша за 0,05.

15. Задано нормально розподілену випадкову величину X з параметрами $a,\ \sigma$. Визначте щільність розподілу випадкової величини X

і Побудуйте її графік. Визначте ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (x_1, x_2).

а) $a = 10,\ \sigma = 1;\ x_1 = 9,\ x_2 = 12;$

б) $a = 11,\ \sigma = 2,\ x_1 = 10,\ x_2 = 13;$

в) $a = 12,\ \sigma = 3,\ x_1 = 6,\ x_2 = 15.$

16. Середня квадратична похибка висотоміра становить 15 м. Якою є ймовірність того, що літак відхилиться від розрахункової висоти не більш ніж на 20 м?

17. Вимірюють діаметр деталі без систематичних похибок. Випадкові похибки X підлягають нормальному закону розподілу з $D(X) = 100$ мм. Знайдіть $P(|X| < 15)$.

18. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a = 1{,}6$ і $\sigma = 1$. Визначте ймовірність того, що під час трьох випробуваннь ця випадкова величина принаймні один раз набуде значень з інтервалу $(1{,}5;\ 2)$.

19. Коробки з листівками пакують автоматично, їхня маса розподілена за нормальним законом із середнім значенням 1,06 кг. Визначте стандартне відхилення σ, якщо 5% коробок мають масу, меншу за 1 кг.

20. Станок-автомат виготовляє валики, контролюючи їх діаметр X. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм, знайдіть інтервал, в якому з ймовірністю 0,9973 будуть знаходитися діаметри виготовлених валиків.

21. Випадкова величина – $X \sim Exp(\lambda = 2)$. Визначте ймовірності $P(X > 1)$, $P(X < 2)$, $P(X > -1)$, $P(X = 3)$ і $P(1 < X < 3)$, математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

22. Встановлено, що час ремонту телевізора є випадковою величиною X, розподіленою за показниковим розподілом. Визначити ймовірність того, що на ремонт телевізора потрібно не менш ніж 20 днів, якщо середній час ремонту телевізора становить 15 днів. Визначте щільність ймовірності, функцію розподілу і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

23. Звичайна нарада триває годину. Цього разу засідання за годину не закінчилося. Якою є ймовірність того, що воно закінчиться в найближчі 15 хв? Тривалість наради розподілена за показниковим розподілом.

24. Час, потрібний для укладання договору, є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}4\ \dfrac{\text{договора}}{\text{год}}$. Визначте ймовірність того, що укладання договору триватиме менш ніж сім годин. Знайдіть середній час укладання договору.

3.5. Граничні теореми

За деяких умов поведінка суми великої кількості випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною. Ці умови зазначено в теоремах, які мають спільну назву – ***закон великих чисел***.

Перша нерівність Чебишева. Для довільної випадкової величини $X \ge 0$, яка має скінченне математичне сподівання, та для будь-якого числа $\alpha > 0$ справедливою є нерівність:

$$P(X \ge \alpha) \le \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{41}$$

Оскільки сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці,

$$P(X \ge \alpha) + P(X < \alpha) = 1,$$

то, крім оцінки (41), застосовують також оцінку

$$P(X < \alpha) \ge 1 - \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{42}$$

Друга нерівність Чебишева. Якщо випадкова величина X має скінченні математичне сподівання та дисперсію, то для довільного $\varepsilon > 0$ справедливою є нерівність:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{43}$$

або $$P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{44}$$

Теорема Бернуллі. Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних повторних випробувань дорівнює p, а кількість появ події A (частота події) в n випробуваннях дорівнює m. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливою є нерівність

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad (q = 1 - p), \tag{45}$$

яка при $n \to \infty$ переходить у граничну рівність $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1.$

Теорема Чебишева. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, які задовольняють умовам $M(X_i) = a_i$, $D(X_i) \le C$, $i = 1,2,...$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливою є нерівність

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \qquad (46)$$

яка при $n \to \infty$ переходить у граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (47)$$

Наслідок. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, які мають однакові математичні сподівання $M(X_i) = a$ і $D(X_i) \le C$, $i = 1,2,...$, то нерівність (46) і границя (47) набудуть вигляду:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Нехай X_n, X – випадкові величини з функціями розподілу $F_n(x)$ і $F(x)$ відповідно. Кажуть, що X_n ***слабко збігається*** до X або, що те саме, $F_n(x)$ ***слабко збігається*** до $F(x)$, якщо для довільної неперервної обмеженої функції $g: R \to R$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x).$$

Класична центральна гранична теорема [2; 5]. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають скінченне математичне сподівання $M(X_i) = a$ і дисперсію, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1,2,...$, а $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, n \ge 1$. Тоді центрована та нормована сума

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}} = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$ слабко збігається до стандартної нормально розподіленої випадкової величини $N(0,1)$ при $n \to \infty$.

Зокрема, для $\forall x \in \mathbf{R}$ справедлива збіжність функцій розподілу

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x).$$

Зауваження. Неформально кажучи, класична центральна гранична теорема стверджує, що сума n незалежних однаково розподілених випадкових величин S_n має розподіл, близький до нормального $N(an, \sigma^2 n)$.

Значення цього результату є теоретичною основою застосування нормального розподілу для розв’язання багатьох практичних задач. Завжди, коли можна вважати, що випадкова величина є сумою великої кількості взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму досить малий, то її розподіл мало відрізняється від нормального. Такими будуть, наприклад, помилки вимірювань у вимірювальних приладах, швидкості руху молекул газу, внаслідок неодноразових зіткнень з сусідніми молекулами тощо.

Приклад 3.14. В середньому на будівництві витрачають 1 000 л води за день, а середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини не перевищує 200 л. Треба визначити: а) оцінку того, що витрати води в довільний вибраний день не перевищать 2 000 л; б) оцінку ймовірності того, що витрати води будуть в межах від 500 до 1 500 л.

Розв’язок. а) Нехай випадкова величина X – витрати води на будівництві (л). За умовою $M(X) = 1\,000$. Застосовуючи першу нерівність Чебишева (42), отримаємо:

$$P(X \le 2\,000) \ge 1 - \frac{1\,000}{2\,000} = 0{,}5.$$

б) За умовою задачі $\sigma(X) = 200$, тому $D(X) = 40\,000$. Застосовуючи другу нерівність Чебишева (43), отримаємо:

$$P(500 < X < 1\,500) = P(-500 < X - 1\,000 < 500) = P(|X - 1\,000| < 500) \geq$$
$$\geq 1 - \frac{40\,000}{250\,000} = 0{,}84.$$

Приклад 3.15. Для визначення середньої тривалості горіння електричних ламп в партії з 300 однакових ящиків було взято на вибір по одній лампі з кожного ящика. Оцініть імовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 300 ламп відрізнятиметься від середньої тривалості горіння ламп в усій партії не більше ніж на п'ять годин (за абсолютною величиною), якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння ламп в кожному ящику менше вісім годин.

Розв'язок. Нехай випадкова величина X_i – тривалість горіння лампи, взятої з i-того ящика. За умовою дисперсія $D(X_i) < 8^2 = 64$ год. Середня тривалість горіння відібраних ламп становить $(X_1 + X_2 + ... + X_{300})/300$, а середня тривалість горіння ламп в усій партії – $(M(X_1) + M(X_2) + ...\ + M(X_{300}))/300$ Тоді ймовірність шуканої події за теоремою Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_{300}}{300} - \frac{M(X_1) + ... + M(X_{300})}{300}\right| \leq 5\right) \geq 1 - \frac{64}{300 \cdot 5^2} \approx 0{,}9915,$$

тобто не менше, ніж 0,9915.

Приклад 3.16. Скільки треба виконати вимірювань фізичної величини, щоб з ймовірністю, не меншою за 0,9, гарантувати відхилення (за модулем) середнього арифметичного цих вимірювань від істинного значення фізичної величини, менше від 0,05? Відомо, що в кожному вимірюванні дисперсія не перевищує 0,2.

Розв'язок. Оскільки вимірювання виконуються незалежно одне від одного, то результат – незалежні випадкові величини, дисперсії яких обмежені сталою $C = 0{,}2$. Застосуємо теорему Чебишева.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right| < 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}9;$$

$$1 - \frac{0{,}2}{n \cdot (0{,}05)^2} \geq 0{,}9;\ \frac{0{,}2}{0{,}0025n} \leq 0{,}1;\ 0{,}0025n \geq 2;\ n \geq \frac{2}{0{,}0025} = 800.$$

Отже, $n \geq 800$, тобто потрібно виконати не менш як 800 вимірювань.

Приклад 3.17. Визначити ймовірність того, що тривалість 100 виробничих операцій виявиться в межах від 77 до 82 хв, якщо середній час однієї операції 47,4 с, а середнє квадратичне відхилення – 4,9 с.

