

Варіант №1

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=2, y=x} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{4}\right) dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$3) \iiint y dx dy dz.$$

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 32, \\ y^2 = x^2 + z^2, y \geq 0 \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2 + z^2), x = 28.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(1, 0)$ до точки $N(-1, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$; $\vec{l} = (1, -1, 5)$; $M(1, -1, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^{2y} + x, x - 2y, y^2 + 3z), S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №2

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$$
$$3) \iiint_V y dx dy dz.$$
$$V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \\ y \leq \sqrt{3}x; y, z \geq 0$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $x^2 + y^2/9 = 1$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(1, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 2 \ln(x^2 - 5) + 4xyz$; $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x + y, 0, y + 2z), S: z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2).$$

Варіант №3

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$\begin{aligned} 1) \iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} ye^{\frac{xy}{4}} dx dy. \quad 2) \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}. \\ 3) \iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}. \\ V: x^2+y^2=4y, \\ y+z=4, z \geq 0 \end{aligned}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^3 \vec{i} - y^3 \vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4-z^2}$; $S: z = x^2 - y^2$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(1, 1, 0)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z} - 2x, e^x + 3y, \sqrt{y+x}), S: x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 5.$$

Варіант №4

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

1) $\iint_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}} 8ye^{4xy} dx dy.$ 2) $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2+y^2}}.$

3) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz.$
V: $x^2+y^2+z^2=36,$
 $y, z \geq 0, y \leq -x$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$; $S : x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^z + 2x, e^x, e^y), S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №5

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

1) $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} 4y^2 \sin xy dx dy.$ 2) $\int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2 + y^2) dy.$

3) $\iiint_{V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, x, z \geq 0; y \geq \sqrt{3x}} \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geq 0)$ $x^2 + y^2 = 9$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $\vec{l} = (8, 4, 8)$; $M(-2, 1, -1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (3z^2 + x, e^x - 2y, 2z - xy), S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$

Варіант №6

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3} 12y \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$
$$3) \iiint_V \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad V: 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, z = 18$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 8x, x = 2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (2x^2 + 2y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$ ($y \geq 0$) від точки $M(R, 0)$ до точки $N(-R, 0)$.

5. Знайти $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \Big|_M$ за умови, що $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$; $\vec{l} = (4, 3, 0)$; $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y + z, x - 2y + z, x), S : x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

Варіант №7

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: z=3x^2+3y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{3x}, z=3} \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 3x, x = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L : \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z$; $\vec{l} = (4, 0, -3)$; $M(3, -2, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz - 2x, \sin x + y, x - 2z), S : x + 2y - 3z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №8

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y^2} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy.$$
$$3) \iiint_V x dx dy dz.$$
$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ x^2 = y^2 + z^2, x \geq 0 \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2x^2$ від точки $M(0, 0)$ до точки $N(1, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $S: x^2 + y^2 = 24z$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(3, 4, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x + y^2, xz + y, \sqrt{x^2 + 1} + z), S: x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 3.$$

Варіант №9

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2) dy.$$

$$3) \iiint_V \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

$V: \quad z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq y \leq x; z = 4$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(3, 0, -4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (17x, 7y, 11z), S: z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x.$$

Варіант №10

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_D 4ye^{xy} dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{2}, x = 1$

$$3) \iiint_V y dx dy dz.$$

$V: z = \sqrt{8-x^2-y^2},$
 $z = \sqrt{x^2+y^2}, y \geq 0$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $x = 6(y^2 + z^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0$.

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $2x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ від точки $M \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ до точки $N \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz; S: x^2 + y^2 - 2z = 10;$
 $M(3; 5; 12)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (5x - 6y, 11x^2 + 2y, x^2 - 4z), S: x + y + 2z = 2, x, y, z = 0.$$

Варіант №11

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^1 dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=3\pi, x=1, x=3} 3y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, x = 20.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) від точки $M(2, 0)$ до точки $N(-2, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$; $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(0, -3, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\cos z + 3x, x - 2y, 3z + y^2), S : z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$$

Варіант №12

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2x}{3}} 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$$
$$3) \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
$$V: \begin{cases} x^2+y^2=2x; z \geq 0; z=4 \\ x^2+y^2=4x; 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2 - \frac{x^2}{8}$ від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = xy - \frac{x}{z}$; $\vec{l} = (5, 1, -1)$; $M(-4, 3, -1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(\cos z + \frac{x}{4}, e^x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} - 1 \right), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$$

Варіант №13

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy. \quad 2) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

$$3) \iiint_V x dx dy dz.$$

$V: x^2 = 2(y^2 + z^2),$
 $x = 4, x \geq 0$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 7 \ln \left(\frac{1}{13} + x^2 \right) - 4xyz$; $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z} - x, x - y, y^2 - z), S: 3x - 2y + z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №14

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$
$$3) \iiint_V z^2 dx dy dz.$$
$$V: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, \\ y \geq x; x, z \geq 0; z \leq 2 \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - xy^2 \vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geq 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$; $\vec{l} = (2, 0, 1)$; $M(4, 1, -2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (-2x, z, x + y), S: x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

Варіант №15

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=2x} y^2 \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}. \\ V: x^2+y^2=4y; \\ y+z=4; z \geq 0$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$) від точки $M(\sqrt{2}, 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1)$; $\vec{l} = (5, -6, 2\sqrt{5})$; $M(1, 1, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z), S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Варіант №16

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2x}, y=2x} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint x dx dy dz.$$

$$V: \begin{cases} z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0 \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x, y, z = 0; x + y + z = 3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = 2(xy - x)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж $y = 2\sqrt{x}$ від точки $M(0, 0)$ до точки $N(1, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$; $\vec{l} = (-2, -1, 1)$; $M(1, -3, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y + z^2, x^2 + 3y, xy), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$$

