ВСТУП.

Запропонований навчальний посібник має на меті допомогти студентам самостійно оволодівати курсом теорії ймовірностей та математичної статистики. Він складається з програми курсу, списку рекомендованої літератури, коротких відомостей із теорії, зразків розв’язку типових задач та задач для контрольних робіт.

Програма вивчення нормативної дисципліни складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра напрямків „Інформаційні технології проектування”, „Інформаційні управляючі системи та технології”, „Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини і обладнання”, „Професійне навчання”, „Комп’ютерні технології в управлінні та навчанні ” і охоплює всі змістовні модулі за мінімальною кількістю академічних годин/кредитів, передбачених стандартом.

Теорія ймовірностей – це математична наука, яка вивчає кількісні закономірності випадкових масових явищ. Основними поняттями теорії ймовірностей є подія та ймовірність.

Предметом вивчення дисципліни є створення фундаменту для вивчення таких загальнотехнічних дисциплін, як чисельні методи, загальна фізика, а також спеціальних дисциплін, необхідних для розуміння проблем математичного моделювання та інших.

Мета та завдання дисципліни.

Основною метою викладання дисципліни є набуття знань з основ теорії ймовірностей та математичної статистики, формування у майбутніх фахівців знань і навичок застосування основних законів, принципів та методів теорії ймовірностей в інженерній практиці, при вирішенні технічних задач.

Основними завданнями, що мають бути вирішені в процесі викладання дисципліни, є теоретична та практична підготовка студентів з питань:

- випадкової події та простору елементарних подій;
- імовірності випадкової події;
- випадкових величин та способів завдання їх розподілів;
- збіжності випадкових величин, статистичного експерименту.

Зміст дисципліни

М 1 Теорія ймовірностей	**Тема 1. Елементи комбінаторики.** ЗМ1. Комбінаторика *(розміщення, перестановки, комбінації)*.
	Тема 2. Випадкові події. ЗМ2. Простір елементарних подій. Операції над подіями (*випробування, елементарна подія, простір елементарних подій, операції над подіями: додавання, добуток, перетин*). ЗМ3. Класичне означення ймовірностей (*ймовірності, властивості ймовірностей*). ЗМ4. Геометричні ймовірності. ЗМ5. Умовні ймовірності. Незалежність подій (*умовна ймовірність, незалежні події, теорема додавання*). ЗМ6. Формула повної ймовірності. Формула Байєсса. ЗМ7. Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі. ЗМ8. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
	Тема 3. Випадкові величини. ЗМ9. Поняття випадкової величини (*випадкова величина, дискретна випадкова величина, неперервна випадкова величина, функція розподілу випадкової величини*). ЗМ10. Дискретні випадкові величини. Закон розподілу. Числові характеристики (*математичне сподівання дискретної випадкової величини; дисперсія випадкової величини; властивості дисперсії; індикатор випадкової події; біномінальний розподіл; розподіл Пуасона*). ЗМ11. Неперервні випадкові величини та їх числові характеристики. Закони розподілу (*інтегральна функція розподілу; неперервна випадкова величина; щільність розподілу; властивості щільності; рівномірний закон розподілу; експоненціальний закон розподілу; нормальний закон; теорема Ляпунова; логарифмічно нормальний закон розподілу*). ЗМ12. Закон великих чисел (*нерівність Чебишова, теорема Чебишова, теорема Бернуллі*).

	Тема 4. Системи випадкових величин. ЗМ13. Багатовимірні випадкові величини. Закони розподілу (*функція та щільність розподілу, їх властивості*). ЗМ14 Умовний розподіл. Коваріація та коефіцієнт кореляції (*умовне математичне сподівання, умовний розподіл, коваріація, коефіцієнт кореляції*).
М 2 Математична статистика та елементи теорії кореляції	**Тема 5. Математична статистика.** ЗМ15. Генеральна та вибіркова сукупності *(генеральна, вибіркова сукупності, варіанта, варіаційний ряд).* ЗМ16. Розподіл вибірки. Вибіркові характеристики (*вибіркова функція, вибіркове середнє, вибіркова дисперсія.)* ЗМ17. Способи обчислень вибіркових характеристик *(статистичний ряд, групова вибірка, гістограма, полігон).* ЗМ18. Оцінки невідомих параметрів розподілу *(оцінка теоретичного розподілу; незсунена оцінка; зсунена оцінка).* ЗМ 19. Оцінки G та S для нормального закону. ЗМ 20. Критерій згоди χ^2. ЗМ 21. Пряма регресії *(кореляція, пряма регресії)*. ЗМ22. Вибіркові характеристики. Обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції. ЗМ23. Нелінійна кореляція.

Перелік рекомендованої літератури:

1. П.П.Овчинников., В.М.Міхайленко., Ф.П.Яремчук. Вища математика ч.ІІ.- К.: Техніка, 2000-790с.
2. Л.І. Турчанінова., Ю.В.Човнюк. Методи теорії ймовірностей і математичної статистики, комп’ютерного моделювання. Збірник задач – Київ, 1997 р.
3. О.І. Баліна., І.С. Безклубенко. Теорія ймовірностей і математична статистика. Методичні вказівки. 2000 р.
4. Н.Д. Федоренко., О.І. Баліна. Методичні вказівки з вищої математики. ч.IV- Київ, 2000 р.
5. В.В. Барковський., Н.В. Барковська., О.К. Лопатін. Математика для економістів. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Київ: НАУ, 1999 р. – 447 с.

МОДУЛЬ 1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Елементи комбінаторики

Нехай задано множину X, що містить n елементів, $X=\{x_1\ x_2,..., x_n\}$.

Означення: *розміщенням* з n по m елементів називається впорядкована підмножина з m елементів з даних n. Число розміщень з n по m позначається A_n^m.

З означення випливає, що два розміщення різні не тільки тоді, коли вони складаються з різних елементів, але й тоді, коли елементи однакові, а їхній порядок різний

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Означення: розміщення з n елементів по n називається *перестановками*.

Різні перестановки з n елементів відмінні лише порядком їх елементів. Число перестановок позначається P_n

$$P_n=n!.$$

Означення: *комбінацією* з n елементів по m називають підмножину з m елементів з даних n елементів (відношення порядку – відсутнє). Число комбінацій позначається C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Зауважимо, що 0!=1, 1!=1.

Приклад 1. Група з 8 чоловік займає місця за круглим столом. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. $P_8=8!=40320$.

Приклад 2. Множина A містить 15 перших букв українського алфавіту. Скільки різних абеток з трьох букв можна скласти з даної множини букв?

Розв'язання. Знайдемо число підмножин, в яких вибрано три букви. Це можна зробити C_{15}^3 способами, тобто

$$N = C_{15}^3 = \frac{15!}{12!3!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 455.$$

1.2. Випадкові події

1.2.1. Простір елементарних подій. Операції над подіями

Під випробуванням будемо розуміти деякий експеримент, який при незмінних умовах може проводитись будь-яке число разів, а результат точно не визначений.

Наприклад – кидання монети. При цьому можуть випадати як герби, так і решки.

Найпростіший результат випробування називають елементарною подією і позначають ω. Множину всіх елементарних подій, можливих в результаті експерименту, називають простором елементарних подій і позначають Ω.

Наприклад. Нехай кидається гральний кубик. Простір елементарних подій Ω = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_i={випадання грані в і очок}.

Подією *A* називають підмножини Ω.

Наприклад. Подія *A* ={ω_2, ω_4, ω_6} – випадання парних чисел очок. Множина Ω – називається вірогідною подією, а Ø – неможливою подією.

Операції над подіями

З елементарних подій можна утворювати більш складні події.

1. Додавання. Сумою (або об'єднанням) двох подій *A* та *B* (позначається $A+B$ або $A\cup B$) називають подію *C*, що настає тоді і тільки тоді, коли настає або подія *A*, або подія *B*, або обидві події *A* та *B* (рис. 1).