Розв'язок. Позначимо як X_i випадкову величину, рівну тривалості i-ї виробничої операції, $i = 1,2,...,100$. За умовою $a = M(X_i) = 47{,}4$ с, $\sigma = \sigma(X_i) = 4{,}9$ с. Позначимо випадкову величину X – тривалість 100 виробничих операцій, тоді $X = X_1 + X_2 + ... + X_{100}$. За умовою X_i – незалежні й однаково розподілені випадкові величини. Оскільки кількість випробувань досить велика, то можна вважати, що умов центральної граничної теореми дотримано та X має нормальний розподіл $N(an, \sigma^2 n)$ з математичним сподіванням

$$M(X) = an = 100 \cdot 47{,}7 = 4740$$

та середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma(X) = \sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{100} \cdot 4{,}9 = 49.$$

За формулою (38) попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал маємо

$$P(77 \cdot 60 \leq X \leq 82 \cdot 60) = P(4620 \leq X \leq 4920) =$$
$$= \Phi\left(\frac{4920 - 4740}{49}\right) - \Phi\left(\frac{4620 - 4740}{49}\right) = \Phi(3{,}673) - \Phi(-2{,}449) =$$
$$= \Phi(3{,}673) + \Phi(2{,}449) = 0{,}4998 + 0{,}4857 = 0{,}9855.$$

Приклад 3.18. Незалежні випадкові $X_1, X_2, ..., X_{100}$ величини розподілені рівномірно на відрізку $[0;1]$. Знайти ймовірність того, що $P(55 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 70)$.

Розв'язок. За умовою X_i – незалежні однотипні рівномірно розподілені випадкові величини, $a = M(X_i) = 1/2$; $\sigma^2 = D(X_i) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{2}$; $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, тому за центральною граничною теоремою за достатньо великого n випадкова величина $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ має нормальний розподіл з параметрами $M(X)=na=100\cdot 0{,}5=50$, $\sigma(X)=\sigma\cdot\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{100}=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$. За формулою (38) попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал маємо

$$P(55\le X\le 70)=P(4620\le X\le 4920)=$$

$$=\Phi\left(\frac{70-50}{5/\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(\frac{55\text{-}50}{5/\sqrt{3}}\right)=\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{5}\right)-\Phi\left(\frac{5\sqrt{3}}{5}\right)=$$

$$=\Phi(4\sqrt{3})-\Phi(\sqrt{3})=\Phi(6{,}93)-\Phi(1{,}73)\approx 0{,}5-0{,}4582=0{,}0418.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що $|X-M(X)|<0{,}2$, якщо $D(X)=0{,}004$.

2. Яке значення повинна мати величина ε в нерівності Чебишева, щоб $P(|X-a|<\varepsilon)\approx 0{,}99$, якщо відомо, що $D(X)=4$?

3. До світлової мережі паралельно під'єднано 20 ламп. Імовірність того, що за час T лампа буде ввімкнена, дорівнює 0,8. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнених ламп і середньою кількістю (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T виявиться: а) меншою, ніж три; б) не меншою, ніж три.

4. Імовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 1/5. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що кількість X появ події знаходиться в межах від 150 до 250, якщо будуть виконані 900 випробувань.

5. З якою ймовірністю середнє арифметичне вимірювань деякої величини є відповідним істинному значенню цієї величини, якщо виконано 500 вимірювань з точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин результатів вимірювань не перевищують 0,3.

6. Скільки треба виконати вимірювань діаметра деталі, щоб середнє арифметичне цих вимірювань відрізнялось від істинного розміру діаметра деталі не більш ніж на 0,05 з надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують 0,2?

7. Випадкова величина X – середнє арифметичне 10 000 незалежних випадкових величин, що підлягають одному і тому самому закону розподілу, середнє квадратичне відхилення кожної з них дорівнює 2. Якого максимального відхилення величини X від її математичного сподівання можна сподіватися з ймовірністю 0,9533?

8. Випадкові величини X_i, $i = 1,2,...,300$ мають математичне сподівання $M(X_i) = 1/3$ і дисперсію $D(X_i) = 2/9$. Визначте ймовірність того, що випадкова величина $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$ знаходиться в межах $85 < X < 115$.

9. Величина S – сума 100 чисел, кожне з яких згенероване датчиком випадкових чисел. Датчик видає випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0;1]$. Визначте ймовірність того, що випадкова величина S знаходиться в межах $45,3 \le S \le 54,7$.

Завдання до варіантів контрольної роботи

1. Розв'язати задачі, використовуючи класичне означення ймовірності випадкової події.

2. Розв'язати задачі, використовуючи операції над випадковими подіями.

3. Розв'язати задачі, використовуючи геометричне означення ймовірності.

4. Розв'язати задачі, застосовуючи формулу повної ймовірності або формулу Байєса.

5. Розв'язати задачі про незалежні повторні випробування, застосовуючи формулу Бернуллі або наближені формули.

6. Розв'язати задачі для дискретної випадкової величини.

7. Неперервна випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$. Визначте: 1) коефіцієнт a; 2) щільність розподілу $f(x)$; 3) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2). Побудуйте графіки $f(x)$ та $F(x)$.

8. Неперервна випадкова величина X підпорядкована закону розподілу із щільністю $f(x)$. Визначте: 1) коефіцієнт b; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2).

9. Розв'язати задачі, застосовуючи основні закони розподілу випадкових величин.

10. Розв'язати задачі, використовуючи граничні теореми теорії ймовірностей.

Варіант 1

1. На 10 карточках надруковані всі натуральні числа від 1 до 10. З цих 10 карточок навмання вибирають дві (без повернення). Визначте ймовірність того, що на кожній з них виявляться числа, менші за сім.

2. Імовірність влучення стрільцем в першу мішень дорівнює 0,7. Якщо після першого пострілу зафіксовано влучення, то стрілець дістає право на один постріл по іншій мішені. Імовірність ураження обох мішеней після двох пострілів – 0,5. Визначте ймовірність влучення в другу мішень.

3. Два числа x та y навмання вибирають з відрізка [0; 1]. Визначте ймовірність того, що $x^2 + y^2 \le 0{,}25$.

4. У відбіркових змаганнях беруть участь троє студентів із першої групи, двоє – з другої, і п’ятеро – з третьої групи. Імовірність попадання в збірну команду університету для студентів цих груп становить відповідно 0,7; 0,8 і 0,6. Якою є ймовірність того, що навмання вибраний студент попав в збірну команду?

5. Визначте ймовірність того, що за 180 підкидань грального кубика «шестірка» випаде 30 разів.

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	2	x_2	x_3	5,5
P	0,3	p_2	0,4	0,1

Знайдіть x_2, x_3 і p_2, якщо $x_2 < x_3$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 3{,}45$ та дисперсія $D(X) = 1{,}1725$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання X в проміжок (3,7; 5,5].

7. $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ 1/8 \cdot (x-4)^3, & 4 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$	8. $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & 1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

9. Помилка вимірювання приладу підпорядковується нормальному закону розподілу. Прилад має систематичну помилку $a = 2$ см. і середньоквадратичну помилку $\sigma = 3$ см. Якою є ймовірність того, що за $n = 4$ незалежних вимірювань помилка буде в межах (0; 4)?

10. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 0,002. Оцініть імовірність того, що випадкова величина X відрізняється від її математичного сподівання $M(X)$ не менш, ніж на 0,2.

Варіант 2

1. В урні вісім куль – три білих і п’ять чорних. Навмання беруть три кулі (без повернення). Визначте ймовірність того, що: а) всі кулі білого кольору; б) одна куля біла, решта чорні; в) всі кулі одного кольору.

2. Два баскетболісти виконують два кидки м’ячем в корзину. Імовірність попадання в корзину після кожного кидка для кожного баскетболіста дорівнює відповідно 0,6 та 0,7. Визначте ймовірність того, що в обох буде однакова кількість попадань.

3. Всередині кола радіуса R навмання поставлено точку. Якою є ймовірність того, що ця точка виявиться всередині квадрата, вписаного в коло?

4. У тирі дві рушниці, ймовірності влучення з яких відповідно 0,6 та 0,8. Визначте ймовірність влучення після двох пострілів, якщо стрілець щоразу бере рушницю навмання.

5. Виробництво дає 1% браку. Якою є ймовірність того, що серед взятих 2 000 виробів буде не більш ніж 17 бракованих?

6. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості влучень в мішень після шести пострілів, якщо ймовірність влучення після одного пострілу становить 0,4. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = -1,\ x_2 = 0{,}5,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{a}(2x^3 + x^2), & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = \pi/6,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ b\cos x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

9. Для рівномірно розподіленої в інтервалі $[1; 8]$ випадкової величини обчислити математичне сподівання, дисперсію та ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу $(-2; 2)$.

10. Щоденно витрати на покупку кріпильних матеріалів на будівництві становлять в середньому 1 000 грн, а середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини не перевищує 200 грн. Знайдіть: а) оцінку ймовірності того, що витрати на кріпильні матеріали в довільно навмання вибраний день не перевищують 2 000 грн.; б) оцінку ймовірності того, що витрати будуть в межах від 500 до 1 500 грн.

