МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Модуль 2. Математична статистика

Методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи студентів,
які навчаються за напрямом підготовки 6.030510
«Товарознавство і торговельне підприємництво» спеціальності
6.050301 «Товарознавство і комерційна діяльність»

Київ 2009

ББК 22.172
Т33

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор
С.А. Теренчук, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент В.М. Міхайленко, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Демченко, канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол №13 від 13 травня 2009 року.

Видається в авторській редакції.

Т33 **Теорія** ймовірностей і математична статистика. Модуль 2. Математична статистика: методичні вказівки та завдання для самостійної роботи / уклад.: Н.Д. Федоренко, С.А. Теренчук, О.В. Доля. – К.: КНУБА, 2009. – 60 с.

Містять приклади розв’язання типових задач з різних розділів математичної статистики, а також вправи для самостійної роботи і завдання для індивідуальної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 6.050301 «Товарознавство та комерційна діяльність» усіх форм навчання.

Загальні положення

Теорія ймовірностей і математична статистика є базою для розробки кількісних моделей управління економічними системами (моделей теорії масового обслуговування, моделей планування і управління запасами). Курс теорії ймовірностей і математичної статистики займає важливе місце в підготовці економістів вищої кваліфікації.

1. Елементи математичної статистики. Статистичні оцінки параметрів розподілу

1.1. При вивченні питання про норми виробітку ткаль спостерігалась така частота обривів пряжі на однотипних ткацьких станках на різних проміжках часу однакової довжини t:
7, 1, 2, 1, 2, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 6, 0, 1, 6, 5, 3, 2, 0, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 3, 0, 4, 2, 3.

Скласти статистичний розподіл частот та відносних частот числа обривів пряжі на станках.

*Розв'язання***.** Обсяг вибірки $n = 30$. Даний ряд варіант запишемо у вигляді варіаційного ряду:
0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7.
Варіанти: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6, x_8 = 7.$
Частоти: $n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7, n_4 = 5, n_5 = 4, n_6 = 3, n_7 = 2, n_8 = 1.$
В підсумку отримується статичний розподіл частот:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	5	7	5	4	3	2	1

Контроль: $\sum n_i = 3+5+7+5+4+3+2+1 = 30 = n.$

За формулою $w_i = n_i / n$ послідовно обчислюємо відносні частоти: $w_1 = 3/30$, $w_2 = 5/30$, $w_3 = 7/30$, $w_4 = 5/30$, $w_5 = 4/30$, $w_6 = 3/30$, $w_7 = 2/30$, $w_8 = 1/30$.

Контроль: $\sum w_i = 3/30 + 5/30 + 7/30 + 5/30 + 4/30 + 3/30 + 2/30 + 1/30 = 1.$
Отже, статистичний розподіл відносних частот числа обривів пряжі на станках має такий вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
w_i	3/30	5/30	7/30	5/30	4/30	3/30	2/30	1/30

1.2. У супермаркеті проводилися спостереження над кількістю X покупців, що звернулися в касу за одну годину. Спостереження протягом 30 год (15 днів у період з 9 до 10 і з 10 до 11 год) дали такі результати: 70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X є дискретною випадковою величиною, а отримані дані є вибіркою з $n=30$ спостережень. Потрібно утворити варіаційний ряд.

Розв'язання. Спочатку складемо ранжирований ряд: 60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120, 120.

Отримано шість груп, тобто шість різних значень випадкової величини (шість варіант). Для кожної групи підрахуємо частоту значень варіанти і відповідну відносну частоту. Всі результати вкажемо в табл. 1.1, яка і є варіаційним рядом.

Таблиця 1.1

Номер групи	i	1	2	3	4	5	6
Число звернень покупців у касу	x_i	60	65	70	75	100	120
Частота	m_i	3	3	7	5	8	4
Відносна частота	p_i	$3/30$	$3/30$	$7/30$	$5/30$	$8/30$	$4/30$

1.3. В табл. 1.2 наведена вибірка результатів вимірювання росту 105 студентів (юнаків). Вимірювання проводилися з точністю до 1 см.

Таблиця 1.2

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	179	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

Потрібно утворити інтервальний варіаційний ряд.

Розв’язання. Ріст хлопців є випадковою неперервною величиною. Мінімальне і максимальне значення: $x_{\min} = 152$ см, $x_{\max} = 196$ см. Тоді розмах варіації: $R = x_{\max} - x_{\min} = 44$ см.

У задачі зручно вибрати довжину інтервалу 5 см, тоді число інтервалів, починаючи з 150 см і закінчуючи 200 см, дорівнюватиме 10. Відповідний інтервальний варіаційний ряд наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Індекс інтервалу i	Ріст студентів (інтервали) $x_1 < X \le x_{i+1}$	Частота m_i	Відносна частота p_i
1	150 – 155	4	0,0381
2	155 – 160	-	-
3	160 – 165	2	0,0190
4	165 – 170	19	0,1810
5	170 – 175	19	0,1810
6	175 – 180	26	0,2476
7	180 – 185	21	0,2000
8	185 – 190	10	0,0953
9	190 – 195	2	0,0190
10	195 – 200	2	0,0190

1.4. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот та частостей.

а) 7, 4, 4, 8, 12, 12, 12, 7, 8, 12, 8, 12, 4, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12;

б) 6, 9, 5, 3, 6, 6, 9, 3, 5, 6, 9, 5, 6, 6, 9, 6, 9, 6, 6, 6;

в) 2, 2, 8, 5, 4, 2, 5, 4, 2, 8, 8, 2, 4, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2;

г) 7, 3, 10, 4, 7, 7, 3, 4, 10, 3, 7, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 7, 7.

1.5. В результаті спостереження отримано такі значення виграшів (тис. грн.) в миттєвій лотереї: 0, 1, 0, 0, 5, 0, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

Скласти варіаційний ряд випадкової величини X - виграшу в миттєвій лотереї.

1.6. При проведенні експерименту отримані такі дані: 32, 26, 16, 44, 28, 40, 30, 31, 17, 30, 37, 32, 42, 31, 36, 49, 35, 21, 25, 40, 27, 25, 33, 34, 27, 43, 19, 23, 36, 48, 31, 35, 43, 32, 26, 35, 33, 45, 19 22, 28, 49, 23, 32, 33, 27, 43, 35, 23, 44.

Скласти інтервальний варіаційний ряд, обравши 7 інтервалів.

1.7. У місті А для визначення термінів гарантійного обслуговування проведено дослідження величини середнього пробігу автомобілів, що знаходяться в експлуатації протягом двох років з моменту продажу автомобіля магазином. Отримано такі результати (тис. км.): 3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

Скласти інтервальний варіаційний ряд.

1.8. Для статистичного розподілу (задача 1.1) знайти емпіричну функцію розподілу числа обривів пряжі на станках та побудувати її графік.

Розв'язання. Обсяг вибірки $n = 30$. Якщо $x \le 0$, тоді немає жодної варіанти, меншої від *x*, тобто $n_x = 0$, а тому і $F^*(x) = n_x / 30 = 0$.

Нехай $x \in (0;1]$. Тоді варіанта $x = 0$ є меншою від x, тому $n_x = 3$ і $F^*(x) = 3/30 = 0{,}1$.

Якщо x задовольняє подвійній нерівності $1 < x \le 2$, тоді меншими від x є варіанти 0 та 1, сума частот яких $n_x = 3 + 5 = 8$. Тому $F^*(x) = 8/30 = 4/15$ для $x \in (1;2]$.

Якщо x таке, що виконується подвійна нерівність $2 < x \le 3$, тоді меншими від x є варіанти 0, 1, 2, суми частот яких $n_x = 3 + 5 + 7 = 15$. Тому для $x \in (2;3]$ $F^*(x) = 15/30 = 0{,}5$.

Аналогічно знаходимо значення $F^*(x)$ для інтервалів $(3;4], (4;5], (5;6], (6;7], (7;\infty]$. У підсумку отримаємо шукану емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0, \\ 1/10, & \textit{якщо } 0 < x \le 1, \\ 4/15, & \textit{якщо } 1 < x \le 2, \\ 1/2, & \textit{якщо } 2 < x \le 3, \\ 2/3, & \textit{якщо } 3 < x \le 4, \\ 4/5, & \textit{якщо } 4 < x \le 5, \\ 9/10, & \textit{якщо } 5 < x \le 6, \\ 29/30, & \textit{якщо } 6 < x \le 7, \\ 1, & \textit{якщо } x > 7. \end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 1.

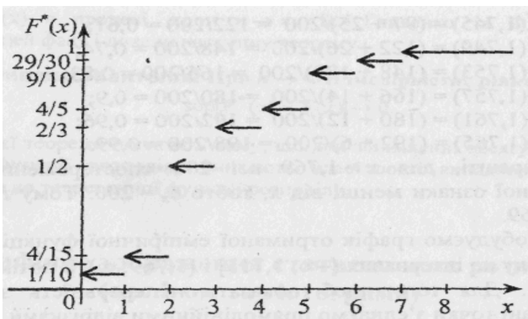

Рис. 1

1.9. На фірмі працює 39 осіб. Проведено дослідження кількості робочих днів, пропущених кожним працівником фірми протягом місяця: 0, 1, 3, 0, 2, 3, 5, 7, 3, 5, 2, 10, 7, 5, 0, 2, 5, 10, 5, 3, 1, 9, 15, 10, 1, 0, 2, 3, 5, 7, 7, 6, 5, 3, 0, 7, 10, 13, 0.

Скласти інтервальний варіаційний ряд. Побудувати функцію розподілу випадкової величини числа пропущених робочих днів.

1.10. Знайти емпіричну функцію розподілу за даними варіаційними рядами:

а)

x_i	1	3	7	9	12
m_i	2	10	4	24	10

б)

x_i	-2	0	5	8	14
m_i	3	17	28	22	10

1.11. Знайти емпіричну функцію розподілу за даними інтервального варіаційного ряду:

а)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X \le x_{i+1}$	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
m_i	6	4	2	18	29	11	10	17	3

б)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i < X \le x$	11 – 14	14 – 17	17 – 20	20 – 23	23 – 26	26 – 29	29 – 32	32 – 35
m_i	6	4	2	18	29	11	10	17

1.12. Побудувати полігон відносних частот за даними варіаційних рядів ($n = 110$):

а)

x_i	1	4	5	7	9
m_i	10	25	45	20	10

б)

x_i	-1	0	1	3	5
m_i	15	5	25	55	10

в)

x_i	2	3	6	7	10	12
m_i	8	10	32	45	13	2

г)

x_i	3	5	8	9	11	12
m_i	2	26	42	35	4	1

1.13. Побудувати гістограму відносних частот за даними розподілами вибірок об'єму $n = 110$:

а)

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	3 – 5	20
2	5 – 7	25
3	7 – 9	15
4	9 – 11	13
5	11 – 13	12
6	13 – 15	8
7	15 – 17	7

б)

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	-2 – 2	5
2	2 – 6	25
3	6 – 10	40
4	10 – 14	12
5	14 – 16	18

в)

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	60 – 65	30
2	65 – 70	20
3	70 – 75	25
4	75 – 80	25

1.14. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу вибірки та побудувати її графік.

а)

x_k	2	5	7	8
n_k	1	3	2	4

б)

x_k	4	7	8
n_k	5	2	3

в)

x_k	1	4	6
n_k	10	15	25

г)

x_k	3	5	8
n_k	15	10	25

1.15. Побудувати полігон частот та частостей заданого розподілу вибірки.

а)

x_k	2	3	5	6
n_k	10	15	5	20

б)

x_k	15	20	25	30
n_k	10	15	30	20

в)

x_k	3	4	5	7
n_k	20	5	10	15

г)

x_k	10	15	18	20
n_k	6	4	5	5

1.16. Побудувати гістограму частот заданого розподілу вибірки.

а)

Інтервали	(1, 5)	(5, 9)	(9, 13)	(13, 17)	(17, 21)
Частоти	10	20	50	12	8

б)

Інтервали	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)
Частоти	4	6	20	40	20	4	6

в)

Інтервали	(2, 7)	(7, 12)	(12, 17)	(17, 22)	(22, 27)
Частоти	5	10	25	6	4

г)

Інтервали	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)	(25, 30)	(30, 35)
Частоти	2	4	8	4	2

1.17. В наступній таблиці наведено згрупований розподіл частоти кількості студентів університету в залежності від часу, що вони затратили на виконання контрольної роботи у хвилинах.

Кількість хвилин	Число студентів (частоти)	Накопичені частоти
85-90	8	8
90-95	17	25
95-100	29	54
100-105	93	147
105-110	43	190
110-115	8	198
115-120	2	200
Разом	200	

Побудувати гістограму частот, полігон частот, полігон накопичених частот.

1.18. Використовуючи точкову діаграму, одержати розподіл частот заданої вибірки, побудувати графік емпіричної функції розподілу та полігон частот.

а) 3, 6, 6, 5, 6, 2, 3, 6, 6, 5, 2, 3, 3, 6, 2, 3, 6, 6, 6, 5, 2, 6, 2, 3, 2, 5, 5, 6, 6, 3, 2, 3, 6, 2, 6, 2, 2, 3, 3, 6, 3, 6, 6, 3, 3, 6, 3, 6, 6, 3.

б) 6, 6, 9, 5, 3, 6, 9, 3, 5, 6, 9, 5, 6, 9, 6, 9, 6, 9, 6, 9, 6, 9, 6, 6.

в) 2, 2, 4, 5, 8, 8, 5, 2, 4, 2, 8, 4, 2, 8, 8, 2, 2, 5, 2, 5, 4, 2, 4, 2, 5.

