МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Модуль 1. Теорія ймовірностей

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи
студентів спеціальності 6.050301
«Товарознавство і комерційна діяльність»

Київ 2008

ББК 22.171
Т34

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор
С.А. Теренчук, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, асистент

Рецензент В.М. Міхайленко, доктор техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Демченко, канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол №16 від 19 травня 2008 року.

Видається в авторській редакції.

Теорія ймовірностей: модуль 1. Теорія ймовірностей: методичні
Т34 вказівки та завдання для самостійної роботи / уклад.: Н.Д.Федоренко, С.А. Теренчук, О.В. Доля. – К. КНУБА, 2008. – 48 с.

Містять приклади розв'язання типових задач з різних розділів теорії ймовірностей, а також вправи для самостійної роботи і завдання для індивідуальної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 6.050301 «Товарознавство та комерційна діяльність» усіх форм навчання.

Загальні положення

Теорія ймовірностей і математична статистика є базою для розробки кількісних моделей управління економічними системами (моделей теорії масового обслуговування, моделей планування і управління запасами). Курс теорії ймовірностей і математичної статистики займає важливе місце в підготовці економістів вищої кваліфікації.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання типових задач, а також вправи для самостійної роботи і завдання для індивідуальної роботи з Модуля 1 «Теорія ймовірностей».

1. Простір елементарних подій. Операції над ними

Приклад:

Нехай A,B,C – три випадкові події. Знайти вирази для подій, які полягають в тому що:

1) відбулася тільки A;
2) відбулися тільки A і B;
3) відбулися всі три події;
4) відбулася хоча б одна з подій;
5) відбулося не менше двох подій;
6) відбулася тільки одна подія;
7) відбулися тільки дві події;
8) ні одна з подій не відбулась.

Розв'язання:

1) 1. $A\overline{B}\overline{C}$ − „відбулася подія A і не відбулися події B і C";

2) 2. $AB\overline{C}$ - "події A і B відбулися, а подія C - ні";

3) 3. ABC;

4) 4. $A+B+C$ − „відбулася подія A, або подія B, або подія C, або будь-які дві або всі три події";

5) 5. $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$ − „відбулися дві з трьох, або всі три події: A і B; B і C; A і C або A,B і C одночасно;

6) 6. $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$ − „відбулася тільки A, або тільки B, або тільки C”;

7) 7. $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$;

8) 8. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

Вправи:

1. Два стрілки одночасно зробили по три постріли по одній мішені. Для кожного з випадків описати елементарні і результуючі випадкові події: мішень буде вражена:

1) хоча б раз;
2) рівно два рази;
3) не більше двох разів;
4) не менше двох разів;
5) не більше двох разів тільки першим стрільцем;
6) не менше чотирьох разів тільки другим стрільцем;
7) без промаху;
8) тільки першим стрільцем;
9) тільки другим стрільцем;
10) по два рази обома стрільцями;
11) однакове число разів обома стрільцями;
12) більше число разів першим стрільцем;
13) більше число разів другим стрільцем;
14) тільки одним стрільцем при кожному пострілі;
15) непарне число разів;
16) парне число разів;
17) і першим влучить перший стрілець;
18) і першим влучить другий стрілець;
19) першим стрільцем, якщо пробоїна з’явилась у другій серії;
20) другим стрільцем, якщо пробоїна з’явилась у третій серії.

2. Два гравці кидають монету до першої появи герба. Починає гру перший гравець. Описати події:

а) виграв перший гравець;

б) виграв другий гравець;

3. Скільки елементарних подій може бути при двократному киданні грального кубика? Опишіть їх.

4. Нехай A, B, C — три довільні події. Знайти вираз для події D, яка полягає в тому, що відбулися хоча б дві з них.

5. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Подія A_i — справний i-й блок першого типу, B_i — справний i-й блок другого типу. Прилад працює, якщо справний хоча б один блок першого типу і не менш ніж два блоки другого типу. Виразити подію «прилад працює» через події A_i і B_i.

6. Проведено три постріли у мішень. Розглядають такі елементарні події: Ai – влучення у мішень при i-му пострілі; $\bar{A}i$ – промах при i-му пострілі,(i=1,2,3). Виразити через Ai та $\bar{A}i$ такі події: A-усі три влучення ; B-рівно два влучення ; C- усі три промахи; D-хоча б одне влучення; E- більш одного влучення; F-не більше одного влучення.

7. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A- сума очок, яка з’явилась, дорівнює 8 ; B – хоча б один раз з’явиться 6.

8. У книжковій шафі стоять підручники з математики, фізики і хімії. Студент навмання бере два підручника. Опишіть повну групу подій.

9. Серед студентів, що зібралися слухати лекцію з теорії ймовірностей, вибирають одного. Нехай A означає подію – “обраний юнак”, B – “живе у гуртожитку”, C – “палить”. Дати опис події $\overline{ABC}$.

10. Перерахуйте всі випадки настання і ненастання наступних подій в залежності від настання або ненастання

подій A, B, C, що входять в них: а) $A\overline{B}+C$; б) $\overline{AB}+\overline{C}$; в) A+BC; г) (A+B)C; д) $A(\overline{B}+C)$.

2. Застосування комбінаторики до знаходження ймовірностей

Приклади:

1. В партії із 20 виробів є 5 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів буде один бракований.

Розв’язання:

Подія *A* полягає в тому, що серед трьох навмання взятих виробів буде 1 бракований і 2 справних. Кількість способів вибрати 1 бракований виріб із 5 дорівнює

$$m = C_5^1 = \frac{5!}{1!4!} = 5,$$

а кількість способів вибрати 2 справних вироба з 15 справних дорівнює

$$k = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!13!} = 15 \cdot 7.$$

Загальне число способів відібрати 3 з 20 дорівнює

$$n = C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = 3 \cdot 19 \cdot 20.$$

$$A\overline{B}\overline{C}$$

2. Код цифрового замка складається з чотирьох цифр. Знайти ймовірність того, що він спрацює, якщо набрати довільну послідовність цифр.

Розв’язання:

Тут число всіх можливих послідовностей цифр з повтореннями дорівнює $\overline{A}_{10}^4 = 10^4$. Число сприятливих подій – 1. Ймовірність того, що замок спрацює

$$P = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}.$$

3. Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Хазяїн ресторану запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по-іншому. Після того, як усі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть у ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

Розв'язання:

Число різних способів розміщення 10 чоловік за столом очевидно, $P_{10} = 10! = 3628800.$ Тобто цей день настане через 9942 роки.

Вправи:

1. Скільки різних слів можна скласти з літер вашого: а) імені? б) прізвища?

2. Розв'язати рівняння

$$A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48.$$

3. Розв'язати рівняння

$$A_x^{x-3} = xP_{x-2}.$$

4. У відділі працює 5 економістів та 9 інженерів. Скількома способами можна відібрати 2 економістів та 3 інженерів, якщо спеціалісти вважаються рівноцінними?

5. Для стажування 25 студентам виділено 10 місць на першій фірмі, 8 місць на другій та 7 місць на третій фірмі. Вважаючи розподіл рівноймовірним, визначити, скількома способами можна розподілити студентів по фірмах так, щоб 3 певних студенти попали на одну фірму.

6. Скількома способами можна розкласти 2 предмети по 3 ящиках, якщо в кожний ящик можна класти скільки завгодно предметів?

7. Номер автомобіля складається з двох букв і п'яти цифр. Скільки різних номерів можна скласти, якщо використовувати 30 букв абетки?

8. Студенту необхідно здати 4 різних іспити протягом 6 днів. Скількома способами це можна зробити, якщо кожний день можна здавати лише один іспит?

9. Із 10 телевізорів, що є на складі, 70% не мають прихованих дефектів. Магазин отримує 6 телевізорів для роздрібної торгівлі. Знайти ймовірність того, що серед них буде 4 справних.

10. В рекламній агенції є 9 послуг: медіа-планування; медіа-аналіз, медіа-баінг, розробка іміджу, дизайн, виробництво рекламних відеороликів, макетів для поліграфії і паблік рілейшнз. В агенцію надійшло 4 чергових замовлення. Знайти ймовірність таких подій: A – „всі замовлення на різні види послуг”, B – „всі замовлення на послуги одного виду”.

11. Замок складається з п’яти дисків. Кожен диск поділений на шість секторів, на кожному з яких написані різні букви. Замок спрацює тільки тоді, коли кожен диск займе одне певне положення відносно корпусу замка. Знайти ймовірність того, що при довільному наборі букв замок спрацює.

12. Нехай з пункту A до пункту B є m доріг, з пункту B до C – k доріг, а з пункту C до D – l доріг. Скільки існує маршрутів з пункту A до D?

13. Яку кількість абонентів зможе обслуговувати Київстар, якщо введе восьмизначні номери?

14. Із колоди карт (52) вибирають 6. Знайти ймовірність того, що серед цих 6 карт будуть представники 4 мастей.

15. Замок складається з панелі, на якій розташовані кнопки з цифрами. Він спрацює, якщо одночасно натиснути три певні кнопки. Знайти ймовірність того, що при натисканні довільних трьох цифр замок спрацює.

16. Букви абетки Морзе складаються з двох символів (крапка та тире). Скільки букв можна скласти при умові, що буква містить не більше 5 символів?

17. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірності подій: А- сума очок, яка з′явилась, дорівнює 8 ; В – хоча б один раз з′явиться 6.

18. Монетку кинуто двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз вона впаде гербом вгору.

19. Серед 25 студентів групи, в якій є 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Визначити ймовірність того , що білети виграють дві дівчини.

20. Парламентська комісія складається з голови, його заступника і ще п'яти членів. Скількома способами вони можуть розділити між собою обов'язки?

21. Комісія по якості щомісяця перевіряє якість продуктів в двох із 30 магазинів, серед яких знаходяться і два відомих вам магазини. Яка ймовірність того, що на протязі місяця вони обидва будуть перевірені?

22. На станцію прибули 10 вагонів різної продукції. Вагони помічені номерами від одного до десяти. Знайти ймовірність того, що серед п'яти вибраних для контролю вагонів опиняться вагони з номерами 2 та 5.

23. Виготовлено партію із 200 виробів, в якій опинилось три бракованих. Проведена вибірка із п'яти виробів. Знайти ймовірність наступних подій:

а) у вибірці не буде жодного бракованого виробу;

б) у вибірці буде один бракований виріб.

24. Із 20 акціонерних товариств чотири є банкротами. Громадянин придбав по одній акції шести акціонерних товариств. Яка ймовірність того, що серед куплених акцій дві будуть акціями банкротів?

25. На склад привезли 50 ящиків комплектуючих деталей для одного із видів ЕОМ, але серед них опинилось чотири ящика комплектуючих для іншого виду ЕОМ. Навмання взяли шість

ящиків. Знайти ймовірність того, що в одному із цих шести ящиків опиняться некомплектні деталі.

3. Геометричні ймовірності

Приклади:

1.(*Задача про зустріч*) Після бурі на ділянці між 40-м та 70-м кілометрами телефонної лінії обірвався дріт. Знайти ймовірність того, що розрив виявився між 50-м та 55-м кілометрами.

Розв'язання.

Розташуємо початок координатної осі на початку телефонної лінії. Нехай x – координата точки розриву дроту. Множину елементарних подій можна записати у вигляді

$$\Omega = \{x : 40 \le x \le 70\}.$$

Тоді $l_0 = 70 - 40 = 30$. Нехай подія A-„розрив між 50-м та 55-м км”, тоді

$$A = \{x : 50 \le x \le 55\}, \qquad l = 55 - 50 = 5.$$

Таким чином, $P(A) = \dfrac{l}{l_0} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}.$

2. Дві особи домовляються про зустріч на заданому проміжку часу l. Особа, що прийшла першою, чекає протягом часу $a < l$. Яка ймовірність зустрічі?

Розв'язання.

За множину елементарних подій візьмемо квадрат із стороною l і точками (x, y), що зображають час зустрічі (Рис.1).

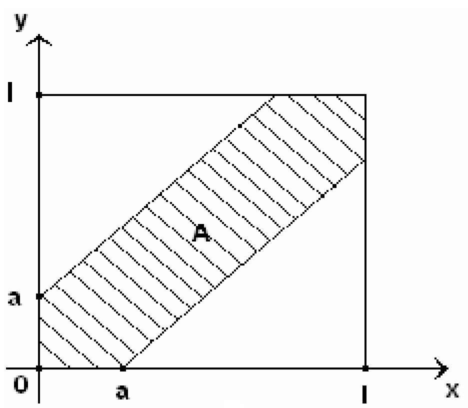

Рис. 1

Тоді $0 \le x \le l, 0 \le y \le l.$ Сприятливі наслідки утворюють точки, для яки $|y-x|<a$, тобто точки смуги між прямими $y=x+a$, $y=x-a$. Площа цієї смуги $S=l^2-(l-a)^2$. Площа квадрата, що відповідає Ω, $S_0=l^2$. Тоді шукана ймовірність визначається так:

$$P_r(A)=\frac{S}{S_0}=\frac{l^2-(l-a)^2}{l^2}=1-\left(\frac{l-a}{l}\right)^2.$$

Вправи:

1. Двоє вирішили зустрітись у визначеному місці між 10 та 11 годинами, і домовились, що той, хто прийде першим, чекає на другого протягом 15 хвилин, після чого покидає місце зустрічі. Знайти ймовірність їх зустрічі (подія *A*), якщо кожний може протягом домовленої години прийти в довільний момент, і моменти їх приходу незалежні.

2. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному із суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві години.

3. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена в будь-якому місці всередині кола радіуса R, потрапить у вписаний в це коло: *а)* правильний трикутник; *б)* прямокутний трикутник; *в)* квадрат.

4. На відрізку довжиною l навмання поставлено дві точки. Визначити ймовірність того, що з трьох утворених частин відрізка можна побудувати трикутник.

5. (*Задача Бюффона*). Площина розділена паралельними прямими, що знаходяться на відстані a одна від одної. На площину навмання кидають голку, довжина якої $2r$ ($2r<a$). Знайдіть ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

6. На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата a навмання кинута монета радіусом $r=\frac{a}{2}$. Знайти ймовірність таких

подій: A – "монета потрапить повністю в один квадрат", B – "монета перетне не більше однієї сторони квадрата".

7. В інтервалі часу [0;T] у випадковий момент часу τ з'являється сигнал тривалістю $\Delta\tau$. Приймач вмикається у випадковий момент часу $t \in [0;T]$ на час Δt. Знайти ймовірність виявлення сигналу приймачем.

8. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 4 та 9 м навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в коло радіусом 1 м, розташоване в трикутнику?

9. Навмання обрано два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 7. Знайти ймовірність того, що сума їх буде не більша 5, а відношення y/x — не менше 2.

10. У коло радіусом 50 мм вписано ромб із діагоналями 40 та 60 мм. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка кола буде лежати і в ромбі?

11. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 5 м розташовано квадрат зі стороною 2 м. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника буде лежати і в квадраті?

12. Навмання обрано два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 10. Знайти ймовірність того, що добуток їх буде більше 4, а різниця $y - x$ — не менша 2.

13. У ромбі з бічною стороною 5 см лежить прямокутник зі сторонами 2 та 3 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у ромбі точка лежатиме і в прямокутнику.

14. На відрізку [-3, 2] навмання вибрано два числа x та y. Яка ймовірність того, що різниця їх менша 1?

15. Площина розділена паралельними прямими, що знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину кинуто монету радіуса $r < a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

16. На одиничному відрізку навмання вибрано дві точки B і C. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде менша, ніж відстань від початку відліку до найближчої точки.

17. Парабола дотикається півкола і проходить через кінці його діаметра. Яка ймовірність того, що точка, навмання вкинута всередину півкола, попаде в область, що обмежена дугою півкола і параболою?

18. Два дійсних числа x і y вибирають так, що $|x| \le 1,\ 0 \le y \le 1.$ Яка ймовірність того, що $x^2 < y$?

19. Абонент чекає телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що подзвонять в останні 15 хвилин цієї години?

20. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \le 1, |y| \le 1.$ Яка ймовірність того, що $|x| < |y|$?

21. В квадрат з вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) навмання вкинута точка (x, y). Знайти ймовірність того, що координати цієї точки задовольняють нерівність y<2x.

22. Відстань від пункту A до B автобус проходить за 2 хв., а пішохід - за 15 хв. Інтервал руху автобусів 25 хв. Ви підходите у випадковий момент часу до пункту A і відправляєтесь в пункт B пішки. Знайти ймовірність того, що на шляху вас наздожене черговий автобус.

23. Точка (c, q) навмання вибирається з квадрату із вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1). Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + cx + q = 0$ будуть дійсними і одного знаку.

24. Точка (c, q) навмання вибирається з квадрату із вершинами
(-1, -1), (1, -1), (1, 1),
(-1, 1). Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + cx + q = 0$: а) дійсні; б) уявні; в) додатні; г) різних знаків; д) одного знаку.

25. До квадрату зі стороною a вкинута точка A. Знайти ймовірність того, що відстань від точки A до найближчої сторони

квадрату менша, ніж відстань від точки А до найближчої діагоналі.

4. Теореми додавання і множення ймовірностей

Приклади:

1. Із 1000 лотерейних квитків є один з виграшем 50 гривень, п’ять – з виграшем по 20 гривень, 20 - по 10 гривень, 50 - по 5 гривень. Знайти ймовірність виграшу на один квиток: *а*) не менш 10 гривень; *б*) будь якого виграшу.

Розв’язання.

Нехай: подія A_1 – виграш 50 грн; $P(A_1)=\frac{1}{1000}$;

подія A_2 – виграш 20 грн; $P(A_2)=\frac{5}{1000}$;

подія A_3 – виграш 10 грн; $P(A_3)=\frac{20}{1000}$;

подія A_4 – виграш 5 грн; $P(A_4)=\frac{50}{1000}$;

подія A – будь-який виграш.