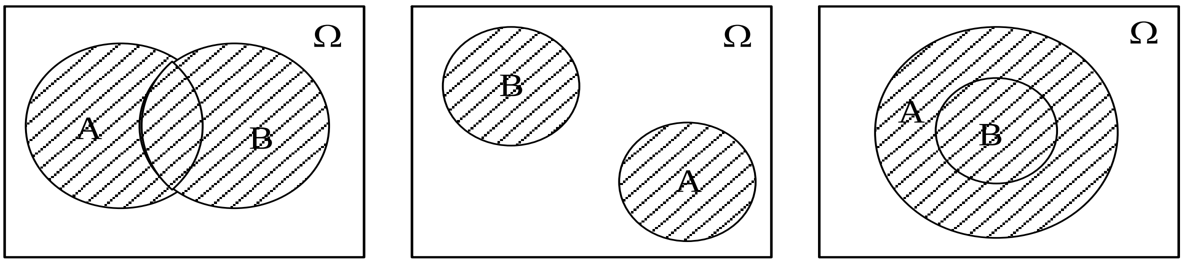

Рис. 1

2. Добуток. Добутком або перетином двох подій $(A \cap B)$ називають подію *C*, яка настає тоді і тільки тоді, коли настають обидві події *A* та *B* (рис. 2).

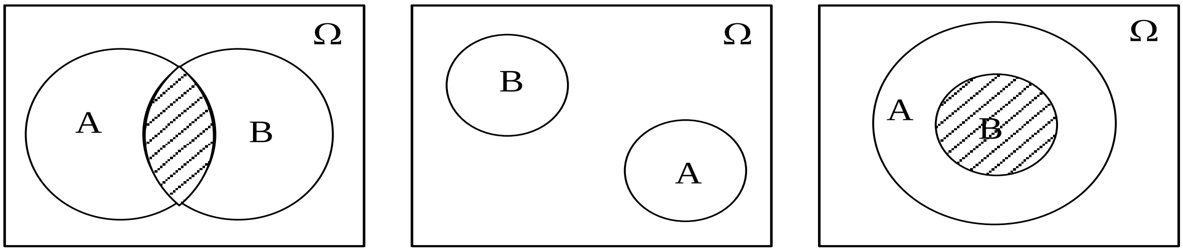

Рис. 2

Аналогічно визначають суми та добутки n подій ($n \geq 2$). Дві події не сумісні, якщо $AB=\varnothing$ тобто, якщо вони не можуть відбутися одночасно.

Протилежною до A подією (позначається $\overline{A}$) називають подію, яка складається з усіх елементарних подій Ω, що не входять в A, тобто $A+\overline{A}=\Omega$.

$\overline{A}$ настає тоді і тільки тоді, коли не настає A. $A\cdot\overline{A}=\varnothing$.

Приклад 3. Нехай кидається гральний кубик $\Omega=\{\omega_i\}$; $i=\overline{1,6}$. $A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$; $B=\{\omega_2, \omega_3\}$; $A+B=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$; $A\cdot B=\{\omega_3\}$; $\overline{A}=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Означення: Якщо $A_1+A_2+\ldots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega,$ то кажуть, що події A_i; $i=\overline{1,n}$ утворюють *повну групу подій*.

1.2.2. Класичне означення ймовірності

Розглянемо $\Omega=\{\omega_1,\ldots\omega_n\}$, де n – скінченне. Будемо вважати, що поява кожного ω_i рівноможлива.

Означення: *ймовірністю* події A називається відношення числа результатів випробовування, сприятливих для події A, до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування

$$P(A)=m/n.$$

Приклад 4. Знайти ймовірність події A={випав герб} при одному киданні монети.

Розв'язання. Простір подій $\Omega=\{Г, Р\}$; $n=2$; $A=\{Г\}$; $m=1$; $P(A)=1/2$.

Властивості ймовірностей:

1. Для кожної події $A\in\Omega,\ 0\leq P(A)\leq 1.$
2. $P(\Omega)=1$, ймовірність вірогідної події 1.
3. $P(\varnothing)=0$, ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Приклад 5. Серед кандидатів в студентський деканат факультету: 3 – першокурсники, 5 – другокурсників, 7 – третьокурсників. З цього складу навмання вибирають п'ять студентів. Знайти ймовірність подій:

A={всі п'ятеро студенти третього курсу};

B={всі першокурсники в складі вибраних};

C={жодного студента другого курсу не вибрано};

D={1-першокурсник, 2-другокурсника, 2 студенти третього курсу}.

Розв'язання.

1. Кожна елементарна подія визначається підмножиною з п'яти елементів із 15, отже число всіх елементарних подій $C_{15}^5 = n$.

2. Знайдемо число всіх підмножин, що містять п'ять студентів третього курсу, їх можна вибрати з семи, тобто $m = C_7^5$.

$$P(A) = \frac{C_7^5}{C_{15}^5} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 10!}{5! \cdot 2! \cdot 15!} = \frac{1}{11 \cdot 13} = \frac{1}{143}.$$

3. Знайдемо число підмножин, в яких три студенти першого курсу, а інші другого та третього. Це можливо зробити так:

$$P(B) = \frac{C_3^3 \cdot C_{12}^2}{C_{15}^5} = \frac{12! \cdot 10! \cdot 5!}{10! \cdot 2! \cdot 15!} = \frac{2}{91}.$$

4. Знайдемо число підмножин, в яких не буде жодного студента другого курсу. Це можна зробити C_{10}^5 способами

$$P(C) = \frac{C_{10}^5}{C_{15}^5} = \frac{10! \cdot 10! \cdot 5!}{5! \cdot 5! \cdot 15!} = \frac{12}{143}.$$

5. Знайдемо число підмножин, в яких один першокурсник, два студенти другого курсу, два студенти третього курсу. Це можна зробити $C_3^1 C_5^2 C_7^2$ способами.

$$P(D) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{15}^5} = \frac{30}{143}.$$

1.2.3. Геометричні ймовірності

Формулу класичної ймовірності можна узагальнити на випадок неперервних множин елементарних подій Ω.

Нехай умови випробувань такі, що ймовірність попадання в довільну підобласть $\omega \in \Omega$ пропорційна площі цієї області і не залежить від її розміщення в Ω. За цих умов для ймовірності події $A = \{(x, y) \in \omega \mid \omega \in \Omega\}$ справедлива формула геометричної ймовірності:

$$P(A) = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)},$$

де $S(\omega)$ – площа підобласті ω (на відрізку – довжина, в просторі – об'єм).

Приклад 6. Двоє студентів домовилися зустрітися в певному місці, причому кожен з них приходить туди незалежно від другого у випадковий момент з 12 до 13 год. Той, хто приходить першим чекає 20 хв. і, якщо другий за цей час не приходить, першим залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання. Позначимо моменти приходу першого студента та другого студента через x та y відповідно. Тоді за простір елементарних подій доцільно взяти квадрат Ω на площині xOy

$$S(\Omega) = xy;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1.$$

Перший студент зустрінеться з другим студентом за умови задачі, тоді і тільки тоді, коли $|y - x| \le 20$ хв або $|y - x| \le 1/3$.

Подія A – зустріч відбудеться тоді, коли

$$A = \left\{ (x, y) \in S(\omega);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1;\ |y - x| \le \frac{1}{3} \right\};$$

$$|y - x| \le \frac{1}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3}.$$

Побудуємо $S(\Omega)$ та $S(\omega)$, $P = \dfrac{S(\omega)}{S(\Omega)}$ (рис. 3)

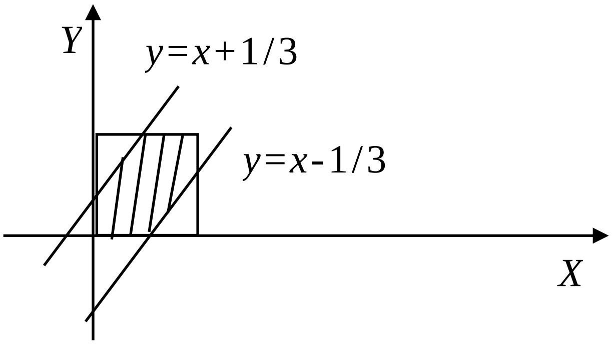

Рис. 3

1.2.4. Умовні ймовірності. Незалежність подій

Ми розглядали експерименти, які задовольняли умовам, так званої, безумовної ймовірності, тобто такої, яка не залежить від будь-яких додаткових умов, крім фіксованих для даного експерименту.