Варіант 3

1. Підкидають дві гральні кості. Визначте ймовірність того, що добуток очок, які випали, не перевищує 5.

2. Імовірність того, що виготовлена на першому станку деталь буде першосортною, дорівнює 0,7. Для деталі, виготовленої на другому станку, ця ймовірність становить 0,8. На першому станку виготовлено дві деталі, на другому – три. Визначте ймовірність того, що всі п’ять деталей будуть першосортними.

3. У квадраті зі стороною a навмання вибрано точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої вершини квадрата не перевищує $a/2$.

4. На фабриці перша машина виробляє 25%, друга – 35%, третя – 40% всіх виробів. В цих виробах брак становить відповідно $5\%, 4\%$ і 2%. Якою є ймовірність того, що: а) навмання вибраний виріб бракований? б) бракований виріб, який взяли з партії, вироблений другою машиною?

5. Імовірність появи події в кожному з однакових і незалежних випробувань становить 0,8. Визначте ймовірність того, що в 900 випробуваннях подія настане 413 разів.

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	-0,5	x_2	1,2	2
P	p_1	0,3	p_3	0,5

Знайдіть x_2, p_1, p_3, якщо відомі математичне сподівання $M(X)=1{,}32$ і дисперсія $D(X)=0{,}7516$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання X у проміжок $(-0{,}2\,,1{,}5]$.

7. $x_1=(2\pi)/3,\ x_2=\pi,$ $F(x)=\begin{cases}0, & x\le\pi/2,\\ 0{,}5\cdot(1-\sin x), & \pi/2<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$	8. $x_1=1,\ x_2=2,$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ b(4x-x^3), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

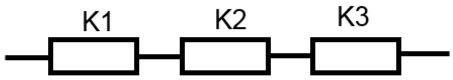
9. Випадкова величина X має біноміальний розподіл з параметрами $n=6$, $p=0{,}2$. Визначте ймовірність того, що $X>4$.

10. За статистичними даними в середньому 73% купленої будівельної техніки без ремонту працює близько п’яти років. За допомогою теореми Бернуллі оцініть ймовірності того, що із 100 одиниць техніки частка (відносна частота) техніки, що не потребувала ремонту близько п’яти років, буде відрізнятися від статистичних даних не більше, ніж на 0,05 (за абсолютною величиною).

Варіант 4

1. Задумано чотиризначне число. Визначте ймовірність того, що воно кратне 5.

2. Розрив електричного ланцюга може відбутися внаслідок виходу з ладу хоча б одного з елементів K_1, K_2, K_3, які виходять з ладу незалежно один від одного з ймовірностями 0,3; 0,2 і 0,1. Визначте ймовірність розриву ланцюжка.



3. Навмання обрано два невід'ємні числа x та y, які не перевищують 2. Визначте ймовірність того, що їх сума буде не більша за одиницю.

4. На одному заводі на кожні 100 лампочок припадає в середньому п'ять нестандартних лампочок, на другому – вісім, на третьому – 10. Продукція цих заводів становить відповідно 40%, 50% і 10% всіх лампочок, які купують жителі району. Визначте ймовірність того, що придбана лампочка буде стандартною.

5. Комутатор установи обслуговує 100 абонентів. Імовірність того, що протягом однієї хвилини абонент подзвонить на комутатор, дорівнює 0,02. Якою є ймовірність того, що протягом хвилини подзвонять чотири абоненти?

6. Є чотири деталі. Імовірність того, що деталь буде високої якості, дорівнює 0,7. Знайдіть закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості деталей високої якості. Складіть функцію розподілу. Визначте ймовірність того, що кількість деталей високої якості буде не меншою, ніж дві.

7. $x_1 = 1,\ x_2 = 3,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$	8. $x_1 = 3,\ x_2 = 4,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ b(x^2 - 8x + 15), & 3 < x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$

9. Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з математичним сподіванням $M(X) = 0$. Імовірність влучення цієї випадкової величини в інтервал $(-3; 3)$ – 0,5. Визначте середнє квадратичне відхилення і запишіть вираз нормального закону (щільність розподілу).

10. Застосовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що $|X - M(X)| < 0{,}4$, якщо $D(X) = 0{,}008$.

Варіант 5

1. На стоянці для автомобілів можна вмістити 10 машин в один ряд. В якийсь момент виявилися зайнятими шість місць. Якою є ймовірність того, що всі вільні місця будуть поряд?

2. В одному ящику три білих і п’ять чорних кульок, а в другому ящику п’ять білих і три чорних кульки. Визначте ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде витягнута біла кулька, якщо з кожного ящика витягнуто по одній кульці.

3. На відрізку OA довжиною l числової осі Ox навмання поставлені дві точки B і C з координатами x і y відповідно, причому $y > x$. Визначте ймовірність того, що довжина відрізка BC виявиться меншою, ніж $l/2$.

4. Є три партії деталей по 20 штук в кожній. Кількість стандартних деталей в 1-й, 2-й і 3-й партіях відповідно становить 29, 15, 10. Із навмання взятої партії дістали деталь, що виявилася стандартною. Якою є ймовірність того, що деталь була взята з другої партії?

5. З якою ймовірністю, кидаючи 720 разів пару гральних кубиків, можна сподіватися випадіння 12 очок в межах від 6 до 17 разів?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	-1	x_3	2
P	p_1	0,2	0,1	0,3

Визначте x_1, x_3 і p_1, якщо $x_1 < x_3$ і відомі математичне сподівання $M(X) = -0{,}2$ і дисперсія $D(X) = 2{,}26$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[-1; 2]$.

7. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1/9 \cdot (x-2)^2, & 2 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

8. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} be^{2x}, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

9. Випадкова величина X підпорядкована показниковому закону розподілу з параметром $\lambda = 5$. а) Побудуйте криву розподілу; б) Знайдіть функцію розподілу $F(x)$; в) Визначте ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за її математичне сподівання.

10. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Застосовуючи нерівність Чебишева оцініть імовірність того, що $|X - M(X)| < 0{,}3$.

X	0,5	0,3
P	0,4	0,6

Варіант 6

1. На шістьох карточках написано шість цифр: «1», «3», «4», «6», «7», «9». Якою є ймовірність того, що навмання складене за допомогою цих карточок тризначне число буде меншим, ніж 300?

2. Імовірність того, що виготовлена на 1-му станку деталь буде першого сорту, дорівнює 0,8. У разі виготовлення такої самої деталі на другому станку ця ймовірність становить 0,9. На 1-му станку виготовлено дві деталі, на 2-му – три. Визначте ймовірність того, що всі деталі першого сорту.

3. Стрічку завдовжки метр навмання розрізали ножицями. Визначте ймовірність того, що довжина обрізка буде не меншою, ніж 80 см.

4. У першому ящику кульки з номерами від 1 до 10, а в другому – з номерами від 11 до 15. Із другого ящика в перший переклали одну кулю, а потім з першого ящика вийняли навмання кулю. Якою є ймовірність того, що кулька має парний номер?

5. Підприємство випускає вироби, з яких 80% – найвищої якості. Якою є ймовірність серед 100 виробів виявити 18 виробів найвищої якості?

6. Куплено п'ять лотерейних білетів, імовірність виграшу дорівнює 0,04. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості лотерейних білетів, на яких випадуть виграші. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ \frac{a}{x^2} + 1, & x > 3. \end{cases}$	8. $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ b\sqrt{1 - x^2}, & -1 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

9. Випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона з математичним сподіванням $M(X) = 2$. Побудуйте ряд розподілу випадкової величини X. Визначте: а) ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення меншого, ніж її математичне сподівання; б) ймовірність того, що величина X прийме додатного значення.

10. Випадкова величина X має середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1{,}5$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що X відрізнятиметься від свого математичного сподівання менше, ніж на два.

Варіант 7

1. Із колоди з 36 гральних карт навмання виймають дві. Якою є ймовірність того, що витягнутими картами виявляться «туз» і «десятка»?

2. На складі телевізійного ательє із 20 мікросхем шість виготовлені 1-м заводом, решта – другим. Визначте ймовірність того, що дві навмання взяті мікросхеми виготовлені першим заводом.

3. Всередину круга радіусом R навмання поставлено точку. Визначте ймовірність того, що ця точка виявиться всередині вписаного в коло рівностороннього трикутника.

4. У телеательє є три кінескопи. Імовірність того, що кінескопи витримають гарантійний термін служби, відповідно становить 0,8; 0,9; 0,7. Визначте ймовірність того, що взятий навмання кінескоп витримає гарантійний термін служби.

5. Імовірність друкарської помилки на сторінці дорівнює 0,0025. В книзі 800 сторінок. Якою є ймовірність того, що з помилками буде не більше двох сторінок?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	2	3,4	4	x_4
P	p_1	p_2	0,25	0,3

Знайдіть x_4, p_1, p_2, якщо відомі математичне сподівання $M(X)=3{,}68$ і дисперсія $D(X)=1{,}2696$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $(2\,,4]$.