г) 3, 7, 3, 3, 4, 3, 7, 5, 5, 4, 7, 3, 7, 4, 3, 3, 7, 4, 5, 3, 5, 3, 7, 4, 5, 3, 3, 7, 3, 5, 3, 7, 5, 5, 3, 7, 5, 3, 7, 5, 7, 7, 3, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3.

1.19. Для статистичного розподілу

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	5	7	5	4	3	2	1

отриманого за умовою задачі 1.1, знайти середню вибіркову $\overline{x_в}$, моду M_o^*, медіану M_e^*, дисперсію вибіркову $D_в$, середнє квадратичне відхилення вибіркове $\sigma_в$, розмах варіації *R*, коефіцієнт варіації *V*, коефіцієнт асиметрії A_s^* та ексцес E_s^*.

Розв'язання. Для даного розподілу обсяг вибірки $n = 30$. Тоді $\bar{x}_в = \left(\sum x_i n_i\right)/n = (0\cdot 3 + 1\cdot 5 + 2\cdot 7 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 1)/30 =$
$= 84/30 = 2.$

Отже, середнє число обривів пряжі на станках за проміжок часу складає 2,8.

Мода $M_o^* = 2$, оскільки варіанті 2 відповідає найбільша частота 7.

Медіану M_e^* можна знайти або за варіаційним рядом, отриманим при розв'язуванні задачі 1.1, або безпосередньо із статистичного розподілу. Сума частот перших трьох варіант цього розподілу дорівнює 15 (половині обсягу вибірки), а наступних п'яти – також 15. Тому медіана знаходиться між варіантами 2 та 3: $M_e^* = (2+3)/2 = 2{,}5$. Неспівпадання $\bar{x}_в$, M_o^* та M_e^* свідчить про відсутність строгої симетричності розподілу.

Для обчислення дисперсії використаємо формулу: $D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 =$

$= \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i - \left(\overline{x_в}\right)^2 = \frac{1}{30}\left(0^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 2 + \right.$

$\left. + 7^2 \cdot 1\right) - (2{,}8)^2 = 338/30 - 7{,}84 \approx 3{,}4267$

Середнє квадратичне відхилення вибіркове знайдемо за означенням: $\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx \sqrt{3{,}4267} = 1{,}8511.$

Отже, середня величина розсіювання чисел розривів пряжі навколо середньої 2,8 дорівнює 1,8511.

Розмах варіації: $R = 7 - 0 = 7$.

Коефіцієнт варіації $V = \frac{\sigma_в}{\overline{\overline{x_в}}} \cdot 100\% = \frac{1{,}8511}{2{,}8} \cdot 100\% = 66{,}11\%.$

Для знаходження коефіцієнта асиметрії та ексцесу обчислимо спочатку центральні емпіричні моменти μ_3^*, μ_4^*. Для цього проміжні результати обчислень початкових моментів $v_i^*\left(i = \overline{1,4}\right)$ зведемо в таблицю:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^3 n_i$	$x_i^4 n_i$
0	3	0	0	0	0
1	5	5	5	5	5
2	7	14	28	56	112
3	5	15	45	135	405
4	4	16	64	256	1024
5	3	15	75	375	1875
6	2	12	72	432	2592
7	1	7	49	343	2401
$\sum$	30	84	338	1602	8414

Знайдемо $v_m^*, m = \overline{1,4}$, використовуючи останній рядок таблиці:

$v_1^* = 84/30 = 2{,}8;$ $v_2^* = 338/30 = 11{,}2667;$ $v_3^* = 1602/30 = 53{,}4;$

$v_4^* = 8414/30 = 280{,}4667.$

$\mu_3^* = v_3^* - 3v_2^* v_1^* + 2\left(v_1^*\right)^3 = 53{,}4 - 3 \cdot 11{,}2667 \cdot 2{,}8 + (2{,}8)^3 = 53{,}4 - 94{,}64028 +$
$+ 43{,}904 = 2{,}66372;$

$$\mu_4^* = v_4^* - 4v_3^* v_1^* + 6\nu_2^* (v_1^*)^2 - 3(v_1^*)^4 = 280{,}4667 - 4 \cdot 53{,}4 \cdot 2{,}8 + 6 \cdot 11{,}2667 \times$$
$$\times (2{,}8)^2 - 3(2{,}8)^4 = 280{,}4667 - 598{,}08 + 529{,}98556 - 184{,}3968 = 27{,}97546.$$

Отримаємо: $A_s^* = \mu_3^* / \sigma_в^3 = 2{,}66372/(1{,}8511)^3 = 0{,}42$;

$$E_s^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3 = 27{,}97546/(1{,}8511)^4 - 3 = 2{,}382636 - 3 = -0{,}6174.$$

Отже, даний статистичний розподіл числа розривів пряжі на станках характеризується середньою правосторонньою асиметрією і є плоско-вершинним.

1.20. Знайти дисперсію сукупності, що складається із двох груп, статистичні розподіли яких мають такий вид:

перша група

x_i	3	5	6
n_i	1	7	2

друга група

x_i	4	9
n_i	2	3

Розв'язання. За умовою

$N_1 = 1 + 7 + 2 = 10$, $N_2 = 2 + 3 = 5$, $n = N_1 + N_2 = 15$.

Обчислимо групові середні та загальну середню:

$$\overline{x^{(1)}} = \left(\sum x_i n_i\right)/ N_1 = (3 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2)/10 = 5,$$
$$\overline{x^{(2)}} = \left(\sum x_i n_i\right)/ N_2 = (4 \cdot 2 + 9 \cdot 3)/5 = 7,$$
$$\bar{x} = \left(\sum N_1 \overline{x^{(i)}}\right)/ n = (10 \cdot 5 + 5 \cdot 7)/15 = 17/3.$$

Знайдемо групові дисперсії:

$$D_1 = \overline{x^2} - \left(\overline{x^{(1)}}\right)^2 = \left(3^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 2\right)/10 - 5^2 = 25{,}6 - 25 = 0{,}6;.$$
$$D_2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x^{(2)}}\right)^2 = \left(4^2 \cdot 2 + 9^2 \cdot 3\right)/5 - 7^2 = 55 - 49 = 6.$$

Внутрішньо групова дисперсія:

$$D_{внгр} = \frac{N_1 D_1 + N_2 D_2}{N_1 + N_2} = \frac{10 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 6}{15} = 2{,}4;$$

міжгрупова:

$$D_{міжгр} = \frac{N_1\left(\overline{x^{(1)}} - \overline{x}\right)^2 + N_2\left(\overline{x^{(2)}} - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{10\left(5 - 17/3\right)^2 + 5\left(7 - 17/3\right)^2}{15} = 8/9.$$

Загальна дисперсія:

$$D_{заг} = D_{вигр} + D_{міжгр} = 2{,}4 + 8/9 = 148/45 \approx 3{,}289.$$

1.21. Із партії 9000 однотипних деталей перевірено 400 деталей, серед них виявилося 360 першосортних деталей. Знайти межі, в яких з імовірністю 0,9542 міститься частка деталей першого сорту всієї партії, якщо вибірка: а) повторна; б) безповторна.

Розв'язання. За таблицею знаходимо, що коренем рівняння $2\Phi(t) = 0{,}9542$ є $t = 2$. Частка вибіркова $w = 360/400 = 0{,}9$. Граничну помилку повторної вибірки знайдемо при $t = 2$, $w = 0{,}9$ і $n = 400$:

$$\Delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9(1 - 0{,}9)}{400}} = 0{,}03.$$

Тоді для повторної вибірки довірчим є інтервал $(0{,}9 - 0{,}03;\ 0{,}9 + 0{,}03) = (0{,}87;\ 0{,}93)$.

Для безповторної вибірки граничну помилку знайдемо при тих самих значеннях t, w та n: $\Delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{400}\left(1 - \frac{400}{9000}\right)} \approx 0{,}029.$

В результаті отримаємо для безповторної вибірки такий довірчий інтервал: $(0{,}871;\ 0{,}929)$.

1.22. З генеральної сукупності знайти вибіркову середню.

x_i	1	3	7	12
n_i	8	16	6	10

1.23. З генеральної сукупності зроблена вибірка.

x_i	-8	-2	1	5
n_i	13	11	14	12

Знайти вибіркову середню.

1.24. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки:

x_i	1450	1480	1490
n_i	3	5	2

Розв'язання. Оскільки вибіркові значення - великі числа, то доцільно ввести умовні варіанти: вибираємо $C = 1470$ і знаходимо u_i за формулою $u_i = x_i - 1470$:

x_i	-20	10	20
n_i	3	5	2

Визначаємо вибіркову середню: $\overline{u} = 3$.

Після цього знаходимо $\overline{x_B} = 1470 + 3 = 1473$.

1.25. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки:

а)

x_i	3140	3150	3180
n_i	12	6	12

б)

x_i	2430	2460	2500
n_i	24	14	12

1.26. Знайти незміщену оцінку дисперсії випадкової величини X на основі даного розподілу вибірки:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Розв'язання. Знаходимо вибіркову середню

$$\overline{x_B} = \frac{8 \cdot 2 + 14 \cdot 7 + 10 \cdot 9 + 18 \cdot 10}{50} = 7.68.$$

Для визначення вибіркової дисперсії використовуємо формулу $D_B = \overline{x^2} - \left(\overline{x_B}\right)^2$: $\overline{x^2} = \dfrac{8 \cdot 4 + 14 \cdot 49 + 10 \cdot 81 + 18 \cdot 100}{50} = 66{,}56,$

$D_B = 66{,}56 - 7{,}68^2 = 7{,}58.$

Знаходимо незміщену оцінку дисперсії («виправлену» вибіркову дисперсію): $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = 50 \cdot 7{,}58 / 49 = 7{,}73.$

1.27. Знайти незміщену оцінку дисперсії випадкової величини X на основі даного розподілу вибірки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

1.28. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки:

x_i	0,02	0,05	0,08
n_i	3	2	5

Розв'язання. З метою спрощення розрахунків доцільно перейти до умовних варіант $u_i = 100x_i$:

u_i	2	5	8
n_i	3	2	5

Знайдемо вибіркову дисперсію умовних варіант:

$$D_{Bu} = \sum_{i=1}^{3} n_i u_i^2 / n - \left(\sum_{i=1}^{3} n_i u_i / n \right)^2 = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 64}{10} - \left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8}{10} \right)^2 = 6{,}84.$$

Вибіркова дисперсія даного розподілу варіант x_i:

$$D_B = D_{Bu} / 100^2 = 6{,}84 / 100^2 \approx 7 \cdot 10^{-4}.$$

1.29. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки:

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

1.30. Виручка в магазині від продажу взуття склала наступні значення (млн. грн.):

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Знайти вибіркову середню і вибіркову дисперсію.

1.31. На підприємстві виготовляється певний вид продукції. Щомісячний обсяг випуску цієї продукції є випадковою величиною, для характеристики якої показниковий закон розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$.

На протязі шести місяців проводився облік обсягів випуску продукції:

Місяць	1	2	3	4	5	6
Об'єм випуску	20	24	25	28	27	32

Знайти оцінку параметра λ.

Розв'язання. Оскільки закон розподілу має лише один параметр λ., то для його оцінки потрібно скласти одне рівняння.

Знаходимо вибіркову середню:

$$\overline{x_B} = (20+24+25+28+27+32)/6 = 26.$$

Визначаємо математичне сподівання:

$$M_x = \int_0^\infty x f(x) dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо $M_x = 1/\lambda$, звідси $1/\lambda = \overline{x_B}$.

Ця рівність є наближеною, оскільки права частина є випадковою величиною. Оцінка λ^*: $1/\lambda^* = \overline{x_B}$.

Отже, $1/\lambda^* = 26$, звідси $\lambda^* = 1/26$.

1.32. За умови показникового розподілу випадкової величини X $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$ зроблена вибірка:

x_i	4	3	10	12	15
n_i	3	3	6	4	4

Знайти оцінку параметра λ.

1.33. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$.

Зроблена вибірка

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	3	5	10	10

Знайти оцінку параметра λ.

1.34. За умови рівномірного розподілу випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & якщо\ x\in(a,b),\\ 0, & якщо\ x\notin(a,b)\end{cases}$$ зроблена вибірка

x_i	2	3	4	5	6
n_i	4	6	5	12	8

Знайти оцінку параметрів a і b.

1.35. За умови рівномірного розподілу випадкової величини Х зроблена вибірка

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Знайти оцінку параметрів a і b.

1.36. Випадкова величина розподілена за нормальним законом:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Відомо, що $\sigma=\sqrt{D_X}$, $a=M_X$.

Здійснена вибірка

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	6	9	16	25	20	16	8

Знайти оцінку параметра a і незміщену оцінку параметра σ.

1.37. Випадкова величина Х розподілена за біноміальним законом. Статистичний розподіл вибірки представлений в таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Знайти точкову оцінку параметра p вказаного закону розподілу випадкової величини (кількість випробувань 10).

1.38. Випадкова величина Х розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ. Статистичний розподіл вибірки представлений в таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Знайти точкову оцінку параметра λ.

1.39. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом. Статистичний розподіл вибірки подано в таблиці:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Знайти точкову оцінку параметра λ.

1.40. Скляні однорідні вироби відправлені для реалізації з Тернополя до Києва в 1000 контейнерах. Після отримання товару було виявлено браковані вироби в кожному контейнері. Результати представлені в таблиці:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	785	163	32	16	4

Вважаючи, що кількість бракованих виробів описується законом Пуассона, знайти точкову оцінку параметра λ.

1.41. Знайти довірчий інтервал з надійністю 0,95 для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X, якщо її середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = 4$, вибіркова середня $\overline{x_B} = 16$ і об'єм вибірки $n = 16$.