Розглянемо експеримент, в якому подія *A* може настати за умови появи події *B*.

Означення: *умовною ймовірністю* $P\left(A/B\right)$ появи події *A* за умови, що подія *B* настала в результаті даного експерименту, називається величина, що визначається рівністю

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0.$$

$P\left(A/B\right)$ називають "ймовірністю події *A* за умови *B*".

З означення та формули випливає формула добутку ймовірностей двох подій $P(AB)=P(B)\cdot P\left(A/B\right),\quad P(B)>0.$

Для довільного числа подій маємо:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\ldots P\left(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}\right).$$

Означення*:* подія *A* незалежна від події *B*, якщо $P\left(A/B\right)=P(A),\quad P(B)>0.$

Означення*:* події *A* та *B* називаються незалежними, якщо $P(AB)=P(A)\cdot P(B).$

Теорема додавання. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Якщо *AB*=Ø, тобто події несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B).$

Наслідок. $P(\overline{A})=1-P(A),\quad \left(A+\overline{A}=\Omega\right).$

Приклад 6. Студент, що знає 20 із 30 запитань програми, на екзамені отримав білет з трьома запитаннями. Яка ймовірність того, що студент знає відповіді на всі три запитання?

Розв'язання. ω_1 = {студент знає відповідь на перше запитання};

ω_2 = {студент знає відповідь на друге запитання};

ω_3 = {студент знає відповідь на третє запитання};

$A = \omega_1\omega_2\omega_3.$

Тоді: $P(A) = P(\omega_1)\cdot P\left(\omega_2/\omega_1\right)\cdot P\left(\omega_3/\omega_1\omega_2\right);$

$P(\omega_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3};\ P\left(\omega_2/\omega_1\right) = \frac{19}{29};\ P\left(\omega_3/\omega_1\omega_2\right) = \frac{18}{28};$

$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{18}{28} = 0{,}28.$

Приклад 7. Три стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення для першого дорівнює 0,9, для другого – 0,8, для третього – 0,6. Знайти ймовірність події:

A = {влучив лише один стрілець};

B={влучили лише два стрільці};

C={влучив хоча б один стрілець};

D={жоден стрілець не влучив у мішень}.

Розв'язання. Розглянемо елементарні події.

ω_1={влучив перший стрілець}; $P(\omega_1) = 0{,}9$;

$\overline{\omega_1}$ ={перший не влучив у мішень}; $P\left(\overline{\omega_1}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

ω_2={влучив другий стрілець}; $P(\omega_2) = 0{,}8;$

$\overline{\omega_2}$ ={другий не влучив у мішень }; $P\left(\overline{\omega_2}\right) = 1 - P(\omega_2) = 0{,}2;$

ω_3={третій стрілець влучив у мішень}; $P(\omega_3) = 0{,}6;$

$\overline{\omega_3}$ ={третій стрілець не влучив у мішень}.

$P\left(\overline{\omega_3}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4,\quad \omega_1, \omega_2, \omega_3,\ \overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}$ – події незалежні.

$A = \omega_1\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3} + \overline{\omega_1}\omega_2\overline{\omega_3} + \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\omega_3;$

$P(A) = P(\omega_1)P\left(\overline{\omega_2}\right)P\left(\overline{\omega_3}\right) + P\left(\overline{\omega_1}\right)P(\omega_2)P\left(\overline{\omega_3}\right) + P\left(\overline{\omega_1}\right)P\left(\overline{\omega_2}\right)P(\omega_3) =$

$= 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}116;$

$B = \omega_1\omega_2\overline{\omega_3} + \omega_1\overline{\omega_2}\omega_3 + \overline{\omega_1}\omega_2\omega_3;$

$P(B) = P(\omega_1)P(\omega_2)P\left(\overline{\omega_3}\right) + P(\omega_1)P\left(\overline{\omega_2}\right)P(\omega_3) + P\left(\overline{\omega_1}\right)P(\omega_2)P(\omega_3) =$

$= 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}444.$

Подія C складається з трьох подій:

$C = A + B + \omega_1\omega_2\omega_3;$

$P(C) = P(A) + P(B) + P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3) = 0{,}116 + 0{,}444 + 0{,}432 = 0{,}992.$

$$D = \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3};$$
$$P(D) = P(\overline{\omega_1})P(\overline{\omega_2})P(\overline{\omega_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}008.$$

1.2.5. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A настає за умови появи однієї з несумісних подій H_1, $H_2,\ldots, H_n$, які утворюють повну групу. Та нехай відомі ймовірності появи цих подій (гіпотез) $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ та умовні ймовірності $P(A/H_1)$; $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_n)$ події A. Як можна знайти ймовірність події A?

За умови, що гіпотези утворюють повну групу подій:

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega,$$

помножимо рівність на A,

$$AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = \Omega A, \text{ тоді}$$

$$P(H_1)P\left(A/H_1\right) + P(H_2)P\left(A/H_2\right) + \ldots + P(H_n)P\left(A/H_n\right) = P(A).$$

Тобто:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P\left(A/H_i\right).$$

Отримана рівність називається *формулою повної ймовірності*.

Якщо в результаті експерименту сталася подія A, то з урахуванням настання цієї події умовні ймовірності гіпотез H_i обчислюються за формулою Байєса

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i)P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P\left(A/H_i\right)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Формула надає можливість “переоцінити” ймовірність кожної з гіпотез після експерименту.

Приклад 8. У продажу телевізори, що виготовляються трьома фірмами. Продукція першої фірми складає 20%, другої – 10%, третьої – 5% виробів, що мають дефект. Перша фірма постачає 30%, друга – 20%, третя – 50% телевізорів у продаж. Яка ймовірність отримати телевізор з дефектом? З якою ймовірністю куплений телевізор з дефектом виготовлений третьою фірмою?

Розв'язання. Гіпотези:

H_1= {телевізор з дефектом виготовлено 1-ю фірмою};

H_2= {телевізор з дефектом виготовлено 2-ю фірмою};

H_3= {телевізор з дефектом виготовлено 3-ю фірмою};

A= {куплений телевізор з дефектом}.

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P\left(A/_{H_1}\right) + P(H_2)P\left(A/_{H_2}\right) + P(H_3)P\left(A/_{H_3}\right);$$

$$P(H_1) = 0{,}3;\ P(H_2) = 0{,}2;\ \ P(H_3) = 0{,}5;$$

$$P\left(A/_{H_1}\right) = 0{,}2;\ P\left(A/_{H_2}\right) = 0{,}1;\ P\left(A/_{H_3}\right) = 0{,}5;$$

$$P(A) = 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}5\cdot 0{,}05 = 0{,}105.$$

Обчислимо ймовірність того, що телевізор з дефектом був виготовлений третьою фірмою.

За формулою Байєса

$$P\left(H_3/_{A}\right) = \frac{P(H_3)P\left(A/_{H_3}\right)}{P(A)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}105} = 0{,}024.$$

Приклад 9. В трьох урнах лежать жовті та сині кульки, причому у першій 10 жовтих, 5 синіх; у другій 15 жовтих та 15 синіх; у третій 5 жовтих та 10 синіх. З вибраної навмання урни виймають одну кульку.

Знайти ймовірність, що вона жовта.

Знаючи, що куля жовта, з якою ймовірністю її взято з другої урни?

Розв'язання. Позначимо H_i = {вибрана i урна} $i = \overline{1,3}.$

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

A = {взята навмання жовта куля}

$$P\left(A/_{H_1}\right) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};\ P\left(A/_{H_2}\right) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ P\left(A/_{H_3}\right) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P\left(A/_{H_1}\right) + P(H_2)P\left(A/_{H_2}\right) + P(H_3)P\left(A/_{H_3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 0{,}5.$$

За формулою Байєса

$$P\left({}^{H_2}\!\!\diagup_{A} \right) = \frac{P(H_2)P\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_2} \right)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{0,5} = 0,33.$$

1.2.6. Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі

На практиці досить часто використовують схему однакових незалежних випробувань, в кожному з яких подія A настає з однією і тією ж самою ймовірністю. При цьому знаходять ймовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно k разів ($0<p<1$) ($0\le k\le n$).

