МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Теорія функції комплексної змінної

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Київ 2017

ББК 22.331
В92

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор;
І.С. Безклубенко, канд. техн. наук, доцент;
О.І. Баліна, канд. техн. наук, доцент;
С.В. Білощицька, канд. техн. наук, доцент

Рецензент О.О. Терентьєв, д-р техн. наук, профессор

Затверджено на засіданні вченої ради факультету автоматизації і інформаційних технологій, протокол № 8 від 13 березня 2017 року.

Видається в авторській редакції

Вища математика. Теорія функції комплексної змінної: методичні
В 92 вказівки до виконання індивідуальних завдань / уклад.: Н.Д. Федоренко, І.С. Безклубенко, О.І .Баліна, С.В. Білощицька. – К.: КНУБА, 2017 р. – 48 с.

Розглянуто основи теорії функції комплексної змінної, інтегрування та диференціювання функції комплексної змінної та ряди в комплексній області, приклади розв’язання типових задач, варіанти для самостійної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки».

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення загального курсу вищої математики студентами другого курсу спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи з розділу «Теорія функцій комплексної змінної», а саме: дії з комплексними числами, елементарні функції комплексних змінних, диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної, розвинення в ряди Тейлора і Лорана, застосування лишків до обчислення інтегралів.

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконання індивідуального завдання.

У даних методичних вказівках наведено завдання за варіантами для виконання самостійної роботи, а також приклади розв'язання типових задач.

Завдання 1. Виконати указані дії, якщо $z = 2 + 5i$:

1) $z+1$; 2) $z+i$; 3) $z+1-i$; 4) z^2;

5) $z^2 - i$; 6) $z\bar{z}$; 7) $\frac{1}{z}$; 8) $\frac{(1+i)}{z}$;

9) $\sqrt[3]{(z-1-4i)}$; 10) $\sqrt{(z-3-5i)}$; 11) $\sqrt{(z-2-4i)}$.

Завдання 2. В площині Z зобразити геометричні місця точок для заданих співвідношень.

Завдання 3. Обчислити функції комплексної змінної.

Завдання 4. 1) довести диференційованість функції комплексної змінної.

2) Знайти коефіцієнт k розтягу і кут повороту φ в точці z_0.

Завдання 5. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної.

Завдання 6. Обчислити інтеграли Коші і типу Коші.

Завдання 7. Розкласти функцію в ряд Лорана.

Завдання 8. Обчислити визначений інтеграл за допомогою лишків.

Завдання 9. Обчислити невизначений інтеграл за допомогою лишків.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Завдання 1. Виконати указані дії, якщо $z = 2 + 5i$:

1) $z+1$; 2) $z+i$; 3) $z+1-i$; 4) z^2;

5) $z^2 - i$; 6) $z\bar{z}$; 7) $\frac{1}{z}$ 8) $\frac{(1+i)}{z}$;

9) $\sqrt[3]{(z-1-4i)}$; 10) $\sqrt{(z-3-5i)}$; 11) $\sqrt{(z-2-4i)}$.

Розв'язки:

1) $z+1 = 2+5i+1 = 3+5i.$

Радіус-вектор $z+1$ дорівнює сумі двох радіус-векторів z та 1 (Рис. 2).

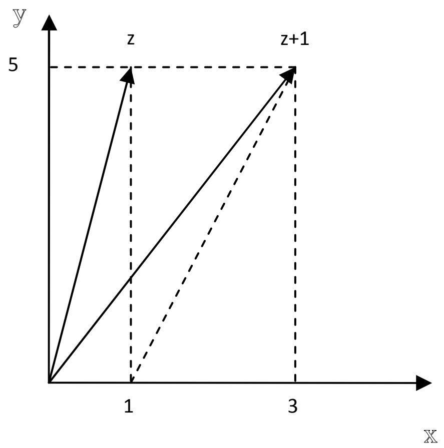

Рис. 2

2) $z+i = 2+5i+i = 2+6i.$

Радіус-вектор $z+1$ дорівнює сумі радіус-векторів z та i (рис. 3).

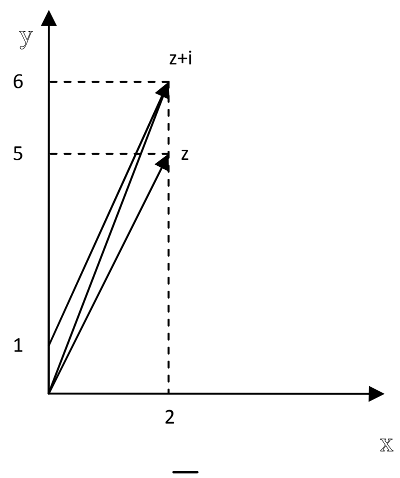

Рис. 3

3) $z+1-i=2+5i+1-i=3+4i.$

Радіус-вектор $z+1-i$ дорівнює сумі радіус-векторів z та $1-i$ (рис. 4).

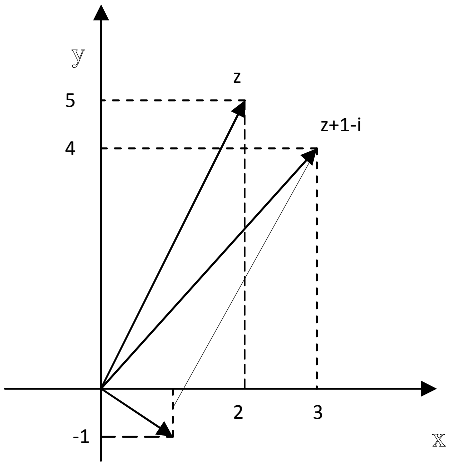

Рис. 4

4) $z^2=(2+5i)(2+5i)=(4-25)+i(10+10)=-21+20i$ або за формулою Мавра $p=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$arctg\,(2+5i)=arctg\,(\frac{y}{x})=arctg\,(\frac{5}{2})$

$\varphi=arctg\;2.5+2\pi k$; kє Z.

$z^2=29(\cos 2arctg2.5+i\sin 2arctg2.5)$

$z^2=29e^{i2arctg\;2.5}$;

5) $z^2-i=-21+20i-i=-21+19i$;

6) $z\overline{z}=(2+5i)(2-5i)=(4+25)+i(-10+10)=29;$

7) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=-\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$ або $\frac{z_1}{z_2}=\frac{p_1}{p_2}e^{(\phi 1-\phi 2)i}.$

Маємо:

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+5i}=\frac{1(2-5i)}{2^2+5^2}=\frac{2-5i}{29}=\frac{2}{29}-i\frac{5}{29}$; $\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{29}(\cos arctg2.5+i\sin arctg2.5)}=$

$=\frac{1}{\sqrt{29}}(\cos(-arctg2.5)+i\sin(-arctg2.5))$

або:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{29}}e^{-iarctg2.5};$$

8) $$\frac{1+i}{z}=\frac{(1+i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{2+5}{4+25}+i\frac{-5+2}{4+25}=\frac{7}{29}-i\frac{3}{29};$$

$$\frac{1+i}{z}=\frac{\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{2}(\cos arctg2.5+i\sin arctg2.5)}=\sqrt{\frac{2}{29}}\left[\cos((\frac{\pi}{4})-arctg2.5)+i\sin((\frac{\pi}{4})-arctg2.5)\right]$$

$$\frac{1+i}{z}=\frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{29}e^{iarctg2.5}}=\sqrt{\frac{2}{29}}e^{i((\frac{\pi}{4})-arctg2.5)};$$

9) $$\sqrt[3]{(z-1-4i)}=\sqrt[3]{(2+5i-1-4i)}=\sqrt[3]{(1+i)}=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), \text{k=0,1,2}$$

$$z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

10)

$$\sqrt{(z-3-5i)}=\sqrt{(2+5i-3-5i)}=\sqrt{-1}=\sqrt{(\cos\pi-i\sin\pi)}=\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)$$

k=0,1

$$z_0=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

$$z_1=\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)=-i;$$

11)

$$\sqrt{(z-2-4i)}=\sqrt{(2+5i-2-4i)}=\sqrt{i}=\sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))}=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}{2}+\frac{i\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}{2}$$

k=0,1

$$z_0 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \cos((\frac{\pi}{4}) + \pi) + i\sin((\frac{\pi}{4}) + \pi) = -\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Завдання 2. В площині Z зобразити геометричні місця точок для заданих співвідношень:

1) $z = z_0 + re^{it}$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$; $\ z_0 \in c$; $\ r \in R$

2) $z - z_0 = te^{i\varphi_0}$; $\ -\infty \langle\, t \,\langle\, \infty$, $\ z_0 \in c$, $\ r \in R$

3) $\dfrac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} = t$; $\ -\infty \langle\, t \,\langle\, \infty$, $\ z_1, z \in c$; $\ z_2 \ne z_1$;

4) $|z-2| + |z+2| = 5$;

5) $|z - z_0| \langle\, r$, $\ z_0 \in c$, $\ r \in R$.

Розв'язки:

1) $z = z_0 + re^{it}$. Маємо: $z_0 = x_0 + iy_0$, $re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$.

Тоді $x + iy = x_0 + iy_0 + r(\cos t + i\sin t) = x_0 + r\cos t + i(y_0 + \sin t) \Leftrightarrow x = x_0 + r\cos t$,

$y = y_0 + r\sin t$.

Звідси випливає, що $x - x_0 = r\cos t$, $\quad y - y_0 = r\sin t$, $\quad 0 \langle\, t \,\langle\, 2\pi$ - параметричні рівняння кола радіуса r з центром в точці (x_0, y_0) (рис. 5)

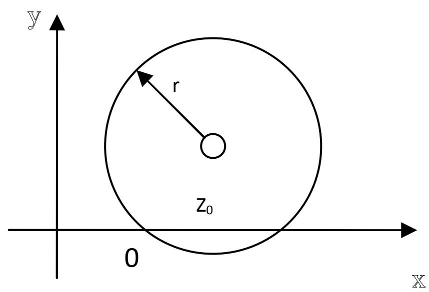

Рис. 5

Маємо параметричні рівняння прямої

$$z = z_0 + te^{i\varphi 0} \Leftrightarrow x + iy = x_0 + iy_0 + t(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) \Leftrightarrow x + iy = x_0 + t\cos\varphi_0 + i(y_0 + t\sin\varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + t\cos\varphi_0; \quad y = y_0 + t\sin\varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\cos\varphi_0 \\ y - y_0 = t\sin\varphi_0 \end{cases}, \ t \in R$$

Виключаючи параметр t, маємо: $y-y_0=k(x-x_0)$, $k=tg\varphi_0$ (рис. 6)

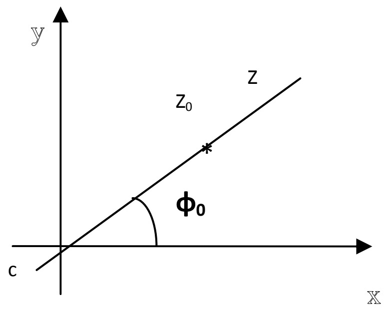

Рис. 6

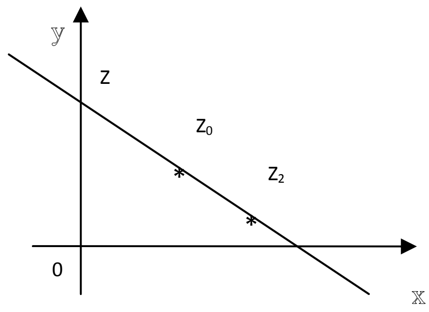

Рис. 7

3) З $\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$, $t\in R$, випливає, що вектори z_2-z_1 та $z-z_1$ колінеарні. Геометричне місце точок Z є пряма , що проходить через точки z_1 і z_2 (рис. 7)

4) Модуль різниці двох комплексних чисел $|z_2-z_2|$ в площині z дорівнює відстані між точками z_2 і z_1, тому $|z-2|+|z-2|=5$ є сума відстаней довільної точки z від двох точок 2 і -2 і дорівнює 5. Отже, геометричне місце точок z є еліпс з фокусами в точках $z_1=2$ і $z_2=-2$, велика вісь еліпса дорівнює 5 (Рис.8)

5) Оскільки $|z-z_0|$ дорівнює відстані між точками z і z_0 то $|z-z_0|\langle\ r$ є геометричне місце точок z, відстань яких до даної точки z_0 менше за r, тобто коло радіуса r є центром в точці z_0 (рис. 9).