а). Грає один квиток, тому події A_1; A_2; A_3 – несумісні. За теоремою про додавання несумісних подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{3}A_i\right)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=$$

$$=\frac{1}{1000}+\frac{5}{1000}+\frac{20}{1000}=\frac{26}{1000}=0{,}026.$$

б). 1-ий спосіб: $P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{4}A_i\right)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)=\frac{1+5+20+50}{1000}=0{,}076$

2-ий спосіб: Серед 1000 квитків 76 виграшних. Це означає, що k =1000-76=924 квитка не виграють. Подія $\overline{A}$ – квиток не виграв; $P(\overline{A})=\frac{924}{1000}$. Події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу подій. Тоді

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

2. У ящику лежать деталі трьох сортів: п'ять — першого, чотири — другого, три — третього. З ящика навмання виймають одну деталь і не повертають в ящик. Знайти ймовірність того, що

при першому випробуванні з'явиться деталь першого сорту (подія *A*), при другому — другого (подія *B*), при третьому — третього (подія *C*).

Розв'язання.

Ймовірність події *A*: $P(A) = \frac{5}{12}$. Ймовірність події *B* за умови, що подія А вже відбулася, $P_A(B) = \frac{4}{11}$. Ймовірність події *C* за умови, що відбулися події *A* і *B*, $P_{AB}(C) = \frac{3}{10}$. Ймовірність сумісної появи всіх трьох подій *P(ABC)*:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Вправи:

1. Довести незалежність $\overline{A}$ і B; $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

2. Яка ймовірність того, що при п'яти киданнях монета хоч раз упаде гербом?

3. Партію з 100 деталей піддали вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї бракованої деталі з п’яти, які обстежуються. Яка ймовірність для цієї партії бути прийнятою, якщо вона містить 5% непридатних деталей?

4. Під час приймання партії виробів половина партії була перевірена. За умовами допускається наявність не більше 2% браку. Знайти ймовірність того, що буде прийнята партія зі 100 деталей, серед яких п'ять бракованих.

5. Стрілок влучить у „десятку” з ймовірністю 0,05, в „дев’ятку” з ймовірністю 0,20, у „вісімку” з ймовірністю 0,6 . Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що : *а*) вибито не менше 8 очок; *б*) вибито більше 8 очок?

6. Для кожної з трьох телевізійних камер ймовірність того, що вона ввімкнена в даний час, дорівнює 0,6. Знайти

ймовірність того, що увімкнено: *а*) принаймні одну камеру; *б*) дві камери; *в*) всі три камери; *г*) не ввімкнено жодної камери.

7. Скільки разів треба підкинути два гральних кубика, щоб ймовірність принаймні однієї появи шісток була більша за 0,5.

8. Зі 100 гостей 50 чоловік розмовляють англійською мовою, 40 – французькою і 35 – німецькою. До того ж, англійську і французьку мови знають 20 гостей, 8 знають англійську і німецьку, 10 – французьку і німецьку. Всі три мови знають 5 гостей. За жеребкуванням одного гостя вибирають тамадою. Знайти ймовірність подій A – "тамада знає або англійську, або французьку мову", B – "тамада не знає ні англійську, ні французьку, ні німецьку мови".

9. На іспиті з теорії ймовірностей є 24 білети. Студент підготував лише 10 білетів. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо йому прийшлося тягнути білет двічі, оскільки в перший раз він витяг білет, що не знав?

10. Ймовірність влучити у десятку при одному пострілі дорівнює 0,3. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб влучити у десятку з ймовірністю, не меншою 0,8?

11. Розрив електричного ланцюга відбувається в тому випадку, якщо виходить з ладу хоча б один з 3-х елементів ланцюга. Визначити ймовірність того, що не буде розриву ланцюга, якщо елементи виходять з ладу з ймовірністю 0,3; 0,4; 0,6. Як зміниться шукана ймовірність, якщо один елемент не виходить з ладу?

12. До складу радіоелектронного приладу входять два елемента K та E, які дублюють один одного. При відмові одного з них відбувається автоматичне переключення на другий. Ймовірність безумовної роботи кожного з них за період t дорівнює 0,9. Визначити ймовірність безумовної роботи приладу за період t, якщо за вказаний час елементи працюють незалежно один від одного.

13. До складу пристрою, який призначений для виявлення сигналу, входить обертова антена та приймач, частота прийому якого періодично змінюється. Сигнал виявляється та проходить на вихід пристрою, коли антена спрямована на джерело сигналу, а приймач настроєний на його частоту. Яка ймовірність виявлення сигналу таким пристроєм, якщо ймовірність того, що сигнал потрапить до антени 0,6, а ймовірність того, що частота прийому співпадає з частотою сигналу, дорівнює 0,4?

14. На автомобілі встановлено два охоронні пристрої, які працюють незалежно. Ймовірність того, що при викраденні спрацює перший дорівнює 0,95, другий 0,90. Знайти ймовірність того, що при викраденні спрацює: *а)* тільки один пристрій; *б)* хоча б один.

15. У спортивному магазині 20% спортивних костюмів, виготовлених фірмою «Puma», 30% – «Adidas» і 50% – «Nike». Ймовірності браку для кожної з цих фірм становлять 0,05, 0,01 і 0,06 відповідно. Яка ймовірність того, що навмання взятий спортивний костюм виявиться бракованим?

16. На полиці знаходиться 10 підручників, розставлених в будь-якому порядку. Із них три підручники з теорії ймовірностей, три – з математичного аналізу і чотири – з лінійної алгебри. Студент випадковим чином дістає один підручник. Яка ймовірність того, що він візьме підручник з теорії ймовірностей чи лінійної алгебри?

17.Магазин отримав продукцію в ящиках з чотирьох оптових складів: чотири з першого, п’ять з другого, сім з третього і чотири з четвертого. Випадковим чином вибрано ящик для продажу. Яка ймовірність того, що це буде ящик з першого або з третього складу?

18. До порту приходять кораблі тільки з трьох пунктів відправлення. Ймовірність появи корабля з першого пункту

дорівнює 0,2, із другого пункту – 0,6. Знайти ймовірність прибуття корабля з третього пункту.

19.Контролер перевіряє вироби на відповідність стандарту. Відомо, що ймовірність відповідності стандарту виробів дорівнює 0,9.

а) яка ймовірність того, що з двох перевірених виробів обидва будуть стандартними, якщо події появи стандартних виробів незалежні?

б) яка ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один стандартний?

20. Ймовірність правильного оформлення рахунку на підприємстві складає 0,95. Під час аудиторської перевірки були взяті два рахунки. Яка ймовірність того, що тільки один із них оформлений правильно?

21. Ймовірність правильного оформлення накладної при передачі продукції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох накладних тільки дві оформлені правильно.

22. В районі 100 селищ. В п'яти з них знаходяться пункти прокату сільськогосподарської техніки. Випадковим чином відібрано два селища. Яка ймовірність того, що саме в них будуть пункти прокату?

23. В місті знаходиться 15 продовольчих і 5 непродовольчих магазинів. Випадковим чином для приватизації відібрано 3 магазини. Знайти ймовірність того, що всі ці магазини непродовольчі.

24. В магазині є 10 жіночих і 6 чоловічих шуб. Для аналізу якості відібрали три шуби випадковим чином. Знайти ймовірність того, що серед відібраних шуб будуть:

а) тільки жіночі шуби;

б) тільки чоловічі або тільки жіночі шуби.

25. На підприємство подають заявки від декількох торговельних пунктів. Ймовірність подання заявок від пункту А і

B рівні відповідно 0,5 і 0,4. Знайти ймовірність подання заявок від пункту А чи від пункту В, враховуючи події подання заявок від цих пунктів незалежними, але спільними.

5. Формули повної ймовірності і Байєса

Приклади:

1. У десяти ящиках складено деталі двох сортів. У перших трьох по три деталі першого сорту і по сім деталей другого сорту, в четвертому ящику - дев'ять деталей першого і одна деталь другого сорту; в шести ящиках, що залишилися: по одній деталі першого і по дев'ять деталей другого сорту. З довільного ящика навмання виймають деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь другого сорту.

Розв'язання

Усі ящики можна поділити на три групи: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.Ймовірність того, що виймається деталь з ящика певної групи, буде

$$P(\omega_1) = \frac{3}{10}; \qquad P(\omega_2) = \frac{1}{10}; \qquad P(\omega_3) = \frac{6}{10}.$$

Події $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - несумісні і утворюють повну групу. Знайдемо ймовірність появи деталі другого сорту за умови, що здійснилася одна з подій $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$P(A/\omega_1) = \frac{7}{10}; \qquad P(A/\omega_2) = \frac{1}{10}; \qquad P(A/\omega_3) = \frac{9}{10};$$

Тоді:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(\omega_1) P(A/\omega_i) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\cdot\frac{9}{10} = 0{,}76.$$

2. По лінії зв’язку передаються два сигнали „а” та „в” з ймовірністю відповідно 0,84 та 0,16. Через перешкоди 1/6 сигналів „а” перекручується і приймається як сигнал „в”, 1/8 переданих сигналів „в” приймається як сигнал „а”. Знайти ймовірність того, що на прийомному пункті з’явиться сигнал „а”, сигнал „в”. Відомо, що прийнято сигнал „а”. Яка ймовірність того, що він же і був переданий?