7. $x_1=-2,\ x_2=1,$	8. $x_1=1,\ x_2=6,$
$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a\sqrt{x+2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{b}{\sqrt[3]{x}}, & 1<x\le 8,\\ 0, & x>8.\end{cases}$

9. Потік заявок, що надходять на станцію обслуговування автомобілів, підпорядкований закону Пуассона. Математичне сподівання кількості заявок за годину дорівнює 30. Визначте ймовірність того, що за хвилину надійде не менше двох заявок.

10. Кількість води, потрібної на добу підприємству для технічних потреб, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 125 м^3. Оцініть імовірність того, що в найближчу добу витрати води на підприємстві будуть меншими за 500 м^3.

Варіант 8

1. Визначте ймовірність того, що навмання взяте п’ятизначне число закінчується на дві різні цифри.

2. Імовірність прижитися для саджанців груші становить 0,6, а для саджанців яблуні – 0,8. Посадили яблуню і грушу. Визначте ймовірність того, що приживеться хоча б один саджанець.

3. У правильному трикутнику зі стороною a навмання вибрана точка. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої вершини трикутника не перевищує $a/2$.

4. Відбувається стрільба по мішені одним снарядом. Мішень складається із трьох частин, площа яких $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$. Якщо снаряд влучив в першу мішень, мішень знищується з ймовірністю 0,7; якщо в другу – 0,6; якщо в третю – 0,5. Визначте ймовірність знищення мішені, якщо відомо, що снаряд влучив у ціль.

5. Імовірність появи події в кожному з однакових і незалежних випробувань становить 0,02. Визначте ймовірність того, що в 150 випробуваннях подія настане п’ять разів.

6. Випробовують пристрій, що складається з трьох блоків, які працюють незалежно. Ймовірності відмови блоків такі: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}6$. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості блоків, що відмовили. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 7\pi/8,\ x_2 = \pi,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3\pi/4, \\ a\cos 2x, & 3\pi/4 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$	8. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b \cdot \ln(x+1), & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

9. Навантаження на вісь вантажного автомобіля – випадкова величина X, що має нормальний розподіл з параметрами $a = 200$ і $\sigma = 40$. Визначте ймовірність того, $X \in (150; 280)$.

10. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Ряд розподілу випадкової величини X_n має такий вигляд:

X_n	$-5n$	0	$5n$
P	$1/(2n^2)$	$1-1/(n^2)$	$1/(2n^2)$

Чи застосовна до цієї послідовності теорема Чебишева (закон великих чисел)?

Варіант 9

1. Кинуто дві гральні кості. Якою є ймовірність того, що сума очок, які випали, дорівнює п'яти?

2. Підприємство в середньому дає 20% продукції вищого сорту, 60% – 1-го сорту і 20% – 2-го сорту. Визначте ймовірність того, що серед двох випадково взятих виробів цього підприємства не виявиться виробів 2-го сорту.

3. У правильному трикутнику зі стороною a навмання поставлено точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої сторони трикутника не перевищує $a/4$.

4. Є 10 однакових урн, в дев'яти урнах по дві чорних і три білих кулі, а в одній урні – чотири білих і одна чорна куля. Із однієї урни навмання дістали кулю. Якою є ймовірність, що вона біла?

5. Залік складається з чотирьох питань. На кожне питання наведено три можливих відповіді, серед яких потрібно вибрати одну правильну. Якою є ймовірність того, що за методом простого вгадування вдасться правильно відповісти більше, ніж на два питання?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	0,5	1	x_3	x_4
P	p_1	0,3	0,4	0,1

Знайдіть x_3, x_4 і p_1, якщо $x_3 < x_4$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 1{,}45$ і дисперсія $D(X) = 0{,}4725$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $(0{,}5; 2]$.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}(-x^2 + 4x), & 0 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$	8. $x_1 = -\pi,\ x_2 = 0,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ b\sin^2 x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

9. Для стандартної нормально розподіленої випадкової величини визначте ймовірність її влучення в інтервал $(-2; 5)$.

10. Швидкість вітру за добу в певній місцевості є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 6 м/с. Оцініть імовірність того, що в найближчу добу швидкість вітру в цій місцевості буде не меншою за 16 м/с.

Варіант 10

1. На картках написано цифри: «1», «2», «3», «6», «7». Якою є ймовірність того, що навмання складене за допомогою цих карток чотиризначне число буде парним числом і починатиметься з непарної цифри?

2. На ділянці AB для мотоцикліста-гонщика є три перешкоди, ймовірність зупинки на кожній з них дорівнює 0,1. Імовірність того, що від пункту B до кінцевого пункту C мотоцикліст проїде без зупинки, становить 0,9. Визначте ймовірність того, що на ділянці AC не буде жодної зупинки.

3. Навмання обрано два додатних числа x та y, які не перевищують 2. Визначте ймовірність того, що частка y/x буде не більшою, ніж 2.

4. Є три урни: в 1-й знаходиться п'ять білих куль і три чорних, в 2-й урні 10 білих куль і п'ять чорних, в 3-й – шість білих куль і три чорних. Із навмання взятої урни вибрали навмання одну кулю. Визначте ймовірність того, що куля виявилася чорною.

5. Імовірність перевитрати наданого кредиту дорівнює 0,01 для кожного підприємства. Визначте ймовірність того, що з 400 підприємств перевитрата буде не менш ніж у чотирьох підприємствах.

6. З урни, що містить чотири білих і шість чорних куль, навмання і без повернень дістають три кулі. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості білих куль у вибірці. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 2{,}5,\ x_2 = 4,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{a}(x-1), & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$	8. $x_1 = 2{,}5,\ x_2 = 4,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ b(6-5x+x^2), & 2 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

9. Для випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[5;10]$, знайти дисперсію та ймовірність того, що в кожному з двох незалежних послідовних випробувань вона набуде значення з інтервалу $(7;9)$.

10. Середня зміна курсу акцій будівельної компанії протягом одних біржових торгів становить 0,2%. Оцініть імовірність того, що на найближчих торгах курс зміниться більше, ніж на 2%.

Варіант 11

1. Дві знайомі людини опинились в черзі із восьми осіб. Визначте ймовірність того, що між ними буде три особи.

2. Нехай 20 екзаменаційних білетів містять по два питання, що не повторюються. Студент знає відповіді тільки на 30 питань. Визначте ймовірність того, що екзамен буде складений, якщо для цього достатньо відповісти хоча б на одне питання білета.

3. На відрізку OA довжиною l числової осі Ox навмання поставлені дві точки B і C з координатами x і y відповідно. Визначте ймовірність того, що довжина відрізка BC є меншою за відстань від точки O до найближчої до неї точки.

4. У ящику лежить вісім нових тенісних м’ячів і чотири старих. Для першої гри навмання беруть один м’яч, який після гри повертають в ящик. Для другої гри беруть два м’ячі. Якою є ймовірність того, що в другій грі м’ячі будуть новими?

5. На кожні 100 букв тексту українською мовою в середньому припадає 11 букв «о». Якою є ймовірність того, що в тексті із 2 000 букв буква «о» трапиться від 200 до 250 разів?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	-2	-1	1
P	0,1	p_2	p_3	0,5

Знайдіть x_1, p_2, p_3, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = -0,5$ і дисперсія $D(X) = 2,45$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайти ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[-2,5\,, -1]$.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,5,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a(x^2 + 2x), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = 0,25,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b(2x+1), & 0 < x \le 1/2, \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$$

9. Робітник обслуговує 10 верстатів, кожен з яких може вийти з ладу протягом зміни з ймовірністю 0,3. Визначте ймовірність того, що з ладу вийдуть не більше, ніж два верстати.

10. Філія банку обслуговує в середньому 100 клієнтів за день. Оцініть імовірність того, що певного дня у філії банку будуть обслужені: 1) менш як 200 клієнтів; 2) не менш ніж 150 клієнтів.

Варіант 12

1. У ящику лежать карточки з цифрами: «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8». Картки виймають навмання і розміщують в порядку появи. Якою є ймовірність того, що цифра «1» з'явиться першою, а цифра «8» останньою?

2. У магазин надійшло 30 телевізорів, п'ять з них мають приховані дефекти. Навмання відбирають два телевізори для перевірки. Якою є ймовірність того, що обидва телевізори не мають дефектів?

3. Усередині круга навмання поставлено точку. Визначте ймовірність того, що ця точка виявиться всередині вписаного в коло правильного шестикутника.

4. Три пекарні міста виготовляють продукцію, забезпечуючи місто хлібобулочною продукцією в пропорції 2:3:5. Перша пекарня виробляє 30% продукції високої якості, друга – 40%, третя – 60%. 1) Визначте ймовірність того, що придбаний хлібобулочний виріб виявиться високої якості. 2) Придбаний продукт виявився високої якості. Визначте ймовірність того, що цей виріб виготовлений на другому хлібокомбінаті.