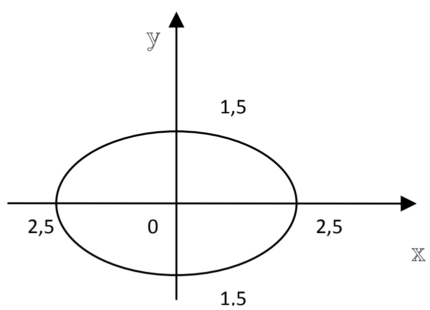

Рис. 8

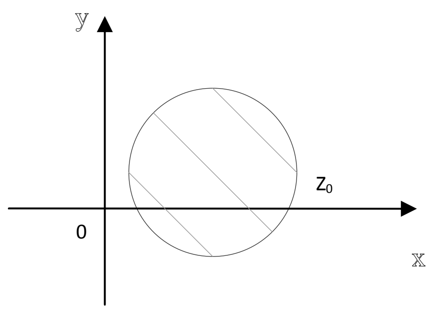

Рис. 9

Завдання 3. Обчислити:

1) $ch(-1+i)$; 2) $\ln(-1)$;

3) $(-1)^1$; 4) розв'язати рівняння $\sin z = 2$.

Розв'язки:

1) З формули $ch\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ маємо

$$ch(-1+i) = \frac{1}{2}\left[e^{-1+i} + e^{-(-1+i)}\right] = \frac{1}{2}e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1) + \frac{1}{2}e(\cos 1 - i\sin 1) = \cos 1\frac{e+e^{-1}}{2} - i\sin 1\frac{e-e^{-1}}{2} =$$
$$\cos 1 ch1 - i\sin 1 sh1 \approx 0{,}83 - i0{,}99.$$

2) З формули $Ln\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Маємо $Ln(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2\pi k) = \pi i + 2\pi k i = (2k+1)\pi i$

3) $(-1)^1 = e^{i\ln(-1)} = e^{i(2k+1)\pi i} = e^{-\pi(2k+1)}$.

4) Розв'язати рівняння $\sin z = 2$, $Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1-z^2})$

Маємо:

$$z = Arc\sin 2 = -iLn(2i \pm \sqrt{1-4}) = -iLn\left[(2 \pm \sqrt{3})i\right] = -i\left[\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i\right] =$$
$$= \left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi - i\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right|.$$

Завдання 4. 1) Довести, що функція $w = e^z$ диференційовна у всіх точках площини і знайти її похідну.

Розв'язок:

Маємо $w = e^z$, $z = x + iy$. Тоді $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Тому $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$. Знаходимо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$.

Оскільки ця функція задовольняє умовам Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, то вона диференційовна. Її похідну знаходимо за формулою $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i(\dfrac{\partial v}{\partial x})$.

Маємо: $(e^z)' = (e^x\cos y + ie^x\sin y)' = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{yi} = e^{x+iy} = e^z$. Отже $(e^z)' = e^z$.

2) Знайти коефіцієнт розтягу k, та кут повороту φ в точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ при відображенні функцією $w = z^2$.

Розв'язок:

$\varphi = Arg\ f'(z_0)$, якщо $f'(z_0) \neq 0$, $k = |f'(z_0)|$. Знаходимо $f'(z) = 2z$, отже $f'(z_0) = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$. Маємо: $\varphi = Arg\ f'(z_0) = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$; $k = |f'(z_0)| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$.

3) Маємо уявну частину $v = \sin xshy$ диференційовної функції $f(z)$. Знайти цю функцію.

Розв'язок:

Маємо $v = \sin xshy$. Тоді $\frac{\partial v}{\partial y} = \sin xchy$. Скориставшись формулою Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin xchy$. Звідси $u = \int \sin xchydx =$

$= -\cos xchy + \varphi(y)$. Отже, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos xshy + \varphi^1(y)$, скориставшись другою умовою Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, маємо $-\cos xshy + \varphi^1(y) = -\cos xshy$. Отже, $\varphi^1(y) = 0$, або $\varphi(y) = c$. Звідси маємо $f(z) = u + iv = -\cos xshy + c + i\sin xshy =$

$= -(\cos xchy - i\sin xshy) + c = -\cos z + c$.

Завдання 5. 1. Обчислити $\int (1 + i - 2\bar{z})dz, de$

а) с-відрізок $[z_1; z_2]$; б) с-дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$;

в) с-відрізки $[z_1; z_3] \vee [z_3; z_2]$, ($z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1$).

Розв'язки:

Якщо $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, то $1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$, де $u = 1 - 2x$, $v = 1 + 2y$.

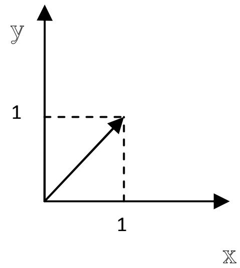
Рис. 10

За формулою $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

маємо:

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int_C (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

а) Контур С-відрізок $y = x$, $0 \le x \le 1$ (рис. 10)

тому $\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_0^1 ((1 - 2x) - (1 + 2x))dx +$

$+ i\int_0^1 ((1 + 2x) + (1 - 2x))dx = 2(i - 1)$

б) Контур С-дуга параболи $y = x^2$; $x \le 1$ (рис. 11)

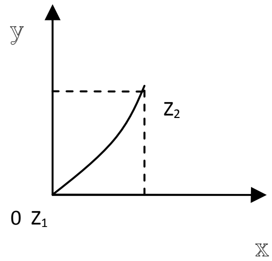

Рис. 11

маємо

$$\int_0^1 \left[1 - 2x - (1 + 2x^2)2x\right]dx + i\int_0^1 \left[1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x\right]dx = -2 + \frac{4}{3}i$$

в) Контур С=C_1+C_2 (рис. 11$'$) $C = [z_1; z_3] \vee [z_3; z_2]$

маємо $C_1 = [z_1; z_3]$; $y = 0$, $0 \le x \le 1$;

$C_2 = [z_3; z_2]$; $x = 1$, $0 \le y \le 1$;

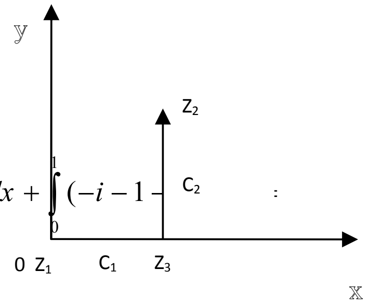

Рис. 11

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_{C_1} (1 + i - 2\bar{z})dz + \int_{C_2} (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_0^1 (1 + i - 2x)dx + \int_0^1 (-i - 1 -$$

$$= ((1+i)x - x^2)\Big|_0^1 + ((-i-1)y - y^2)\Big|_0^1 = -2.$$

2. Обчислити $\int_C (z^2 + z\bar{z})dz$ $c : |z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$

(рис. 12)

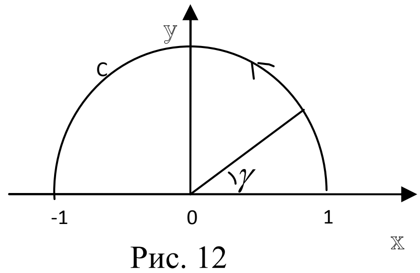

Рис. 12

Рішення: Розглянемо $z \in C$ в показниковій формі $z = e^{i\varphi}$ $0 \le \varphi \le 2\pi$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, тоді

$$\int_0^\pi (z^2 + z\bar{z})dz = \int_0^\pi ie^{i\phi}(e^{i2\phi} + 1)d\phi = i\int_0^\pi (e^{i3\phi} + e^{i\phi})d\phi = (\frac{1}{3}e^{i3\phi} + e^{i\phi})\Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

Завдання 6. Обчислити:

а) $\int_\Gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z^2 + z}$ $\Gamma: |z - 1| = \frac{1}{2}$;

б) $\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 6)}$ $\Gamma: |z| = 4.$

Розв’язки:

а) $z = 0$, $z = -1$ - особливі точки (полюса) не належать області D (рис. 14). Тому функція всередині області D і на контурі Г аналітична. Отже,

$$\int_\Gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z^2 + z} \qquad \Gamma: |z - 1| = \frac{1}{2};$$

б) $z_1=-6$, $z_2=-3i$, $z_3=3i$ - особливі точки: $\pm 3i\in D$, $-6\notin D$. Оточимо точки $\pm 3i$ (рис. 15) колами γ_1 і γ_2 малих радіусів – тоді

$$\int\limits_{\Gamma:|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+6)}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\dfrac{1}{(z-3i)(z+6)}}{z+3i}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\dfrac{1}{(z+3i)(z+6)}}{z-3i}dz=$$

$$=2\pi i\frac{1}{(z-3i)(z+6)}\Big|_{z=-3i}+2\pi i\frac{1}{(z+3i)(z+6)}\Big|_{z=3i}=2\pi i\frac{1}{-6i(6-3i)}+2\pi i\frac{1}{6i(6+3i)}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{6+3i}-\frac{1}{6-3i}\right)=\frac{-2\pi}{45}i$$

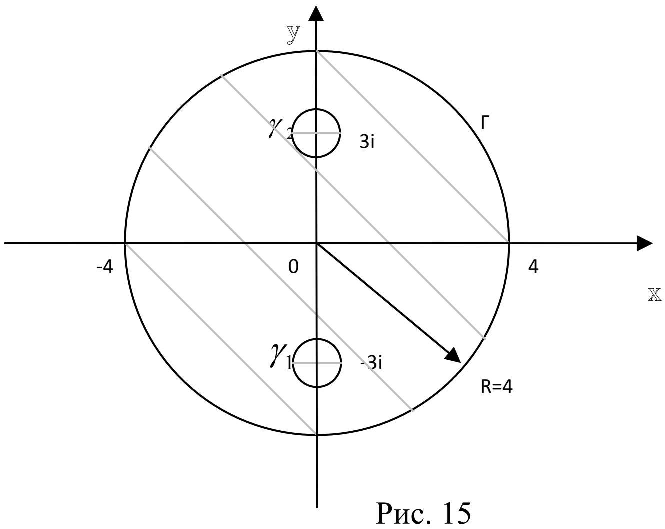

Рис. 15

4. Обчислити

а) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma:|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$;

б) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma:|z-3|=6}\frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$.