Ця ймовірність знаходиться за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \ q = 1 - p,$$
$$p = \text{const} \ \ (0 < p < 1),$$

а схема випробувань за даних умов називається *схемою Бернуллі*.

Приклад 10. На будівництві об'єкта працюють з ймовірністю 0,7 п'ять самоскидів. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює на будівництві k=0, 1, 2, 3, 4, 5 самоскидів.

Розв'язання. За формулою Бернуллі $P_5(k) = C_5^k p^k q^{5-k}$, де p = 0,7; q= 1–0,7=0,3. Знаходимо

$$P_5(0) = C_5^0 0,7^0 \cdot 0,3^5 = 0,0024;$$

$$P_5(1) = C_5^1 0,7 \cdot 0,3^4 = 0,0081 \cdot 0,7 \cdot 5 = 0,02835;$$

$$P_5(2) = C_5^2 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 0,027 \cdot 0,49 \cdot 10 = 0,1327;$$

$$P_5(3) = C_5^3 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 0,09 \cdot 10 \cdot 0,343 = 0,3087;$$

$$P_5(4) = C_5^4 0,7^4 \cdot 0,3 = 0,36;$$

$$P_5(5) = C_5^5 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,16807.$$

Число k_0 , при якому $P_n(k_0)$ найбільше, називається найімовірнішим числом настання події A (прикл. 10, k_0=4).

Схему Бернуллі слід відрізняти від інших аналогічних.

Приклад 11. Кидають 4 монети до першого випадання герба. Знайти ймовірність того, що кинуто k = 1, 2, 3 ,4 монети.

Розв'язання. Наведена схема – це не схема Бернуллі, оскільки вилучено випадок k=0, тому формулу Бернуллі застосовувати не можна.

За умови $p = \frac{1}{2} = q$, A={випав Г}.

$$P_4(1) = \frac{1}{2};\; P_4(2) = P_4(\overline{A}A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P_4(3) = P(\overline{A}\,\overline{A} \cdot A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};\; P_4(4) = P(\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A} \cdot A) = \frac{1}{16}.$$

1.2.7. Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа

При великих n та малих p формулою Бернуллі користуватися незручно. Для цих значень застосовують інші формули.

Локальна теорема. Якщо ймовірність появи події в схемі Бернуллі стала і дорівнює p ($0<p<1$), n–велике, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x);\; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};\; x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Формулу називають формулою Лапласа, причому $\varphi(x) > 0;\; \varphi(-x) = \varphi(x),\; \max\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. При $x > 3;\; \varphi(x) = 0{,}0001.$ Графік функції $\varphi(x)$ показано на рис. 4. Значення функції наведено в таблиці 1 (додатки).

Приклад 12. Ймовірність браку деталі 0,0005. Яка ймовірність того, що із взятих навмання 100 деталей 10 бракованих?

Розв'язання.

$$n = 100;\; p = 0{,}005;\; q = 0{,}995.\; npq = 100 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 0{,}4975;$$

$$\sqrt{npq} = 0{,}7053;\; k = 10;$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 0{,}4975}{0{,}7053} = 13{,}4754;$$

$$\varphi(x) = 0{,}0001;$$

$$P_{100}(10) \approx \frac{1}{0{,}7053} \cdot 0{,}0001 = 0{,}00014.$$

Інтегральна теорема. Якщо ймовірність появи події в схемі Бернуллі дорівнює p ($0<p<1$), то ймовірність того, що ця подія настане від k_1 до k_2 разів, дорівнює

$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ – формула Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\Phi(x)$ – функція Лапласа, причому $\Phi(x)$ – непарна,

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

$\Phi(0)=0$; $\Phi \approx 0{,}5$, якщо $x>5$.

$\Phi \approx -0{,}5$ якщо $x<-5$. Графік функції $\Phi(x)$ наведено на рис. 5. Значення функціх наведено в таблиці 2 (додатки).

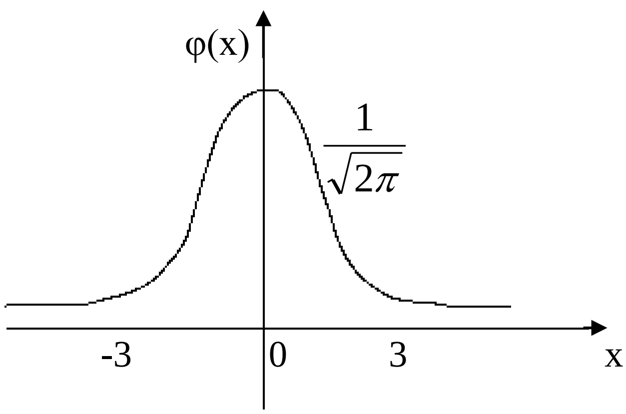

Рис. 4

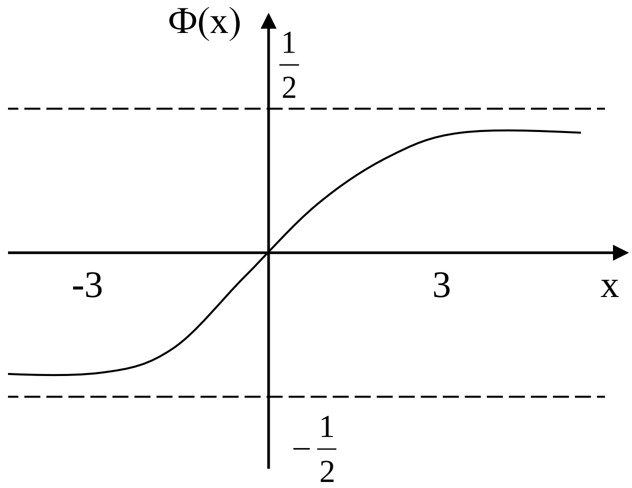

Рис. 5

Приклад 13. Ймовірність браку p=0,05. Яка ймовірність, що з 10 000 деталей навмання взятих не більше 70 бракованих?

Розв'язання.

$$P_{100}(0;70) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{0-50}{7{,}05} = -7{,}09$$

$$x_2 = \frac{70-50}{7{,}05} = 2{,}84;$$

$$P_{1000}(0;70) = \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) = 0{,}4977 + 0{,}5 = 0{,}9977.$$

Нехай m – число появи події A в n незалежних випробуваннях, в яких подія A з’являється з ймовірністю p.

$\frac{m}{n}$ – частота появи A.

Тоді $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Перепишемо нерівність

$$P\left(\frac{m}{n}-\varepsilon\le p\le\frac{m}{n}+\varepsilon\right)\approx\beta;\ 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\beta,$$

ε визначається з умови

$$\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}=t_\beta,\ \varepsilon=t_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

t_β - знаходиться по таблиці 3 (додатки).

Інтервал

$$\left(\frac{m}{n}-\frac{t_\beta}{2\sqrt{n}};\ \frac{m}{n}+\frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$$

називається надійним для ймовірності p при заданому рівні β.

Приклад 14. При надійному рівні β=0,95 – знайти надійні межі для ймовірності події, яка настала 1260 разів з 10 000 випробувань.

Розв'язання.

$\Phi(t_\beta)=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475;\ t_\beta=1{,}96.$

$\left(\frac{1260}{10000}-\frac{1{,}96}{2\sqrt{10000}};\ \frac{1260}{10000}+\frac{1{,}96}{2\sqrt{10000}}\right);$

$p\in(0{,}1162;\ 0{,}1358)$

при рівні 0,95.

1.3. Випадкові величини

1.3.1. Поняття випадкової величини

***Означення**: випадковою* називається величина, яка набуває своїх значень з певною ймовірністю.

До випадкових величин належать, наприклад: кількість очок, які випали на гранях грального кубика, час безвідмовної роботи приладу, дальність польоту снаряду і т. ін.

Деякі з них можуть набувати дискретних значень, інші –довільних значень з деякого інтервалу.

Означення: випадкова величина X називається *дискретною*, якщо вона приймає скінченну або зчисленну множину значень.