Розв'язання

A – прийнято сигнал „а”;

B – прийнято сигнал „в”;

ω_a– передано сигнал „а”; $P(\omega_a) = 0{,}84$;

$\omega_в$– передано сигнал „в”; $P(\omega_в) = 0{,}16$;

$P(A/\omega_a) = 1 - 1/6 = 5/6$; $P(A/\omega_в) = 1/8$;

$P(A) = P(\omega_a) \cdot P(A/\omega_a) + P(\omega_в) \cdot P(A/\omega_в) = 0{,}84 \cdot 5/6 + 0{,}16 \cdot 1/8 = 0{,}72$

$P(B) = P(\omega_в) \cdot P(B/\omega_в) + P(\omega_a) \cdot P(B/\omega_a) = 0{,}28$

$P(\omega_a / A) = P(\omega_a) \cdot P(A/\omega_в) : P(A) = 0{,}97$

Вправи:

1. Із партії виробів, що надійшли до продажу, 50 % виготовлені першим заводом, 30 % - другим, 20 % - третім. Ймовірність дефекту для виробів першого заводу - 0,1, другого - 0,05, третього - 0,15. Яка ймовірність того, що навмання обраний виріб буде з дефектом?

2. На трьох верстатах A , B і C виготовляють 9000 деталей. Відомо, що на верстаті A з ймовірністю 0,01 деталь буде бракованою, на верстатах A і C ці ймовірності становлять відповідно 0,02 і 0,04. Одного разу, коли на верстаті A виготовили 4000 деталей, а на верстатах B і C – відповідно 4000 і 1000 деталей, одну деталь взяли до контролю, і вона виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена на верстаті C.

3. Внаслідок порушення технологічного процесу в середньому 20% продукції виявилось бракованою. Кожна деталь із цієї групи надійшла до контролю, який був недосконалим: якщо деталь відповідала нормі, контроль пропускав її з ймовірністю 0,9, якщо ж деталь була бракованою, то на контролі її бракували з ймовірністю 0,7. Покупець навмання вибирає одну деталь із великої партії проконтрольованої продукції. Знайти ймовірність того, що покупка буде з дефектом.

4. Для виробів деякого виробництва ймовірність відповідати стандартові дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система перевірки на стандартність, яка дає позитивний результат з ймовірністю 0,9 для виробів, що задовольняють стандарт, а для виробів, що не задовольняють стандарт, з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, визнаний під час перевірки стандартним, дійсно відповідає стандартові.

5. Одному володареві надокучив звіздар зі своїми неправдивими віщуваннями, і він вирішив покарати його. Проте володар надав йому можливість вижити і наказав розподілити у дві урни дві білі і дві чорні кулі. Кат вибере навмання урну і з неї вийме кулю. Якщо куля буде чорною, звіздаря стратять, якщо білою — помилують. Як звіздар повинен розподілити кулі в урнах, щоб забезпечити собі найбільшу ймовірність залишитися живим?

6. У місті конкурують дві будівельні фірми A і B, пропонуючи різні розцінки на свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом контракту з фірмою A за наявністю конкуренції фірми B становить 0,2, а за відсутністю конкуренції ця ймовірність становить 0,35. З досвіду минулих років клієнт з ймовірністю 0,8 знає розцінки обох фірм. *а)* Визначити ймовірність того, що фірма A уклала контракт з клієнтом; *б)* Клієнт уклав контракт з фірмою A. Яка ймовірність того, що розцінки фірми B були відомі клієнтові?

7. Кількість вантажних автомобілів, що їздять по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легковиків, як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажівка, дорівнює 0,1; для легковика ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під’їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

8. У магазин надходять вироби одного виду, які виготовляються 4 фірмами. Ймовірність браку для кожного виробника

відповідно становить 0,04; 0,03; 0,06 і 0,02. Першою фірмою виготовлено 30, другою — 20, третьою — 50, четвертою — 25 виробів. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб буде бракований.

9. У правій кишені є три монети по 50 коп. і чотири по 25 коп., а в лівій кишені — шість монет по 50 коп. і три по 25 коп. З правої кишені в ліву навмання переклали п'ять монет. Визначити ймовірність вийняти після перекладання з лівої кишені монету 50коп.

10. Є три партії комп'ютерів по 20, 30 і 50 штук. Ймовірність того, що комп'ютери, представлені різними заводами-виробниками, працюватимуть без ремонту певний час, дорівнюють відповідно для цих партій 0,7, 0,8 і 0,9. Яка ймовірність того, що вибраний навмання один із ста комп'ютерів працюватиме без ремонту певний час?

11. У лікарню поступають в середньому 50% хворих із хворобою B, 30% — із хворобою C, 20% — із хворобою D. Ймовірність повного вилікування хвороби B становить 0,7, хвороби C — 0,8, а хвороби D — 0,9. Хворого вилікували. Знайти ймовірність того, що він страждав хворобою B.

12. Система сигналізації може помилково спрацювати з ймовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацює з ймовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацює помилково.

13. Виробник комп'ютерів отримує комплектуючі деталі від трьох постачальників, частки яких становлять 20, 45, 35 %. Деталі першого постачальника мають 2 % браку, другого 1,5, третього — 1,7. Яка ймовірність того, що: *а)* навмання вибрана деталь буде з браком? *б)* браковану деталь отримано від другого постачальника?

14. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 40 підприємств, серед яких 25%

не мають заборгованостей, другий — 60 підприємств, з яких 40% не мають заборгованостей. Знайдіть ймовірність того, що: а) навмання обране підприємство не має заборгованості; б) підприємство, що не має заборгованості, перевіряв перший інспектор.

15. Виробництво певної продукції може проводитись у трьох температурних режимах з ймовірностями 0,45; 0,25; 0,3 відповідно. Залежно від температурного режиму ймовірність отримання продукції вищої якості становить 0,8; 0,85; 0,9. Яка ймовірність того, що: а) виготовлена продукція вищої якості? б) продукцію вищої якості виготовлено при третьому температурному режимі?

16. Тираж популярної газети друкується в двох типографіях. Потужності двох типографій відносяться як 3:4, причому перша дає 3,5 % браку, а друга — 2,5 %. Яка ймовірність того, що: а) навмання обраний примірник газети буде бракованим? б) бракований примірник газети надруковано в першій типографії?

17. У рекламному агентстві працює три групи дизайнерів: перша обслуговує 25 фірм, друга — 45, третя — 40. Протягом одного місяця кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до 40 % фірм, другої — до 45, третьої — до 35. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана фірма окупила витрачені на рекламу кошти протягом місяця? б) фірма, що окупила протягом місяця витрачені на рекламу кошти, обслуговувалась третьою групою дизайнерів?

18. Справи клієнтів банку зберігаються у 8 сейфах: у трьох по 150 справ, у п'яти – по 250. Ймовірність вчасного повернення кредиту клієнтами, справи яких лежать у перших трьох сейфах, становить 0,96, в останніх п'яти — 0,95. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрано справу клієнта, який вчасно поверне кредит? б) справа клієнта, який своєчасно повернув кредит, знаходилась в одному з перших трьох сейфів?

19. Страхова компанія розподіляє клієнтів на три групи ризику. Ймовірність виплати страховки для першої групи дорівнює 0,01, для другої 0,03, а для третьої – 0,08. Серед всіх клієнтів компанії 50% належать до першої групи, 30% - до другої і 20% - до третьої. Знайдіть ймовірність того, що клієнт, який отримав страховку належить до групи найменшого ризику.

20. Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що при перших двох киданнях випав герб, якщо відомо, що герб випав 3 рази.

21. На автозавод поступили двигуни від трьох моторних заводів. Від першого заводу поступило 10 двигунів, від другого – 6 і від третього – 4 двигуни. Ймовірність безвідмовної роботи цих двигунів на протязі гарантійного терміну - 0,9; 0,8; 0,7. Яка ймовірність того, що:

а) установлений на машині двигун буде працювати без дефектів на протязі гарантійного терміну?

б) працюючий без дефекту двигун виготовлений на першому заводі, на другому заводі?

22. На підприємстві, що виготовляє замки, перший цех виготовляє 25, другий 35, третій 40% всіх замків. Брак складає відповідно 5, 4 і 2%. Знайти ймовірність того, що:

а) випадково вибраний замок є дефектним;

б) яка ймовірність того, що він був виговлений першим, другим, третім цехом?

23. Троє робітників виготовляють однакові вироби. Перший робітник виготовив 40 виробів, другий – 35, третій – 25. Ймовірність браку у першого робітника 0,03, у другого – 0,02, у третього – 0,01. Взятий навмання виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що цей виріб зробив другий робітник.

24. На підприємстві працюють дві бригади робітників: перша виготовляє в середньому ¾ продукції з відсотком браку 4%, друга

– ¼ продукції з відсотком браку 6%. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб:

а) виявиться бракованим;

б) виготовлений другою бригадою за умови, що виріб виявився бракованим.

25. До взуттєвої майстерні для ремонту приносять чоботи і туфлі у співвідношенні 2:3. Ймовірність якісного ремонту для чобіт дорівнює 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена перевірка якості однієї пари взуття. Виявилось, що ця пара взуття відремонтована якісно. Яка ймовірність того, що це: а) чоботи? б) туфлі?

6. Схема Бернуллі

Приклади:

1. Ймовірність виходу за межі границі допуску при обробці деталі дорівнює 0,07. Визначити ймовірність того, що з 5 навмання відібраних деталей діаметр однієї не відповідає заданому допуску.