Розв'язання. За надійністю $\gamma = 0{,}95$ із відношення $\Phi(z) = \gamma / 2$ знаходимо значення функції Лапласа: $\Phi(z) = 0{,}475$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $z = 1{,}96$. Використовуючи нерівність для інтервальної оцінки математичного сподівання, отримуємо $16 - 1{,}96 \cdot 4/4 < M_x < 16 + 1{,}96 \cdot 4/4$, або $14{,}04 < M_x < 17{,}96$.

1.42. Для визначення врожайності гречки зробили вибірку, до якої увійшло вісім ділянок. Результати вибіркових спостережень за урожайністю (ц/га) наведені в таблиці:

Номер ділянки	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайність	18,2	15,1	16,9	17,8	19,1	15,4	20,5	16,3

Знайти довірчий інтервал, в якому з надійністю 0,95 перебуватиме середня врожайність $\left(\overline{x_r}\right)$ гречки всього поля.

Розв'язання. Знайдемо точкові незміщені статистичні оцінки для $\overline{x_Г}$ та $D_Г$: $\bar{x}_в = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{18{,}2+15{,}1+16{,}9+17{,}8+19{,}1+15{,}4+20{,}5+16{,}3}{8} = 17{,}4125;$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n} = (331{,}24+228{,}01+285{,}61+316{,}84+364{,}84+364{,}81+237{,}16+$$
$$+420{,}25+265{,}69)/8 = 306{,}20125;$$

$$D_B = \overline{x^2} - \left(\overline{x_B}\right)^2 = 306{,}21125 - 303{,}19515 = 3{,}0614;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{8}{7} \cdot 3{,}0061 = 3{,}4355;\ S = 1{,}8535.$$

Будемо вважати, що врожайність усього поля розподілена за нормальним законом. Тоді за даною надійністю $\gamma = 0{,}95$ та числом ступенів вільності $k = n-1 = 8-1 = 7$, за таблицею знайдемо значення $t(\gamma, n-1) = 2{,}365$. Обчислимо межі довірчого інтервалу:

$$\bar{x}_в - t(\gamma, n-1)S/\sqrt{n-1} = 17{,}4125 - 2{,}265 \cdot 1{,}8535/7 = 17{,}4125 - 0{,}6263 = 16{,}7862;$$
$$\bar{x}_в + t(\gamma, n-1)S/\sqrt{n-1} = 17{,}4125 + 2{,}265 \cdot 1{,}8535/7 = 17{,}4125 + 0{,}6263 = 18{,}0388.$$

Отже, довірчий інтервал для середньої врожайності гречки всього поля має такий вид: $16{,}7862 < \overline{x_Г} < 18{,}0388$.

1.43. Знайти довірчий інтервал з надійністю 0,8 для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X з середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 5$, вибірковою середньою $\overline{x_B} = 20$ і об'ємом вибірки $n = 25$.

1.44. На вівчарській фермі з отари зроблено вибірку для зважування 36 овець. Їх середня вага виявилася рівною 50 кг. Вважаючи розподіл ваги нормальним і визначивши незміщену оцінку вибіркової дисперсії $s^2 = 16$, знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання з надійністю а) 0,8; б) 0,9; в) 0,95.

1.45. З генеральної сукупності зроблена вибірка об'ємом $n = 16$ і знайдена вибіркова середня 30. Отримано також незміщене значення вибіркової дисперсії $s^2 = 9$. Вважаючи розподіл випадкової величини X нормальним, знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання з надійністю а) 0,8 і б) 0,9.

1.46. За даними вибірки об'єма $n = 25$ знайдено незміщене значення вибірково середньоквадратичного відхилення $s = 3$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти з надійністю 0,99 довірчий інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення випадкової величини.
Розв'язання. За даними значеннями $\gamma = 0{,}99$, $n = 25$ з таблиці знаходимо значення $q = 0{,}49$. Підставляємо в нерівності $\frac{3}{1+0{,}49} < \sigma_x < \frac{3}{1-0{,}49}$, звідси $2{,}01 < \sigma_x < 5{,}88$.

1.47. За даними вибірки об'єма $n = 25$ незміщене значення вибіркового середньоквадратичного відхилення $s = 2$ для нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення випадкової величини.

1.48. В декількох маленьких магазинах проведена перевірка якості 100 виробів, після чого здійснена обробка даних. У результаті отримано незміщене значення вибіркового середньоквадратичного відхилення $s = 4$. Вважаючи розподіл якісних виробів нормальним, знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення.

1.49. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Статистичний розподіл вибірки представлений в таблиці:

x_i	3	5	7	8	10	12	14
n_i	3	7	4	6	7	5	8

Знайти з надійністю 0,97 довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання і з надійністю 0,95 – для оцінки середньоквадратичного відхилення.

1.50. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Статистичний розподіл вибірки представлений в таблиці:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	2	5	4	6	3

Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання і з надійністю 0,99 – для оцінки середньоквадратичного відхилення.

1.51. Вимірювальним приладом, який не має систематичних похибок, були зроблені незалежні вимірювання деякої величини. Знайти незсунуті оцінки математичного сподівання та дисперсії цієї величини за даними результатами вимірювань.

а) 8, 9, 11, 12; б) 4, 6, 10, 20; в) 5, 15, 10, 20; г) 2, 3, 5, 10

д) 2, 3, 5; е) 2504, 2486, 2526, 2495, 2515, 2528, 2492, 2494.

1.52. Знайти методом добутків вибіркову середню та вибіркову дисперсію заданої вибірки.

а)

x_k	12	14	16	18	20	22
n_k	5	15	50	16	10	4

б)

x_k	65	70	75	80	85
n_k	2	5	25	15	3

в) 2.30, 2.28, 2.29, 2.28, 2.30, 2.28, 2.32, 2.29, 2.31, 2.32, 2.31, 2.30, 2.32, 2.30, 2.31, 2.30, 2.28, 2.29, 2.28, 2.30, 2.28, 2.32, 2.29, 2.31, 2.32, 2.31, 2.30, 2.32, 2.30, 2.31.

г)

x_k	7.14	7.21	7.28	7.35	7.42	7.49	7.56	7.63	7.70
n_k	2	9	24	43	51	37	25	8	1

1.53. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі вибіркова середня $\overline{x_B}$, об'єм вибірки n та середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності.

а) $\overline{x_B} = 14$, $n = 25$, $\sigma = 5$; б) $\overline{x_B} = 10.2$, $n = 16$, $\sigma = 4$;

в) $\overline{x_B} = 16.8$, $n = 25$, $\sigma = 5$; г) $\overline{x_B} = 2000$, $n = 1600$, $\sigma = 40$.

1.54. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності буде дорівнювати 0,2.

Відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1{,}5$.

а) $\gamma = 0{,}925$; б) $\gamma = 0{,}95$; в) $\gamma = 0{,}978$; г) $\gamma = 0{,}99$.

2. Перевірка статистичних гіпотез

2.1. Торговельна фірма розглядає питання про відкриття в новому мікрорайоні міста філії. Відомо, що фірма буде працювати прибутково, якщо щомісячний середній дохід мешканців мікрорайону перевищує 500 грн. Відомо також, що дисперсія доходів $\sigma^2 = 400$ грн.

1) Знайти умови прийняття рішення, за допомогою якого на підставі вибірки обсягом $n = 100$ і рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ можна встановити, що робота філії буде прибутковою.

2) Обчислити ймовірність того, що при використанні правила прийняття рішення, отриманого в п. 1), буде здійснена помилка другого роду, якщо в дійсності середній дохід за місяць досягає 508 грн.

3) Вважаючи альтернативне значення середнього генерального доходу рівним 520 грн, розрахувати обсяг вибірки, при якому ризик помилки першого роду не перевищить 0,025, а ризик помилки другого роду не перевищить 0,05.

Розв'язання. Вважаємо, що середній місячний дохід навмання вибраного мешканця є нормально розподіленою випадковою величиною.

1) Фірма не відкриває філію, якщо середній місячний дохід мешканця не перевищить 500 грн. Тому будемо вважати, що H_0: $a_0 = 500$, а H_1: $a > 500$. Оскільки дисперсія відома, то гіпотеза H_1 приймається, якщо $U_{спост} > u_{кр}$, тобто $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2 \cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45$. Звідки за табл. $u_{кр} = 1{,}65$. Отже, $U_{спост} = \left(\overline{x_в} - a_0\right)\sqrt{n}/\sigma = \left(\overline{x_в} - 500\right)\sqrt{100}/2$.

Тому H_1 приймається і, отже, філію відкривають, якщо середній місячний дохід 100 мешканців $\overline{x_в} > 500 + 2 \cdot 1{,}65 = 503{,}3$.

2) Альтернативне значення середнього доходу $a = 508$ і гіпотеза H_1: $a = 508 > a_0$. В цьому випадку ймовірність помилки другого роду знайдемо, врахувавши, що $u_{2a} = u_{кр}$:

$$\beta = 0{,}5 - \Phi\left[(a - a_0)\sqrt{n}/\sigma - u_{2a}\right] = 0{,}5 - \Phi[8 \cdot 10/20 - 1{,}65] = 0{,}5 - \Phi(2{,}35) =$$
$$= 0{,}00939.$$

3) При гіпотезах H_0: $a = a_0(a_0 = 500)$; H_1: $a > a_0(a_0 = 520)$, обсяг вибірки знайдемо, $\alpha = 0{,}025, \beta = 0{,}05$. Рівняння $\Phi(u_{2a}) = (1 - 2\alpha)/2$, $\Phi(u_{2\beta}) = (1 - 2\beta)/2$ для заданих значень α і β згідно таблиці мають такі корені: $u_{0,05} = 1{,}95$, $u_{0,1} = 1{,}65$. Тоді $n \ge \dfrac{(u_{0,05} + u_{0,1})^2 \cdot 400}{20^2} = 12{,}96$.

Отже, шуканий обсяг вибірки повинен бути не меншим від 13.

2.2. Кількісна ознака генеральної сукупності розподілена за нормальним законом. За вибіркою обсягом $n = 16$ знайдена дисперсія вибіркова $D_в = 10{,}6$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}02$ перевірити основну гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$, якщо конкуруюча гіпотеза H_1: $\sigma^2 \ne 12$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку виправлену дисперсію

$$S^2 = [n/(n-1)]D_в = (16/15)10{,}6 = 11{,}307,$$

а потім спостережене значення критерію

$$\chi^2_{спост} = (n-1)S^2/\sigma_0^2 = 15 \cdot 11{,}307/12 = 14{,}133.$$

Оскільки H_1: $\sigma^2 \neq 12$, то критична область є двосторонньою. Згідно із правилом за табл. знаходимо критичні точки: ліву - $\chi^2_{кр}(1-\alpha/2;k) = \chi^2_{кр}(1-0{,}02/2;15) = \chi^2_{кр}(0{,}99;15) = 5{,}23$ і праву - $\chi^2_{кр}(\alpha/2;k) = \chi^2_{кр}(0{,}01;15) = 30{,}58$. Так як спостережене значення критерію належить області прийняття основної гіпотези $(5{,}23 < 14{,}133 < 30{,}58)$, то нема підстав її відкидати. Іншими словами, виправлена дисперсія вибіркова $(11{,}307)$ неістотно відрізняється від гіпотетичної дисперсії генеральної (12).

2.3. Фірма-постачальник в рекламному буклеті стверджує, що середній термін безвідмовної роботи виробу – 2900 год. Для вибірки з 50 виробів середній термін безвідмовної роботи виявився рівним 2720 годин при вибірковому середньоквадратичному відхиленні 700 год. При 5%-му рівні значущості перевірити гіпотезу про те, що значення 2900 годин є математичним сподіванням.

Розв'язання. Припустимо, що випадкова величина терміну безвідмовної роботи розподілена за нормальним законом. Потрібно перевірити гіпотезу про числове значення математичного сподівання нормально розподіленої величини (генеральної середньої) при невідомій генеральній дисперсії. В цьому випадку як критерій оберемо функцію $T = \dfrac{\overline{X} - a_0}{S/\sqrt{n-1}}$, де $\overline{X}$ - вибіркова середня, a_0 - математичне сподівання, S - вибіркове середньоквадратичне відхилення. Випадкова величина T має t – розподіл (розподіл Стьюдента) з $l = n-1$ степенями вільності. У даній задачі мова йде про порівняння вибіркової середньої 2720 годин з гіпотетичним математичним сподіванням $\overline{a_0} = 2900$ годин, при цьому вибіркове середньоквадратичне відхилення дорівнює 700 годин.

Потрібно знайти критичну область для нульової гіпотези H_0: $a_0 = 2900$ при альтернативній гіпотезі H_1: $a_0 < 2900$. Очевидно, що інші альтернативні гіпотези ($a_0 > 2900$ і $a_0 \neq 2900$) недоцільні, оскільки споживач зазвичай стурбований лише тим, що термін служби виробу може виявитися меншим, ніж йому гарантує постачальник.

Критична область лівостороння; $t_{кр}^{л}$ знаходимо з умови $P\left(T < t_{кр}^{л}\right) = \alpha$.

При $\alpha = 0{,}05$ і $l = 50 - 1 = 49$ в таблиці t – розподілу, використовуючи лінійну інтерполяцію, знаходимо $t_{кр}^{л} = -t_{кр}^{п} = -1{,}677$. Таким чином, критична область $\omega = (-\infty, -1{,}677)$. Розрахуємо t_r, вважаючи, що $a_0 = \overline{a_0}$: $t_r = \frac{2720 - 2900}{700/\sqrt{50-1}} = \frac{-180}{100} = -1{,}8.$

Значення -1,8 потрапляє в критичну область, тому нульова гіпотеза H_0 повинна бути відкинута. Отже, фірма в рекламі завищує термін безвідмовної роботи виробу.