Означення: випадкова величина X називається *неперервною*, якщо вона приймає всі значення деякого інтервалу (a, b), як скінченного так і нескінченного.

Означення: *функцією розподілу* випадкової величини X називають ймовірність того, що X набуває значень, менших за задане фіксоване значення, тобто

$$F(x)=P(X<x).$$

Властивості функції розподілу $F(x)$:

1. $0\leq F(x)\leq 1$.
2. Функція $F(x)$ – неспадна: $x_1 < x_2$, $F(x_1)\leq F(x_2)$.
3. Функція $F(x)$ є неперервною зліва: $\lim\limits_{x\to x_1-0} F(x)=F(x_1)$.
4. $P(a \leq x\leq b) = F(b) - F(a)$ – ймовірність попадання x в інтервал (a, b).
5. $P(X\geq x) = 1-F(x)$.
6. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

1.3.2. Дискретні випадкові величини. Закон розподілу. Числові характеристики

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задати рядом розподілу:

X	x_i	x_1	x_2	….	x_n
	p_i	p_1	p_2	….	p_n

$$\sum_i p_i = 1,$$

де в першому рядку вказані можливі значення випадкової величини, а в другому – ймовірності, з якими випадкова величина приймає відповідні значення.

Означення: *математичним сподіванням* (середнім значенням) дискретної випадкової величини називається сума добутків можливих значень випадкової величини на їх ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i.$$

Математичне сподівання – аналог поняття центра системи матеріальних точок.

Якщо в точках $x_1, x_2, \ldots x_n$ розміщені маси $p_1, p_2, \ldots p_n$, де $\sum_n p_n = 1$, то центр дорівнює

$$x_c=\frac{\sum_n x_n p_n}{\sum_n p_n}=\sum_n x_n p_n.$$

Математичне сподівання називають центром розсіювання випадкової величини.

Властивості математичного сподівання:

1. $M(c) = c$, де c – стала величина.
2. $M(cX) = cM(X)$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$, для незалежних X та $У$.

Випадкові величини можуть мати однакові математичні сподівання, але різні розсіювання своїх значень навколо своїх математичних сподівань. Наступна величина характеризує таке розсіювання.

***Означення**: дисперсією* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватись формулою

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Практичне тлумачення дисперсії полягає в тому, що вона характеризує ступінь розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання і вимірюється в квадратних одиницях порівняно з одиницями вимірювання вихідної величини.

Остання приводить до характеристики

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ – середньоквадратичне відхилення.

Властивості дисперсії:

1. $D(c) = 0$.
2. $D(cX) = c^2D(X)$.

3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, де X, Y – незалежні.

4. $D(c+X) = D(X)$.

Приклад 15. Скласти закон розподілу випадкової величини X – число випадань герба при п'ятикратному киданні монети. Побудувати графік функції розподілу, знайти $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $P(1{,}5 \le X \le 4{,}5)$.

X – число випадання гербів

X	0	1	2	3	4	5
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Герб може випасти з ймовірністю

$p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – схема Бернуллі.

$$P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}. \qquad P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}.$$

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}. \qquad P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}.$$

$$P_5(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}. \qquad P_5(5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

$$\sum_i p_i = \frac{32}{32} = 1.$$

X	0	1	2	3	4	5
	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

$$M(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5.$$

Складемо закон розподілу X^2.

X^2	0	1	4	9	16	25
	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

$$M(X^2) = \sum_{i=0}^{5} x_i^2 p = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 4 \cdot \frac{10}{32} + 9 \cdot \frac{10}{32} + 16 \cdot \frac{5}{32} + 25 \cdot \frac{1}{32} = 7{,}5.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 7{,}5 - 2{,}5^2 = 1{,}25,$$

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}25} = 1{,}118$. Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ (рис. 6).

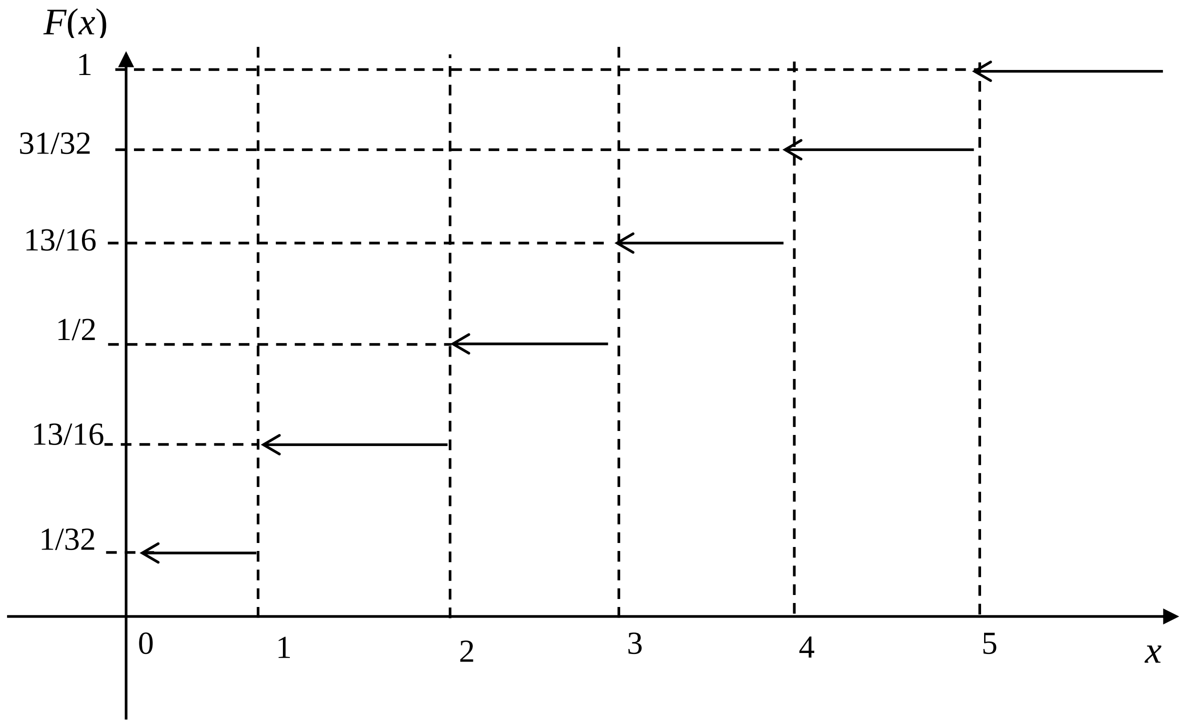

Рис. 6

Якщо $x \le 0$, то $F(x)=0$.

$0<x\le 1$, то $F(x)=\dfrac{1}{32}$. $1<x\le 2$, то $F(x)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{6}{32}=\dfrac{3}{16}$.

$2<x\le 3$, то $F(x)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{5}{32}+\dfrac{10}{32}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$.

$3<x\le 4$, то $F(x)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{5}{32}+\dfrac{10}{32}+\dfrac{10}{32}=\dfrac{26}{32}=\dfrac{13}{16}$.

$4<x\le 5$, то $F(x)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{5}{32}+\dfrac{10}{32}+\dfrac{10}{32}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{31}{32}$.

$5<x$, то $F(x)=1$.

$$P(1{,}5\le x\le 4{,}5)=\frac{31}{32}-\frac{26}{32}=\frac{5}{32}.$$

1.3.3 Деякі закони розподілу дискретних випадкових величин

1. Індикатор випадкової події *A*.

Проводиться одне випробування, в якому подія *A* відбувається з ймовірністю *p* ($0<p<1$).

I_A – число настання події *A*.

0	1
1-p	p

I_A

2. Біноміальний розподіл

У n незалежних випробувань подія А з'являється з ймовірністю p ($0<p<1$). X – число настання події A.

X				
	x_1	x_2	…	x_n
	p_1	p_2	…	p_n

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$M(X)=np$. $D(x)=npq$.

3. Розподіл Пуассона

X						
	0	1	2	…	n	…
	p_0	p_1	p_2	…	p_n	…

$$p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \qquad (\lambda>0). \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

$$M(X) = np = \lambda, \quad D(x) = \lambda.$$

1.3.4. Неперервні випадкові величини та їх числові характеристики

Означення: *інтегральною функцією розподілу* випадкової величини X називається ймовірність того, що X набуває значень, менших за вказане фіксоване, $F(x)=P(X<x)$.