5. До магазину зайшло троє покупців. Визначте ймовірність того, що хоча б один з них здійснить покупку, якщо ймовірність здійснити покупку для кожного з них однакова і дорівнює 0,3.

6. Підкидають три монети. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості «гербів», що випали. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = \pi/4,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ 0{,}5\cdot(\sin x + 1), & -\pi/2 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$	8. $x_1 = -\pi/2,\ x_2 = \pi/8,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b\cos 2x, & 0 < x \le \pi/4, \\ 0, & x > \pi/4. \end{cases}$$

9. Якою є ймовірність того, що в кожному з шістьох незалежних випробувань випадкова величина X, що має рівномірний розподіл в інтервалі $[7;12]$, не вийде з інтервалу $(8;10)$?

10. Електростанція обслуговує мережу на 1 500 електроламп, імовірність вмикання кожної з них ввечері становить 0,9. Оцініть за допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що кількість ламп, увімкнених в мережу ввечері, відрізняється від свого математичного сподівання не більше, ніж на 100 (за абсолютною величиною).

Варіант 13

1. Слово «людина» розрізали на букви і перемішали картки. Якою є ймовірність того, що витягнуті чотири карточки, розміщені в ряд, утворюють слово «лани»?

2. Виріб перевіряють на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,8. Визначте ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один є стандартним.

3. У прямокутнику зі сторонами 4 і 6 см навмання вибрали точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої вершини прямокутника не перевищує 2 см.

4. У магазин надходять годинники з трьох заводів, відповідно 50%, 30% і 20%. В продукції 1-го заводу точно йдуть 70% годинників, 2-го – 80% і 3-го – 90%. Якою є ймовірність того, що куплений годинник ітиме точно?

5. Імовірність відмови елемента становить 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Визначте ймовірність того, що з 1 000 таких елементів відмовлять менш ніж два елементи.

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	x_2	3	4
P	0,3	0,1	p_3	0,25

Знайдіть x_1, x_2 і p_3, якщо $x_1 < x_2$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 2{,}6$ і дисперсія $D(X) = 1{,}315$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[2; 4)$.

7. $x_1 = 1,\ x_2 = e^{0,25}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 3\ln x, & 1 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$	8. $x_1 = 2,\ x_2 = 5$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{b}{\sqrt{x}}, & 1 < x \le 9, \\ 0, & x > 9. \end{cases}$

9. Діаметр деталі, виготовленої в цеху, є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом. Дисперсія її дорівнює 0,0001, а математичне сподівання – 4,5 мм. Визначте межі, в яких з ймовірністю 0,9545 знаходиться діаметр навмання взятої деталі.

10. Довжина деталі є випадковою величиною. Середнє значення довжини деталі – 50 см, а дисперсія цієї випадкової величини дорівнює 0,1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що довжина навмання взятої деталі виявиться в межах від 49,5 до 50,5 см.

Варіант 14

1. Тільки один з трьох ключів підходить до дверей. Визначте ймовірність того, що доведеться попробувати всі ключі для того, щоб відімкнути двері?

2. У групі спеціалістів троє економістів і п'ятеро юристів. Для перевірки роботи підприємства навмання відбирають чотирьох спеціалістів. Якою є ймовірність того, що ця група складається з двох юристів і двох економістів?

3. Навмання взято два додатні числа x і y, що не перевищують 1. Визначте ймовірність того, що добуток $x \cdot y$ буде не менший, ніж 0,1.

4. Імовірність отримати прибуток в господарстві в урожайний рік становить 0,6, а в неврожайний рік – 0,2. У певній місцевості ймовірність врожайного року дорівнює 0,7. Якою є ймовірність отримати прибуток наступного року?

5. Статистичні дані свідчать про те, що 0,3% пасажирів запізнюються до відправлення поїзда. Визначте ймовірність того, що з 840 пасажирів запізняться двоє.

6. Імовірність влучення в мішень після першого пострілу – 0,2 , після другого – 0,3 , третього – 0,7. Виконано три постріли. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості влучень в мішень. Складіть функцію розподілу. Визначте ймовірність того, що кількість влучень не менше трьох.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot arctg\ x\right), & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ b(x+1)^2, & -1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

9. Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з математичним сподіванням 30 і дисперсією 100. Визначте ймовірність того, що значення випадкової величини знаходиться в інтервалі (10; 50).

10. За час t використовують для роботи 600 приладів. Кожен прилад має надійність 0,98 і виходить з ладу незалежно від інших. Оцініть за допомогою теореми Бернуллі ймовірність того, що частка надійних приладів відрізняється від 0,98 не більш ніж на 0,1 (за абсолютною величиною).

Варіант 15

1. Навмання взятий телефонний номер складається з семи цифр. Якою є ймовірність того, що в ньому всі цифри: а) різні; б) однакові; в) непарні? Відомо, що номер телефону не починається з цифри «нуль».

2. У партії деталей 12 стандартних виробів і три нестандартних. П’ять деталей, вибраних навмання, перевіряють на відповідність стандарту. Визначте ймовірність того, що серед них не виявиться нестандартних.

3. На відрізку $[-1;3]$ навмання вибрано два числа x та y. Якою є ймовірність того, що сума цих чисел менша за 3, а різниця менша, ніж 2?

4. У цеху працює два станки з виготовлення деталей. Продуктивність 1-го станка втричі більша за продуктивність 2-го. Імовірність браку для 1-го станка дорівнює 3%, для 2-го – 2%. Якою є ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться бракованою?

5. Якою є ймовірність того, що за триразового підкидання грального кубика жодного разу не випаде трьох очок?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	-6	-4	x_3	-1
P	0,1	p_2	0,2	p_4

Знайдіть x_3, p_2, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X)=-2{,}9$ і дисперсія $D(X)=2{,}69$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[-4\,,-1)$.

7. $x_1=2$, $x_2=8$, $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(\sqrt[3]{x}-1), & 1<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$	8. $x_1=-1$, $x_2=1$, $$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{b}{x^2+1}, & x\ge 0.\end{cases}$$

9. На завод надійшла партія деталей в кількості 1 000 шт. Імовірність того, що одна деталь виявиться бракованою, становить 0,001. Якою є ймовірність того, що серед деталей буде п’ять бракованих?

10. Імовірність вчасного виконання ремонтних робіт бригадами на будівництві становить 0,7. За допомогою теореми Бернуллі оцініть імовірність того, що частина бригад, що виконали роботу вчасно з 2 000 бригад, знаходиться в межах від 0,66 до 0,74.

Варіант 16

1. За круглим столом довільно сіли двоє чоловіків і дві жінки. Визначте ймовірність того, що при цьому чоловіки будуть чергуватися з жінками.

2. Імовірність ураження мішені першим стрільцем дорівнює 0,8, другим – 0,6. Визначте ймовірності таких подій: а) мішень уражена двома влученнями; б) мішень уражена одним пострілом; в) мішень не вражено.

3. Усередину квадрата поставлено точку. Визначте ймовірність того, що ця точка виявиться всередині круга, вписаного в квадрат.

4. Із 10 стрільців п'ять влучень в мішень з ймовірністю 0,8, три – з ймовірністю 0,6, два – з ймовірністю 0,7. Визначте ймовірність того, що навмання вибраний стрілець в мішень не влучив.

5. Імовірність появи події A в кожному з 100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Визначте ймовірність того, що кількість m появ події А задовольняє нерівність $80 \le m \le 90$.

6. Імовірність влучення м'ячем в корзину дорівнює 0,6. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості попадань м'ячем в корзину після двох кидків. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}5,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ -x^2 + 2x, & 0 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$	8. $x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1{,}5,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ b(2x-1), & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно дорівнюють 0 і 2. Визначте ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень, що належать інтервалу $(-2; 3)$.

10. Прилад складається з 15 незалежних елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишева оцініть імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, і середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов за час t виявиться: а) меншою, ніж два; б) не меншою, ніж дві.

Варіант 17

1. З 15 лотерейних білетів виграшними є чотири. Якою є ймовірність того, що серед шести білетів, взятих навмання, буде два виграшних?

2. Імовірність влучення в ціль після кожного пострілу 1-м стрільцем дорівнює 0,6, а 2-м стрільцем – 0,7. Стрільці вистрілили в ціль по два рази. Якою є ймовірність того, що 1-й стрілець влучить в ціль тільки один раз, а 2-й обидва рази промахнеться?

3. У правильному шестикутнику зі стороною a навмання вибрано точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої вершини шестикутника не перевищує $a/2$.

4. На експертизу надійшли проекти від трьох науково-дослідних інститутів. Імовірність того, що проект першого інституту дістане позитивну оцінку дорівнює 0,8, другого – 0,6, третього – 0,9. Для експертизи вибрали навмання тільки один проект. Він дістав позитивну оцінку. Якою є ймовірність того, що це був проект першого інституту?