Варіант №17

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_V y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

$z^2 = 4x^2 + 4y^2,$
 $z = 2, y \geq \pm x, z \geq 0$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\vec{j} - y\vec{i}$ при переміщенні вздовж $y = x^3$ від точки $M(0, 0)$ до точки $N(2, 8)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; $S : 4z + 2x^2 - y^2 = 0$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(2, 4, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2yz - x, xz + 2y, x^2 + z), S : y - x + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №18

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{1-y^2}^1 f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y \exp\left(\frac{xy}{2}\right) dx dy. \quad 2) \quad \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy. \\ 3) \quad & \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \\ & V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ & \quad x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2z, z = 3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $S : 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(1, -2, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(e^x + 2x, xz - y, \frac{1}{4}e^{xy} - \frac{z}{4} \right), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$

Варіант №19

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

$$3) \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x; \\ z = 3; y, z \geq 0 \end{cases}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 4y, y = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_M$ за умови, що $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$; $\vec{l} = (0, 1, -1)$; $M(1, -3, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^{-z} - x, xz + 3y, z + x^2), S : 2x + y + z = 2, x, y, z = 0.$$

Варіант №20

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_D y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2 + y^2) dy.$$

$D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1$

$$3) \iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y, z \geq 0; x \geq \sqrt{3}y$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x + y)^2 \vec{i} - (x^2 + y^2) \vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1, 0)$ до точки $N(0, 1)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$; $\vec{l} = (-2, 2, -1)$; $M(1, 1, 0)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(e^z + \frac{x}{4}, \ln x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} \right), S: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1.$$

Варіант №21

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy. \quad 2) \quad \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}. \\ 3) \quad & \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz. \\ & V: \quad x^2+y^2=2x, \\ & \quad x+z=2, z \geq 0 \end{aligned}$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2xy + x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} - yz^2$; $S : x^2 + y^2 = 4z$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(2, 1, -1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (8x + 1, zx - 4y, e^x - z), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$$

Варіант №22

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

1) $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos 2xy dx dy.$ 2) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3) $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
 $V: x^2 + y^2 = 2y, z = 6,$
 $x^2 + y^2 = 4y, x, z \geq 0$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) від точки $M(1, 0)$ до точки $N(-1, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$; $S: x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$; $M(1, 1, -2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x + 2z, xz + y, 4xy - 8), S: x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$$

Варіант №23

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{1}{2}, x=2} y \cos 2xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq x; x, y, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\vec{i} + (y - \sqrt{x^2 + y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $8y = 16 - x^2$ від точки $M(4, 0)$ до точки $N(0, 4)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = z^2 + 2 \operatorname{arctg}(x - y)$; $\vec{l} = (1, 2, -2)$; $M(1, 2, -1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (8yz - x, x^2 - 1, xy - 2z), S : 2x + 3y - z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №24

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{1}{2}, x=2} y \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$
$$3) \iiint_V x^2 dx dy dz.$$
$$V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ 0 \leq y \leq x; z \geq 0$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1, 1)$ до точки $N(1, 1)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = x + \ln(z^2 + y^2)$; $\vec{l} = (-2, 1, -1)$; $M(2, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z), S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$$

Варіант №25

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}, x=1, x=2} 2y \cos 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=16y, y+z=16; x, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 3(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_M$ за умови, що $u = y \ln(1 + x^2) - \arctg z$; $\vec{l} = (2, -3, -2)$; $M(0, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(4x - 2y^2, \ln z - 4y, x + \frac{3z}{4} \right), \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$

Варіант №26

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2+z^2=16, z \geq 0} \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 6\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2=9, x=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 \vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$; $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(2, 2, 4)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x, z, -y), S: z = 2(x^2 + y^2), z = 4 - 2(x^2 + y^2).$$

Варіант №27

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

1) $\iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6} 6ye^{\frac{xy}{3}} dx dy.$ 2) $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$

3) $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$
V: $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,$
 $0 \leq y \leq \sqrt{3}x, z \geq 0$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$8x = \sqrt{y^2 + z^2}, x = 1/2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $y = \sin x$ від точки $M(\pi, 0)$ до точки $N(0, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M$ (\vec{n} – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$; $S : z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leq 90^\circ$, $M(-2, \frac{1}{2}, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y + 2z, -y, 3x), S : z^2 = x^2 + y^2, 3z = 27 - 2(x^2 + y^2) (z \geq 0).$$

Варіант №28

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_V xy dx dy dz. \\ V: 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, \\ z^2 = x^2 + y^2; x, y, z \geq 0$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 36, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{j} - x\vec{i}$ при переміщенні вздовж еліпса $(x, y \geq 0)$ $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $M(1, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$; $\vec{l} = (1, -1, 1)$; $M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z} + y, 3x, 3z + 5x), S: z^2 = 8(x^2 + y^2), z = 2.$$

Варіант №29

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

$V: x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $y, z \geq 0; x + z = 2$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) від точки $M(1, 0)$ до точки $N(-1, 0)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$; $\vec{l} = (-1, 2, -2)$; $M(1, 3, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz + x, x^2 + y, xy^2 + z), S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

Варіант №30

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} 4y^2 \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3) \iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x + z = 2, y \geq 0 \end{cases}$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - y \vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1, 0)$ до точки $N(0, 1)$.

5. Знайти $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M$ за умови, що $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$; $\vec{l} = (0, 2, -2)$; $M(1, 5, -2)$.

6. Знайти потік векторного поля \vec{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (3x - 2z, z - 2y, 1 + 2z), S : z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2.$$