Означення: випадкова величина X неперервна, якщо неперервна її інтегральна функція.

Означення: *щільністю розподілу* (диференціальною функцією) випадкової величини називається функція $f(x)=F'(x)$ з функцією розподілу $F(x)$.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$, ($F(x)$ – неспадна).
2. $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx; \quad D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Приклад 16.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ ax^2; 0 < x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Знайти *a*, $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(0{,}1 \le X \le 0{,}4)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Розв'язання.

$$f(x) = F'x = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ 2ax; 0 < x \le 1; \\ 0, x > 1. \end{cases}$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$ тому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2axdx = ax^2\Big|_0^1 = a = 1.$

$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^2; 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1. \end{cases}$ (рис. 7); $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ 2x; 0 < x \le 1 \\ 0, x > 1. \end{cases}$ (рис. 8).

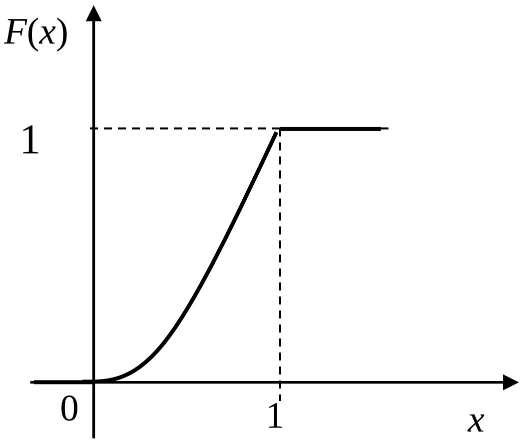

Рис. 7

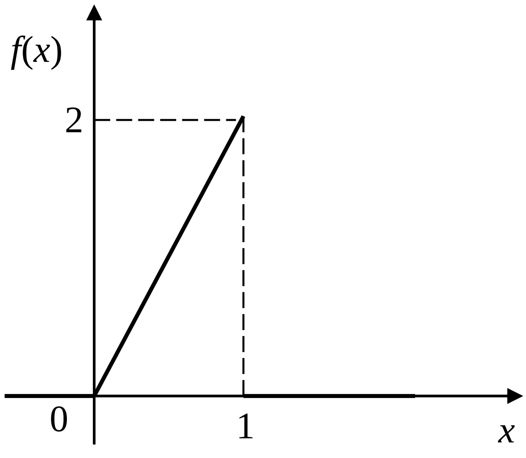

Рис. 8

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{1} 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 2xdx=2\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{9}x\right)dx=$$

$$=2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{18}x^2\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{4}{18}\right)=\frac{2}{9}.$$

$$P(0{,}1\le X\le 0{,}4)=F(0{,}4)-F(0{,}1)=0{,}4^2-0{,}1^2=0{,}15.$$

1.3.5. Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин

1. Рівномірний закон розподілу.

Означення: випадкова величина X називається *рівномірно* розподіленою, якщо її щільність стала.

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}; a\le x\le b;\\ 0, x>b.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}; a\le x\le b;\\ 1, x>b.\end{cases}$$

2. Експоненціальний закон розподілу.

Означення: випадкова величина X називається розподіленою за експоненціальним законом (рис. 9), якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}; x\geq 0.\end{cases}$$

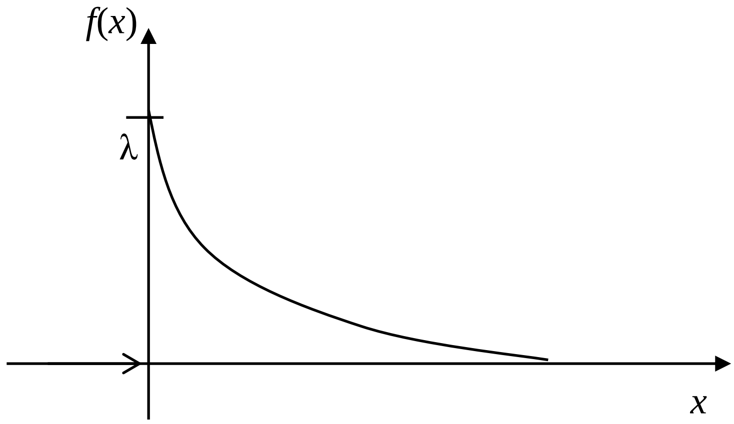

Рис. 9

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\qquad D(x)=\frac{1}{\lambda^2};\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}; x\geq 0.\end{cases}$$

$$P(\alpha\leq x\leq\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Експоненціальний закон широко використовують у теорії надійності.

Нехай Т – тривалість безвідмовної роботи пристрою. Функція розподілу випадкової величини Т $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ виражає ймовірність відмови за час t.

Протилежна до неї функція надійності

$R(t)=1-F(t)=P(t\leq T)=e^{-\lambda t}$

визначає ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час t, λ – інтенсивність відмов.

Для експоненціального закону ймовірність безвідмовної роботи за час t не залежить від передісторії процесу, а залежить лише від його тривалості t. Така властивість характерна для, так званого, "періоду випалювання" при експлуатації будь-яких машин, після чого настає період поступового старіння, який вже описують інші закони розподілу.

3. Нормальний закон розподілу.

Означення: випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, якщо

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$$

$$M(X)=a; \qquad D(X)=\sigma^2; \qquad \sigma(X)=\sigma.$$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$$P\left(|X-a|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило “трьох сігм”.

$$P\left(|X-a|<3\varepsilon\right)=1.$$

Якщо в $f(x)$ $a=0$; $\sigma=1$, то $f(x)=\varphi(x)$ – функція Лапласа.

Нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей велику роль завдяки центральній граничній теоремі Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Якщо $\overline{X}$ – сума великої кількості незалежних випадкових величин *X*, які мають довільний розподіл, а вплив їх на $\overline{X}$ незначний, то $\overline{X}$ має розподіл, близький до нормального і нормальний, якщо кількість $\overline{X}$ прямує до нескінченності.

Приклад 17. Для нормальної випадкової величини знайти ймовірність $p(1<x<6)$, якщо $a=2$, $\sigma=2$.

Розв'язання.

$$p(1<x<6)=\Phi\left(\frac{6-2}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{2}\right)=\Phi(2)+\Phi(0{,}5)\approx 0{,}6687.$$

4. Логарифмічно нормальний закон розподілу.

Означення: логарифмічно нормальним законом розподілу випадкової величини *X* називається закон розподілу вигляду:

$$f(x)=\frac{\lg e}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\lg x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

За таким законом визначається час безвідмовної роботи тих пристроїв, в яких основну роль відіграє “знос утоми” (крила літаків, колеса компресорів).

Закони “χ_i-квадрат”.

Нехай χ_i, $i = \overline{1, n}$ – нормально розподілені незалежні випадкові величини $M(x_i)$=0; $\sigma(x_i)$=1. Тоді величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \chi_i^2$$

має розподіл “χ_i-квадрат”, з k степенями вільності. Якщо величини не зв'язані між собою, то k=n, якщо є, наприклад, лінійний зв'язок

$x = \frac{1}{n}\sum x_i$, то k=n–1.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ e^{\frac{-x}{2}} x^{\frac{k}{2}-2} \Big/ 2^{k-2}\,\Gamma\left(k/2\right) \end{cases}, x > 0,$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера.

1.3.6. Закон великих чисел

Однією з основних задач теорії ймовірностей є встановлення закономірностей з ймовірністю, близькою до одиниці, особливо таких, що виникають в результаті спільної дії великої кількості незалежних випадкових факторів. Закон великих чисел є одним з найважливіших тверджень такого типу.