Розв'язання

Тут: n=5; k=1; p=0,07, а $P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (1-0{,}07)^4 \approx 0{,}262.$

2. Відомо, що $\frac{1}{15}$ частина продукції, що завозиться на торгівельну базу не відповідає всім вимогам стандарту. На базу завезено партію виробів в кількості 250 штук. Знайти найвірогідніше число виробів, що задовольняють вимогам стандарту і обчислити ймовірність того, що в завезеній партії знаходиться найвірогідніше число стандартних виробів.

Розв'язання

За умовою: n=250; p=$\frac{1}{15}$; q=1-$\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$. Тоді:

$$250 \cdot \frac{14}{15} - \frac{1}{15} \le m_0 \le 250 \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15},$$

$$m_0 = 234.$$

Тепер обчислюємо

$$P_n\left(m_0\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{250}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{15}} \approx 0{,}101.$$

3. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. У даному інтервалі часу абонент може зробити виклик незалежно від решти з ймовірністю 0,005 Потрібно знайти ймовірність того, що в даному інтервалі було не більше ніж сім викликів.

Розв'язання

Позначимо через А подію, яка полягає в тому, що відбулося не більше ніж сім викликів. Це складна подія, яка складається з восьми елементарних подій: ω_0 —жодного виклику, ω_1 —один виклик, ω_2 —два виклики і т. д.; ω_7 — сім викликів. Ймовірність події А дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій:

$$P(A) = P_{1000}(\omega_0) + P_{1000}(\omega_1) + \ldots + P_{1000}(\omega_7).$$

Для підрахунку ймовірностей елементарних подій застосуємо теорему Пуассона. Для p=0,005, n=1000; $a=np=5$, знайдемо*:*

$$P_{1000}(\omega_i) = e^{-a}\frac{a^i}{i!} = e^{-5}\frac{5^i}{i!},\ i = 0,1,2,\ldots,7.$$

Тоді
$$P(A) = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \ldots + \frac{5^7}{7!}\right) \approx 0{,}875.$$

4. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних киданнях монети. Ймовірність появи герба в одному киданні p = 0,5.

Розв'язання

$k = 55;\ n = 100;\ p = 0{,}5;\ q = 0{,}5;$ оскільки $npq = 25 > 10,$ застосуємо наближену локальну формулу Лапласа для знаходження ймовірності:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 100\cdot 0{,}5}{\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = 1.$$

Знайдемо $\varphi(1) = 0{,}2420$ і обчислимо $P_{100}(55)$:

$$P_{100}(55) \approx \frac{\varphi(1)}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}}} \approx \frac{0{,}2420}{5} \approx 0{,}0484.$$

Вправи:

1. Ймовірність виграшу однієї облігації за весь час займу дорівнює 0,6. Якщо у власника 5 облігацій, знайти ймовірність того, що: *а)* виграш випаде на дві облігації; *б)* виграш випаде більш ніж на дві облігації.

2. Ймовірність появи події *А* хоч би один раз в 5 незалежних випробуваннях дорівнює 0,9. Яка ймовірність появи події *А* в одному випробуванні, якщо при кожному випробуванні ця ймовірність однакова?

3. З кожних 40 виробів, виготовлених верстатом-автоматом, 4 є бракованими. Взято навмання 400 виробів автомату. Знайти ймовірність того, що серед них 350 без дефекту.

4. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції будуть не менше 75 та не більше 90.

5. Ймовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор протягом години, становить 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години зателефонують 5 абонентів?

6. Деяке автопідприємство має 12 машин. Ймовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства у найближчий день, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше 8 машин.

7. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах число влучень дорівнює: *а)* 90; *б)* 80 і 90; *в)* найвірогідніше.

8. Ймовірність народження хлопчика р=0,512. Знайти ймовірність події: *А* - "серед 100 новонароджених буде 51 хлопчик", *В* - "серед 100 новонароджених хлопчиків буде більше ніж дівчаток".

9. Гральний кубик підкидають 120 разів. Знайти ймовірність того, що число появи 5 очок знаходиться між 15 і 25.

10. Ймовірність появи бракованого виробу дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що серед 500 виробів буде менше двох бракованих.

11. Оптова база обслуговує 10 магазинів, від кожного з яких може надійти вимога на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найвірогідніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

12. Підприємство випускає 1% бракованих виробів. Яка ймовірність того, що з досліджених 1100 виробів буде не більше 17 бракованих?

13. При проведенні маркетингових досліджень ймовірність отримати задовільний результат $\frac{2}{3}$. Знайти найвірогідніше число задовільних досліджень, якщо їх загальна кількість дорівнює 7.

14. Школа проводить набір: чотири перших класи по 20 школярів. Знайти ймовірність того, що серед першокласників буде 40 дівчат, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Обчисліть найвірогідніше число дівчат.

15. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що вірогідніше виграти: дві партії з чотирьох, чи три партії з шести?

16. Ймовірність того, що телевізор не пройшов передпродажну перевірку дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 телевізорів не перевірено від 70 до 100.

17. Ймовірність виграшу на один лотерейний квиток дорівнює 0,3. Куплено 10 квитків. Знайти: *а)* ймовірність того, що 2 квитка виграшні; *б)* найвірогідніше число виграшних квитків і відповідну ймовірність.

18. Пристрій складається з 1000 елементів, кожен з яких незалежно від решти може вийти з ладу за час T із ймовірністю $5 \cdot 10^{-4}$. Знайти ймовірності подій: A – "за час T вийдуть з ладу 3 елементи", B – "за час T вийде з ладу принаймні 1 елемент", C – "за час T вийдуть з ладу не більше 3-х елементів".

19. Батарея зробила 14 пострілів по об’єкту, ймовірність влучення в який 0,2. Обчислити: а) найбільш ймовірне число влучень і його ймовірність; б) ймовірність того, що було не менше 4 влучень.

20. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийдуть з ладу: а) не менше 20; б) менше 15; в) від 6 до 18 приладів.

21. В результаті обстеження були виділені родини, що мають по чотири дитини. Враховуючи, що ймовірність появи хлопчика і дівчинки в родині однакова, визначити ймовірність появи в ній:

а) одного хлопчика;

б) двох хлопчиків.

22. Чотири покупці приїхали на оптовий склад. Ймовірність того, що кожному із цих покупців буде потрібен холодильник марки «А» - 0,4. Знайти ймовірність того, що холодильник буде потрібен:

а) не менше ніж двом покупцям;

б) не більше ніж трьом покупцям;

в) всім чотирьом покупцям.

23. Працюють чотири магазини по продажу пральних машин. Ймовірність відмови в продажі покупцю в магазині 0,1. Враховуючи, що асортимент товару в кожному магазині формується незалежно від інших, визначити ймовірність того, що покупець отримає відмову в двох, в трьох і в чотирьох магазинах.

24. В новому мікрорайоні поставлено 10000 кодових замків на вхідних дверях будинків. Ймовірність виходу з ладу одного замка на протязі місяця дорівнює а) 0,0002; б) 0,001. Знайти ймовірність того, що за місяць вийдуть з ладу два, три і п’ять замків.

25. Завод відправив в торговельну мережу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002.

Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено:

а) рівно три вироби;

б) більше трьох виробів.

7. Дискретні випадкові величини

Приклади:

1. У грошовій лотереї на 100 білетів розігрується один виграш у 50 грошових одиниць і 10 виграшів по одній грошовій одиниці. Знайти закон розподілу випадкової величини - вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Розв'язання.

Можливі значення *X:* $x_1 = 50$, $x_2 = 1$; $x_3 = 0$. Ймовірності цих можливих значень:

$$p_1 = P(x_1 = 50) = \frac{1}{100} = 0{,}01; \quad p_2 = P(x_2 = 1) = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Оскільки $p_1 + p_2 + p_3 = 1,$, то $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0{,}89$. Шуканий закон розподілу:

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

Вправи.

1. Партія товару складається з 25 виробів, серед яких 6 бракованих. Навмання вибирають 3 вироби для перевірки їх якості. Знайти закон розподілу випадкової величини *X* - числа вибраних бракованих виробів.

2. Партія товару складається з 1000 виробів. Відомо, що 25% товару є бракованими. З партії навмання вибирають, але без повернення, 10 виробів. Знайти закон розподілу випадкової величини *X* - числа справних виробів. Побудувати многокутник розподілу.

3. Є 5 ключів, з яких тільки один підходить до замка. Нехай *X* – число спроб відкрити замок. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, якщо *а)* випробуваний ключ більше не

використовують; *б)* випробуваний ключ повертається перед наступним випробуванням.

4. Є 6 білетів у театр, чотири з яких на місця у першому ряду. Навмання вибирають три білети. Скласти таблицю розподілу і побудувати функцію розподілу ймовірностей випадкової величини X - числа вибраних білетів на місця у першому ряду.

5. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини:

x	-4	-1	2	5	8	10
p	a	$1,5a$	$0,5a$	$3,5a$	$2,5a$	a

а) знайти a; б) обчислити $P(x<2)$, $P(-4<x\le 8)$; в) побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

6. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе іспит становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85 та 0,8. Знайти закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X - числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати графік $F(x)$.