2.4. Утворена випадкова вибірка із 64 покупців, які цікавилися товаром А. З них товар А купили 16 осіб. Постачальник стверджує, що даний товар повинен привабити третю частину покупців, а середнє квадратичне відхилення σ_x дорівнює одній особі. Перевірити нульову гіпотезу при 5%-му рівні значущості.

Розв'язання. Припустимо, що число покупців товару А, є величина, розподілена за нормальним законом. Гіпотетична генеральна середня при цьому: буде становити $21(64 \cdot 1/3)$. Вважатимемо, що $\sigma_x = 1$. Таким чином, йдеться про перевірку гіпотези про числове значення математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії, тобто про порівняння гіпотетичної генеральної середньої 21 з вибірковою середньою 16 при відомому середньому квадратичному відхиленні σ_x.

Нульова гіпотеза H_0: $a_0 = 21$, а альтернативна, H_1: $a_0 \neq 21$. Можливі і інші альтернативні гіпотези, наприклад, H_1: $a_0 < 21$, або H_1: $a_0 > 21$. Рівень значущості: $\alpha = 0{,}05$.

В якості критерію в цьому випадку розглядається функція: $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{\sigma_x/\sqrt{n}}$.

Функція Z підпорядкована нормальному закону розподілу $N(0,1)$. Критична область буде двосторонньою, її утворюють інтервали $\left(-\infty, z_{кр}^{л}\right)$ і $\left(z_{кр}^{п}, \infty\right)$, визначені з умови $P\left(Z < z_{кр}^{л}\right) = \alpha / 2$ і $P\left(Z > z_{кр}^{п}\right) = \alpha / 2$.

Якщо $\alpha = 0{,}05$, то $\alpha / 2 = 0{,}025$. Це ймовірність попадання випадкової величини Z в лівосторонню або правосторонню область. В цьому випадку ймовірність непопадання випадкової величини Z в правосторонню критичну область $(1 - \alpha / 2)$ буде:

$$P\left(-\infty < Z < z_{кр}^{п}\right) = P(-\infty < Z < 0) + P\left(0 < Z < z_{кр}^{п}\right) = 1 - \alpha / 2.$$

Оскільки $P(-\infty < Z < 0) = 0{,}5$, а $P\left(0 < Z < z_{кр}^{п}\right) = \Phi\left(z_{кр}^{п}\right)$ - функція Лапласа в точці $z_{кр}^{п}$, то $\Phi\left(z_{кр}^{п}\right) = 1 - \alpha / 2 - 0{,}5 = 0{,}475$. На основі таблиці значень функції Лапласа знаходимо $z_{кр}^{п} = 1{,}96$. Точка $z_{кр}^{л}$ розташована симетрично і дорівнює -1,96. Отже, критична область складається з інтервалів $(-\infty; -1{,}96)$ і $(1{,}96; \infty)$. Тому: $z_r = \dfrac{16 - 21}{1/\sqrt{64}} = -40.$

Значення z_r потрапляє в критичну область, тому гіпотеза H_0: $a_0 = 21$ відхиляється.

2.5. Середній діаметр виробів повинен складати 35 мм. Але для вибірки із 82 виробів він складає 35,3 мм при вибірковому середньому квадратичному відхиленні 0,1 мм. При 5-му рівні значущості перевірити гіпотезу про те, що верстат, на якому виготовляють ці вироби, не вимагає перелаштування.

2.6. Постачальник добрив стверджує, що застосування нової партії добрив забезпечить урожайність пшениці 60 ц/га. Добрива внесли на площу 37 га і отримали урожай 55 ц/га при вибірковому середньому квадратичному відхиленні 3 ц/га. При 5%-му рівні значущості оцінити справедливість ствердження постачальника.

2.7. Середньодобовий продаж хліба протягом багатьох років в даному магазині становив 6 т при середньому квадратичному відхиленні 0,05 т. Сьогодні магазином було продано 7 т хліба. Чи можна при 5%-му рівні значущості припускати, що і завтра буде продано 7 т хліба?

2.8. Фірма – виробник жіночих прикрас, випустила новий товар і стверджує, що 40 % покупців придбають ці прикраси. В ході 10-денного рекламного розпродажу придбали прикраси 29,5% покупців, вибіркове середнє квадратичне відхилення склало 16,5%. При 5%-му рівні значущості оцінити твердження виробника товару.

Розв'язання. Перевіримо нульову гіпотезу $H_0 : a_0 = 40\%$ і альтернативну $H_1 : a_0 < 40\%$. Припустимо, що випадкова величина X– число покупців – розподілена нормально. В задачі потрібно перевірити гіпотезу про числове значення математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії. Критерій має вигляд

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{S / \sqrt{n-1}}.$$

Для заданого рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ знайдемо лівосторонню критичну область з урахуванням того, що $l = 10 - 1 = 9$ степенів вільності. Критична область ω є інтервал $(-\infty; -1{,}833)$. Визначимо t_r :

$$t_r = \frac{29{,}5 - 40}{16{,}5 / \sqrt{9}} = -1{,}909.$$

Число -1,909 потрапляє в критичну область. Таким чином, нульова гіпотеза відкидається.

2.9. Постачальник двигунів стверджує, що середній термін їх служби 800 год. Для вибірки з 17 двигунів середній термін служби виявився рівним 865 год. при вибірковому середньому квадратичному відхиленні 120 год. Перевірити нульову гіпотезу при рівні значущості: а) 5%; б) 1%.

2.10. За результатами 10 спостережень встановлено, що середній час обслуговування майстром клієнта $\overline{x} = 15$ хв. Припускаючи, що час обслуговування клієнта – нормально розділена випадкова величина з дисперсією $\sigma_x^2 = 9$ хв., при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ встановити, чи можна прийняти як норматив (математичне сподівання) для обслуговування одного клієнта: а) 21 хв.; б) 16 хв.

2.11. За паспортними даними на автомобільний двигун, витрата палива на 100 км пробігу становить 10 л при середньому квадратичному відхиленні 2 л. В результаті удосконалення конструкції очікується, що витрата палива зменшиться. Для перевірки проведені випробування 25 випадково відібраних автомобілів з модернізованим двигуном: середня витрата палива на 100 км пробігу складає 9,2 л. При 5%-му рівні значущості перевірити гіпотезу, що модернізація вплинула на витрату палива.

2.12. З великої партії ананасів одного розміру випадковим чином відібрано 36 штук. Вибіркова середня маса однієї штуки при цьому виявилася рівною 930 г. Використовуючи двосторонній критерій при $\alpha = 0{,}05$, перевірити гіпотезу, що середня маса одного ананаса (за твердженням постачальника) становить 1 кг, якщо:

а) середнє квадратичне відхилення 200 г;

б) середнє квадратичне відхилення невідоме, а вибіркове 250 г.

2.13. Термін зберігання продукції, яка виготовляється за технологією А, складає:

Термін зберігання	x_i	5	6	7
Число одиниць продукції	n_i	2	4	4

а виготовленою за технологією В:

Термін зберігання	y_i	5	6	7	8
Число одиниць продукції	m_i	1	8	7	1

Припустивши, що випадкові величини X і Y розподілені за нормальним законом, перевірити гіпотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при рівні значущості 0,1 і альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Розв'язання. Знайдемо «виправлені» вибіркові дисперсії s_x^2, s_y^2. Для цього спочатку знайдемо $\overline{x}, \overline{y}$: $\overline{x} = \dfrac{5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 7\cdot 4}{10} = 6{,}2$; $\overline{y} = \dfrac{5\cdot 1 + 6\cdot 8 + 7\cdot 7 + 8\cdot 1}{17} = 6{,}5$.

Тоді $s_x^2 = \left[\dfrac{25\cdot 2 + 36\cdot 4 + 49\cdot 4}{10} - 6{,}2^2\right]\dfrac{10}{9} = 0{,}62$;

$$s_y^2 = \left[\frac{25\cdot 1 + 36\cdot 8 + 49\cdot 7 + 64\cdot 1}{17} - 6{,}5^2\right]\frac{17}{16} = 0{,}11.$$

Враховуючи, що $s_x^2 > s_y^2$, визначимо f_r: $f_r = \dfrac{0{,}62}{0{,}11} = 5{,}64$.

Критичне значення $f_{кр}^n$ знаходимо з умови

$$P\left(F\left(l_1 = 10-1, l_2 = 17-1\right) > f_{кр}^n\right) = \alpha/2 = 0{,}05.$$

За таблицею F – розподілу визначаємо $f_{кр}^n = 2{,}54$.

Так як число $f_r = 5{,}64$ потрапляє в критичну область $(2{,}54;\infty)$, то гіпотезу про рівність дисперсій середнього терміну зберігання продукції, виготовленої за технологіями А та В, відкидаємо.

2.14. Температура в холодильній камері контролюється двома електронними термометрами. Для порівняння точності термометрів їх показання фіксуються одночасно. Проведено 10 вимірів показників термометрів:

Номер виміру	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Термометр 1	-7,11	-8,63	-6,89	-7,23	-7,51	-7,68	-7,91	-6,97	-7,44	-7,64
Термометр 2	-7,13	-8,49	-7,12	-7,19	-7,67	-7,49	-8,03	-7,15	-7,29	-7,89

При рівні значущості 0,1 перевірити гіпотезу про рівність дисперсій.

2.15. На двох верстатах виготовляють однакову продукцію, контрольовану за зовнішнім діаметром виробу. З продукції верстата А було перевірено 16 виробів, а з продукції верстата В – 25 виробів. Вибіркові оцінки математичних сподівань і дисперсій контрольованих розмірів склали $\bar{x}_A = 37{,}5$ мм при $s_A^2 = 1{,}21$ мм^2 і $\bar{x}_B = 36{,}8$ мм при $s_B^2 = 1{,}44$ мм^2. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій, якщо $\alpha = 0{,}1$.

2.16. Фірма постачає радари для визначення швидкості руху автомобілів. Для закупівлі великої партії проведені випробування приладів, виготовлених на заводі А і на заводі В. Вимірювання проводили на одній машині і на одній дорозі. Визначили величини відхилень між показниками спідометра автомобіля й радару:

Завод А

Відхилення, км/год	Δx_i	-0,7	-0,3	-0,1	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3
Кількість вимірювань	n_i	5	4	2	6	3	1	3	1	1

Завод В

Відхилення, км/год	Δy_i	-0,6	-0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
Кількість вимірювань	m_i	4	5	3	2	2	1

Вважаючи показники спідометра автомобіля еталоном, перевірити гіпотезу про однакову точність вимірювань, проведених радарами заводу А й заводу В, при рівні значущості 0,1.

2.17. Середній щоденний об'єм продажу за I квартал поточного року для 17 торговців району А складає 15 тис. грн при "виправленому" середньоквадратичному відхиленні 2,5 тис. грн, а для 10 торговців району В - 13 тис. грн при "виправленому" середньоквадратичному відхиленні 3 тис. грн Кожну групу можна вважати випадковою незалежною вибіркою з великої сукупності. Чи істотна відмінність об'ємів продажу в районах А і В при 5%-му рівні значущості?

Розв'язання. Припустимо, що щоденний об'єм продажу підпорядкований нормальному закону розподілу. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення законів розподілу для районів А і В невідомі. Припустимо, що дисперсії об'ємів продажу однакові. У цих умовах виникає завдання оцінки статистичної гіпотези $H_0: \ a_x = a_y$ при альтернативній $H_1: \ a_x \neq a_y$, якщо прийняти за a_x математичне сподівання об'єма продажу для району А, за a_y - для району В.

Вибіркові середні $\overline{x}$ та $\overline{y}$ є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами. В цьому випадку як критерій використовують функцію $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$,

де $S = \sqrt{\dfrac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}}$.

Функція Т підпорядкована t - розподілу для $l = m + n - 2$ степенів вільності.

За таблицею t - розподілу для $l = 17 + 10 - 2 = 25$ і 5%-го рівня значущості (для двосторонньої критичної області) знаходимо $t_{кр} = 2{,}06$. Це означає, що критична область $(-\infty; -2{,}06)$ і $(2{,}06; \infty)$.

Визначимо t_r: $s = \sqrt{\dfrac{6{,}25 \cdot 16 + 9 \cdot 9}{25}} = \sqrt{7{,}24} = 2{,}69$,

$$t_r = \frac{15 - 13}{2{,}69\sqrt{\dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{10}}} = 1{,}86.$$

Отримане значення критерію t_r не належить критичної області, звідси слідує, що різниця неістотна й гіпотеза $H_0: \ a_x = a_y$ приймається. За загальну середню вибіркову приймають величину $\overline{x_0} = \dfrac{15 \cdot 17 + 13 \cdot 10}{27} \approx 14.$

2.18. З’ясувати, чи істотно при 5% - му рівні значущості перевищення об’єма продажу в районі А у порівнянні з об’ємом в районі В.

Розв’язання. Питання в даному завданні відрізняється від питання в завданні 15 тим, що альтернативною до гіпотези $H_0: \ a_x = a_y$ стає не гіпотеза $H_1: \ a_x \neq a_y$, а гіпотеза $H_1: \ a_x > a_y$. В цьому випадку критична область одностороння (зокрема, правостороння), для $l = 25$ і $\alpha = 0{,}05$ маємо критичну область $(1{,}708; \infty)$. Оскільки $t_r = 1{,}86 > 1{,}708$, то величина t_r входить в критичну область, тому перевищення об'єму продажу в районі А в порівнянні з об'ємом в районі В істотне і гіпотеза $H_0: a_x = a_y$ відхиляється.