Нерівність Чебишова. Нехай випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ і скінченну дисперсію $D(X)$. Тоді для будь-якого ε>0 справедлива нерівність:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Переходячи до протилежної події, маємо:

$$P\left(\left|X - M(x)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова. Якщо X_i, $i = \overline{1, n}$ – попарно незалежні випадкові величини з рівномірно обмеженими дисперсіями

$$D(X_i) \le C, \text{ крім того, } X = \frac{1}{n}\sum X_i, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to 0} P(X - M(X)) = 1, \text{ де } \quad X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n),$$

$$M(X) = M\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n}an = a, \; a = M(X_i).$$

Теорема Бернуллі. Якщо в кожному з n випробувань подія A настає зі сталою ймовірністю (схема Бернуллі), то

$$\lim_{n\to 0} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ де}$$

n – число дослідів, m – число тих з них, в яких настає подія A.

1.4. Системи випадкових величин

1.4.1. Багатовимірні випадкові величини. Закони розподілу.

Розглянемо задачу. Зенітна установка веде стрілянину по літаку, відстань до якого R, азимут φ , кут місця α.

Влучення снаряду в ціль – випадкова величина $(\beta, \; \varphi, \; \alpha)$ є тривимірною.

Багатовимірні величини, як і одновимірні, можуть бути як неперервними, так і дискретними.

Обмежимося розглядом двовимірної випадкової величини.

***Означення**: з*аконом розподілу двовимірної дискретної величини (X, Y) називається перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей.

Закон задається таблицею

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{n,\, m} P_{ij} = 1.$$

За теоремою додавання ймовірностей можна записати закон розподілу кожної з компонент, наприклад φ

$p_1 = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1n}$; $\qquad p_2 = p_{21} + p_{22} + \ldots + p_{2n}$.

Закон розподілу використовують при малих значеннях n.

1.4.2.Функція та щільність розподілу

Означення: *функцією розподілу* випадкової величини (X, Y) називається функція

$$F(x, y)=P(X<x; Y<y).$$

З геометричної точки зору – це ймовірність того, що значення випадкової величини знаходяться в прямокутнику з вершиною (x, y) (рис. 10).

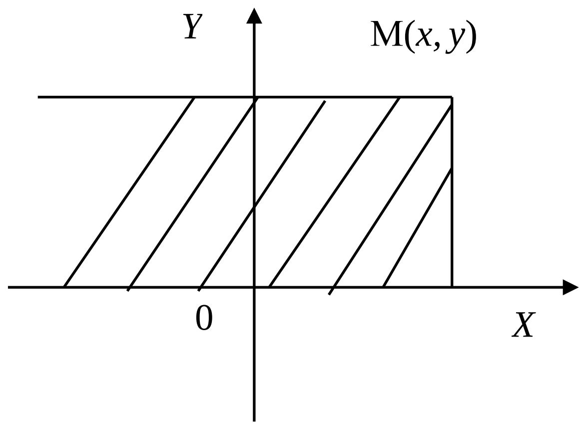

Рис. 10

Властивості $F(x, y)$:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(x, y)$ – неспадна функція.
3. $F(-\infty; y)= F(x; -\infty)= F(-\infty; -\infty)=0$.
4. $F(+\infty; +\infty)=1$.
5. $F(x; +\infty)= F(x)$; $F(+\infty; y)= F(y)$.
6. $P(x_1 < X < x_2;\ y_1 < Y < y_2) =$
   $= F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1)$.

Означення: щільністю ймовірності величини (X, Y) називається функція

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Властивості $f(x, y)$:

1. $f(x, y) \ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$

4. $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy; \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$

Якщо x та y незалежні, то

$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$; $\quad f(x,y) = f_1(x) f_2(y).$

1.4.3. Умовний розподіл. Коваріація і коефіцієнт кореляції

Означення: для випадкової величини (X, Y) *умовним розподілом* компонент X за умови $Y = y_i$ називається множина умовних ймовірностей

$$P\left(x_1/y_i\right);\ P\left(x_2/y_i\right);\ldots P\left(x_n/y_i\right);\ \sum P\left(x_j/y_j\right) = 1,\ \sum P\left(y_i/x_i\right) = 1.$$

Означення: *умовним математичним сподіванням* компоненти X, обчисленого за умови, що компонента Y набула значення y називається величина

$$M\left(X/Y = y\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j P\left(x_j/y\right).$$

Аналогічно

$$M\left(Y/X = x\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(y_j/x\right).$$

Означення: *коваріацією* випадкових величин X та Y називається число $k = k(X, Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$.

Коваріація характеризує залежність випадкових величин та їх розсіювання навколо $(M(X); M(Y))$. Зазначимо, що з того, що $k=0$, не завжди випливає незалежність X та Y.

Означення: *коефіцієнтом кореляції* між випадковими величинами називається число

$$\rho = \rho_{xy} = \frac{k(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

ρ – безрозмірна величина $\left|\rho_{xy}\right| \le 1$.

Якщо $\rho_{xy} \ne 0$, то кажуть, що X та Y корельовані, $\rho_{xy} = 0$ – некорельовані.

Чим ближче $\left|\rho_{xy}\right|$ до одиниці, тим "тісніше" зв'язок між X та Y.

Якщо $\rho_{xy} = 1$ маємо функціональний зв'язок.

$0 < \left|\rho_{xy}\right| < 1$ – статистичний зв'язок, $\rho_{xy} = 0$ – лінійний зв'язок відсутній.

Приклад 18. Дана двовимірна випадкова величина (X, Y). Знайти $\rho(X,Y)$, $k(X, Y)$.

X \ Y	0	2	5	$\sum$
1	0,1	0	0,2	0,3
2	0	0,3	0	0,3
4	0,1	0,3	0	0,4
$\sum$	0,2	0,6	0,2	1

Розв'язання. Складемо закони розподілу компонент X та Y

X	1	2	4
	0,3	0,3	0,4
Y	0	2	5
	0,2	0,6	0,2

$$M(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}5.$$
$$M(Y) = 0\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}6 + 0{,}2\cdot 5 = 2{,}2.$$
$$M(X^2) = 1^2\cdot 0.3 + 2^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}4 = 7{,}9.$$
$$M(Y^2) = 0^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}6 + 5^2 0{,}2 = 7{,}4.$$
$$D(X) = 7{,}9 - 2{,}5^2 = 1{,}65;\ D(Y) = 7{,}4 - 2{,}2^2 = 1{,}60.$$
$$M(X,Y) = 1\cdot 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 0{,}3 + 2\cdot 5\cdot 0 +$$
$$+ 4\cdot 0\cdot 0{,}1 + 4\cdot 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 5\cdot 0 = 1 + 1{,}2 + 2{,}4 = 4{,}6.$$
$$k(X,Y) = M(X,Y) - M(X)M(Y) = 4{,}6 - 2{,}5\cdot 2{,}2 = -0{,}9.$$
$$\rho = \frac{k}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{-0{,}9}{1{,}285\cdot 1{,}6} = -0{,}438.$$

X та $У$ лінійно залежні, бо $|\rho| < 1$.

МОДУЛЬ 2. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1. Генеральна та вибіркова сукупності

Математична статистика розробляє методи реєстрації, опису та аналізу статистичних даних. Завдання статистики – при об'єктивних даних встановити закони їх розподілу, оцінювати характеристики, перевіряти статистичні гіпотези.

Генеральною сукупністю називають множину об'єктів однакової природи, яка повинна бути перевірена на кількісну чи якісну ознаку.

Вибірковою сукупністю, або вибіркою, називають підмножину генеральної сукупності.

Елемент вибірки називають *варіантою* і позначають x_i. Кількість елементів вибірки називають її об'ємом. Зростаюча послідовність варіант утворює *варіаційний ряд*.

2.2. Розподіл вибірки. Вибіркові характеристики

Нехай одержано вибірку з генеральної сукупності x_1, x_2,..., x_n об'ємом n, з невідомою функцією розподілу $F(x)$ (теоретична функція розподілу). Позначимо $M(x)=a$, $D(x)=\sigma^2$.

Задача полягає в тому, щоб визначити з певною мірою надійності $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$.