Розв'язки:

а) $z=0$ - особлива точка (полюс кратності 3). Ця точка належить області D (рис. 16).

Застосувавши формулу (2), маємо:

$$\int\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\frac{1}{2!}(\cos z)^{11}\Big|_{z=0}=2\pi i\frac{1}{2}(\cos z)\Big|_{z=0}=-\pi i$$

б) Особливі точки:

$z=-4\notin D$

$z=2\in D$- полюс кратності 2 (рис. 17).

Застосувавши формулу (2), маємо

$$\int\limits_{\Gamma:|z-3|=6}\frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}=\int\limits_{\gamma}\frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^2}dz=2\pi i\frac{1}{1!}\left(\frac{z}{z+4}\right)^{1}\Bigg|_{z=2}=2\pi i\frac{z+4-z}{(z+4)^2}\Bigg|_{z=2}=\frac{2\pi i}{9}.$$

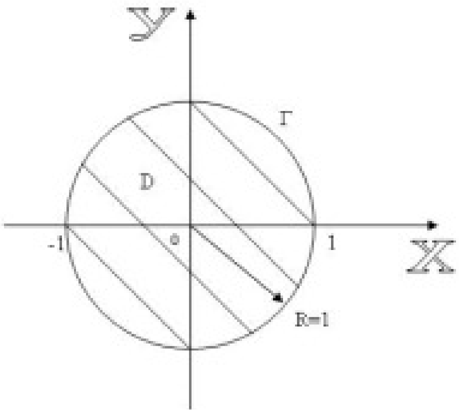

Рис. 16

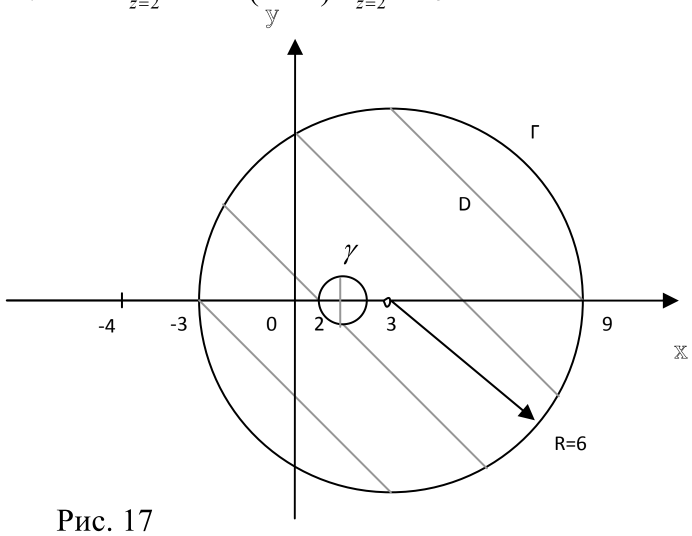

Рис. 17

Завдання 7. 1. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$.

Розв'язок:

1) Біля полюса $z=0$ розклад в ряд Лорана має вигляд

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+...)=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-...;$$

2) Біля полюса $z=1$ маємо

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+...\right]=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+...$$

2. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в кільці $1\langle\, |z|\,\langle\, 2$.

Розв'язок:

Запишемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ як суму двох простих дробів $\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-2}$.

Оскільки $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$ - є сумою геометричної прогресії, модуль знаменника якої $\left|\dfrac{z}{2}\right|\langle\, 1$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+...+\frac{z^n}{2^n}+..., \text{ то}$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-...-\frac{z^n}{2^{n+1}}-...$$

Ряд в правій частині збіжний, тому що $|z| \langle 2$

Другий дріб перепишемо у вигляді

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-...-\frac{1}{z^n}-...$$

Ряд в правій частині збіжний в кільці $1\langle |z| \langle 2$, тому що $|z| \rangle 1$ і, отже $\frac{1}{|z|} \langle 1$.

З цього випливає, що

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-...-\frac{z^n}{2^{n+1}}-...-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-...-\frac{1}{z^n}-...$$

3. Розкласти в ряд Лорана в околі точки $z=1$ функцію $\frac{\sin z}{z-1}$.

Розв'язок:

Маємо:

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin(1+\frac{1}{z-1})=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}.$$

Враховуючи, що

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...$$

Знаходимо

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+...+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+...$$

Завдання 8.1. Обчислити $\int_{\Gamma}\frac{e^z dz}{z\sin z}$, де Г – мале коло, яке оточує початок координат.

Розв'язок:

Маємо $z=0$ - полюс 2-го порядку, бо для малих z виконується:

$$\frac{e^z}{z\sin z}=\frac{1+2+\frac{z^2}{2}...}{z(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...)}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2}...}{z(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...)}$$

$$\int_\Gamma \frac{e^z dz}{z\sin z}=2\pi i \ rez\ f(0)=2\pi i\lim_{z\to\infty}\left\{\frac{e^z}{z\sin z}z^2\right\}=2\pi i.$$

2. Обчислити $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язок:

Заміна $e^{ix}=z$ перетворює в площині z відрізок $x\in[0,2\pi]$ в коло $|z|=1$.

Маємо $dx=-i\frac{dz}{z}$, $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$.

Тоді

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=-2i\int_c\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Особливі точки $z_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$ - прості полюса, причому $z_1=-2+\sqrt{3}$ всередині контура C.

Маємо:

$$\int_c\frac{dz}{z^2+4z+1}2\pi i\ rez\ (f(z),z_1).$$

Обчислюємо

$$rez(f(z),z_1)=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{z-z_1}{z^2+4z+1}\right)=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \Big|_{z_1}=\frac{1}{2z_1+4}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

і

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=-2i2\pi i\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Завдання 9. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+4x+13)^2}dx.$

Розв'язок:

Якщо функція $f(z)$ має нескінченно віддалену точку $z=\infty$ нулем другого або вищого порядку, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} rez\ f((z)_1 z_k).$$

z_k - особливі точки функції $f(z)$, такі що $\mathrm{Im} z \rangle 0$.

Функція $f(z) = \dfrac{z}{(x^2+4x+13)^2}$ має точку $z = \infty$, нулем 3-го порядку; її особливі точки, полюси 2-го порядку, знаходимо із рівняння $z + 4z + 13 = 0$ $\Rightarrow z_{1,2} = -2 \pm 3i$, при чому $z_1 \in \mathrm{Im}\, z \rangle 0$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\ rez\ f((z)_1 z_1).$$

$$rez\ f((z)_1 z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}((z-z_1)^2 f(z)) = \lim_{z \to z_1} (\frac{z}{(z+2+3i)^2})' =$$

$$= \frac{1}{(z_1+2+3i)^2} - \frac{2z_1}{(z_1+2+3i)^2} = \frac{i}{54}.$$

Маємо $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \dfrac{i}{54} = -\dfrac{\pi}{27}$.

ВАРІАНТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. $z = 1 + i.$

2. $|z| = 1, Ymz = 3$, $|z - 1 + i| = 2$, $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{4}$, $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$, $z = \dfrac{t}{1-t} i(t+1)$, $z = 2 + i + 4e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $|z| \langle 2, \mathrm{Im} z \langle -1, \langle \mathrm{Re} z \langle 2,$

$\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 0$, $|z + 2i| \rangle 2, |z-2| - |z+2| \rangle 3.$

3. $w(z) = \sin 2i$; $w(z) = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; $w(z) = Ln(2 - 3i)$;

4. $\sin z + \cos z = 2$.

5. $w = \sin z$.

6. $u = 3x^2 y - y^3$, $w = 3xy^2 - x^3$, $z_0 = -1 + i$.

7. $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$.

8. $\int_c z\, \mathrm{Im}\, z^2 dz$, $c : |z| = 1$, $-\pi \le \arg z \le 0$.

$$\int_L \frac{dz}{z(2-z)},\ L:\begin{matrix} a)\{z:|z|=1\} \\ б)\{z:|z-2|=1\} \\ в)\{z:|z-1|=3\} \end{matrix}$$

$$\int_L \frac{\cos z}{(z+i)^2}dz,\ L:\{z:|z|=1\}.$$

9. $a)\ \sin(2z+1),\ z+1;$

$б)\dfrac{\sin^2 z}{z^2}, z_0=0.$

10. $a)\displaystyle\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},\ c:|z-1-i|=2;$

$б)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

Варіант 2

1. $z=1-i$

2. $|z|=1, \mathrm{Im}z=-2$, $\quad |z-2-i|=1$, $\quad \arg(z+i)=\dfrac{\pi}{4}$, $\quad |z-1|+|z+1|=4$, $\quad \left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|=1$,

$z=1-i+2e^{it}, 0\langle\, t\,\langle\, 2\pi$, $\quad z-2ti=te^{i\frac{\pi}{4}}, t\in R$, $\quad z\geq 5$, $\quad \mathrm{Im}z\,\langle\, 2$, $\quad -1\,\langle\, \mathrm{Re}z\,\langle\, 3$,

$|1+z|\,\langle\, |1-z|$, $\quad |z-1+i|\,\langle\, 2$, $\quad 0\langle\, \arg\left(\dfrac{i-z}{z+i}\right)\langle\, \dfrac{\pi}{2}$.

3. $w(z)=\sin(5-i)$; $w(z)=i^i$; $w(z)=Ln(-1)$.

4. $\sin z-\cos z=3$.

5. $w=\cos z$.

6. $u=e^x(x\cos x-y\sin y), v=e^x(x\sin x+y\cos y),\ z_0=-1+i\pi$.

7. $u=2^x\cos(y\ln 2)$.

8. $\int \ln z dz,\ c:|z|=1$

$a)$ початкова точка інтегрування **с** $z_0=1$.

$б)$ $z_0=-1$

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)(z-3)},\ L:\begin{matrix} a)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\} \\ б)\{z:|z-2|=1\} \\ в)\{z:|z|=4\} \end{matrix}$$

$\int\limits_L \frac{che^{i\pi z}}{z^2(z-1)}dz$, $L:\{z:|z-2|=3\}$.