5. Імовірність одужання хворого в результаті застосування нового способу лікування дорівнює 0,8. Визначте ймовірність того, що зі 100 хворих одужає 75 осіб?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	-3	-2	x_4
P	0,2	p_3	0,4	0,15

Знайдіть x_1, x_4 і p_3, якщо $x_1 < x_4$ і відомі математичне сподівання $M(X) = -2{,}2$ і дисперсія $D(X) = 2{,}36$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $(-3; 1{,}5]$.

7. $x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 3,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1/8 \cdot (x-1)^3, & 1 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$	8. $x_1 = 5\pi/6,\ x_2 = \pi,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3\pi/4, \\ b\sin 2x, & 3\pi/4 < x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

9. У виробництві будівельної цегли ймовірність появи одного нестандартного виробу становить 0,01. Якою є ймовірність того, що в партії зі 100 цеглин дві будуть нестандартними?

10. Оцініть імовірність того, що відхилення довільної випадкової величини від її математичного сподівання буде не більшим за два середніх квадратичних відхилення (за абсолютною величиною).

Варіант 18

1. В ящику лежать карточки з цифрами: «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», які виймають навмання і розміщують в порядку появи. Якою є ймовірність того, що цифри «1», «2», «3» виявляться поряд в такій послідовності, незалежно від місця їх розміщення?

2. Прибор містить два елементи, що працюють незалежно. Імовірність відмов цих елементів відповідно дорівнює 0,1 і 0,2. Визначте ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоча б один елемент?

3. Довільно обираються числа x та y в проміжку від 0 до 10. Якою є ймовірність того, що $y > x^2/2-1$?

4. До торгового підприємства надходять однотипні вироби з трьох фірм-виробників: 30% – з першої, 50% – з другої, 20% – з третьої. Серед виробів першої фірми 80%, другої – 90%, третьої 70% першосортних виробів.

а) Куплено один виріб. Визначте ймовірність того, що він першосортний.
б) Куплений виріб виявився не першосортним. Визначте ймовірність того, що він виготовлений третьою фірмою.

5. Що ймовірніше: випаде три рази «герб» після чотирьох підкидань монети чи випаде п’ять разів «герб» після восьми підкидань монети?

6. На шляху руху автомобіля чотири світлофори, кожен з яких дозволяє або забороняє рух з ймовірністю 0,6. Знайдіть закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості світлофорів, які автомобіль минув до першої зупинки. Визначте ймовірність того, що кількість світлофорів, які автомобіль проїхав без зупинки, буде не меншою, ніж два.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = 2,$ $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$	8. $x_1 = 2,\ x_2 = 4,$ $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{b+2}, & -1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

9. На відрізку [2;10] навмання вказують точку. Якою є ймовірність того, що ця точка виявиться в правій половині відрізка?

10. Послідовно з’єднано 100 резисторів, кожний з яких має опір 20 Ом з середнім квадратичним відхиленням ± 3 Ом. Оцініть імовірність того, що загальний опір такої схеми міститиметься в межах від 1 950 до 2 050 Ом.

Варіант 19

1. У конверті знаходиться 10 фотокарток, серед яких одна розшукується. Із конверта навмання дістали три картки. Якою є ймовірність того, що серед них виявиться потрібна?

2. Імовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює 0,6, другим – 0,5, а третім – 0,7. Стрільці виконали по одному пострілу. Якою є ймовірність хоча б одного влучення в ціль?

3. Навмання обрано два невід'ємні числа x і y, що задовольняють умові $x+y\le 1$. Якою є ймовірність того, що сума квадратів x^2+y^2 не більша, ніж 0,25?

4. Повідомлення можна передати листом, телефоном і факсом з однаковою ймовірністю. Імовірність того, що повідомлення дійде до адресата кожним з названих способів становить відповідно рівні 0,7; 0,6 і 0,9. а) Якою є ймовірність отримання повідомлення? б) Повідомлення адресатом отримане. Визначте ймовірність того, що воно передано по факсу.

5. Імовірність пробою конденсатора під час випробувань дорівнює 0,01. Якою є ймовірність того, що з-поміж 100 конденсаторів не витримають випробування більш ніж два?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	-0,5	1	2	x_4
P	p_1	0,3	0,2	p_4

Знайдіть x_3, p_2, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X)=0{,}85$ і дисперсія $D(X)=1{,}7025$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[2\,,4)$.

7. $x_1=5$, $x_2=10$,	8. $x_1=1$, $x_2=2$,
$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ (1/5)\cdot(x-5), & 5<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ b/x, & 1<x\le e^2,\\ 0, & x>e^2.\end{cases}$

9. Середній час безвідмовної роботи приладу – 80 год. Вважаючи, що час безвідмовної роботи приладу має показниковий закон розподілу, визначте: а) щільність та функцію розподілу; б) ймовірність того, що протягом 100 год прилад не вийде з ладу.

10. Заправлення літака потребує $4{,}7\pm 0{,}5$ т пального. Оцініть імовірність того, що для заправлення 30 літаків знадобиться від 136 до 146 т пального.

Варіант 20

1. П'ятизначне число утворене за допомогою перестановки п'яти цифр «4», «4», «4», «3», «3». Визначте ймовірність того, що всі «трійки» стоять поряд, за умови, що отримане число – парне.

2. Відбувається стрільба по мішені трьома снарядами. Імовірність влучення після першого пострілу становить 0,8, а після кожного наступного зменшується в два рази порівняно з попереднім. Визначте ймовірність того, що буде тільки один промах.

3. У рівносторонній трикутник зі стороною a вписане коло. Навмання поставлено точку. Визначте ймовірність влучення в частину трикутника, що не належить колу.

4. Імовірність влучення після кожного пострілу для трьох стрільців становить відповідно $1/3$, $3/4$, $2/3$. Якою є ймовірність, що навмання вибраний стрілець один раз вистрілив і промахнувся?

5. Визначте ймовірність того, що серед 100 випадкових перехожих виявиться 40 жінок (припускається, що чисельність жінок і чоловіків в місті однакова).

6. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом години перший станок не потребуватиме регулювання, дорівнює 0,85 , другий – 0,6, третій – 0,4. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості станків, що не потребують регулювання. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ a \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{x}{2} \right), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$	8. $x_1 = -3,\ x_2 = -1$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4, \\ b, & -4 < x \le -2, \\ 0, & x > -2. \end{cases}$

9. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = 25$. Імовірність попадання X в інтервал (10; 15) становить 0,09. Визначте ймовірність попадання X в інтервал (35; 40).

10. Імовірність вчасно скласти студентом всі екзамени дорівнює 0,7. За допомогою нерівності Чебишева оцініть імовірність того, що частка з 2 000 студентів, які склали всі екзамени вчасно, знаходиться в межах від 0,66 до 0,74.

Варіант 21

1. Із колоди з 36 карт навмання витягують чотири карти. Якою є ймовірність того, що всі вони різної масті?

2. Імовірність враження цілі після одного пострілу 1-го стрільця дорівнює 0,6, а для 2-го – 0,8. Перший стрілець зробив три постріли, а другий – два постріли. Визначте ймовірність того, що ціль не буде вражена.

3. В ромб зі стороною a і кутом при вершині основи 60° вписане коло. Навмання поставлено точку. Визначте ймовірність попадання точки в коло.

4. Три автомати штампують однакові деталі, які надходять на спільний конвеєр. Продуктивність автоматів співвідноситься як 2:3:5. Ймовірності виготовлення бракованої деталі автоматами дорівнює відповідно 0,05; 0,1; 0,2. Визначте ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виявиться не бракованою.

5. Імовірність виграшу по одному білету лотереї дорівнює 0,1. Якою є ймовірність того, що з шести білетів виграє хоча б один?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	2	x_2	3,5	x_4
P	0,3	0,1	p_3	0,25

Знайдіть x_2, x_4 і p_3, якщо $x_2 < x_4$ і відоме математичне сподівання $M(X) = 3{,}3$ і дисперсія $D(X) = 1{,}335$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте мовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[3; 4]$.

7. $x_1 = -\pi/4,\ x_2 = \pi/3,$	8. $x_1 = 1,\ x_2 = 3,$
$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5 \cdot (1 - \cos x), & 0 < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b \cdot (3x - x^3), & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

9. Нормально розподілена випадкова величина має таку функцію розподілу: $F(x) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \Phi(x-1)$. З якого інтервалу – (2; 3) чи (3; 5) – вона набуде значення з більшою ймовірністю?

10. Скільки треба виконати незалежних рівноточних вимірювань даної величини, щоб з ймовірністю, не меншою за 0,9, гарантувати відхилення середнього арифметичного цих вимірювань від істинного значення величини, не більш ніж на одиницю (за абсолютною величиною), якщо середнє квадратичне відхилення кожного з вимірювань не перевищує чотирьох?

Варіант 22

1. У групі 12 студентів. Із них на «відмінно» встигають з математики четверо студентів, на оцінку «добре» – троє студентів, «задовільно» – п'ятеро студентів. Навмання вибирають чотирьох студентів. Якою є ймовірність того, що серед них двоє «відмінників» і двоє «хорошистів».