7. Літак має місткість 10 осіб. Завантаження (число зайнятих місць) літака за один рейс випадкова величина – X. Ймовірність того, що кожне місце буде зайняте однакова і дорівнює 0,9. *а)* Знайти функцію розподілу завантаження літака і побудувати її графік; *б)* обчислити ймовірність того, що рейс буде рентабельний (будемо вважати, що рейс рентабельний, якщо завантаження не менше 7 осіб).

8. Дві гральні кості одночасно кидають 2 рази. Напишіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – випадань парної кількості очок на двох гральних костях.

9. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента на протязі часу T дорівнює 0,002. Складіть закон розподілу випадкової величини X - числа елементів, що відмовили.

10. На шляху руху автомобіля стоять 6 світлофорів, кожний із яких з ймовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. Складіть закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа світлофорів, що їх автомобіль промине без затримки.

11. Виконується 4 незалежних постріли по мішені. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,25. Знайти закон розподілу кількості влучень X, найвірогідніше число влучень та його ймовірність.

12. Середня кількість замовлень таксі, що надходять до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде: а) 4 замовлення ; б) менше 4 замовлень ; в) не менше 4 замовлень.

13. В партії із 25 шкіряних курток 5 мають прихований дефект. Купують 3 куртки. Знайти закон розподілу числа дефектних курток серед куплених. Побудувати многокутник розподілу.

14. Із партії в 20 виробів, серед яких є 6 бракованих, вибрані навмання 3 вироби для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкового числа Х бракованих виробів серед відібраних.

15. В коробці 20 однакових котушок ниток, з них – 4 котушки з білими нитками. Навмання беруть 2 котушки. Знайти закон розподілу числа котушок з білими нитками серед взятих.

16. Є три бази з незалежним постачанням. Ймовірність відсутності на базі потрібного товару дорівнює 0,1. Підприємець вирішив закупити певний товар. Знайти закон розподілу числа баз, на яких в даний момент цей товар відсутній.

17. Ймовірність того, що при складанні бухгалтерського балансу допущена помилка, дорівнює 0,3. Аудитору на висновок представлено 3 баланси підприємства. Знайти закон розподілу числа позитивних висновків на баланси, що перевіряються.

18. Ймовірність того, що аудитор зробить помилку при перевірці бухгалтерського балансу, дорівнює 0,05. Аудитору на висновок представлено 2 баланси. Знайти закон розподілу числа правильних висновків на баланси, що перевіряються.

19. В магазин привезли однакову кількість кавунів з Херсону і Одеси. Ймовірність купити неспілий кавун дорівнює відповідно 0,1 та 0,3. Купили 4 кавуни. Знайти закон розподілу спілих кавунів серед куплених.

20. У продавця є вироби однакової кількості, отримані з трьох фабрик. Ймовірність того, що ці вироби відповідної якості для кожної фабрики відповідно складає 0,8; 0,7; і 0,9. Відібрано 2 вироби. Знайти закон розподілу кількості виробів відповідної якості серед відібраних.

21. Два покупці незалежно один від одного здійснюють по одній покупці. Ймовірність того, що покупку зробив перший покупець, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що другий – 0,6. Випадкова величина X – число покупок, зроблених покупцями. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

22. В лотереї із 100 квитків розігруються два виграші на суму 200 грн. і 60 грн. Ціна квитка 10 грн. Знайти закон розподілу суми чистого виграшу для особи, яка купить два квитки.

23. В лотереї 100 квитків, з яких 2 виграшні по 50 грн. і 10 виграшних по 1 грн. Ціна квитка 2 грн. Знайти закон розподілу суми чистого виграшу для особи, яка купила 2 квитки. Побудувати многокутник розподілу.

24. Партія складає 20 телевізорів, серед яких шість бракованих. Купили два телевізори. Знайти ряд розподілу працюючих телевізорів серед куплених.

25. Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд

X	-5	2	3	4
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Побудувати функцію розподілу. Обчислити $P(X \geq 3{,}5)$ та $P(|X| < 2{,}5)$.

8. Неперервні випадкові величини

Приклад:

Знайти дисперсію випадкової величини X, заданої функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо щільність розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}, & -2 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(x) = \int_{-2}^{2} xf(x)dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{1}{4} dx = 0.$$

Знайдемо шукану дисперсію:

$$D(x) = \int_{-2}^{2} (x - M(x))^2 f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Вправи:

1. Випадкова величина ***X*** задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 \langle x \leq \frac{1}{3}; \\ 1, & x \rangle \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що ***X*** прийме значення з проміжку (0 ;1/3).

2. Випадкова величина ***X*** задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 2;\\ 0.5x-1, & 2\langle x\langle 4;\\ 1, & x\rangle 4.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що ***X*** прийме значення менше 0,2 .

3.Функція розподілу випадкової величини ***X*** має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ x^3, & 0\langle x \le 1;\\ 1, & x\rangle 1.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію ***X***.

4. Неперервна випадкова величина ***X*** розподілена за законом, який заданий диференціальною функцією:

$$F(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x \ge 0;\\ 0, & x\langle 0.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що *X* попаде в інтервал (0,13;0,7).

5.Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, що має таку щільність розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & \text{при} \quad |x|<a;\\ 0, & \text{при} \quad |x|\ge a.\end{cases}$$

6. Щільність ймовірності випадкової величини X має такий вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{при} \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0, & \text{при} \quad x<0 \ \text{або}\, x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $M[X]$ і $D[X]$.

7. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

а) $F(x)=3/4+(1/2\pi)\operatorname{arctg} x$

б) $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{[x]}{2}, 0<x\le 2,\\ 1, x>2?\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{1}{1+x}, x>0?\end{cases}$

г) $F(x)=e^{-e^{-x}}$?

д) $F(x)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ 1-\dfrac{1-e^{-x}}{x}, x>0? \end{cases}$

8.Нижче подано функції, що залежать від певних параметрів. Визначити, при яких значеннях параметрів ці функції будуть щільностями розподілів?

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{ax+b}, d\le x<\infty, \\ 0, x<d; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} cx^a e^{-\lambda x}, x>0, \\ 0, x\le 0. \end{cases}$

9. Випадкова величина Х задана функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 2, \\ (x-2)^2, & \text{якщо } 2<x\le 3, \\ 1, & \text{якщо } x>3. \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності f(x) та ймовірність попадання випадкової величини Х в інтервали (1; 2,5), (2,5; 3,5).

10. Щільність ймовірності неперервної випадкової величини Х:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 1, \\ x-\dfrac{1}{2}, & \text{якщо } 1<x\le 2, \\ 0, & \text{якщо } x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу F(x) та побудувати її графік.

11. Випадкова величина Х має щільність ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{якщо } 0<x\le \pi, \\ 0, & \text{якщо } x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати графік.

12. Випадкова величина Х має щільність ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}0, & якщо\ x\le 1,\\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right), & якщо\ 1<x\le 3,\\ 0, & якщо\ x>3.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати графік.

13. Щільність ймовірності неперервної випадкової величини X задана виглядом $f(x)=\frac{2C}{\left(1+x^2\right)}$. Знайти параметр C.

14. Щільність ймовірності неперервної випадкової величини X задана в інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ функцією $f(x)=C\sin 4x.$ За межами інтервалу $f(x)=0.$ Знайти параметр C.

15. Щільність ймовірності неперервної випадкової величини X задана в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функцією $f(x)=C\cos x.$ За межами інтервалу $f(x)=0.$Знайти параметр C і визначити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

16. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)=\frac{x}{2}$ в інтервалі (0; 2), за межами цього інтервалу $f(x)=0.$ Знайти математичне сподівання величини X.

17. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)=\frac{x}{8}$ в інтервалі (0; 4), за межами цього інтервалу $f(x)=0.$ Знайти математичне сподівання.

18. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)=e^{-2|x|}$ при $-\infty<x<\infty.$ Знайти математичне сподівання.

19. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)=C\left(x^2+2x\right)$ в інтервалі (0; 1). За межами цього інтервалу $f(x)=0.$ Знайти параметр C.

20. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)=\frac{a}{\left(1+x^2\right)}$ при $-\infty<x<\infty.$ Знайти параметр a і математичне сподівання.

21. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{9x}{2} - 6$ в інтервалі $f(x) = 0.$ Знайти математичне сподівання.

22. Випадкова величина X задана в інтервалі (0; π) щільністю ймовірності $f(x) = \frac{1}{2}\sin x,$ за межами інтервалу $f(x) = 0.$ Знайти дисперсію величини X.

23. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x) = 0.25\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ в інтервалі (0; 2π). За межами інтервалу $f(x) = 0.$ Знайти дисперсію величини X.

24. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x) = 0.5\cos x$ в інтервалі (-π/2; π/2). За межами інтервалу $f(x) = 0.$ Знайти дисперсію величини X.

25. Випадкова величина має розподіл Релея $F(x) = 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ $(x \geq 0)$. Написати вираз щільності ймовірностей випадкової величини.

Рівномірний розподіл

26. Автобуси підходять до зупинки з інтервалом в 5 хв. Враховуючи, що випадкова величина X – час очікування автобуса – розподілена рівномірно, знайти середній час очікування (математичне сподівання) та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

27. Паром для перевезення автомашин через затоку підходить до причалу через кожні дві години. Враховуючи, що час прибуття автомашин – випадкова величина X – розподілена рівномірно, визначити середній час очікування автомобілем приходу парому і дисперсію часу очікування.