9. $a) e^z, 2z-1$

$б) z^3 e^{\frac{1}{z}}, z_0=0$

10. $a) \int\limits_c \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, $c:|z|=4$;

$б) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Варіант 3

1. $z=3+\sqrt{3}i.$

2. $|z|=\sqrt{2}, \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$, $|z+1-2i|=1$, $\arg(z+2i)=\frac{\pi}{4}, |z-0{,}1|+|z+0{,}1|=2$,

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$, $z=3+\sqrt{3}i+2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $\frac{z-1}{8i-1}=t$, $0\le t\le 1$,

$|z-1|\le 5$, $\mathrm{Re}(z^{-1}) \langle \frac{1}{2}$, $|z-2|+|z+2| \langle 2$, $0\le \arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right)\le\frac{\pi}{4}$,

$\left(\frac{z-i}{z+1}\right)\le 1, |z-1| \rangle 2|z-i|$.

3. $w(z)=\cos(2-i)$; $w(z)=(-3-4i)^i$; $w(z)=Lni.$

4. $ch\, z - sh\, z = 1$.

5. $w=Ln\, z$.

6. $u=x^3-3xy^2+x^2-y^2$, $v=3x^2y-y^3+2xy$, $z_0=\left(\frac{2}{3}\right)i$.

7. $v=-2\sin 2x\, sh\, 2y+y$, $w(0)=2$.

8. $\int\limits_c z\,\mathrm{Re}\, z dz$, $c:|z|=1$

$\int\limits_L \frac{dz}{(z-2)(z-4)}$, $L:$ $a)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\}$ $б)\{z:|z|=3\}$ $в)\{z:|z|=5\}$

$\int\limits_L \frac{dz}{(z+1)^4}$, $L:\{z:|z|=2\}$.

9. $a)\ \frac{1}{3z+1},\ z+2;$

$б) z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0=0.$

10. $a)\ \int\limits_c \frac{dz}{(z-1)^2+(z^2+1)},\ c: x^2+y^2=2x+2y;$

$б)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}.$

Варіант 4

1. $z=-\sqrt{3}+i.$

2. $z=\sqrt{3}, \operatorname{Im} z^{-1}=2,\ |z-2-i|=2,\ \arg z=\frac{\pi}{4}, z=-\sqrt{3}+i+4e^{it},\quad z-i=te^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}, t\in R,$

$|z+2|-|z-2|=3,\ \left|\frac{z-1}{z}\right|=1,\quad |z|\le 4,\ 0\langle \arg\left(\frac{i-z}{z+i}\right)\langle \frac{\pi}{2},\quad |z-2+i|\langle 1,$

$|z-2|-|z+2|\rangle 3,\quad \left|\frac{z-2i}{z+2i}\right|\le 1,\quad |z|+\operatorname{Re} z\le 1.$

3. $w(z)=\cos(2+i)$; $w(z)=1^{-i}$; $w(z)=Ln(-2+3i)$.

4. $ch\, z-sh\, z=1.$

5. $w=\bar{z}.$

6. $u=e^{1+y}\cos x,\ v=-e^{y+1}\sin x,\ z_0=\frac{\pi}{2}+i.$

7. $v=3x+2xy$.

8. $\int\limits_c z\,\bar{z}dz,\ c: |z|=1$

$$\int\limits_L \frac{e^z-1}{z(z-i)}dz,\quad L:\ \begin{array}{l} a)\{z:|z|=2\} \\ б)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \\ в)\left\{z:|z-i|=\frac{1}{2}\right\}\end{array}$$

$$\int\limits_L \frac{shz}{(z^2-1)^2},\quad L:\{z:|z|=2\}.$$

9. $a)\ \frac{z+1}{z^2+4z-5},\ z$

$б)\frac{1}{z}\sin^2\left(\frac{z}{2}\right),\ z_0=0.$

10. $а)\int\limits_c \frac{dz}{(z^2-1)-(z-3)^2},\quad c:|z-2-i|=2;$

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^5+1}dx.$

Варіант 5

1. $z=1+\sqrt{3}i.$

2. $|z|=\sqrt{3}$, $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}$, $|z+3|+|z-3|=1$, $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$, $|z-1|=2|z-i|$, $z=1+\sqrt{3}i+e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $\left(\frac{z-2+i}{3i-2}\right)=t, 0\le t\le 1$, $|z|\le 4$, $\frac{\pi}{4}\langle\arg(z+i)\langle\frac{\pi}{2}$, $|z+2-\sqrt{3}i|\ge 1$, $|z+i|+|z-i|\rangle 1$, $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\ge 1$, $|z-1|\langle|z-i|$.

3. $w(z)=tg(2-i)$; $w(z)=(3-4i)^{1+i}$; $w(z)=Ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

4. $sh\,z-ch\,z=2i$.

5. $w=z^2\bar{z}$.

6. $u=e^y\cos x$, $v=-e^y\sin x$, $z_0=\frac{\pi}{3}$.

7. $v=2xy+3x$.

8. $\int\limits_c \mathrm{Re}z\,dz$; $c:z=(2+i)t$, $0\le t\le 1$

$$\int\limits_L\frac{dz}{z(z-i)},\ L:\begin{array}{l} а)\{z:|z|=1\} \\ б)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \\ в)\left\{z:|z-i|=\frac{1}{2}\right\}\end{array}$$

$\int\limits_L\frac{\cos z}{z^2(z-1)}dz, L:\{z:|z|=2\}.$

9. $а)\frac{z}{z^2+1}, z$

$б)\frac{(1-\cos z)}{z^2}\ z_0=0.$

10. $a)\int\limits_c \frac{dz}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$, $c:|z|=1$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

Варіант 6

1. $z=1-\sqrt{3}i.$

2. $|z|=\sqrt{5}$, $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{Re}(\frac{1}{z})=3$, $|z+i|+|z-i|=2$, $\left|\frac{z+1}{z-i}\right|=1$, $z=2i+\sqrt{3}e^{it}$,

$\left(\frac{z-i}{2+(\sqrt{3}-1)i}\right)=t$, $t\in R$, $2-i=te^{i\frac{\pi}{4}}$, $|z|\geq\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}\langle\arg(z+i)\langle\frac{\pi}{2}$, $|z-1+\sqrt{3}i|\leq 1$,

$|z+2i|+|z-2i|\langle 1$, $\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right|\leq 1$, $|z+1|\langle|z-i|$.

3. $w(z)=ctg(\frac{\pi}{4}-i\ln 2)$; $w(z)=1^{\sqrt{2}}$; $w(z)=Ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

4. $2ch\,z-sh\,z=i$.

5. $w=ze^{z}$.

6. $u=2xy-2x$, $v=y^2-2y-x^2+1$, $z_0=1$.

7. $u=2e^x\sin y$.

8. $\int\limits_c \operatorname{Re}z\,dz$; c: відрізки $[0,2]\cup[2,2+i]$

$$\int\limits_L \frac{chz}{(z-1)(z+i)}dz,\quad L: \begin{array}{l} a)\{z:|z|=2\} \\ б)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \\ в)\{z:|z-1|=1\} \end{array}$$

$\int\limits_L \frac{\sin iz}{z^2(z-1)}dz$, $L:\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\}$.

9. $a)\cos^2\frac{iz}{2}$, z

$б)\frac{(e^z-1)}{z}$ $z_0=0.$

10. $a)\int\limits_c \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$, $c:|z|=2$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x-i}dx$.

Варіант 7

1. $z=-1+i.$

2. $|z|=\sqrt{2}$, $\mathrm{Im}\frac{(z-2)}{(z+2)}=0$, $\mathrm{Re}(z^2)=2$, $|z+3|-|z-3|=1$, $\left|\frac{z-i}{z+2}\right|=1$, $|z-1|=2|z+i|$,

$z=-1+i+2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $\left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)=t$, $0\le t\le 1$, $|z-i|\rangle\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{6}\langle\arg(z+i)\langle\frac{\pi}{2}$,

$|z+1-i|\ge 1$, $|z-i|+|z+i|\langle 4$, $\left|\frac{z-3i}{z+3i}\right|\ge 1$, $|z|+\mathrm{Re}z\le 1$.

3. $w(z)=\cos(2+i)$; $w(z)=i^{1-i}$; $w(z)=Ln(1+7i)$.

4. $\sin z=i$.

5. $w=|z|\bar{z}$.

6. $u=e^{1-2x}\cos 2y$, $v=-e^{1-2x}\sin y$, $z_0=\frac{\pi}{3}i$.

7. $v=2\cos x\, ch\, y-x^2+y^2$, $w(0)=2$.

8. $\int\limits_c e^z dz$; c: дуга параболи $y=x^2$, від точки

$z_1=0$ до точки $z_2=1+i$

$$\int\limits_L\frac{dz}{(z-i)(z+i)},\quad L:\begin{array}{l} a)\{z:|z|=1\} \\ б)\left\{z:|z|=\frac{1}{3}\right\} \\ в)\{z:|z-1|=1\}\end{array}$$

$\int\limits_L\frac{zdz}{(z-1)^2}$, $L:\{z:|z|=2\}$.

9. *а)* $sh(\frac{z}{2})$, z

б) $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$ $z_0=0.$

10. *а)* $\int\limits_c\frac{dz}{z(z-2)}$, $c:|z|=3$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-1}dx$.

Варіант 8

1. $z = 5 + 5\sqrt{3}i.$

2. $|z - i| = 1,\ \mathrm{Re}\left(\frac{z-3}{z+3}\right) = 8,\ \arg(z + i) = \frac{\pi}{6},\ |z - 4| + |z + 4| = 1,\ \left|\frac{z-i}{z+3}\right| = 1,\ |z + 1| = |z + 2i|,$

$z = 5 + \sqrt{3}i + 3e^{it}, 0 \le t \le 2\pi\ ,\ \left(\frac{z-2}{i-2}\right) = t,\ t \in R\ ,\ |z - i| \ge 2,\ \frac{\pi}{6} \langle \arg(z - 1) \langle \frac{\pi}{2},\ |z - 2 + \sqrt{3}i|$

$\le 2,\ |z - 2i| - |z + 2i| \langle 4,\ \left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| \le 1,\quad |z - 1| \rangle |z + i|\ .$

3. $w(z) = \sin(1 - 3i)$; $w(z) = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; $w(z) = Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right).$

4. $\sin z + \cos z = 2$.

5. $w = e^{z^{z^2}}$.

6. $u = x^3 - 3xy^2 + 3x,\ v = 3x^2y - y^3 + 3y - 1,\ z_0 = e^{i - \frac{\pi}{4}}$.

7. $v = x^2 - y^2 + xy,\ w(0) = 0$.

8. $\int\limits_c e^z dz$; c: відрізок $[0, 1 + i]$

$\int\limits_L \frac{e^z}{z(z-2)} dz\ ,\quad L:$ $а)\{z : |z| = 2\}$ $б)\{z : |z - 2| = 1\}$ $в)\left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\}$

$\int\limits_L \frac{e^z}{z^2} dz\ ,\quad L : \{z : |z| = 1\}.$

9. $а)\ \ln(2 - z),\ z$

$б)\ \frac{1 + \cos z}{z^4}\ z_0 = 0.$

10. $а)\int\limits_0^{\pi} ctg\,(x - i)dx$,

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$.