2. Імовірність влучення в ціль після залпу з двох гармат становить 0,88. Визначте ймовірність ураження цілі після одного пострілу другою гарматою, якщо для першої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

3. У прямокутнику зі сторонами 4 і 8 см навмання вибрано точку. Оцініть імовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої сторони прямокутника є не меншою за 1 см.

4. На фабриці перша машина виробляє 25% всіх виробів, друга – 35%, третя – 40%. В цих виробах брак становить відповідно 5%, 4% і 2 %. Якою є ймовірність того, що: а) навмання вибраний виріб бракований? б) взятий бракований виріб виготовлено на другій машині?

5. Відомо, що в середньому 5% студентів носять окуляри. Якою є ймовірність того, що з 200 студентів, які сидять в аудиторії, не менше ніж п'ятеро носять окуляри?

6. Стрілець виконує по мішені три постріли. Імовірність влучення в мішень після кожного пострілу дорівнює 0,4. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості влучень в мішень. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = \pi/6,\ x_2 = 3\pi/4,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/2, \\ a\cos x, & \pi/2 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$	8. $x_1 = \pi/6,\ x_2 = \pi/2,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b\sin 3x, & 0 < x \le \pi/3, \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$

9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з нульовим математичним сподіванням. Імовірність попадання цієї випадкової величини на відрізок [-1; 1] дорівнює 0,5. Знайдіть щільність та функцію розподілу випадкової величини X.

10. Із партії зі 100 ящиків цегли взяли по одній цеглині з кожного ящика і виміряли їх довжини. Оцініть імовірність того, що обчислена за даними вибірки середня довжина цегли відрізняється від середньої довжини цегли в усій партії не більше, ніж на 0,3 мм, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення вимірювання не перевищує 0,8 мм.

Варіант 23

1. Автобус, в якому їде п’ятеро пасажирів, повинен зробити вісім зупинок. Визначте ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних зупинках.

2. Достатньою умовою складання колоквіуму є відповідь хоча б на оде з двох питань, запропонованих викладачем. Студент не знає відповідей на вісім питань із тих 40, які можуть бути запропоновані. Якою є ймовірність скласти колоквіум?

3. Стрижень довжиною l розламали в навмання вибраній точці на дві частини. Якою є ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищує $l/3$.

4. На заводі, де виготовляють болти, перша машина виробляє 20%, друга – 30%, третя – 50% всіх виробів. В їх продукції брак становить відповідно 3%, 4% і 2%. Якою є ймовірність того, що випадково вибраний болт має дефект?

5. Гральний кубик підкидають 320 разів. Якою є ймовірність того, що цифра «5» при цьому випаде не менш ніж 70 і не більше за 80 разів?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	0,1	1	2
P	p_1	p_2	p_3

Знайдіть p_1, p_2, p_3, якщо відомі математичне сподівання $M(X)=1{,}23$ і дисперсія $D(X)=0{,}6901$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $(0,1]$.

7. $x_1=6,\ x_2=7,$ $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4,\\ 0{,}25\cdot(x-4), & 4<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$	8. $x_1=0,\ x_2=2,$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ b\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

9. Неперервну випадкову величину розподілено за показниковим розподілом з параметром $\lambda=0{,}4$. Визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини в інтервал (0; 2).

10. Скільки потрібно виконати вимірювань, щоб з ймовірністю, не меншою за 0,9973, стверджувати, що похибка середньої арифметичної результатів цих вимірювань не перевищить 0,01, якщо вимірювання характеризується середнім квадратичним відхиленням рівним 0,03?

Варіант 24

1. У ящику знаходяться карточки з цифрами: «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», які виймають навмання і розміщують в порядку появи. Якою є ймовірність того, що перші три цифри будуть непарними?

2. Студент може скласти залік з англійської мови з ймовірністю 0,7, а з математики – з ймовірністю P. Визначити P, якщо ймовірність того, що студент складе залік хоча б з одного з названих предметів, дорівнює 0,85.

3. Якою є ймовірність того, що сума трьох навмання взятих відрізків, довжина кожного з яких не більша за l, буде не більшою за l.

4. У цеху працює 15 станків, із них вісім станків марки A, чотири марки B і три – марки С. Імовірність того, що деталь виявиться якісною, для цих станків становить відповідно 0,8; 0,9 і 0,7. Який відсоток якісних деталей виготовляє цех?

5. У перші класи повинні бути прийняті 200 дітей. Визначити ймовірність того, що серед них виявиться 100 дівчаток, якщо ймовірність народження дівчинки – 0,485.

6. З урни, що містить чотири картки з номерами «1», «2», «3», «4» навмання дістають дві картки. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію суми номерів вийнятих карток. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 3,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ (x-a)^2, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = \pi/6,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ b\cos^2 x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

9. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами a і σ. Визначте ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(a - 3{,}5 \cdot \sigma; a)$.

10. Глибина моря вимірюється приладом, що не має систематичної похибки. Середнє квадратичне відхилення вимірювань не перевищує 10 м. Скільки треба виконати незалежних вимірювань, щоб з імовірністю, не меншою за 0,9, можна було стверджувати, що середнє арифметичне цих вимірювань відрізняється від a (глибини моря) за модулем менше, ніж на 5 м?

Варіант 25

1. Підкидають дві гральні кості. Визначте ймовірність того, що сума кількості очок не перевищує п'ятьох.

2. У середньому сімом глядачам із десяти подобається гра актора A, а восьми глядачам із двадцяти не подобається гра актора B. У навмання вибраного глядача запитали про гру акторів A і B. Якою є ймовірність того, що йому подобається гра хоча б одного з них?

3. Усередину правильного трикутника навмання кинуто точку. Визначте ймовірність того, що ця точка виявиться всередині круга, вписаного в цей трикутник.

4. Лічильник реєструє частинки трьох типів: A, B і C. Імовірність появи цих частинок: $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}5$, $P(C)=0{,}3$. Частинки кожного з цих типів лічильник виявляє з ймовірністю 0,8, 0,2 і 0,4 відповідно. Лічильник відмітив частинку. Визначте ймовірність того, що це була частинка типу B.

5. У лотереї виграє в середньому кожний п'ятий білет. Якою є ймовірність, що з чотирьох куплених білетів виграє хоча б один?

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу:

X	x_1	x_2	0	2
P	p_1	0,4	0,1	0,3

Знайдіть x_1, x_2 і p_1, якщо $x_1 < x_2$ і відомі математичне сподівання $M(X)=-0{,}3$ і дисперсія $D(X)=2{,}76$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини в проміжок $[-2; 2{,}5)$.

7. $x_1=1,\ x_2=1{,}5$,	8. $x_1=0,\ x_2=\pi/6$,
$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 0{,}5\cdot(x^2-x), & 1<x\le a, \\ 1, & x>a. \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ b\sin x, & 0<x\le \pi/3, \\ 0, & x>\pi/3. \end{cases}$

9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=4$, $\sigma=1$. Визначте ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (6; 8).

10. Імовірність появи події в окремому випробуванні становить 0,8. Оцініть імовірність того, що в 1 000 незалежних повторних випробуваннях відхилення відносної частоти появи події від імовірності в окремому випробуванні за модулем буде меншим, ніж 0,05.

Варіант 26

1. На п'яти карточках написано по одній цифрі: «1», «2», «3», «4», «5». Довільно виймають три з них і кладуть на стіл послідовно. Якою є ймовірність того, що отримане число буде кратне трьом?

2. По мішені виконують три постріли. Імовірність влучення після першого, другого і третього пострілу становлять відповідно 0,4; 0,5; 0,7. Якою є ймовірність того, що після трьох пострілів в мішені буде одна пробоїна?

3. У квадрат з вершинами $(0;0),(1;0),(1;1),(0;1)$ навмання поставлена точка $(x;y)$. Визначте ймовірність того, що координати цієї точки задовольняють нерівності $y<2x$.

4. У пункті прокату є 10 телевізорів, для яких імовірність безвідмовної роботи протягом місяця дорівнює 0,8 і п'ять телевізорів з ймовірністю безвідмовної роботи 0,9. Визначте ймовірність того, що два телевізори, взяті навмання в пункті прокату, будуть працювати справно протягом місяця.

5. В аудиторії присутні 400 осіб. Визначте ймовірність того, що у двох осіб день народження припадає на 1 січня (вважати, що ймовірність народження у цей день дорівнює $1/365$).

6. У ящику п'ять білих і три чорні кулі. Навмання дістають три кулі. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості чорних куль серед вибраних. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1=0,\ x_2=1,$ $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\cdot\ln(x+1), & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$	8. $x_1=0{,}125,\ x_2=27,$ $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ b\sqrt[3]{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

9. Час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл з параметром $\lambda=0{,}02$ год. Визначте ймовірність того, що за час $t=100$ год прилад: а) вийде з ладу; б) буде працювати справно.

10. Дисперсія кожної з 800 незалежних випадкових величин не перевищує 9. Якою повинна бути верхня межа модуля відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, щоб імовірність такого відхилення була більшою за 0,997?