2.19. Акціонерне товариство (АТ) виготовляє печиво «Українські візерунки» в пачках, на яких написано: маса нетто 200 г. Здійснена вибірка для оцінки середньої маси печива в пачках, випущених київською та львівською фабриками АТ. Результати вибірок наступні (вказана маса пачок печива «Українські візерунки»):

Київська фабрика

201, 195, 197, 199, 202, 198, 199, 203, 195, 196, 198, 199, 194, 203, 195, 202, 197

Львівська фабрика

203, 207, 191, 193, 197, 201, 196, 192, 194, 195, 198, 196

Припускаючи, що випадкова величина маси пачки печива розподілена за нормальним законом з однаковими дисперсіями, й рахуючи вибірки незалежними, визначити:

а) середнє вибіркове і «виправлене» середнє квадратичне відхилення маси для кожної фабрики;

б) для $\alpha = 0{,}05$ істотна чи ні відмінність між середніми вибірковими (якщо ця відмінність існує)?

в) чи є величина 200 г математичним сподіванням маси при 5%-му рівні значущості?

2.20. Витрата сировини на одиницю продукції становить:

за старою технологією:

Витрата сировини	x_i	305	307	308
Кількість виробів	n_i	1	4	4

за новою технологією:

Витрата сировини	n_i	303	304	305	308
Кількість виробів	m_i	2	6	4	1

Припустивши, що відповідні випадкові величини X і Y мають нормальний розподіл з математичними сподіваннями a_x і a_y і однаковими дисперсіями, перевірити:

а) при рівні значущості 0,1 гіпотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при альтернативній H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$;

б) при рівні значущості 0,05 гіпотезу H_0 : $a_x = a_y$ при альтернативній H_1 : $a_x \neq a_y$.

2.21. Продуктивність кожного з агрегатів А і В становить (у кг речовини за годину роботи):

Номер вимірювання	1	2	3	4	5
Агрегат А	14,1	13,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат В	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Чи можна вважати продуктивність агрегатів А і В однаковою в припущенні, що обидві вибірки отримані з нормально розподілених генеральних сукупностей, при рівні значущості $\alpha = 0{,}1$?

2.22. Фірма пропонує автомати, що розливають напої. За вибіркою $n = 16$ знайдена середня величина $\overline{x} = 182$ г дози, що наливається в склянку автоматом № 1. За вибіркою $m = 9$ знайдена середня величина $\overline{y} = 185$ г дози, що наливається в склянку автоматом № 2. За твердженням виробника, випадкова величина дози, що наливається, має нормальний закон розподілу з дисперсією, рівною $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 25$ г^2. Чи можна вважати відмінності вибіркових середніх випадковою помилкою при рівні значущості $\alpha = 0{,}1$?

Розв'язання. Нехай a_x і a_y – математичні сподівання доз, що наливаються, автоматом № 1 й автоматом № 2. Нульова гіпотеза в даному випадку H_0 : $a_x = a_y$ при альтернативних H_1 : $a_x \neq a_y$ і H_1 :

$a_x < a_y$. Дисперсія відома: $\sigma^2 = 25$. Як критерій справедливості статистичної гіпотези вибирається функція $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$, розподілена за нормальним законом з параметрами (0, 1).

1. Розглянемо спочатку гіпотезу $H_0: \ a_x = a_y$ для альтернативної $H_1: \ a_x < a_y$. В цьому випадку критична область має вигляд $\left(-\infty, z_{кр}^{л}\right)$, де $z_{кр}^{л}$ визначається з умови $P\left(Z < z_{кр}^{л}\right) = \alpha$.

Оскільки функція Лапласа непарна, тобто $\Phi(-z) = -\Phi.(z)$, а таблиця цієї функції містить лише додатні значення, то знайдемо спочатку $z_{кр}^{п}$. Для цього визначимо значення функції Лапласа в критичній точці: $\Phi\left(z_{кр}^{п}\right) = 0{,}5 - \alpha = 0{,}49$. Звідки $z_{кр}^{п} = 2{,}33$. Отже, лівостороння критична область буде $(-\infty; -2{,}33)$.

Обчислимо z_r: $z_r = \dfrac{182 - 185}{\sqrt{\dfrac{25}{16} + \dfrac{25}{9}}} = \dfrac{-3 \cdot 12}{25} = -1{,}44$.

Отримане значення $z_r = -1{,}44$ не входить в критичну область $(-\infty; -2{,}33)$, тому нульова гіпотеза приймається.

2. Розглянемо гіпотезу $H_0: \ a_x = a_y$ при альтернативній H_1: $a_x \neq a_y$. В цьому випадку критична область двостороння і має вигляд $\left(-\infty; z_{кр}^{k}\right) \cup \left(z_{кр}^{п}; \infty\right)$. Величини $z_{кр}^{л}$ і $z_{кр}^{п}$ розраховуються із умови $P\left(Z < z_{кр}^{л}\right) = \alpha / 2$ і $P\left(Z > z_{кр}^{п}\right) = \alpha / 2$.

Користуючись таблицею значень функції Лапласа, отримуємо $\Phi\left(z_{кр}^{п}\right) = 0{,}5 - \alpha / 2 = 0{,}495$, $z_{кр}^{п} = 2{,}57$.

Критична область має вигляд $(-\infty; -2{,}57) \cup (2{,}57; \infty)$. Значення $z_r = -1{,}44$ не потрапляє в критичну область, тому нульова гіпотеза приймається.

2.23. В таблиці наведені результати вимірювання відсоткового вмісту крохмалю в картоплі (досліджували 16 бульб різних сортів картоплі) двома різними способами:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	11	9	13	8	6	7	6	12	10	11	14	12	7	5	15	11
II	13	9	13	9	8	9	9	9	11	13	11	12	6	6	13	12

При рівні значущості 0,1 чи можна вважати, що крохмальність картоплі одна й та ж для обох способів?

2.24. Використовуються два види добрив: I й II. Для порівняння їх ефективності були попарно вибрані 20 ділянок рівної площі так, що пару склали ділянки, однорідні за врожайністю. Десять ділянок були оброблені добривом I, а десять, парних їм, – добривом II. На відповідних парах ділянок отримали наступний врожай:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	8,0	8,4	8,0	6,4	8,6	7,7	7,7	5,6	5,6	6,2
II	5,6	7,4	7,3	6,4	7,5	6,1	6,6	6,0	5,5	5,0

При рівні значущості 5% перевірити гіпотезу про різний вплив використання добрива I або II.

2.25. За даними двох незалежних вибірок об’єма $n_1 = 11$ та $n_2 = 14$ із нормальних сукупностей X та Y знайдені виправлені вибіркові дисперсії $s_1^2 = 0{,}76$ та $s_1^2 = 0{,}76$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ при альтернативній H_1: $D(X) > D(Y)$.

2.26. За даними двох незалежних вибірок об’єма $n_1 = 9$ та $n_2 = 16$ із нормальних сукупностей X та Y знайдені виправлені вибіркові дисперсії $s_1^2 = 34{,}02$ та $s_2^2 = 12{,}15$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ при альтернативній H_1: $D(X) > D(Y)$.

2.27. Використовуючи критерій Пірсона (xi - квадрат) з рівнем значущості α, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності X, якщо відомі емпіричні n_k та теоретичні n_k' частоти.

а) $\alpha = 0{,}05$;

n_k	15	26	25	30	26	21	24	20	13
n'_k	9,1	16,5	25,3	32	33,9	29,8	22	13,5	7

б) $\alpha = 0{,}01$;

n_k	15	26	25	30	26	21	24	20	13
n'_k	9,1	16,5	25,3	32	33,9	29,8	22	13,5	7

в) $\alpha = 0{,}05$;

n_k	8	16	40	72	36	18	10
n'_k	6	18	36	76	39	18	7

г) $\alpha = 0{,}05$;

n_k	8	16	40	72	36	18	10
n'_k	6	18	36	76	39	18	7

д) $\alpha = 0{,}05$;

n_k	5	10	20	8
n'_k	6	14	18	7

е) $\alpha = 0{,}05$;

n_k	5	10	20	8	7	7
n'_k	6	14	18	7	5	5

2.28. Використовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу H_0: наведений у таблиці розподіл росту 1000 дорослих чоловіків є вибіркою з нормальної генеральної сукупності з $a = \overline{x}_B$ та $\sigma = \sqrt{\sigma_B^2}$.

Ріст, см	Кількість чоловіків	Ріст, см	Кількість чоловіків
144-147	1	168-171	172
147-150	3	171-174	120
150-153	7	174-177	63
153-156	26	177-180	27
156-159	66	180-183	9
159-162	114	183-186	3
162-165	186	186-189	1
165-168	200	189-192	2

2.29. Екзаменаційний квиток з математики містить 10 завдань. Хай X – випадкова величина кількості завдань, розв’язаних абітурієнтами на вступному екзамені. Результати здачі екзамену з математики для 300 абітурієнтів такі:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	13	17	15	35	10	9	40	51	45	33	32

Оцінити закон розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Для складання гіпотези про модель закону розподілу випадкової величини X зробимо наступні припущення:

- ймовірність розв'язання задачі не залежить від результату розв'язання інших завдань;
- ймовірність розв'язати будь-яке окремо взяте завдання одна й та ж і рівна *p*, а ймовірність не розв'язати завдання $q = 1 - p$.

При цих припущеннях можна передбачити, що X впідпорядкована біноміальному закону розподілу (нульова гіпотеза), тобто ймовірність того, що абітурієнт розв'яже x завдань, може бути підрахована за формулою: $P(X = x) = C_{10}^{x} p^{x} q^{10-x}$.

Знайдемо оцінку параметра *p*, що входить в модель.

Тут *p* – це ймовірність того, що абітурієнт розв'яже завдання. Оцінкою ймовірності *p* є відносна частота *p**, яка визначається за формулою: $p^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i}{v \sum_{i=1}^{11} m_i} = \dfrac{\bar{x}}{v}$, де $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{11} m_i}$ - середнє число завдань, розв'язаних одним абітурієнтом; v - число завдань, які розв'язує кожний абітурієнт.

Тоді оцінку для *p* отримаємо у вигляді:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i / n}{v} = (0 \cdot 0{,}43 + 1 \cdot 0{,}057 + \ldots + 10 \cdot 0{,}107)/10 = 0{,}6.$$

Підставимо значення $p^* = 0{,}6$ і $q^* = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ й при різних x_i отримаємо теоретичну вірогідність p_i^T і частоті $m_i^T = p_i^T n$ (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Номер групи i	x_i	p_i^T	m_i^T
1	0	0,0001	0,03
2	1	0,0016	0,48
3	2	0,0106	3,18
4	3	0,0425	12,75
5	4	0,1115	33,45
6	5	0,2007	60,21
7	6	0,2508	75,24
8	7	0,2150	64,50
9	8	0,1209	36,27
10	9	0,0403	12,09
11	10	0,0060	1,80

З таблиці видно, що для груп 1, 2, 3 і 11 теоретична частота $m_i^T < 5$. Такі групи зазвичай об'єднуються з сусідніми. Значення m_i^T для груп 1, 2 і 3 можна об'єднати з m_4^T. Об'єднаємо також групу 11 з групою 10 й складемо табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Номер групи i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0 – 3	4	5	6	7	8	9 – 10
m_i	80	10	9	40	51	45	65
m_i^T	16	33	60	75	64	36	14

За даними табл. 1.5 обчислимо величину критерію згоди:

$$X_r^2 = \frac{(80-16)^2}{16} + \frac{(10-33)^2}{33} + \frac{(9-60)^2}{60} + \frac{(40-75)^2}{75} + \frac{(51-64)^2}{64} +$$

$$+\frac{(45-36)^2}{36} + \frac{(65-14)^2}{14} = 522{,}4.$$

Задамося рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, тоді для $l = k - r - 1 =$ $= 7 - 1 - 1 = 5$ степеней вільностей ($X_{кр}^2$)^п=11,1 (див. дод. 4).

Величина $X_r^2 = 522{,}4$, отже, нульова гіпотеза повинна бути відкинута.

2.30. Комерсант припускає, що об’єм продажу нового виду продукції в кожній з п'яти торгових точок, в різних районах, буде однаковим. Фактичний об’єм продажів виявився різним:

Район	i	1	2	3	4	5
Фактичний об’єм продажу	m_i	105	117	84	111	83

Оцінити, значимі чи ні відмінності між спостережуваними й очікуваними об’ємами продажів при рівні значущості 0,01 й 0,05.

Розв’язання. Оскільки в завданні запитується про узгодження очікуваних (однакових) й фактичних об'ємів продажів, то теоретичний «закон розподілу» визначений: у всіх районах об'єм продажів однаковий, тобто

$$m_1^T = m_2^T = m_3^T = m_4^T = m_5^T \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i}{5} = \frac{500}{5} = 100.$$

Відмітимо, що в даному прикладі не можна використовувати як закон розподілу біноміальний або нормальний закон, оскільки одночасно порівнюється п'ять районів.

Складемо таблицю

Район	i	1	2	3	4	5
Фактичний об’єм продажу	m_i	105	117	84	111	83
Очікуваний об'єм продажів	m_1^T	100	100	100	100	100

Тоді $X_r^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{\left(m_i - m_i^T\right)^2}{m_i^T} = \frac{1}{100}(25 + 289 + 256 + 121 + 289) = 9{,}8.$

Вибираючи рівень значущості $\alpha = 0{,}01$, по таблиці X^2 - розподілу для степеней вільності $l = 5 - 1 = 4$ знаходимо $\left(X_{кр}^2\right)^n = 13{,}3,$ а для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ при $l = 4$, відповідно $\left(X_{кр}^2\right)^n = 9{,}5$.

Отже, для рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ критична область являє собою інтервал $(13{,}3; \infty)$, $X_r^2 = 9{,}8$ не потрапляє в критичну область, тобто нульова гіпотеза, що полягає в тому, що очікувані й фактичні обсяги продажів узгоджуються, не відкидається. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ критичною областю є інтервал $(9{,}5; \infty)$, і, оскільки $X_r^2 = 9{,}8$ потрапляє в критичну область, нульова гіпотеза повинна бути відхилена.