Варіант 9

1. $z = -1 - \sqrt{3}i.$

2. $|z - i| = 2i,\ \mathrm{Im}(z - \sqrt{3}i) = 0,\ \arg \bar{z} = \frac{\pi}{4},\ 1 \langle \mathrm{Re} z \langle 2,\ |z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\ ,\ \left|\frac{z+i}{z+2i}\right| = 1,$

$z = -1 - \sqrt{3}i + 4e^{it}, 0 \le t \le 2\pi\ ,\ \left(\frac{z-2+i}{-2+2i}\right) = t,\ 0 \le t \le 1\ ,\ |z - i| \langle 2,\ 1 \langle \mathrm{Im}(z - \sqrt{3}i) \langle 2,\ 0 \langle$

$\arg z \langle \frac{\pi}{4}$, $|z-2i|+|z+2i| \rangle 2$, $\left|\frac{z-\sqrt{2}i}{z+\sqrt{2}i}\right| \geq 1$, $|z-2| \langle |z-i|$.

3. $w(z)=\cos 3i$; $w(z)=(-2)^{\sqrt{2}}$; $w(z)=sh(-1+5i)$.

4. $z^2+i=0$.

5. $w=|z|\operatorname{Re}\bar{z}$.

6. $u=e^{1+2y}\cos 2x$, $v=-e^{1+2y}\sin x$, $z_0=\frac{\pi}{8}$.

7. $v=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \rangle 0$.

8. $\int_0^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$; по $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$

$\int_L \frac{1-\frac{2}{z}e^z}{z-2i}dz$, L: $a)\{z:|z-2i|=1\}$ $б)\{z:|z|=1\}$ $в)\{z:|z-2|=1\}$

$\int_L \frac{e^{iz}}{z^2(z-1)}dz$, $L:\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\}$.

9. $a)\ln(2+z-z^2)$, z

$б)\sqrt[3]{1+z}$, $z_0=0$

10. $a)\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{2-\cos x}dx$,

$б)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Варіант 10

1. $z=-3+\sqrt{3}i$.

2. $|z+2i|=2$, $\operatorname{Im}\frac{z-3}{z+3}=0$, $\arg\bar{z}=\frac{\pi}{6}$, $-1 \langle \operatorname{Re} z \langle 3$, $|z-\sqrt{2}|-|z+\sqrt{2}|=3$, $\left|\frac{z-i}{z+2i}\right|=1$,

$z=-3+\sqrt{3}i+2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\left(\frac{z-1}{1-i}\right)=t$, $0 \leq t \leq 1$, $|z+2i| \geq 3$, $1 \langle \operatorname{Im}(z-2) \leq 3$, $-\frac{\pi}{4} \langle \arg z \langle$

0, $|z-2i|-|z+2i| \rangle 3$, $\left|\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right| \leq 1$, $|z+1| \leq |z+i|$.

3. $w(z)=\sin(1+i)$; $w(z)=i^{1+i}$; $w(z)=Arc\cos i$.

4. $\sin z=2i$.

5. $w=\sin 3z-i$.

6. $u=x^2+2x-y^2$, $v=2xy+2y$, $z_0=i$.

7. $u=x^2-y^2+2x$.

8. $\int\limits_1^i \frac{\ln z}{z}dz$; на відрізку $[1,i]$.

$$\int\limits_L \frac{e^z}{z}dz,\ L: \begin{matrix} а)\{z:|z|=1\} \\ б)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \\ в)\{z:|z-1|=2\} \end{matrix}$$

$\int\limits_L \frac{\sin\pi z}{(z-1)^2}dz, L:\{z:|z|=3\}$.

9. $а)\frac{1}{1+z^2}$, z

$б)\ln(1+z^2)$, $z_0=0$.

10. $а)\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$,

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx$.

Варіант 11

1. $z=3+\sqrt{3}i$.

2. $|z+i|=1$, $\operatorname{Im}(z-2i)=0$, $\arg\bar{z}=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}z=z\sqrt{3}$, $|z-\sqrt{2}|+|z+\sqrt{2}|=3$, $\left|\frac{z-i}{z+2i}\right|=1$,

$z=3+\sqrt{3}i+2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $\left(\frac{z-2i}{1-i}\right)=t$, $t\in R$, $|z+i|\le 2$, $1\langle \operatorname{Im}(z-2i)\langle 3$,

$-\frac{\pi}{4}\langle \arg(z-i)\langle 0$, $|z-2i|-|z+2i|\langle 4$, $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right|\ge 1$, $|z+2|\rangle|z-4i|$.

3. $w(z)=\sin(5+i)$; $w(z)=ch(1-i)$; $w(z)=Ln(2-2i)$.

4. $e^z=-1$.

5. $w=\bar{z}\operatorname{Re}z$.

6. $u=e^{-1-y}\cos x$, $v=e^{-1-y}\sin x$, $z_0=\pi-i$.

7. $v=2(ch\,x\sin y-xy)$, $w(0)=0$.

8. $\int\limits_1^i\frac{1+tgz}{\cos^2 z}dz$; по відрізку $[1,i]$.

$$\int_L \frac{dz}{(z+2)(z+4)},\ L:\ \begin{matrix} а)\{z:|z|=3\} \\ б)\{z:|z|=5\} \\ в)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \end{matrix}$$

$$\int_L \frac{tgz}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz,\ L:\{z:|z|=1\}.$$

9. $а)\ \frac{z}{z^2-2z-3},\quad z$

$б)\frac{1}{(z-2)(z-3)},\ 2\langle\ |z|\ \langle\ 3.$

10. $а)\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sin x},$

$б)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx.$

Варіант 12

1. $z=-1-i.$

2. $|z-2|=3,\ \mathrm{Im}(z-4i)=0,\ \arg 2z=\frac{\pi}{6},\ \mathrm{Re}(z-i)=1,\ \ |z-5i|+|z+5i|=2,\ \ \left|\frac{z-2}{z+i}\right|=1,$

$z=-1-i+e^{it}, 0\le t\le 2\pi\ ,\ \left(\frac{z-i}{\sqrt{3}+i}\right)=t\ ,\ t\in R\ ,\ \ |z-2|\le 3,\ \ 0\le\mathrm{Im}(z-2i)\le 4,$

$\frac{\pi}{6}\ \langle\ \arg(z+2i)\ \langle\ \frac{\pi}{2},\quad |z+2i|+|z-2i|\ge 3,\ \ \left|\frac{z-\sqrt{2}i}{z+\sqrt{2}i}\right|\le 1,\ \ |z-1|\ \langle\ |z+i|.$

3. $w(z)=e^{-2+\frac{\pi}{3}i};\ w(z)=ch(1+2i);\ \ w(z)=Ln(-4).$

4. $e^z+1=0.$

5. $w=x^2+y^2-2zyi.$

6. $u=e^y\cos x,\ v=e^{-y}\sin x,\ z_0=\frac{\pi}{2}+i.$

7. $u=\frac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi)=\frac{1}{\pi}.$

8. $\int_c \mathrm{Re}(\sin z)\cos zdz\ ,\ c:|\mathrm{Im}z|\le 1, \mathrm{Re}\ z=\frac{\pi}{4}.$

$$\int_L \frac{\cos 3z}{z(z^2+2)}dz, \quad L: \begin{matrix} a)\{z : |z| = 3\} \\ б)\{z : |z| = 1\} \\ в)\left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\} \end{matrix}$$

$$\int_L \frac{\cos z}{(z-1)^5}dz, \quad L: \{z : |z| = 2\}.$$

9. $a)\ \dfrac{1}{3-2z}, \ z-3$

$б)\ \dfrac{1}{z^2+z}, \quad |z| \rangle 1.$

10. $a)\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\cos x},$

$б)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

Варіант 13

1. $z = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}i.$

2. $|z-3i| = 2,\ \mathrm{Im}(\bar{z}+2i) = 0,\ \arg(z+1) = \dfrac{\pi}{3},\ \mathrm{Re}(z+2) = 3,\ |z-1| + |z+1| = 4,\ \left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| = 1,$

$z = 2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)i + 3e^{it}, 0 \le t \le 2\pi,\ \left(\dfrac{z-1}{z+2i}\right) = t,\ t \in R,\ |z-3i| \ge 1{,}5,\ \mathrm{Im}(\bar{z}+2i) \rangle 2,$

$\arg(z+i) = \dfrac{\pi}{6}, \mathrm{Re}(z-i) = 2,\ |z-1| - |z+1| \ge 2, \left|\dfrac{z-3i}{z+3i}\right| \ge 1.$

3. $w(z) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + iLn2\right);\ w(z) = e^e;\ \ w(z) = Ln(1+i).$

4. $\cos z = 2.$

5. $w = (x^3 - 3xy) + i(3x^2 - y^3).$

6. $u = x^3 - 3xy^2,\ v = 3x^2y - y^3,\ z_0 = 1+i.$

7. $v = 3x^2 - y^3 + 2xy.$

8. $\displaystyle\int_c z\,\mathrm{Im}\,z^2\ dz;\ c: |\mathrm{Im}\,z| \le 1,\ \mathrm{Re}\,z = 1$

$$\int_L \frac{shz}{(z-1)(z+i)}dz,\quad L:\ \begin{array}{l} a)\{z:|z|=2\} \\ б)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\} \\ в)\{z:|z-1|=1\} \end{array}$$

$$\int_L \frac{e^z}{(z+2)^6}\,dz,\quad L:\ \{z:|z|=5\}.$$

9. $a)\dfrac{1}{(1+2z)}$, $\qquad z-1$

$б)\dfrac{1}{(1+z^2)(z+2)}$, $1\langle\ |z|\ \langle\ 4.$

10. $a)\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2-\sin x}$;

$б)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Варіант 14

1. $z=-1+i.$

2. $|z-2+3i|=1$, $\operatorname{Im} z=3$, $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{Re}(z+i)=2$, $|z-1|+|z+1|=5$, $\left|\dfrac{z-\sqrt{5}i}{z+\sqrt{5}i}\right|=1$,

$z=-1+i+3e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $\dfrac{z+2i}{3}=t$, $0\le t\le 1$, $|z-i|\ge 4$, $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z+i}=0$,

$\dfrac{\pi}{6}\le\arg(z+i)\ \langle\ \dfrac{\pi}{3}$, $0\langle\ |z-3+4i|\le 2$, $|z+2|\ \langle\ |z-2|$, $\left|\dfrac{z-4}{z-2}\right|\ge 1.$

3. $w(z)=\sin i$; $w(z)=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; $w(z)=Ln\,(1-i)$.

4. $\sin z=2$.

5. $w=\sin x\ chy+i\cos x\ shy$.

6. $u=\sin x\ chy$, $v=\cos x\ shy$, $z_0=1+i$.

7. $u=\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)}-2y$.