Варіант 27

1. З 15 білетів виграшними є чотири білети. Якою є ймовірність того, що серед шести білетів, взятих навмання, буде два виграшних?

2. Радист тричі викликає кореспондента. Імовірність того, що буде прийнятий перший виклик, дорівнює 0,4, другий – 0,5, третій – 0,6. За умовами події, які полягають у тому, що виклик буде почутий, є незалежними. Визначте ймовірність того, що кореспондент взагалі почує виклик.

3. Вибирають числа x та y в проміжку від 0 до 5. Якою є ймовірність того, що $xy > 2$?

4. У першій урні знаходиться одна біла і дев'ять чорних куль, у другій – одна чорна і чотири білих кулі. З кожної урни навмання дістали по одній кулі, а решту куль поклали в третю урну. Визначте ймовірність того, що куля, вийнята з третьої урни, виявиться чорною.

5. Імовірність влучення в ціль після кожного пострілу дорівнює 0,2. Що є більш ймовірним: одне влучення після трьох пострілів чи два – після шести постірілів?

6. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу.

X	-2	1,5	2	x_4
P	p_1	0,3	0,4	p_4

Знайдіть x_4, p_1, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 1{,}85$ і дисперсія $D(X) = 2{,}4525$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $(-2\,,3]$.

7. $x_1 = -\pi/2,\ x_2 = 0,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi, \\ 0{,}5\cdot(1+\cos x), & -\pi < x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$	8. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b(1 - x/3), & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

9. Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку $[-1; 8]$. Визначте ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $[2; 7]$.

10. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу.

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

Варіант 28

1. У мішечку є п’ять карточок абетки з буквами «**Л**», «**Т**», «**О**», «**О**», «**С**». Карточки навмання виймають з мішечка і послідовно розкладають в ряд. Визначте ймовірність того, що вони утворять слово «**ЛОТОС**».

2. Один студент вивчив 15 із 30 білетів екзаменаційної програми, а другий – 20. Кожен з них має відповісти на одне питання. Визначте ймовірність того, що дасть правильну відповідь: а) тільки один з них; б) хоча б один з студентів.

3. Після бурі на ділянці між 30-м та 60-м кілометрами телефонної лінії стався обрив. Якою є ймовірність того, що обрив стався між 40-м та 45-м кілометрами лінії?

4. Перед посівом 70% насіння було оброблене хімікатами. Імовірність ураження шкідниками рослин, що проросли із цього насіння, дорівнює 0,05, а рослин, що проросли з необробленого насіння – 0,3. Якою є ймовірність того, що взята навмання рослина виявиться враженою?

5. П’ять робітниць фарбують однакові іграшки: дві в червоний колір, а три – в зелений. Продуктивність праці однакова. Пофарбовані іграшки складають в один ящик. Визначте ймовірність того, що серед 600 іграшок червоних виявиться від 230 до 260.

6. У партії виготовлених деталей – 5% нестандартних. Відбирають чотири деталі. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості нестандартних деталей серед вибраних. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = -1/2,\ x_2 = 1,$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a(x+1), & -1 < x \le 1/2, \\ 1, & x > 1/2. \end{cases}$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ b \cdot e^{-3x}, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

9. Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з $a = 0$. Імовірність попадання випадкової величини в інтервал $(-0{,}4;\ 0{,}4)$ становить 0,52. Визначте середнє квадратичне відхилення.

10. Прилад складається із 100 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента за час Т дорівнює 0,005. За допомогою нерівності Чебишева оцініть імовірність того, що різниця між кількістю елементів, які відмовили, і середньою кількістю відмов за час Т буде меншою за 3.

Варіант 29

1. Із ящика, у якому лежить три пронумеровані білети, виймають навмання по одному всі білети. Визначте ймовірність того, що хоча б в одному випадку порядковий номер збігатиметься із зазначеним на білеті.

2. У групі спеціалістів – три економісти і п'ять юристів. Для перевірки роботи організації навмання відбирають чотирьох спеціалістів. Якою є ймовірність того, що група складатиметься з двох юристів і двох економістів?

3. У колі радіусом 10 см розміщено прямокутний трикутник з катетами 12 і 7 см. У колі навмання ставлять точку. Визначте ймовірність того, що вона не попаде в трикутник.

4. У студентській групі 60% юнаків. Сотовий телефон мають 80% юнаків і 70% дівчат. Після занять в аудиторії був знайдений кимось забутий телефон. Якою є ймовірність того, що він належить дівчині?

5. Імовірність народження хлопчика становить 0,51, а дівчинки – 0,49. В сім'ї троє дітей. Визначте ймовірність того, що в сім'ї не більш як двоє дівчаток.

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу.

X	0	x_2	x_3	3,5
P	p_1	0,2	0,6	0,1

Знайдіть x_2, x_3 і p_1, якщо $x_2 < x_3$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 2{,}35$ і дисперсія $D(X) = 1{,}3025$. Складіть функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та визначте ймовірність попадання цієї випадкової величини у проміжок $[1; 3{,}5)$.

7. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^3, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$	8. $x_1 = 3,\ x_2 = 4,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ b(x-5)^2, & 2 < x \le 8, \\ 0, & x > 8. \end{cases}$$

9. Вимірювальний прилад має систематичну похибку 6 см. Випадкові похибки підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням, рівним 12 см. Якою є ймовірність того, що похибка вимірювання не перевищить за абсолютним значенням 6 см?

10. Імовірність появи події в кожному випробуванні становить 0,5. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть імовірність того, що кількість появ події знаходиться в межах від 40 до 60, якщо виконано 100 випробувань.

Варіант 30

1. Підкинуто дві гральні кості. Визначте ймовірність того, що добуток кількості очок, які випали, ділиться на 5.

2. У ящику 10 деталей, з яких чотири пофарбовані. Робітник навмання взяв три деталі. Визначте ймовірність того, що хоча б одна з взятих деталей є пофарбованою.

3. У правильному шестикутнику зі стороною a навмання вибрали точку. Визначте ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої сторони шестикутника не перевищує $a/2$.

4. Із 100 ламп 10 належить 1-й партії, 40 – 2-й, решта – 3-й партії. В 1-й партії 5%, в 2-й – 2%, в 3-й – 4% бракованих ламп. Навмання вибирають одну лампу. Якою є ймовірність того, що вибрана лампа виявиться бракованою?

5. Статистика запитів кредитів в банку така: 10% - державні органи, 20% – інші банки, решта – фізичні особи. Імовірність того, що взятий кредит не буде повернутий, становить 0,01, 0,05 і 0,2 відповідно. Визначити, яка частка кредитів в середньому не повертається.

6. Апаратура містить чотири малонадійних елементи. Відмови елементів за деякий час Т є незалежними, а їх ймовірності становлять відповідно $P_1 = 0{,}1$; $P_2 = 0{,}1$; $P_3 = 0{,}2$; $P_4 = 0{,}2$. Визначте закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості елементів, що відмовили за час Т. Складіть функцію розподілу.

7. $x_1 = \pi/12,\ x_2 = \pi,$ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\sin x, & 0 < x \le \pi/6, \\ 1, & x > \pi/6. \end{cases}$$	8. $x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}5,$ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a - x^3, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

9. Тривалість X телефонної розмови – випадкова величина, підпорядкована показниковому розподілу. Середня тривалість телефонної розмови – 5 хв. Визначте ймовірність того, що довільна телефонна розмова буде тривати від 5 до 15 хв.

10. Середня зміна курсу акцій компанії на біржових торгах становить 0,4%. Оцініть імовірність того, що на найближчих торгах курс акцій зміниться не менше, ніж на 4%.

Список літератури

1. Барковський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика / Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. – Київ: Центр навч. літ., 2010. – 424 с.

2. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. – Киев: Вища шк., 1979. – 408 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В.Е. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / Гмурман В.Е.– М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.

5. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика: посібник / Карташов М.В. – Київ: Київський університет, 2008. – 504 с.

6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и метематическая статистика / Кремер Н.Ш. – М.: Юнити, 2010. – 556 с.

7. Овчинников П.П. Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння матем. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і матем. статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи: навч. посіб. [для студ. вищ. техн. навч. закл.] / Овчинников П.П., Кропив'янський П.С., Полушкін С.П. та ін. Ч. 2. — К.: Техніка, 2003. — 376 с.

Додатки

Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. **Додаток 1**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	067449	07142	07535
0,2	07926	08318	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22507	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47822	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0,49966
3,5	0,49977	3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49999	3,9	0,49995
4,0	0,499968	4,5	0,499997	5,0	0,4999997				

Додаток 2

Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3989	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3935	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3868	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1898	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1044	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0149
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
НАГОЛКІНА Зоя Іванівна
ПАСТУХОВА Марина Семенівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Г.В. Кобриної*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 30.12.2016. Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 6,51. Обл.-вид. акр. 7,0.
Тираж 70 прим. Вид. № 15/І-16. Зам. № 51/1-16.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.