2.31. У результаті зважування 50 випадковим чином відібраних пачок чаю наведені нижче (у грамах):

150, 147, 152, 148, 149, 153, 151, 150, 149, 147, 153, 151, 152, 151, 149, 152, 150, 148, 152, 150, 152, 151, 148, 151, 152, 150, 151, 149, 148, 149, 150, 150, 151, 149, 151, 150, 151, 150, 149, 148, 147, 153, 147, 152, 150, 151, 149, 150, 151, 153.

Оцінити закон розподілу випадкової величини X – маси пачки чаю – для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Маса пачки чаю – неперервна випадкова величина, але внаслідок того, що зважування проведене з дискретністю 1 г й розмах становить $147 \div 153$ г, неперервна величина може бути представлена дискретним варіаційним рядом:

Значення випадкової величини X	x_i	147	148	149	150	151	152	153
Частота появи	m_i	4	5	8	11	11	7	4

Як модель закону розподілу виберемо нормальній закон $N(a_0, \sigma_x)$, число параметрів якого $r = 2 : a_0$ – математичне сподівання, σ_x – середнє квадратичне відхилення.

За вибірковими даними отримаємо оцінки параметрів нормального закону розподілу:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} m_i} = 7507/50 = 150{,}14; \qquad s^2 = \frac{n}{n-1} d_B = \frac{50}{49}\left(\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2\right) = 2{,}82;$$

$s = 1{,}68.$

Для розрахунку теоретичних частот p_i^T скористаємося табличними значеннями функції Лапласа $\Phi(z)$. Алгоритм обчислення p_i^T полягає у такому:

• знаходимо за нормованими значеннями випадкової величини z значення $\Phi(z)$, а потім $F_N(x)$: $z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s}$, $F_N(x_i) = 0{,}5 + \Phi(z_i)$.

Наприклад, $x_1 = 147$; $z_1 = (147/150{,}14)/1{,}68 = -1{,}87$;
$\Phi(-1{,}87) = -0{,}46926$; $F_N(147) = 0{,}03074$;

• знаходимо $p_i^T = P(z_i \le X < z_{i+1}) = F_N(x_{i+1}) - F_N(x_i)$;

• знаходимо $m_1^T = p_i^T n$, і якщо деяке $m_i^T < 5$, то відповідні групи об'єднуються.

З таблиці знаходимо X_r^2 за схемою: для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і числа степенів вільності $l = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3 \Rightarrow X_{кр}^2 = 7{,}8$. Отже, критична область $(7{,}8; \infty)$. Величина $X_r^2 = 5{,}267$ не входить в критичну область, тому гіпотеза про те, що випадкова величина X – маса пачки чаю – впідпорядкована нормальному закону розподілу, узгоджується з вибірковими даними.

3. Елементи теорії кореляції

3.1. Знайти емпіричне рівняння регресії Y на X за даними кореляційної табл. 3.1.

Таблиця 3.1

X	Y				
	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13]	n_x
[0,9; 1,1)	-	-	1	8	9
[1,1; 1,3)	2	-	6	-	8
[1,3; 1,5)	6	1	-	-	7
[1,5; 1,7)	1	9	1	-	11
[1,7; 1,9)	-	2	5	-	7
[1,9; 2,1]	-	-	1	7	8
n_y	9	12	14	15	$n = 50$

Розв'язання. Для знаходження послідовності точок перейдемо від кореляційної табл. 3.1 до табл. 3.2, для якої «новими» варіантами є середини відповідних частинних інтервалів, а останній стовпчик заповнимо, використовуючи означення умовної середньої: $\overline{y}_{x_i} = \left(\sum y_i n_{ij}\right) / n_{x_i}$. Наприклад, $\overline{y}_{x_1} = (10 \cdot 1 + 12 \cdot 8)/9 \approx 11{,}78$; $\overline{y}_{x_2} = (6 \cdot 2 + 10 \cdot 6)/8 = 9$.

Таблиця 3.2

X	Y					
	6	8	10	12	n_x	$\overline{y}_x$
1	-	-	1	8	9	11,78
1,2	2	-	6	-	8	9
1,4	6	1	-	-	7	6,29
1,6	1	9	1	-	11	8
1,8	-	2	5	-	7	9,43
2	-	-	1	7	8	11,75
n_y	9	12	14	15	$n=50$	

Із табл. 3.2 отримуємо послідовність точок (1; 11,78), (1,2; 9), (1,4; 6,29), (1,6; 8), (1,8; 9,43), (2; 11,75), розташування яких в прямокутній декартовій системі координат дозволяє висунути припущення про наявність параболічної кореляції другого порядку.

Для знаходження коефіцієнтів системи нормальних рівнянь складемо розрахункову табл. 3.3.

Таблиця 3.3

x_i	n_{x_i}	$\overline{y_{x_i}}$	$n_{x_i} x_i$	$n_{x_i} x_i^2$	$n_{x_i} x_i^3$	$n_{x_i} x_i^4$	$n_{x_i} \overline{y}_{x_i}$	$n_{x_i} \overline{y}_{x_i} x_i$	$n_{x_i} \overline{y}_{x_i} x_i^2$
1	9	11,78	9	9	9	9	106,02	106,02	106,02
1,2	8	8	9,6	11,52	13,824	16,589	72	86,4	103,68
1,4	7	6,29	9,8	13,72	19,208	26,891	44,03	61,642	86,3
1,6	11	8	17,6	28,16	45,056	72,090	88	140,8	225,28
1,8	7	9,43	12,6	22,68	40,824	73,483	66,01	118,818	213,872
2	8	11,75	16	32	64	128	94	188	376
$\sum$	50	-	74,6	117,08	191,912	326,053	470,06	701,68	1111,152

Із останнього рядка табл.3.3 отримаємо:

$\overline{x} = 74{,}6/50 = 1{,}492;$ $\overline{x^2} = 117{,}08/50 = 2{,}342;$ $\overline{x^3} = 119{,}912/50 = 3{,}838;$

$\overline{x^4} = 326{,}053/50 = 6{,}521;$ $\overline{y} = \overline{\overline{y}_x} = 470{,}06/50 = 9{,}401;$

$\overline{\overline{y}_x x} = 701{,}68/50 = 14{,}034;$

$\overline{\overline{y}_x x^2} = 1111{,}152/50 = 22{,}223.$

Тоді система рівнянь набере такого виду:

$$\begin{cases} 6{,}521a_2 + 3{,}838a_1 + 2{,}342a_0 = 22{,}223, \\ 3{,}838a_2 + 2{,}342a_1 + 1{,}492a_0 = 14{,}034, \\ 2{,}342a_2 + 1{,}492a_1 + a_0 = 9{,}401. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо

$$a_2 = 11{,}492, \quad a_1 - 34{,}010, \quad a_0 = 33{,}230.$$

Отже, шукане емпіричне рівняння регресії Y на X має такий вид: $\overline{y_x} = 11{,}492x^2 - 34{,}01x + 33{,}23.$

3.2. Торговельне підприємство має велику кількість філій, і керівництво цього підприємства вивчає питання про залежність y (річний товарообіг однієї філії, млн. грн.) від x (торговельної площі, тис. м^2). Для дванадцяти філій за певний рік зафіксовані такі значення показників y та x:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	2,93	5,27	6,85	7,01	7,02	8,35	4,33	5,77	7,68	3,16	1,52	3,15
x_i	0,31	0,98	1,21	1,29	1,12	1,49	0,78	0,94	1,29	0,48	0,24	0,55

На обсяг товарообігу впливають такі фактори: середньоденна інтенсивність потоку покупців, об'єм основних фондів, їх структура, середньосписочна чисельність працівників, площа підсобних приміщень тощо. Припускається, що в досліджуваній групі філій значення цих факторів приблизно однакові, тому вплив відмінностей їх значень на зміну обсягу товару є незначним.

Потрібно:

1) знайти статистичні оцінки параметрів лінійного рівняння регресії;

2) обчислити вибірковий коефіцієнт детермінації;

3) для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити адекватність лінійної моделі емпіричним даним (з'ясувати статистичну значущість вибіркового коефіцієнта детермінації);

4) перевірити правильність статистичної гіпотези $H_0 : \hat{\alpha}_1 = 0$ для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$;

5) побудувати довірчі інтервали для параметрів рівняння регресії з надійністю $\gamma = 0{,}95$;

6) побудувати довірчу зону для базисних даних із надійністю $\gamma = 0{,}95$;

7) знайти прогнозне значення річного товарообігу для нової філії, торгівельна площа якої складає 1,82 тис. м^2, а також із надійністю $\gamma = 0{,}95$ побудувати довірчий інтервал для цього прогнозного значення.

Для спрощення розрахунків при розв’язуванні задачі складемо табл. 3.4, заповнивши спочатку перших 5 стовпців.

Таблиця 3.4

№ п/п філі	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,31	2,93	0,0961	0,9083	-0,58	0,3364	-1,6994	5,3977	2,2245	0,4977
2	0,98	5,27	0,9604	5,1646	0,09	0,0081	0,4743	0,0003	5,7233	0,2055
3	1,21	6,85	1,4641	8,2885	0,32	0,1024	2,1920	2,5495	6,9243	0,0743
4	1,29	7,01	1,6641	9,0429	0,40	0,1600	2,8040	3,0860	7,3421	0,1103
5	1,12	7,02	1,2544	7,8624	0,23	0,0529	1,6146	3,1212	6,4544	0,3199
6	1,49	8,35	2,2201	12,4415	0,60	0,3600	5,0100	9,5896	8,3865	0,0013
7	0,78	4,33	0,6084	3,3774	-0,11	0,0121	-0,4763	0,8525	4,6779	0,1217
8	0,94	5,77	0,8836	5,4238	0,05	0,0025	0,2885	0,2670	5,5144	0,0653
9	1,29	7,68	1,6641	9,9072	0,40	0,1600	3, 0720	5,8889	7,3421	0,1142
10	0,48	3,16	0,2304	1,5168	-0,41	0,1681	-1,2956	4,3819	3,1122	0,0023
11	0,24	1,52	0,0576	0,3648	-0,65	0,4225	-0,9880	13,9375	1,8589	0,1149
12	0,55	3,15	0,3025	1,7325	-0,34	0,1156	-1,071	4,4239	3,4778	0,1074
$\sum$	10,68	63,04	11,4058	66,0307		1,9006	9,9251	53,496		1,7348

1) Обсяг вибірки $n = 12$. Сума другого-п’ятого стовпців визначають коефіцієнти системи нормальних рівнянь. Тому

$$\hat{a}_1 = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{12 \cdot 66{,}0307 - 10{,}68 \cdot 63{,}04}{12 \cdot 11{,}4058 - (10{,}68)^2} = 5{,}2221.$$

Із останнього рядка табл. 3.4 (2-го і 3-го стовпців) знаходимо $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n = 10{,}68/12 = 0{,}89;$ $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n = 63{,}04/12 = 5{,}2533,$ тоді $\widehat{\alpha}_0 = \overline{y} - \widehat{\alpha}_1 \overline{x} = 5{,}2533 - 5{,}2221 \cdot 0{,}89 = 0{,}6056.$

Отже, емпіричне рівняння регресії має такий вид: $\widehat{y} = 5{,}2221x + 0{,}6056.$

2) Для обчислення вибіркового коефіцієнта детермінації d спочатку заповнимо 9-й, 10-й та 11-й стовпці, при цьому $\widehat{y}_i$ знайдемо із рівняння: $\widehat{y}_i = 5{,}2221x_i + 0{,}6056.$ Підсумок 9-го та 11-го стовпців дасть відповідно $S^2 = 53{,}4960$ та $S_R^2 = 1{,}7348.$ Тоді $d = 1 - S_R^2 / S^2 = 1 - 1{,}7348/53{,}4960 = 0{,}9676.$

3) Статистичну значущість отриманого вибіркового коефіцієнта детермінації перевіримо за допомогою F-статистики $F_{спост} = \frac{1-d}{d} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1-0{,}9676}{0{,}9676} \cdot \frac{1}{12-2} = 0{,}0033.$

За табл. критичних точок розподілу Фішера-Снедокора для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та степенів вільності $k_1 = m - 1 = 1,$ $k_2 = n - m = 12 - 2 = 10$ ($m = 2$ - число параметрів рівняння регресії) знайдемо $F_{кр}(0{,}05;1{,}10) = 4{,}96.$

Оскільки $F_{спост} = 0{,}0033 < 4{,}96 = F_{кр}$, то з надійністю $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ можна стверджувати, що вибірковий коефіцієнт детермінації статистично значущий, а тому рівняння адекватно описує емпіричні дані.

Отже, на підставі значення d можна вважати, що в загальній величині дисперсії залежної змінної y частка поясненої моделлю дисперсії регресії складає 96,76% і тільки 3,24% припадає на невраховані фактори.