8. $\int_c tgzdz$; c: дуга параболи $y=x^2$, від $z_1=0$ до $z_2=1+i$

$$\int\limits_L \frac{e^2}{z(z-i)}dz,\ L: \begin{matrix} a)\{z:|z|=2\} \\ б)\{z:|z-1|=1\} \\ в)\left\{z:|z-i|=\frac{1}{2}\right\} \end{matrix}$$

$$\int\limits_L \frac{\sin 3z}{(z+2)^4}\,dz,\ L:\{z:|z|=4\}.$$

9. $a) e^z,\qquad \frac{z-1}{2}$

$б) \frac{2z+3}{z^2+3z+2},\ 1 \langle\ |z|\ \langle\ 2.$

10. $a) \int\limits_0^{\pi} ctgx dx$;

$б) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)}.$

Варіант 15

1. $z=-1-i.$

2. $|z+2|=1$, $\mathrm{Im}(z-\sqrt{2}i)=0$, $\arg(z+i)=\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Re}(z+i)=4$, $|z+1|+|z-1|=3$, $|z-1|=4$,

$z=i+2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $z-1=te^{i\frac{\pi}{6}}$, $t\in R$, $|z-3-4i|\le 5$, $0\ \langle\ \mathrm{Im}(z+2i)\ \langle\ 4$,

$|z-2i|-|z+2i|\ \langle\ 5$, $|z-i|\le|z+2|$, $\left|\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right|\ \rangle\ 1.$

3. $w(z)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$; $w(z)=1^i$; $w(z)=Ln\left(\sqrt{3}+i\right).$

4. $e^z-i=0.$

5. $w=z^2+y^2+2xyi.$

6. $w=z^3$, $z_0=1+i.$

7. $v=2\left(2shx\sin y+xy\right).$

8. $\int\limits_c e^{|z|^2}\ \mathrm{Re}\, zdz$; $c:[0,1+i]$,

$$\int\limits_L \frac{dz}{z(5-z)}dz,\ L: \begin{matrix} a)\{z:|z|=1\} \\ б)\{z:|z-5|=1\} \\ в)\{z:|z|=6\} \end{matrix}$$

$\int\limits_L \frac{\sin 2z}{(z-1)^4}dz$, $L:\{z:|z|=2\}$.

9. $a)\cos z$, $z-\frac{\pi}{4}$

$б)\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $|z|\,\langle\,1$.

10. $a)\int\limits_c \frac{dz}{(z^2-1)(z-2)}$, $c:|z|=3$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$.

Варіант 16

1. $z=\sqrt{3}-i$.

2. $|z-3-4i|=4$, $\operatorname{Im}(z+\sqrt{3}-i)=0$, $\arg(z-2)=\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{Re}(z-2)=2$, $|z+1|-|z-1|=1.5$,

$\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z=3$, $z=2+i+3e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z+i=te^{i\frac{\pi}{2}}$, $t\in R$, $\left|z-\sqrt{3}+i\right|\le 2$, $0\,\langle$

$\operatorname{Im}(z+\sqrt{3}i)\le 2$, $-\frac{\pi}{4}\,\langle\,\arg(z-\sqrt{3}+i)\,\langle\,\frac{\pi}{4}$, $|z-i|-|z+i|\ge 4$, $\left|\frac{z-\sqrt{8}i}{z+\sqrt{8}i}\right|\le 1$, $|z|\,\rangle\,1-\operatorname{Re}z$.

3. $w(z)=(1+i\sqrt{3})^{10}$; $w(z)=2^i$; $w(z)=\sin i$.

4. $\cos z = chz$.

5. $w=z^3$.

6. $w=\frac{1}{z}$, $z_0=3i$.

7. $u=2^x\cos(y\ln 2)$, $w(0)=2$.

8. $\int\limits_c \frac{dz}{\sqrt{z}}$; $c:|z|=1$, $\operatorname{Re}z\ge 0$, ($\sqrt{1}=1$).

$\int\limits_L \frac{shz}{z(1-z)}dz$, $L:$ $a)\{z:|z|=2\}$ $б)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\}$ $в)\left\{z:|z-1|=\frac{1}{2}\right\}$

$\int\limits_L \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, $L:\{z:|z|=2\}$.

9. $а)\ \dfrac{1}{z^2+4z+7}$, $\quad z+2$

$б)\ \dfrac{z}{z^2-1}$, $1 \langle\ |z+2| \ \langle\ 3$.

10. $а)\ \displaystyle\int_c \frac{(z+1)dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $c:|z|=2$;

$б)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos 2x}{x^2+8}dx$.

Варіант 17

1. $z=1-i\sqrt{3}$.

2. $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=1$, $\operatorname{Im}\dfrac{z-2}{z+2}=0$, $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{2}$, $|z-i|+|z+i|=10$, $|z-1|=9$, $z=3-i-4e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $\left(\dfrac{z-5i}{3-3i}\right)=t$, $t\in R$, $|z-2+i| \ge 2$, $0 \ \langle\ \operatorname{Im}(z-\sqrt{3}i) \le 1$, $-\dfrac{\pi}{3} \ \langle\ \arg(z+5i) \ \langle\ \dfrac{\pi}{3}$, $|z-2i|+|z+2i| \ \langle\ 3$, $\left|\dfrac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right| \ge 1$, $\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z \ge 2$.

3. $w(z)=(\sqrt{3}-i)^6$; $w(z)=Ln(-i)$;
$w(z)=\cos(1+i)$.

4. $\sin z=-sh\ z$.

5. $w=\left(x^2+2x-y\right)^3+i(2xy+2y)$.

6. $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=2i$.

7. $v=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y$, $w(1)=0$

8. $\displaystyle\int_c \frac{dz}{\sqrt[5]{z^3}}$; $c:|z|=1$, $\operatorname{Im} z \ \rangle\ 0$, $(\sqrt[5]{1}=1)$.

$$\int_L \frac{\cos e^{iz}}{z(z+1)}dz,\ L:\ \begin{array}{l} а)\{z:|z|=2\} \\ б)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\} \\ в)\left\{z:|z-1|=\dfrac{1}{2}\right\} \end{array}$$

$$\int_L \frac{z^6}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^5}dz,\ L:\ \{z:|z|=1\}.$$

9. $a)\sqrt{z}$, $z-4$

$б)\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1 \langle \ |z+2| \ \langle \ 4$

10. $a)\int\limits_c \dfrac{dz}{z(z-2)(z+4)}$, $c:|z|=3$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin 2x}{x^3-1}dx$.

Варіант 18

1. $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$.

2. $|z-3-2i|=2$, $\mathrm{Re}\dfrac{z-4}{z+4}=0$, $\mathrm{Im}\,z=3-\mathrm{Re}\,z$, $\arg(z+i)=\dfrac{\pi}{4}$, $|z+3i|-|z-3i|=4$,

$|z-1|=16$, $z=\sqrt{6}+3\sqrt{2}i+3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $\left(\dfrac{z-2+i}{2-i}\right)=t$, $0 \le t \le 1$, $0 \ \langle \ |z-2i| \le 3$, $0 \ \langle$

$\mathrm{Im}(z+2-i) \ \langle \ 4$, $\dfrac{\pi}{6} \le \arg(z-2i) \ \langle \ \dfrac{\pi}{2}$, $|z-i|+|z+i| \le 7$, $\left|\dfrac{z-8i}{z+8i}\right| \ \langle \ 1$,

$\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z \ge 1$.

3. $w(z)=(1-i\sqrt{3})^6$; $w(z)=\sin(1+i)$;

$w(z)=\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$.

4. $\cos z = ish\ z$.

5. $w=x^2$.

6. $w=e^{z^2}$, $z_0=-1-i\dfrac{\pi}{2}$.

7. $v=x^3-3xy^2$.

8. $\int\limits_0^{2+i} R(z)dz$; по відрізку $z=(2+i)t$, $0 \le t \le 1$.

$\int\limits_L \dfrac{\sin e^{iz}}{z(z+1)}dz$, $L:$ $a)\{z:|z|=2\}$; $б)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\}$; $в)\left\{z:|z-1|=\dfrac{1}{2}\right\}$

$\int\limits_L \dfrac{e^z dz}{z^3(z^2-16)}$, $L:\ \{z:|z|=2\}$.

9. $a)\cos^2 z$, $\qquad z-\dfrac{\pi}{4}$

$б)\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $\quad |z| \rangle\ 2$.

10. $a)\displaystyle\int_c \frac{dz}{z(z-1)(z-5)}$, $c:|z|=4$;

$б)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos 3x}{x^3+1}dx$.

Варіант 19

1. $z=\sqrt{6}-3\sqrt{2}i$.

2. $\left|z-3\sqrt{2}i\right|=1$, $\mathrm{Re}(\dfrac{1}{z})=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{Im}\dfrac{z-3}{z+3}=0$, $\arg(z+2i)=\dfrac{\pi}{4}$, $|z-i|+|z+i|=7$, $|z-1|=25$,

$z=\sqrt{6}-3\sqrt{2}i+3e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z-i=te^{i\frac{\pi}{6}}$, $t\in R$, $0 \ \langle\ |z-2i+5|\le 3$, $\mathrm{Re}(\dfrac{1}{z})\le\dfrac{1}{2}$,

$-\dfrac{\pi}{2}\ \langle\ \arg(z+i)\ \langle\ \dfrac{\pi}{2}$, $|z+3i|-|z-3i|\ \le 4$,

$\left|\dfrac{z-10i}{z+10i}\right|\ge 1$, $\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z\ge 3$.

3. $w(z)=\sqrt[6]{-1}$; $w(z)=Ln(2-2i)$; $w(z)=2^{1-i}$.

4. $\bar{z}=z^3$.

5. $w=e^z$.

6. $w=z^2$, $z_0=\sqrt{3}-i$.

7. $v=\sin x\ shy$.

8. $б)\displaystyle\int_0^{2+i}\mathrm{Re}(z)dz$, по відрізкам $[0,2]\cup[2,2+i]$.

$\displaystyle\int_L \frac{e^{\pi iz}}{z-1}$, $L:$ $a)\{z:|z-1|=1\}$, $б)\{z:|z|=1\}$, $в)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\}$

$\displaystyle\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $L:\ \{z:|z|=2\}$.

9. $a)\dfrac{1}{z^2}$, $\qquad z+1$

$б)\dfrac{1}{z^2+1}, \quad 0 \langle \; |z-i| \; \langle \; 2 .$

10. $a)\int\limits_c \dfrac{zdz}{(z-i)(z+3)}$, $c : |z| = 2$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin 2x}{x^2-1}dx .$

Варіант 20

1. $z = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}i$.

2.$|z-2+i| = 3,\ \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{5},\ \mathrm{Im}(z-i) = 1, \arg(z-2i) = \frac{\pi}{3}, |z-3i| + |z+3i| = 4,\ |z-1| = 8,$

$z = 3\sqrt{2}i + 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi,\ z-2 = te^{3\frac{\pi}{3}},\ t \in R\ ,\ 0 \le \left|z-2+\sqrt{2}i\right| \le 3, \mathrm{Re}(z-i) \rangle\ 5, -\frac{\pi}{3} \langle$

$\arg z \ \langle\ 0, |1+2z| \ \langle\ |1-2z|,$

$\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| \le 1,\ \mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,z \ge 4.$

3. $w(z) = \sqrt{1-i}$; $w(z) = 5^i$; $w(z) = \sin 2i$.