Нормальний розподіл

28. Відомо, що середні витрати добрив на один гектар поля становлять 80 кг, а середнє квадратичне відхилення - 5 кг. Вважаючи витрати добрив нормально розподіленою випадковою

величиною, визначити інтервал, в який попаде доза добрива з ймовірністю 0,98.

29. Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини – кількості сиру, який використовують для виготовлення 100 бутербродів, дорівнює 1 кг. Відомо, що з ймовірністю 0,96 витрати сиру на виготовлення 100 бутербродів складають від 900 до 1100 г. Визначити середнє квадратичне відхилення для витрати сиру на 100 бутербродів.

30. При вимірюванні нормально розподіленої випадкової величини виявилось, що її середнє квадратичне відхилення дорівнює 10, а ймовірність влучення цієї величини в інтервал від 100 до 140, симетричний відносно математичного сподівання, дорівнює 0,86. Знайти математичне сподівання цієї величини і ймовірність попадання її в інтервал від 90 до 150.

Показників розподіл

31. Щільність ймовірності випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ Ce^{-0.1x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Знайти параметр C.

32. Знайти ймовірність попадання випадкової величини T, яка має показниковий розподіл:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \le 0, \\ 0.2e^{-0.2t}, & \text{якщо } t > 0 \end{cases}$$

в інтервал (4; 10).

9. Закон великих чисел

Приклад:

У великій популяції тварин 40% мають мутацію. Яку кількість тварин потрібно взяти, щоб з ймовірністю не меншою 0,95 частина мутантів становила від 38% до 42% відібраних тварин?

Розв’язання

Якщо відібрано n тварин, то можна вважати, що маємо n повторних випробувань Бернуллі з p=0,4. Нехай X – кількість відібраних тварин, які мають мутацію. Тоді M(X)= np=0,4n; D(X)=npq=0.24n. У задачі треба знайти таке n, щоб виконувалася нерівність: $P\left(\left|\frac{X}{n}-0{,}4\right|>0{,}02\right)\le 0{,}05.$ Цю нерівність можна записати ще так: $P(|X-M(X)|>0{,}02n)\le 0{,}05.$ Згідно з нерівністю Чебишева, $P(|X-M(X)|>0{,}02n)\le \frac{D(X)}{(0.02n)^2}=\frac{0.24}{0.0004n^2}=\frac{600}{n}.$ Отже, n треба вибрати так, щоб виконувалася умова $\frac{600}{n}\le 0{,}05.$ Звідси $n\ge 12000,$ тобто таку кількість тварин необхідно відібрати, щоб гарантувати подібний результат.

Вправи:

1. Середнє значення витрати води в населеному пункті складає 50000 л в день. Дайте оцінку ймовірності того, що в цьому населеному пункті витрати води не будуть перевищувати 120000 л в день.

2. Середня маса однієї картоплини дорівнює 100 г. Дати оцінку ймовірності того, що навмання взята картоплина має масу не більшу 300 г.

3. В результаті аналізу торговельної діяльності деякого магазину встановлено, що середньомісячні оборотні витрати складають 300 умовних грошових одиниць. Дати оцінку ймовірності того, що в наступному місяці витрати не вийдуть за межі 280-320 грошових одиниць. Відомо, що дисперсія витрат дорівнює 16 грошовим одиницям.

4. Ймовірність появи події А в одному випробувані p=0,5. Чи можна з ймовірністю, більшою за 0,97, стверджувати, що кількість появ події А в 1000 незалежних випробуваннях буде в межах від 400 до 600?

5. На верстаті виготовляється деяка деталь. Виявляється, що її довжина X є випадковою величиною. При вимірюванні в трьох випадках довжина виявилась рівною 20,1 см, в двох випадках – 19,8 см, в одному випадку довжина виявилась рівною 20,5 см, а в

чотирьох випадках – 19,9 см. Оцінити знизу ймовірність того, що довжина буде міститися між 19,7 і 20,3 см.

6. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 2,5. За результатами 200 незалежних випробувань обчислено середнє арифметичне величини X, яким замінили невідоме значення M(X)=a. Яке найменше значення ймовірності того, що ця заміна спричинить помилку, меншу ніж 0,25?

7. Для визначення середньої урожайності на площі 100000 га відібрано по одному гектару від кожної ділянки розміром 100 га. Визначити ймовірність того, що середня вибіркова урожайність буде відрізнятись від дійсної середньої за всією площею не більше ніж на 0,5 ц, якщо дисперсія урожайності на окремих ділянках (по 100 га) не перевищує 2 ц.

8. Визначте з ймовірністю (надійністю) не менше 0,8, яким може бути максимальне відхилення вибіркової середньої урожайності від середньої урожайності по всій площі, що складає 10000 га, якщо з кожної ділянки розміром 200 га було відібрано по одному гектару, а максимальна дисперсія на окремих ділянках не перевищує 2,5 ц.

9. Партія деталей міститься в 250 ящиках. Для визначення середньої маси деталі вибрано по одній деталі з кожного ящика. За умови, що дисперсія по кожному ящику не перевищує 4, визначити максимальне відхилення середньої маси деталі в вибірці від середньої маси її по всій партії. Результат необхідно гарантувати з ймовірністю не меншою за 0,9.

10. Відомо, що на деякому заводі в середньому 70% продукції першого сорту. З ймовірністю не менше 0,9 визначте інтервал, в якому повинна знаходитись відносна частота першосортної продукції в партії з 10000 одиниць.

11. Ймовірність того, що автоматична каса в автобусі спрацьовує при вкиданні монети, дорівнює 0,95. Визначте відхилення частоти числа випадків, коли автомат спрацьовує, від

ймовірності для 1000 вкидань монети, якщо результат необхідно гарантувати з ймовірністю не меншою 0,9. Визначте також інтервал, в якому повинно знаходитись число випадків m правильної роботи каси.

12. Ймовірність настання деякої події в кожному з 900 випробувань дорівнює 0,7. Оцінити ймовірність того, що подія відбудеться число разів, що міститься між 600 і 660.

13. Ймовірність настання деякої події однакова (в кожному випробуванні). Передбачається провести 10000 випробувань. Оцініть ймовірність того, що при цьому кількість разів настання події відхилиться від найбільш ймовірного значення не більше ніж на 100.

14. Оцініть ймовірність того, що при 100 підкиданнях монети герб з'явиться від 400 до 600 разів.

15. Приймаючи однаково ймовірним народження хлопчика і дівчинки, оцінити ймовірність того, що із 1000 новонароджених хлопчиків буде від 465 до 535.

16. Підлягають дослідженню 400 проб руди. Ймовірність промислового вмісту металу в кожній пробі для всіх проб однакова і дорівнює 0,8. Оцінити ймовірність того, що кількість проб з промисловим вмістом металу буде міститися між 290 і 350.

17. Ймовірність появи події при кожному випробувані дорівнює 0,6. Відбувається 800 незалежних випробувань. Оцінити ймовірність того, що в цих умовах відхилень частості ймовірності буде менше, ніж 0,03.

18. Ймовірність настання деякої події $p=0,3$ в кожному з $n=900$ незалежних випробувань. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що кількість разів повторення події міститься від 240 до 300.

19. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 4. Скільки потрібно провести незалежних випробувань, щоб з ймовірністю

не менше 0,9 можна було б сподіватись, що середнє арифметичне значення цієї випадкової величини відхилиться від її математичного сподівання менш ніж на 0,5?

20. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 5. Відбувається 100 незалежних випробувань, за якими знаходиться $\bar{x}$. Замість невідомого значення математичного сподівання a приймається $\bar{x}$. Визначити максимальне значення помилки, що допускається при цьому, з ймовірністю не менше 0,8.

21. При штампуванні деталей ймовірність браку становить 0,05. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,95 можна було б очікувати, що відносна частота бракованих деталей відхилиться від ймовірності браку менше, ніж на 0,01?

22. Число сонячних днів на рік для даної місцевості є випадковою величиною з математичним сподіванням, яке дорівнює 75 днів. Оцінити знизу ймовірність того, що в наступному році в даній місцевості буде менше 150 сонячних днів.

23. Середня температура в квартирі в період отоплювального сезону дорівнює 20 ^{0}C, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 2 ^{0}C. Оцінити знизу ймовірність того, що температура в квартирі відхилиться від середньої за абсолютною величиною менше ніж на 4 ^{0}C.

24. Довжина виробів, що виготовляється є випадковою величиною, середнє значення якої дорівнює 90 см. Дисперсія цієї величини дорівнює 0,0225. Оцінити ймовірність того, що: а) відхилення довжини виготовленого виробу від її середнього значення за абсолютною величиною не перевищуватиме 0,4 см; б) довжина виробу знаходиться між 89,7 та 90,3 см.

25. Дисперсія кожної із 1000 незалежних випадкових величин дорівнює 4. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньої арифметичної цих випадкових величин від середньої

арифметичної їх математичних сподівань за абсолютною величиною буде меншою за 0,2.