4) Заповнимо стовпці з номерами 6, 7 і 8. Підсумки 7-го і 8-го стовпців дадуть $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1{,}9006,$ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i = 9{,}9251.$

Використавши підсумок 11-го стовпця, отримаємо $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{y}_i\right)^2 = \frac{1}{12-1}\cdot 1{,}7348 = 0{,}1735,\ \sigma^2 = \sqrt{0{,}1735} = 0{,}4165.$

Розраховуємо спостережене значення критерію перевірки значущості (відмінності від нуля α_1):

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)y_i}{\widehat{\sigma} / \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \frac{9{,}9251}{0{,}4165/1{,}9006} = 45{,}291.$$

За табл. критичних точок Стьюдента для $\alpha = 0{,}05$ (за верхнім рядком) і числу степенів вільності $k = n - 1 = 12 - 1 = 11$ знаходимо $t_{0,05} = t_{двост.кр}\left(0{,}05;11\right) = 2{,}201.$

Оскільки $t_{спост} = 45{,}291 >> 2{,}201 = t_{0,05}$, то гіпотеза $H_0 : \alpha_1 = 0$ відкидається і з ймовірністю 0,95 приймається гіпотеза $H_1 : \alpha_1 \neq 0.$

5) Для побудови довірчого інтервалу для параметра α_0 знайдемо спочатку $\widehat{\sigma}_{\widehat{a}_0}$, використавши підсумок 4-го та 7-го стовпців табл.4:

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{a}_0} = \widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ \left[n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]} = 0{,}4165\sqrt{11{,}4058/\left(12\cdot 1{,}9006\right)} = 0{,}2945.$$

За табл. для $\gamma = 0{,}92$ і $n - 2 = 10$ знайдемо $t = \left(0{,}95;10\right) = 2{,}228.$ Тоді врахувавши те, що $\widehat{\alpha}_0 = 0{,}6056$, отримаємо $0{,}6056 - 2{,}228\cdot 0{,}2945 < \alpha_0 < 0{,}6056 + 2{,}228\cdot 0{,}2945$ або остаточно $-0{,}0506 < \alpha_0 < 1{,}2618.$

Аналогічно $\widehat{\sigma}_{\widehat{a}_1} = \widehat{\sigma} / \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{x}_i\right)^2} = 0{,}4165/\sqrt{1{,}9006} = 0{,}3021$ і співвідношенням отримаємо

$$5{,}2221 - 2{,}228\cdot 0{,}3021 < \alpha_1 < 5{,}221 + 2{,}228\cdot 0{,}3021$$

або остаточно $$4{,}5490 < \alpha_1 < 5{,}8952.$$

6) Для побудови довірчої зони для базисних даних обчислимо спочатку значення $\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_k}$, використавши формулу

$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_k} = \widehat{\sigma}\left\{ 1/n + \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \right\}^{1/2}, \quad k = \overline{1,n}$, і 7-й стовпець табл. 3.4:

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_1} = 0{,}4165\left\{1/12 + 0{,}3364/1{,}9006\right\}^{1/2} = 0{,}2125,$$

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_2} = 0{,}4165\left\{1/12 + 0{,}0081/1{,}9006\right\}^{1/2} = 0{,}1233,$$

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_3} = 0{,}1543,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_4} = 0{,}1705,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_5} = 0{,}1389,$$

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_6} = 0{,}2175,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_7} = 0{,}1247,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_8} = 0{,}1212,$$

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_9} = 0{,}1705,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_{10}} = 0{,}1726,\ \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_{11}} = 0{,}2303,$$

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{y}_{12}} = 0{,}1581.$$

Довірчі інтервали для базисних даних визначаються формулою $\left(\widehat{y}_k - \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_k} t(\gamma; n-2); \widehat{y}_k + \widehat{\sigma}_{\widehat{y}_k} t(\gamma; n-2)\right)$, де $t(\gamma; n-2) = t(0{,}95{,}10) = 2{,}228.$

Використавши дані 10-го стовпця табл. 3.4, послідовно отримаємо довірчі інтервали:

$k = 1 - (2{,}2245 - 0{,}2125 \cdot 2{,}228; 2{,}2245 + 0{,}2125 \cdot 2{,}228) \leftrightarrow (1{,}7511; 2{,}2730)$,

$k = 2 - (5{,}4486; 5{,}9980)$, $\quad k = 3 - (6{,}5805; 7{,}2681)$,

$k = 4 - (6{,}9623; 7{,}7219)$, $\quad k = 5 - (6{,}1449; 6{,}7639)$,

$k = 6 - (7{,}9019; 8{,}8711)$, $\quad k = 7 - (4{,}4001; 4{,}9557)$,

$k = 8 - (5{,}2443; 5{,}7844)$, $\quad k = 9 - (6{,}9622; 7{,}7229)$,

$k = 10 - (2{,}7277; 3{,}468)$, $\quad k = 11 - (1{,}3458; 2{,}3720)$,

$k = 12 - (3{,}1256; 3{,}8300)$.

Для графічної побудови довірчої зони для базисних даних попередньо потрібно розсортувати значення $x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ в порядку зростання і кожному значенню x_i поставити у відповідність дві точки з координатами $(x_i; y_i^*)$, $(x_i; y_i^{**})$, де y_i^* та y_i^{**} - лівий та правий кінець i-го побудованого довірчого інтервалу (для базисних даних). Кожні дві сусідні точки $\left((x_i; y_i^*), (x_{i+1}; y_{i+1}^*)\right)$ та $\left((x_i; y_i^{**}), (x_{i+1}; y_{i+1}^{**})\right)$ сполучаються прямолінійними відрізками.

7) Знайдемо прогноз значення річного товарообігу для нової філії, торговельна площа якої складає 1,82 тис. м². Для цього в рівняння підставимо $x_n = 1{,}82$, тоді

$$\hat{y}_n = 5{,}2221 \cdot 1{,}82 + 0{,}6056 = 10{,}1098.$$

За формулою:

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_n} = \hat{\sigma}\left[\left(x_n - \bar{x}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + 1/n + 1\right]^{1/2} = 0{,}4165\left[\left(1{,}82 - 0{,}89\right)^2 / 1{,}9006 + \right.$$

$$\left. + 1/12 + 1\right]^{1/2} = 0{,}5166,$$

а довірчий інтервал для цього прогнозного значення з надійністю $\gamma = 0{,}95$ має вид $(10{,}1098 - 2{,}228 \cdot 0{,}5166; 10{,}1098 + 2{,}228 \cdot 0{,}5166)$ або остаточно $8{,}9588 < y_n < 11{,}2608$.

Завдання до індивідуальної роботи модуля 2 «Математична статистика»

1. Побудувати гістограму відносних частот за згрупованими даними (табл. 1), де m_i - частота попадання варіанти в проміжок $(x_i, x_{i+1}]$.
2. Знайти незміщену вибіркову дисперсію на основі даного розподілу вибірки (табл. 2).
3. Перевірити нульову гіпотезу про те, що задане значення a_0 є математичним сподіванням нормально розподіленої випадкової величини при 5% - му рівні значущості для двосторонньої критичної області, якщо в результаті обробки вибірки об'єма $n = 10$ отримано вибіркове середнє $\bar{x}$, а вибіркове середнє квадратичне відхилення дорівнює s_1 (табл. 3).
4. При рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин X і Y на основі вибіркових даних (табл. 4) при альтернативній гіпотезі $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.
5. Знайти вибіркове рівняння лінійної регресії Y на X на основі кореляційної таблиці (табл. 5).

6. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ методом дисперсійного аналізу перевірити нульову гіпотезу про вплив фактору на якість об'єкту на основі п'яти вимірювань для трьох рівней фактору (табл. 6).

Таблиця 1

Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i		Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1	2 – 4	5		16	1	10 – 12	4
	2	4 – 6	8			2	12 – 14	12
	3	6 – 8	16			3	14 – 16	8
	4	8 – 10	12			4	16 – 18	8
	5	10 – 12	9			5	18 – 20	18
2	1	3 – 7	4		17	1	3 – 7	6
	2	7 – 11	6			2	7 – 11	8
	3	11 – 15	9			3	11 – 15	10
	4	15 – 19	10			4	15 – 19	12
	5	19 – 23	11			5	19 – 23	4
3	1	-6÷-2	2		18	1	5 – 7	4
	2	-2 – 2	8			2	7 – 9	14
	3	2 – 6	14			3	9 – 11	12
	4	6 – 10	6			4	11 – 13	8
	5	10 – 14	10			5	13 – 15	2
4	1	4 – 8	5		19	1	11 – 14	3
	2	8 – 12	7			2	14 – 17	8
	3	12 – 16	10			3	17 – 20	14
	4	16 – 20	12			4	20 – 23	15
	5	20 – 24	6			5	23 – 26	10
5	1	7 – 9	5		20	1	2 – 5	6
	2	9 – 11	4			2	5 – 8	24
	3	11 – 13	8			3	8 – 11	13
	4	13 – 15	12			4	11 – 14	1
	5	15 – 17	11			5	14 – 17	6

Продовження табл. 1

Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i		Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
6	1	5 – 8	5		21	1	10 – 14	5
	2	8 – 11	7			2	14 – 18	14
	3	11 – 14	4			3	18 – 22	26
	4	14 – 17	1			4	22 – 26	9
	5	17 – 20	3			5	26 – 30	6
7	1	4 – 6	3		22	1	5 – 10	3
	2	6 – 8	9			2	10 – 15	9
	3	8 – 10	7			3	15 – 20	18
	4	10 – 12	22			4	20 – 25	14
	5	12 – 14	9			5	25 – 30	16
8	1	1 – 5	4		23	1	10 – 20	12
	2	5 – 9	5			2	20 – 30	17
	3	9 – 13	9			3	30 – 40	46
	4	13 – 17	10			4	40 – 50	12
	5	17 – 21	2			5	50 – 60	13
9	1	10 – 14	3		24	1	15 – 30	8
	2	14 – 18	16			2	30 – 45	16
	3	18 – 22	8			3	45 – 60	12
	4	22 – 26	7			4	60 – 75	4
	5	26 – 30	6			5	75 – 90	10
10	1	20 – 22	4		25	1	20 – 40	8
	2	22 – 24	6			2	40 – 60	14
	3	24 – 26	10			3	60 – 80	10
	4	26 – 28	4			4	80 – 100	9
	5	28 – 30	6			5	100 – 120	19
11	1	2 – 6	5		26	1	4 – 10	4
	2	6 – 10	3			2	10 – 16	5
	3	10 – 14	18			3	16 – 22	12
	4	14 – 18	9			4	22 – 28	14
	5	18 – 22	5			5	28 – 34	5

Закінчення табл. 1

Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i		Варіант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
12	1	14 – 16	3		27	1	12 – 16	7
	2	16 – 18	12			2	16 – 20	15
	3	18 – 20	10			3	20 – 24	13
	4	20 – 22	15			4	24 – 28	8
	5	22 – 24	10			5	28 – 32	7
13	1	5 – 10	2		28	1	8 – 10	5
	2	10 – 15	14			2	10 – 12	16
	3	15 – 20	11			3	12 – 14	11
	4	20 – 25	9			4	14 – 16	8
	5	25 – 30	4			5	16 – 18	9
14	1	3 – 5	1		29	1	100 – 110	7
	2	5 – 7	6			2	110 – 120	16
	3	7 – 9	14			3	120 – 130	12
	4	9 – 11	7			4	130 – 140	11
	5	11 – 13	2			5	140 – 150	4
15	1	4 – 9	5		30	1	100 – 120	10
	2	9 – 14	9			2	120 – 140	34
	3	14 – 19	13			3	140 – 160	25
	4	19 – 24	6			4	160 – 180	21
	5	24 – 29	7			5	180 – 200	10

Таблиця 2

Варіант	Розподілення						Варіант	Розподілення				
1	x_i	-6	-2	3	6		16	x_i	-3	1	4	8
	n_i	12	14	16	8			n_i	2	3	1	4
2	x_i	-10	-5	-1	4		17	x_i	16	20	22	30
	n_i	25	44	16	15			n_i	14	26	17	3
3	x_i	4	8	16	24		18	x_i	38	42	46	
	n_i	31	14	28	27			n_i	52	36	12	
4	x_i	430	450	500			19	x_i	15	26	31	
	n_i	20	18	12				n_i	426	318	256	
5	x_i	0,01	0,04	0,08	0,14		20	x_i	4	8	10	14
	n_i	19	28	31	22			n_i	12	24	38	26

Закінчення табл. 2

Варіант	Розподілення					Варіант	Розподілення				
6	x_i	2	6	8	9	21	x_i	30	32	37	
	n_i	20	13	12	5		n_i	41	28	31	
7	x_i	10	14	16	22	22	x_i	0,1	0,3	0,5	
	n_i	13	24	14	9		n_i	16	21	13	
8	x_i	3	6	8	14	23	x_i	0,02	0,05	0,08	
	n_i	8	14	10	18		n_i	32	29	39	
9	x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	24	x_i	10	16	26	
	n_i	16	11	10	13		n_i	14	18	18	
10	x_i	3150	3170	3200		25	x_i	-3	-1	5	7
	n_i	14	6	20			n_i	15	11	25	19
11	x_i	-4	-1	2	8	26	x_i	6	9	11	14
	n_i	16	8	14	12		n_i	21	32	23	24
12	x_i	47	50	52	56	27	x_i	246	250	257	
	n_i	24	16	23	17		n_i	24	12	14	
13	x_i	-6	-2	2	5	28	x_i	421	428	432	
	n_i	11	13	14	12		n_i	32	44	24	
14	x_i	14	15	18	20	29	x_i	15	18	23	24
	n_i	15	12	11	12		n_i	13	5	14	8
15	x_i	381	385	389		30	x_i	44	48	52	
	n_i	54	22	24			n_i	29	46	25	

Таблиця 3

Варіант	a_0	$\bar{x}$	s_1	Варіант	a_0	$\bar{x}$	s_1
1	10	12	1	16	100	96	6
2	20	22	4	17	80	78	4
3	20	18	2	18	80	84	3
4	40	44	3	19	50	48	2
5	58	56	4	20	60	54	2
6	60	64	6	21	90	96	5
7	70	66	8	22	80	86	4
8	70	72	5	23	70	68	5
9	50	48	2	24	70	74	6
10	30	34	4	25	60	62	3
11	50	52	3	26	42	46	2
12	90	88	6	27	60	62	3
13	86	84	5	28	30	34	2
14	80	78	4	29	40	38	4
15	60	66	5	30	84	80	6