4. $|z| - z = 1 + 2i$.

5. $w = |z|$.

6. $w = \sin z,\ z_0 = 1 + i$.

7. $u = x^2 - y^2 + 2x$, $w(i) = 2i - 1$.

8. $б)\int\limits_{-1}^{1} |z|dz$, на відрізку $-1 \le x \le 1$.

$$\int\limits_L \frac{z\sin z}{z-2}dz,\ L: \begin{matrix} a)\{z : |z| = 3\} \\ б)\left\{z : |z-1| = \frac{1}{2}\right\} \\ в)\{z : |z| = 1\} \end{matrix}$$

$$\int\limits_L \frac{e^z dz}{z^2(z-1)},\ L: \left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\}.$$

9. $a)\sqrt[3]{8+z}$, $\quad z$

$б)\dfrac{1}{z^2+z}, \quad 0 \ \langle\ |z| \ \langle\ 1.$

10. $a)\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{3}{5}\cos x}$;

$б)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos 3x}{x^2-1}dx$.

Варіант 21

1. $z=3-i$.

2. $|z-3i|=4$, $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})=\frac{1}{5}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{z-8}{z+8}\right)=0$, $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}$, $|z-2i|+|z+2i|=5$, $|z-1|=8$,

$z=2-i+2e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z-3i=te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t\in R$, $0\le|z-2+i|\le 3$, $\mathrm{Re}(z-i)\rangle\ 3$,

$-\frac{\pi}{3}\le\arg(z+i)\le\frac{\pi}{3}$, $0\le\mathrm{Im}(z-2)\le 3$,

$|z-i|\ge|z+2|$, $\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z\ge 5$.

3. $w(z)=\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; $w(z)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)$;

$w(z)=e^{3+i\frac{\pi}{2}}$.

4. $sh\ iz=i$.

5. $w=z\,\mathrm{Re}\,z$.

6. $w=z^3$, $z_0=2-i$.

7. $v=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $x\ \rangle\ 0$, $w(1)=0$.

8. $\int_{-1}^{1}|z|dz$; по $|z|=1$, $\mathrm{Im}\,z\ \rangle\ 0$.

$$\int_L\frac{z\cos z}{z-1}dz,\ L:\ \begin{array}{l} а)\left\{z:|z|=\frac{1}{2}\right\} \\ б)\{z:|z-1|=1\} \\ в)\{z:|z-2|=1\}\end{array}$$

$\int_L\frac{chz}{(z-i)^{10}}dz$, $L:\ \{z:|z|=2\}$.

9. $a)\sin z$, $\frac{z-\pi}{6}$

$б)\frac{1}{3z-2}$, $z_0=\infty$.

10. $a)\int_{c}\frac{dz}{1+z^{2}}$, $c:|z-i|=1$;

$б)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^{2}-5x+6}dx$.

Варіант 22

1. $z=\sqrt{3}+i$.

2.$\left|z-\sqrt{3}-i\right|=2$, $\operatorname{Im}\left(z^{2}-2\right)=0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z-3}{z+3}\right)=0$, $\arg(z-1+i)=\frac{\pi}{3}$, $|z-3i|-|z+3i|=3$,

$|z-1|=3$, $z=\sqrt{3}+i+2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $z-1+i=te^{i\frac{\pi}{2}}$, $t\in R$, $-1\le|z-2+i|\le 2$,
$\operatorname{Re}(z+2-i)\rangle -1$,

$-\frac{\pi}{6}\le\arg(z-i)\le\frac{\pi}{6}$, $-1\le\operatorname{Im}(z+i)\le 1$,

$\left|\frac{z-i}{z-2}\right|\ge 1$, $\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z\le 3$.

3. $w(z)=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$; $w(z)=e^{i}$; $w(z)=i^{-1+i}$.

4. $\sin z=2$.

5. $w=\bar{z}\operatorname{Im}z$.

6. $w=e^{z}$, $z_{0}=\ln 2+i\frac{\pi}{4}$.

7. $u=2\sin x\ chy-x$.

8. $\int_{-1}^{1}|z|dz$; по $|z|=1, \operatorname{Im}z\ \langle\ 0$.

$$\int_{L}\frac{\cos z}{\pi-z}dz,\ L:\begin{array}{l} a)\{z:|z|=2\pi\} \\ б)\{z:|z|=\pi\} \\ в)\left\{z:|z-2|=\frac{\pi}{2}\right\}\end{array}$$

$\int_{L}\frac{\sin z}{z^{3}}dz$, $L:\ \{z:|z|=1\}$.

9. $a)\ln(3-z)$, z

$б)\frac{z\sin 1}{z-1}$, $z_{0}=1$.

10. $a)\int_{c}\frac{dz}{1+z^{2}}$, $c:|z+i|=1$;

$б)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2}}{x^{3}+1}dx$.

Варіант 23

1. $z=\sqrt{3}-i$.

2. $|z-1-i|=3$, $\operatorname{Im}\left(\frac{z-7}{z+7}\right)=0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{5}$, $\arg(z-3i)=\frac{\pi}{4}$, $|z-2i|+|z+2i|=7$, $|z-1|=12$

, $z=\sqrt{3}-i+4e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z-1=te^{i\frac{\pi}{5}}$, $t\in R$, $0\,\langle\,\left|z-2+\sqrt{3}i\right|\le 2$, $0\,\langle\,\operatorname{Re}z\,\langle\,5$,

$0\le \operatorname{Im}z\le 3$, $0\,\langle\,\arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\langle\,\frac{\pi}{4}$,

$\left|\frac{z-i}{z-2}\right|\ge 1$, $\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z\le 5$.

3. $w(z)=\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}$; $w(z)=(3-4i)^{1-i}$; $w(z)=Ln(1+i)$.

4. $shz=i$.

5. $w=|z|\operatorname{Im}z$.

6. $w=\sin z$, $z_0=0$

7. $v=2x^2-2y^2+x$.

8. $\int\limits_{AB} z^2dz$; $AB:[1;i]$.

$$\int\limits_L \frac{\sin z}{\frac{\pi}{2}-z}dz,\ L:\ \begin{array}{l} а)\left\{z:|z|=\frac{\pi}{4}\right\} \\ б)\{z:|z|=2\pi\} \\ в)\left\{z:|z-\pi|=\frac{\pi}{2}\right\} \end{array}$$

$\int\limits_L \frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$, $L:\ \{z:|z|=2\}$.

9. а) $\frac{1}{2+5z}$, $z-1$

б) $\frac{1}{(z-3)^3}$, $z_0=\infty$.

10. а) $\int\limits_c \frac{dz}{1+z^2}$, $c:|z|=2$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4-1}dx$.

Варіант 24

1. $z=\sqrt{3}+i$.

2. $\left|z+\sqrt{3}-i\right|=2$, $\operatorname{Im}\left(z^2-i\right)=0$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-7}{z+7}\right)=0$, $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$, $|z-4i|+|z+4i|=2$, $\operatorname{Re}z^2=3$,

$z=2-i+4e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z-1=te^{i\frac{\pi}{6}}$, $t\in R$. $0\le|z+i|\le 4$, $0 \langle \operatorname{Re}z \langle \sqrt{3}$, $1\le$

$\operatorname{Im}(z-i)\le 2$,

$\dfrac{\pi}{6}\le\arg\left(\dfrac{i-z}{z+i}\right)\langle\ \dfrac{\pi}{4}$, $\left|\dfrac{z-i}{z}\right|\le 1$, $\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z\ge 4$.

3. $w(z)=Ln(1-i)$, $w(z)=\dfrac{1-i}{1+i}$;

$w(z)=ch(1+5i)$.

4. $chz+shz=i$.

5. $w=chz$.

6. $w=z^3$, $z_0=1+i\dfrac{\pi}{2}$

7. $u=\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)}-2xy$, $w(2)=\dfrac{1}{2}$.

8. $\int\limits_1^i ze^{iz}dz$,

$$\int\limits_L \frac{chz}{(z+1)(z-1)}dz,\ L:\ \begin{array}{l} а)\{z:|z|=2\} \\ б)\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2}\right\} \\ в)\{z:|z-1|=1\} \end{array}$$

$\int\limits_L \dfrac{z^3 shz}{(1-z)^4}dz$, $L:\ \{z:|z|=2\}$.

9. $а)\ \dfrac{z}{z^2-5z+6}$, z

$б)\ \ln\dfrac{z-a}{z-b}$, $z_0=\infty$.

10. $а)\ \int\limits_0^{\pi}\dfrac{dx}{3-\sin x}$;

$б)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2\sin 3x}{x^3+1}dx$.

Варіант 25

1. $z=-\sqrt{3}-i$.

2. $\left|z+\sqrt{3}-i\right|=2$, $\operatorname{Im}(z-i)=4$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{16}$

$\arg\bar{z}=\frac{\pi}{3}$, $|z-i|+|z+i|=25$, $|z-i|=\sqrt{2}$, $z=2-i+15e^{it}, 0\le t\le 2\pi$, $z-1+i=te^{i\frac{\pi}{8}}$,

$t\in R$. $-1\le|z-1|\le 5$, $0\le\operatorname{Re}\bar{z}\le 2$, $3\le\operatorname{Im}(z+2-i)\,\langle\, 3, 2\pi\le\arg\left(\frac{i-z}{z+i}\right)\langle\,\frac{3\pi}{2}$,

$\frac{i-z}{z+1}\le 1$, $\operatorname{Im}z\ge\operatorname{Re}z-2$.

3. $w(z)=\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), w(z)=Ln(-i)$;

$w(z)=e^{i}$.

4. $chz-shz=-i$.

5. $w=\cos 2z-i$.

6. $w=z^2$, $z_0=1+i$

7. $v=2(2shx\sin y+xy)$, $w(0)=3$.

8. $\int\limits_{c}\operatorname{Im}z\,dz$, c: відрізок $[0,2+i]$

$\int\limits_{L}\frac{dz}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}$, L: $а)\{z:|z|=1\}$, $б)\left\{z:|z|=\frac{1}{4}\right\}$, $в)\left\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}\right\}$

$\int\limits_{L}\frac{e^{z}}{(z-i)^{50}}dz$, L: $\{z:|z-i|=1\}$.

9. $а)\sqrt[3]{27-z}$, z

$б)\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $|z|\,\rangle\, 3$.

10. $а)\int\limits_{c}\frac{dz}{z^2+z-2}$, $c:|z|=\frac{3}{2}$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$.

Варіант 26

1. $z = 3 - \sqrt{3}i$.

2. $|z - 2i + 1| = 2$, $\mathrm{Im}(z - 3i) = 2$, $\mathrm{Re}((z-4)(z+4)) = 0$, $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{12}$, $|z + 2i| - |z - 2i| = 9$,

$|z - i| = \sqrt{5}$, $z = 3 - \sqrt{3}i + 9e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $z - 3i = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in R$. $0 \le |z - 2i| \le 3$,

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) \ge 0$, $-1 \langle \ \mathrm{Im}(z-1) \ \rangle \ 3$, $\dfrac{\pi}{6} \ \langle \ \arg\left(\dfrac{i-z}{z+i}\right) \ \langle \ \dfrac{\pi}{3}$, $\left|\dfrac{z-i}{z+1}\right| \le 1$, $\mathrm{Re}\, z \ge \mathrm{Im}\, z - 5$.