Завдання для індивідуальної роботи

1. В партії із N виробів n виробів мають прихований дефект (табл.1) . Яка ймовірність того, що серед взятих навмання m виробів k виробів мають дефекти?
2. В магазині виставлено для продажу n виробів, серед яких k виробів неякісні (табл. 2). Яка ймовірність того, що взяті навмання m виробів будуть неякісними?
3. На підприємство надійшли однотипні комплектуючі деталі з трьох заводів в кількості: n_1 з першого заводу, n_2 з другого, n_3 з третього (табл.3). Ймовірність якісного виготовлення виробу на першому заводі p_1, на другому p_2, на третьому p_3. Яка ймовірність того, що взятий навмання виріб буде якісним?
4. Дано розподіл дискретної випадкової величини X (табл. 4). Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.
5. В місті є N оптових баз (табл. 5). Ймовірність того, що товар певного сорту відсутній на цих базах, однакова і дорівнює p. Скласти закон розподілу числа баз, на яких шуканий товар відсутній в даний момент.
6. Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл. Її математичне сподівання дорівнює M_x, середнє квадратичне відхилення дорівнює σ_x (табл. 6). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення з інтервалу (a, b).

Таблиця 1

Варіант	N	n	m	k		Варіант	N	n	m	k
1	20	4	5	2		16	20	5	4	1
2	30	5	5	3		17	16	6	5	3
3	20	5	4	2		18	18	5	4	2
4	25	6	5	3		19	14	4	3	1

Закінчення табл.1

Варіант	N	n	m	k		Варіант	N	n	m	k
5	15	4	3	2		20	10	4	3	2
6	20	6	4	1		21	16	5	3	2
7	30	4	3	2		22	20	6	4	3
8	16	4	3	2		23	26	5	4	2
9	18	6	5	3		24	32	8	5	3
10	12	5	4	2		25	34	10	6	4
11	30	10	5	3		26	30	6	5	3
12	26	8	6	4		27	25	5	3	2
13	24	8	5	3		28	24	6	4	3
14	22	6	4	2		29	28	8	5	2
15	20	5	3	2		30	24	6	3	2

Таблиця 2

Варіант	n	m	k		Варіант	N	m	k
1	20	2	6		16	15	2	5
2	18	3	8		17	17	3	6
3	16	2	6		18	18	4	8
4	14	3	5		19	20	2	7
5	12	3	4		20	22	3	6
6	10	2	4		21	26	2	8
7	18	3	6		22	28	3	7
8	22	2	8		23	30	2	10
9	24	3	10		24	26	2	6
10	26	2	6		25	28	3	10
11	30	3	8		26	14	2	5
12	25	2	7		27	18	3	5
13	23	3	6		28	16	2	4
14	24	2	8		29	17	2	3
15	30	3	9		30	19	3	6

Таблиця 3

Варі-ант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3		Варі-ант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0.9	35	0.8	40	0.7		16	25	0.9	35	0.8	40	0.7
2	15	0.8	25	0.7	10	0.7		17	15	0.8	25	0.7	20	0.9
3	40	0.9	35	0.7	25	0.9		18	40	0.9	25	0.8	35	0.8
4	25	0.7	10	0.9	15	0.8		19	14	0.8	26	0.6	20	0.7
5	10	0.9	20	0.8	20	0.6		20	18	0.9	32	0.8	30	0.7
6	40	0.8	30	0.8	30	0.9		21	30	0.9	20	0.7	10	0.8
7	20	0.8	50	0.9	30	0.8		22	16	0.9	24	0.8	60	0.9
8	35	0.7	35	0.8	30	0.9		23	30	0.9	10	0.7	10	0.7
9	15	0.9	45	0.8	40	0.9		24	15	0.8	35	0.9	50	0.8
10	40	0.8	15	0.7	45	0.8		25	40	0.8	20	0.8	40	0.9
11	20	0.9	15	0.9	15	0.8		26	10	0.9	20	0.8	10	0.6
12	14	0.8	26	0.9	10	0.8		27	35	0.8	25	0.7	50	0.8
13	16	0.8	40	0.9	44	0.7		28	40	0.8	20	0.9	40	0.8
14	30	0.9	20	0.7	50	0.7		29	30	0.9	40	0.8	30	0.9
15	20	0.8	10	0.9	20	0.9		30	10	0.7	20	0.9	20	0.7

Таблиця 4

Варі-ант	*Числові дані*						*Варі-ант*	*Числові дані*				
1	x_i	-5	2	3	4		16	x_i	4	6	9	
	p_i	0.4	0.3	0.1	0.2			p_i	0.4	0.3	0.3	
2	x_i	0. 2	0.5	0.6	0.8		17	x_i	4	6	8	9
	p_i	0.1	0.5	0.2	0.2			p_i	0.3	0.1	0.1	0.5
3	x_i	-6	-2	1	4		18	x_i	3	6	7	9
	p_i	0.1	0.3	0.4	0.2			p_i	0.3	0.2	0.1	0.4
4	x_i	0.2	0.5	0.6			19	x_i	5	10	12	14
	p_i	0.5	0.4	0.1				p_i	0.4	0.2	0.1	0.3
5	x_i	-8	-2	1	3		20	x_i	6	8	14	
	p_i	0.1	0.3	0.4	0.2			p_i	0.2	0.4	0.4	
6	x_i	-2	1	3	5		21	x_i	1	3	4	5
	p_i	0.1	0.3	0.4	0.2			p_i	0.4	0.3	0.1	0.2
7	x_i	-3	2	3	5		22	x_i	4	5	7	8
	p_i	0.3	0.4	0.1	0.2			p_i	0.1	0.5	0.2	0.2
8	x_i	2	3	10			23	x_i	2	4	5	6

Закінчення табл. 4

	p_i	0.1	0.4	0.5				p_i	0.3	0.1	0.4	0.2
9	x_i	-4	-1	2	3		24	x_i	2	4	8	
	p_i	0.3	0.1	0.4	0.2			p_i	0.1	0.4	0.5	
10	x_i	-3	2	3	5		25	x_i	-3	-1	3	5
	p_i	0.3	0.4	0.1	0.2			p_i	0.4	0.3	0.1	0.2
11	x_i	-6	-2	2	3		26	x_i	2	4	6	9
	p_i	0.2	0.4	0.1	0.3			p_i	0.1	0.3	0.3	0.3
12	x_i	2	5	6			27	x_i	2	4	5	6
	p_i	0.5	0.1	0.4				p_i	0.5	0.1	0.3	0.1
13	x_i	-5	-3	1	3		28	x_i	1	3	8	
	p_i	0.2	0.1	0.1	0.6			p_i	0.2	0.1	0.7	
14	x_i	2	5	6	8		29	x_i	4	6	8	10
	p_i	0.2	0.2	0.4	0.2			p_i	0.3	0.2	0.4	0.1
15	x_i	4	6	8	12		30	x_i	6	8	12	16
	p_i	0.3	0.1	0.3	0.3			p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

Таблиця 5

Варіант	N	p		Варіант	N	p
1	3	0.2		16	4	0.15
2	4	0.25		17	3	0.24
3	3	0.1		18	2	0.1
4	2	0.2		19	3	0.12
5	4	0.1		20	4	0.14
6	3	0.2		21	4	0.16
7	4	0.3		22	3	0.15
8	3	0.1		23	3	0.13
9	3	0.12		24	2	0.21
10	4	0.3		25	2	0.16
11	3	0.15		26	3	0.19
12	3	0.18		27	4	0.26
13	4	0.24		28	3	0.14
14	2	0.14		29	2	0.15
15	3	0.16		30	3	0.22

Таблиця 6

Варіант	M_x	σ_x	a	b		Варіант	M_x	σ_x	a	b
1	10	1	8	14		16	40	4	36	43
2	12	2	8	14		17	38	2	35	40
3	14	3	10	15		18	42	4	40	43
4	16	2	15	18		19	44	5	41	45
5	18	1	16	21		20	45	5	43	48
6	20	2	17	22		21	46	4	44	48
7	24	1	20	26		22	48	5	45	49
8	26	3	23	27		23	50	6	48	53
9	28	2	24	30		24	52	4	50	55
10	30	1	27	32		25	54	3	53	56
11	32	3	30	35		26	56	4	55	58
12	24	1	30	36		27	58	5	56	61
13	36	2	34	37		28	60	6	58	63
14	38	3	37	41		29	62	5	59	64
15	40	2	39	42		30	64	6	60	66

Список літератури

1. *Міхайленко В.М., Теренчук С.А., Кубайчук О.О.* Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика. – К.: Вид-во Європейського університету, 2007. – 163с.
2. *Міхайленко В.М., Теренчук С.А., Кубайчук О.О.* Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика.Збірник задач: Навч. посібник. – К.: Вид-во Європейського університету, 2007. – 116с.
3. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика. –К.:ЦУЛ, 2002.-448с.
4. *Андрухаев Ч.М.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1985.-160с.
5. Солодовников А.С. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1983.-207с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Модуль 1. Теорія ймовірностей

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи студентів спеціальності 6.050301 «Товарознавство і комерційна діяльність»

Укладачі: **ФЕДОРЕНКО** Наталія Дмитрівна
ТЕРЕНЧУК Світлана Анатоліївна
ДОЛЯ Олена Вікторівна

Комп'ютерна верстка *О.В. Кириченка*

Підписано до друку Формат 60x84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 3,0.
Ум. фарбовідб. 26. Тираж 50 прим. Вид. № 75/III-08. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 808 від 13.02.2002 р.