Таблиця 4

Варіант	X		Y			Варіант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i			x_i	n_i	y_i	m_i
1	142	3	140	5		16	42	15	84	3
	145	1	146	3			45	17	87	2
	146	2	147	2			46	12	92	4
	148	4	151	2			50	16	96	1
2	37	2	38	4		17	30	4	30	6
	38	1	39	3			32	5	31	4
	40	4	40	2			33	8	32	3
	41	3	41	2			34	1	34	5
	42	6	43	3			36	2	35	2
3	39	4	75	4		18	42	4	44	16
	43	2	80	2			44	8	45	12
	45	3	84	3			48	3	46	11
	47	4	91	4			50	5	51	6
	51	2	94	2			53	10	55	5
4	3,5	1	3,6	3		19	31	7	29	8
	3,7	3	3,7	5			35	3	32	9
	3,9	5	3,8	2			40	4	33	12
	4,0	4	4,4	1			42	2	35	10
	4,1	4	4,2	4			44	4	39	11
5	9	4	9	5		20	61	5	60	4
	10	5	10	6			62	4	63	3
	11	3	11	4			64	6	64	2
	12	2	13	8			67	2	68	6
	14	1	14	3			68	3	70	5
6	6,1	2	5,8	6		21	12	10	14	7
	6,5	3	6,0	4			16	12	15	6
	6,6	1	6,2	5			19	14	20	8
	7,0	4	6,3	2			21	9	21	10
	7,4	2	6,8	3			25	5	24	9
7	20	3	18	6		22	44	5	43	3
	22	4	19	3			45	2	46	3
	23	2	20	4			48	3	48	4
	24	2	22	2			52	4	50	4
	26	4	23	5			54	6	53	6
8	0,2	6	0,4	3		23	16	12	18	3
	0,4	4	0,5	5			18	10	25	1
	0,8	2	0,9	6			21	14	29	4
	1,0	5	1,2	6			24	8	36	6
	1,2	3	1,4	6			25	6	40	6

Закінчення табл. 4

Варіант	X		Y			Варіант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i			x_i	n_i	y_i	m_i
9	31	6	85	1		24	71	4	68	10
	33	2	88	3			73	5	69	14
	34	1	95	4			75	8	70	13
	38	3	97	2			79	10	74	12
	42	2	100	5			80	3	78	11
10	15	1	20	4		25	70	12	16	7
	17	3	22	2			72	10	18	4
	20	2	23	2			73	12	21	8
	21	4	25	3			75	8	25	5
	25	6	26	1			78	8	28	6
11	27	3	28	8		26	10	10	9	5
	29	9	29	9			11	14	10	3
	32	6	30	4			13	12	12	4
	33	2	32	9			14	14	13	8
12	82	2	-10	14		27	6	1	6,5	2
	83	1	-9	18			7	8	7,4	5
	85	3	-6	12			9	7	8,2	3
	90	4	-3	6			10	2	9,1	7
13	51	6	15	7		28	10	7	9	9
	53	5	18	5			11	5	11	12
	55	4	20	4			12	4	12	14
	56	3	23	3			14	6	14	9
	59	2	27	6			16	8	15	6
14	12	2	44	4		29	12,1	1	12,2	4
	15	5	46	5			12,5	2	12,4	8
	18	3	47	8			12,7	4	12,5	3
	19	1	50	6			13,0	1	12,7	2
	23	4	52	7			13,2	2	13,0	8
15	-8	3	10	4		30				
	-5	2	14	10			23	8	30	7
	-3	4	15	9			25	7	35	8
	1	5	18	7			26	6	41	2
	3	4	21	4			28	9	46	3
	4	2	25	6						

Таблиця 5

Ва-ріант | Кореляційна таблиця | Варіант | Кореляційна таблиця

Варіант 1

Y \ X	10	15	20	25	30	35
15	6	4				
25		6	8			
35				21	2	5
45				4	12	6
55					1	5

Варіант 16

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4		8	4		10
110	3		5		2	10	
120		3		4	5	6	
130	2		4	6			5
140		4	7			1	5

Варіант 2

Y \ X	20	25	30	35	40	45
10		4	8			4
20	2		4		2	
30			10	8		
40		4		10	4	

Варіант 17

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
15	10		4	8		4	2
25		10	2		5		3
35		6	5	4		3	
45	5			6	4		2
55	5	1			7	4	

Варіант 3

Y \ X	5	10	15	20	25	30
14	4	6		8		4
24		8	10		6	
34			32			
44			4	12	6	

Варіант 18

Y \ X	10	15	20	25	30	35
10	2	4		8	4	10
30		4	7		5	1
50	3	2	5	10		
70	2		4	6	5	
90		3	5	6		4

Варіант 4

Y \ X	15	20	25	30	35	40
100	2	1		7		
120	4		2			3
140		5		10	5	2
160			3	1	2	3

Варіант 19

Y \ X	10	12	14	16	18	20	22
20		2	6	5			4
40	4			5	1		7
60	4	2	8	10		4	
80		3			10	2	5
100	3		4		6	5	

Варіант 5

Y \ X	20	25	30	35	40	45
105			4	2	1	
115	2	1		3	8	5
125		4	2	1		3
135	3	2	10		3	2
145	1	3		8		2

Варіант 20

Y \ X	5	10	15	20	25	30
80	5	1		4	7	
100		2	6	5		4
120	3		4		5	6
140		10		2	3	5
160	10		4	8	2	4

Варіант 6

Y \ X	10	15	20	25	30	35
15	6	4				
25		6	8			
35				20	2	5
45				5	12	6
55					1	5

Варіант 21

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
10	1		5		7	4	
20		2		4	6		5
30		3		5		4	6
40	10		2	3		5	
50	2		4		4	8	10

Варіант 7

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
30		6		4		2	5
40	4		5		7	1	
50		4	3	5			6
60	5	3			10	2	
70			4	10	4	2	8

Варіант 22

Y \ X	30	40	50	60	70	80	90
20		6		4		2	5
30	4		5		7	1	6
40		4	3	5	10		
50	5	3			4	2	8
60			4	10		2	

Продовження табл. 5

Варіант 8

Y \ X	12	17	22	27	32	37
105		4		3		
115	2	3	1		10	
125	3		5	1	4	
135				8	2	1
145	1	2				

Варіант 9

Y \ X	10	15	20	25	30	35
14			4	2	1	
24	2	1		3	8	5
34		4	2	1		3
44	3	2	10		3	2
54	1	3		9		1

Варіант 10

Y \ X	10	15	20	25	30	30
20	1	5		7		4
40	2		4		6	5
60		3	5	4	6	
80	10		2	3		5
100	2	4		4	8	10

Варіант 11

Y \ X	5	10	15	20	25	30
15		6	4	2		2
25	4	2	8	1	5	
35				10	7	1
45	5	3	8		6	7
55	9	5		4		1

Варіант 12

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
5	10		3	5		1	4
15		4	10		2	8	
25	3	4		6			6
35				4	7	1	5
45	2	5			10		

Варіант 13

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
10	2		4	6	5		
20		4	7			1	5
30	3			4	5	6	
40	3	5		2			10
50		4	2		4	10	8

Варіант 23

Y \ X	24	28	35	36	40	44	48
10		6		4		2	5
20	4		5		7	1	
30		4	3	5			6
40	5	3			10	2	
50			4	10	4	2	8

Варіант 24

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
5	10		3	5		1	4
15		4	10		2	8	
25	3	4		6			6
35				4	7	1	5
45	2	5			10		

Варіант 25

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
15	2		4	6	5		
30		4	7			1	5
45	3			4	5	6	
60	3	5		2			10
75		4	2		4	10	8

Варіант 26

Y \ X	20	22	24	26	28	30	32
30		6		4		2	5
40	4		5		7	1	
50		4	3	5			6
60	5	3			10	2	
70		4	10	4	2	8	

Варіант 27

Y \ X	5	10	15	20	25	30
100		6	4	2		2
110	4	2	8	1	5	
120				10	7	1
130	5	3	8		6	7
140	9	5		4		1

Варіант 28

Y \ X	20	25	30	35	40	45
30		6		4		2
40	4	1	5		7	
50	3		4	5		6
60	5	3		10	2	
70		2	3		3	5

Закінчення табл. 5

Варіант	Кореляційна таблиця Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
14	30		6		4		2	5
	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70			4	10	4	2	8

Варіант	Кореляційна таблиця Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
15	30		4	7			1	5
	50	2		4	6	5		
	70		3		4	5	6	
	90	10		2			5	3
	110	2	4		8	4		10

Варіант	Кореляційна таблиця Y \ X	10	15	20	25	30	35
29	36		4		3		
	46	2	3	1		10	
	56	3		5	1		4
	66				8	2	1
	76	1	2				

Варіант	Кореляційна таблиця Y \ X	42	46	50	54	58	62
30	15			4	2	1	
	25	2	1		3	8	5
	35		4	2	1		3
	45	3	2	10		3	2
	55	1	3		9		1

Таблиця 6

Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$	Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
1	1	24	18	22	16	1	8	18	34
	2	16	24	15		2	12	23	36
	3	12	10	16		3	11	22	32
	4	5	4	12		4	10	20	30
	5	6	16	8		5	14	21	33
2	1	10	14	12	17	1	21	35	69
	2	8	5	9		2	45	30	54
	3	7	14	10		3	18	38	40
	4	18	4	7		4	16	18	12
	5	6	12	8		5	40	34	36
3	1	16	9	14	18	1	12	34	18
	2	10	8	16		2	10	32	21
	3	20	9	12		3	11	30	22
	4	25	7	16		4	10	33	20
	5	24	5	14		5	16	31	28
4	1	34	38	28	19	1	8	15	24
	2	36	30	24		2	16	24	34
	3	26	34	22		3	40	42	18
	4	25	36	20		4	12	25	9
	5	30	38	23		5	32	30	14
5	1	48	40	34	20	1	124	64	34
	2	38	42	38		2	136	54	30
	3	30	37	44		3	120	44	28
	4	40	33	41		4	133	56	33
	5	36	39	45		5	125	59	31

Продовження табл. 6

Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$		Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
6	1	12	10	20		21	1	17	26	45
	2	16	8	26			2	40	16	12
	3	15	7	28			3	16	17	40
	4	17	5	24			4	36	30	17
	5	14	9	27			5	30	12	44
7	1	44	40	38		22	1	45	36	44
	2	45	36	28			2	44	30	28
	3	48	32	30			3	40	31	15
	4	45	35	32			4	41	38	40
	5	40	30	26			5	39	35	32
8	1	16	18	26		23	1	12	24	20
	2	12	20	15			2	16	20	18
	3	10	22	28			3	14	34	14
	4	11	25	30			4	15	26	20
	5	10	24	26			5	13	28	19
9	1	9	4	12		24	1	24	32	30
	2	11	6	18			2	28	42	16
	3	10	5	24			3	40	30	9
	4	12	6	20			4	56	18	16
	5	9	5	23			5	24	24	10
10	1	54	32	16		25	1	108	244	326
	2	50	46	36			2	124	234	304
	3	43	28	30			3	110	254	298
	4	47	37	25			4	126	245	318
	5	36	28	17			5	114	236	312
11	1	28	36	12		26	1	24	46	68
	2	24	34	10			2	26	45	76
	3	26	30	14			3	25	44	75
	4	27	29	18			4	27	40	68
	5	25	31	20			5	22	43	77
12	1	26	34	68		27	1	12	22	21
	2	45	30	46			2	14	20	30
	3	44	46	28			3	36	18	12
	4	27	17	34			4	20	9	31
	5	42	36	30			5	53	44	30
13	1	18	24	36		28	1	34	102	68
	2	28	36	12			2	35	98	60
	3	12	28	22			3	30	106	56
	4	14	40	45			4	33	112	57
	5	32	16	40			5	32	110	55

Закінчення табл. 6

Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$		Варіант	Номер виміру	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
14	1	47	56	64		29	1	25	45	56
	2	46	55	60			2	64	24	54
	3	45	54	58			3	30	12	16
	4	41	50	62			4	20	47	32
	5	43	52	61			5	46	18	42
15	1	16	28	46		30	1	24	34	45
	2	20	12	43			2	26	30	47
	3	31	40	24			3	25	31	44
	4	56	24	14			4	27	29	42
	5	22	34	6			5	28	32	43

Список літератури

1. *Міхайленко В.М., Теренчук С.А., Кубайчук О.О.* Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика: навч. посібник – К.: Вид-во Європейського університету, 2007. – 163 с.

2. *Міхайленко В.М., Теренчук С.А., Кубайчук О.О.* Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика. Збірник задач: навч. посібник. – К.: Вид-во Європейського університету, 2007. – 116 с.

3. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика. –К.: ЦУЛ, 2002. – 448 с.

4. *Мармоза А.Т.* Практикум з математичної статистики. Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2004. – 264 с.

5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с.

6. *Єрмаков В.Н. и др.* Сборник задач по высшей математике для экономистов. Математическая статистика: учебн. пособие. – М.: ИНФРА – М, 2002. – 575 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Модуль 2. Математична статистика

Методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи студентів,
які навчаються за напрямом підготовки 6.030510
«Товарознавство і торговельне підприємництво» спеціальності
6.050301 «Товарознавство і комерційна діяльність»

Укладачі: **ФЕДОРЕНКО** Наталія Дмитрівна
ТЕРЕНЧУК Світлана Анатоліївна
ДОЛЯ Олена Вікторівна

Комп'ютерне верстання *І.С. Черненко*

Підписано до друку 2009. Формат 60×84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 3,49. Обл.-вид. арк. 3,72.
Тираж 50 прим. Вид. № 38/ІІІ-09. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.