3. $w(z) = Ln(-5)$, $w(z) = Ln(-1)^{\sqrt{2}}$;

$w(z) = \dfrac{1}{1-i}$.

4. $shz = 2i$.

5. $w = e^{1+y}\cos x - ie^{1+y}\sin x$.

6. $w = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = i$

7. $u = 3x^2 - y^2 + 2xy$.

8. $\int\limits_c \mathrm{Im}\, z dz$, c: відрізки $[0, i] \cup [i, 2+i]$

$$\int\limits_L \frac{z^2}{z-a} dz, \ L: \begin{array}{l} a)\{z : |z| = R \rangle |a|\} \\ б)\{z : |z| = R \langle |a|\} \\ в)\{z : |z| = 2a\} \end{array}$$

$\int\limits_L \dfrac{z^5}{(z-i)^4} dz$, $L: \{z : |z| = 1\}$.

9. $a)\ \dfrac{1}{6-7z}$, $z - 6$

$б)\ \dfrac{1}{z^2 - z}$, $0 \ \langle \ |z| \ \langle \ 1$.

10. $a)\ \int\limits_c \dfrac{dz}{(z+1)(z+2)}$, $c: |z| = 3$;

$б)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos 4x}{x^3 - 1} dx$.

Варіант 27

1. $z=\sqrt{3}-3i$.

2. $|z-2i|=3i$, $\operatorname{Im}(z+2i)=3$, $\operatorname{Re}((z-10)(z+10))=0$, $\arg(\bar{z}-2i)=\dfrac{\pi}{6}$, $|z-3i|+|z+3i|=16$

, $\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z=25$, $z=25e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z-1=te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t\in R$. $0\le|z-2+i|\,\langle\,3$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\ge\dfrac{1}{2}$,

$0\le\operatorname{Im}(z-1+3i)\,\langle\,2$, $\dfrac{\pi}{6}\,\langle\,\arg(z+2i)\,\langle\,\dfrac{\pi}{3}$, $\left|\dfrac{z-\sqrt{9}}{z+\sqrt{9}}\right|\ge 1$, $\operatorname{Re}z\le\operatorname{Im}z-8$.

3. $w(z)=\sin(1-i)$, $w(z)=3^{\sqrt{3}-i}$;

$w(z)=ch(3-4i)$.

4. $\cos z=i$.

5. $w=e^{1-2x}\cos 2y-ie^{1-2x}\sin 2y$.

6. $w=\cos z$, $z_0=1+i$

7. $v=e^{x}(y\cos y+x\sin y)+x+y$.

8. $\int\limits_c e^z dz$, c: відрізок $[0,\pi-i\pi]$ прямої $y=-x$.

$$\int\limits_L\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz,\quad L:\begin{array}{l}a)\{z:|z|=1\}\\ б)\{z:|z|=2\}\\ в)\{z:|z|=3\}\end{array}$$

$$\int\limits_L\frac{shz}{z^{10}}dz,\qquad L:\{z:|z|=1\}.$$

9. $a)\dfrac{1}{5z+1}$, $z+2$

$б)\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $|z|\,\rangle\,4$.

10. $a)\int\limits_c\dfrac{dz}{(z-1)(z+3)}$, $c:|z|=2$;

$б)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2}{x^3-x-2}dx$.

Варіант 28

1. $z=\sqrt{3}+3i$

2. $|z-2i|=4$, $\operatorname{Im}(z+2-4i)=2$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{16}$, $\arg(z-2)=\dfrac{\pi}{4}$, $|z-4i|+|z+4i|=7$, $\dfrac{z-2i}{3-2i}=t$,

$t \in R$. $\operatorname{Re} z - 16 = \operatorname{Im} z$, $z - i = te^{i\frac{\pi}{6}}$, $t \in R$. $0 \le z - 1 + 3i \le 3$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z-4}{z+4}\right) \ge 0$, $-2 \le$ $\operatorname{Im}(z - 3i) \le 2$, $-\frac{\pi}{3} \le \arg(z - 2 + i) \le \frac{\pi}{3}$, $\left|\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right| \le 1$, $\operatorname{Re} z^4 \rangle \operatorname{Im} z^4$.

3. $w(z) = 2^i, w(z) = ch(2+2i)$;

$w(z) = \frac{1}{3+i}$.

4. $e^z = 3^i$.

5. $w = \frac{1}{z}$.

6. $w = z^2$, $z_0 = 2 - i$

7. $u = e^y \cos x$.

8. $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz$.

$$\int\limits_L \frac{dz}{(z-1)(z^2+9)}, \quad L: \begin{matrix} a)\{z : |z| = 2\} \\ б)\{z : |z| = 4\} \\ в)\{z : |z-3| = 1\} \end{matrix}$$

$$\int\limits_L \frac{e^{2z}}{(z-2)^3} dz, \qquad L: \{z : |z| = 3\}.$$

9. $a) \sin^2 z$, $\qquad z - \frac{\pi}{6}$

$б) \cos\frac{z^2 - 4z}{z-2}$, $\quad z_0 = 2$.

10. $a) \int\limits_c \frac{dz}{(z-i)(z+2)}$, $\quad c : |z| = 3$;

$б) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 + x - 2} dx$.

Варіант 29

1. $z = -\sqrt{3} - 3i$.

2. $\left|z - \sqrt{3} + 2i\right| = 2$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 4$, $\operatorname{Im}\left(\frac{z-4}{z+4}\right) = 0$, $\arg\left(\frac{1-z}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$, $|z-i| + |z+i| = 16$,

$|z-1| = 25$, $z = 2 + 3i + 16e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$, $z - 2i = te^{i\frac{\pi}{8}}, t \in R$. $0 \le |z - i + 2| \le 3$,

$\operatorname{Re}\left(\frac{z-10}{z+10}\right) \le 0$, $0 \le \operatorname{Im}(z-2i) \le 3$, $0 \langle \arg(z-2i) \langle \frac{\pi}{3}$, $\left|\frac{z-\sqrt{6}i}{z+\sqrt{6}i}\right| \le 1$, $|z| \le 1-\operatorname{Re} z$.

3. $w(z) = i^i$, $w(z) = \sqrt[3]{e-i}$; $w(z) = Ln5$.

4. $Ln(z-i) = i+1$.

5. $w = \frac{z+i}{z-i}$.

6. $w = z^3$, $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

7. $v = e^{-1-y}\sin x$, $w(\pi - i) = -1$.

8. $\int\limits_0^1 z\cos z dz$.

$$\int\limits_L \frac{e^z}{z(z^2+9)},\quad L:\begin{array}{l} a)\{z:|z|=2\} \\ б)\{z:|z-2|=2\} \\ в)\{z:|z|=3\}\end{array}$$

$\int\limits_L \frac{\cos z}{(\pi - z)^{25}} dz$, $L:\{z:|z| = 2\pi\}$.

9. $a)\ \ln(1+z-z^2)$, z

$б)\ \frac{z}{e^z+2}$, $z_0 = \infty$.

10. $a)\ \int\limits_c \frac{dz}{(z+i)(z-3)}$, $c:|z| = 2$;

$б)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3-2x-1} dx$.

Варіант 30

1. $z = \sqrt{3}i$.

2. $|z-2+i| = 3$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z-8}{z+8}\right) = 0$, $\operatorname{Im}\left(\frac{z-9}{z+9}\right) = 0$, $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{6}$, $|z-i| - |z+i| = 8$,

$|z-1| = 21$, $z = \sqrt{3}i + 4e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $z - i = te^{i\frac{\pi}{3}}$, $t \in R$. $0 \le |z-3+4i| \le 2$, $1 \langle \operatorname{Re}(z-i)$

$\langle 2$, $0 \le \operatorname{Im}(z+2-i) \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \langle \arg\left(\frac{i-z}{z+i}\right) \langle \frac{\pi}{6}$, $\left|\frac{z-\sqrt{8}i}{z+\sqrt{8}i}\right| \ge 1$, $\operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z - 7$.

3. $w(z) = (3-4i)^{1-i}$, $w(z) = Ln(1-i)$;
$w(z) = \sqrt[5]{-2-2i}$.

4. $\sin z = -i$.

5. $w = z^n$, $n \in N$.

6. $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 3i$.

7. $u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^3$, $w(i) = 1 + i$.

8. $\int\limits_c \operatorname{Re} z dz$, c: відрізки $[0,1] \cup [1,1+i]$.

$$\int\limits_L \frac{\sin z}{z^2 - z} dz, \quad L: \begin{array}{l} a)\{z : |z| = 2\} \\ б)\{z : |z| = 1\} \\ в)\left\{z : |z-1| = \frac{1}{2}\right\} \end{array}$$

$$\int\limits_L \frac{z \sin z}{(z-1)^3} dz, \qquad L: \{z : |z| = 2\}.$$

9. $a)\ \dfrac{1}{2+z^2}$, z

$б)\ \ln \dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = \infty$.

10. $a)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg 2x dx$;

$б)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 5x}{x^2 - 1} dx$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Міхайленко В.М., Овчинников П.П., Лісицін Б.М. Вища математика. ч.ІІ.-К.: Техніка.-2002.-791 с.
2. Н.Д.Федоренко, О.І.Баліна. І.С.Безклубенко та ін., Вища математика: навч. посібник.-К.: КНУБА, -246 с.
3. А.Ф. Шестопал. Конспект лекцій з криволінійних, поверхневих, кратних інтегралів та теорії рядів.-К.: КІБІ, 1993. -128 с.
4. Журавель О.О. Вища математика. Збірник завдань для курсових та самостійних робіт.-К.: КТУБА, 1998. -111с.
5. Методичні вказівки до курсу “Теорія функцій комплексної змінної”/ уклад.: І.С.Безклубенко, О.І.Баліна, Б.П.Буценко. – Київ: КДТУБА, 1999 -35с.
6. Методичні вказівки з вищої математики. / уклад.: Н.Д.Федоренко.,О.І.Баліна. ч.IV – Київ, 2000р.
7. В.О.Ізварін. Застосування операційного числення до інженерних задач. – Київ: ІЗМІН, 1997. -176 с.

Для нотаток

Для нотаток

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Теорія функції комплексної змінної

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Укладачі: **ФЕДОРЕНКО** Наталія Дмитрівна,
БЕЗКЛУБЕНКО Ірина Сергіївна,
БАЛІНА Олена Іванівна,
БІЛОЩИЦЬКА Світлана Василівна.

Комп'ютерне верстання *А.П. Морозюк*

Підписано до друку Формат 60 × 84 1/16
Ум. друк. арк. 2,79 Обл.-вид. арк. 3,0
Електронний документ. Вид. № 42/III-17
Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.