Вибірковою (статистичною або емпіричною) функцією розподілу називається відношення:

$$F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n},$$

де μ_n – число x_i, для яких $x_i < x$; μ_n – випадкова величина, тобто $F_n(x)$ – теж випадкова величина – наближення теоретичної функції розподілу:

$$F_n(x) \approx F(x); \quad x \in R.$$

Математичне сподівання і дисперсію вибірки називають відповідно вибірковим середнім $\overline{x}$ і вибірковою дисперсією S^2; $\overline{x}$ – середнє арифметичне вибіркових значень

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i .$$

Вибіркова дисперсія дорівнює

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \overline{x}^2 .$$

Теорема. При $n \to \infty$ і будь-якому $x \in R$ мають місце співвідношення

$$F_n(x) \to F(x); \qquad \overline{x} \to a; \qquad S^2 \to \sigma^2$$

за умови, що a і S^2 – скінченні.

2.3. Способи обчислень вибіркових характеристик

Розглянемо варіаційний ряд, приписуючи однаковим варіантам той самий номер, при якому x_i повторюється n_i разів.

Таблиця вигляду

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

називається статистичним рядом, $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$.

Ламана з вершинами (x_i, n_i) називається полігоном частот вибірки.

При невеликому n

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i ; \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \overline{x}^2 .$$

Якщо число варіант дуже велике, то для спрощення обчислень застосовують групування емпіричних даних у такий спосіб. Нехай всі варіанти x_1, x_2,..., x_n належать інтервалу (a, b). Розіб'ємо інтервал на k однакових частин.

Покладемо n_i число всіх вибіркових значень, що входить в i-й інтервал, y_i – середина i-го інтервалу, тоді

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i n_i ;$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(y_i - \overline{y}\right)^2 .$$

Наближення щільності розподілу $f(x)$ на i-ому інтервалі визначається співвідношенням $f\left(x\right)=\dfrac{n_i}{nh}=W_i$, $h=\dfrac{b-a}{k}$.

Побудуємо для кожного інтервалу i прямокутник висотою W_i. Одержана фігура з таких прямокутників називається гістограмою частот (рис. 53)

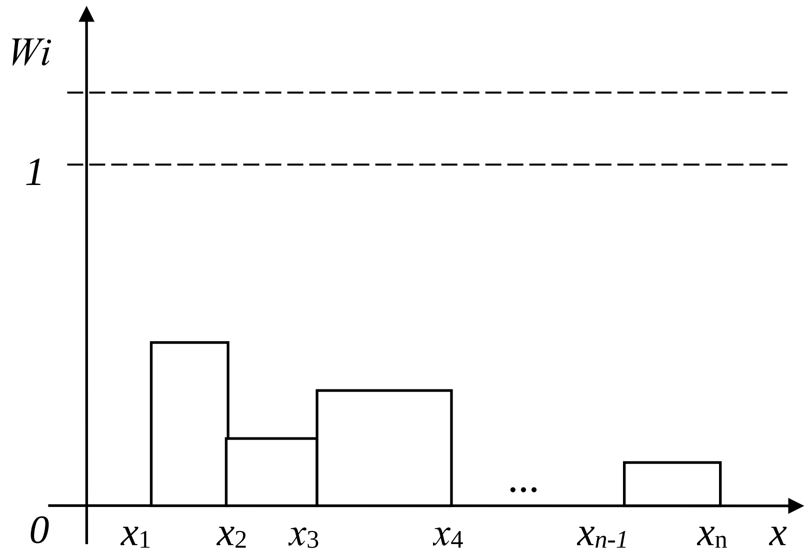

Рис. 11

Сума площ прямокутників дорівнює 1. Верхня межа є наближенням кривої теоретичного розподілу.

Приклад 1. Записати вибірку 55 спостережень у вигляді статичного ряду. Скласти груповану вибірку з довжиною інтервалу 2. Побудувати графік емпіричних функцій розподілу та гістограму частот. Вибірка:
19,18,10,13,15,16,19,18,11,13,16,19,18,19,18,18,14,16,19,18,14,15,
19,19,12,18,12,13,15,16,18,14,14,16,17,17,17,16,17,20,20,21,21,17,
20,20,21,17,22,17,22,20,20,23,24

Розв'язання. Розмах вибірки W=24-10=14, h=2 14/2=7 – інтервалів групування.

Статистичний ряд:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	1	2	3	4	3	6	7	8	7	6	3	2	1	1

$$\sum n_i = 55.$$

Групована вибірка:

границя інтервалу	(10;12)	(12;14)	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)	(22;24)
середина інтервалу y_i	11	13	15	17	19	21	23
частота n_i	3	6	8	14	14	7	3

Побудуємо графік $F_n(x)$ статистичного ряду.

Якщо x_1=10; x_{55}=24, то $F_n(x)$=0 при x<10 та $F_n(x)$=1 при x>24.

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

$$\text{F(x)=}\begin{cases} 0 \quad \text{при x} \le 10 \\ 0{,}054 \,\text{при}\, 10 < \text{x} \le 12 \\ 0{,}163 \,\text{при}\, 12 < \text{x} \le 14 \\ 0{,}308 \,\text{при}\, 14 < \text{x} \le 16 \\ 0{,}562 \,\text{при}\, 16 < \text{x} \le 18 \\ 0{,}816 \,\text{при}\, 18 < \text{x} \le 20 \\ 0{,}943 \,\text{при}\, 20 < \text{x} \le 22 \\ 0{,}997 \,\text{при}\, 22 \le \text{x} < 24 \\ 1 \,\text{при}\, 24 < \text{x} \end{cases}$$

На півінтервалі (10; 24] емпіричну функцію будуємо з використанням статистичного ряду. Графік її зображено на рис. 12.

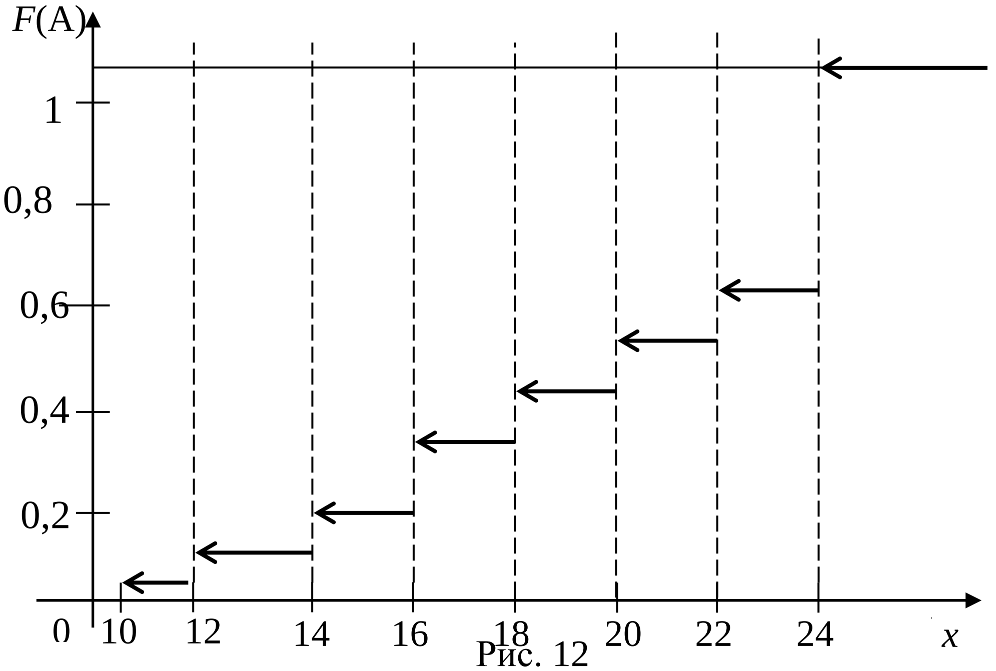

Рис. 12

Приклад 2. Для вибірки обчислити вибіркове середнє значення та вибіркову дисперсію.

Розв'язання. Статистичний ряд вибірки

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	1	1	3	4	3	6	7	7	9	6	4	1	1	1

Вибіркова дисперсія

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i ,$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2 .$$

$$\bar{x} = \frac{1}{55}(10\cdot 1 + 11\cdot 1 + 12\cdot 1 + 13\cdot 3 + 14\cdot 4 + 15\cdot 3 + 16\cdot 6 + 17\cdot 7 + 18\cdot 7 +$$

$$+19\cdot 9 + 20\cdot 6 + 21.\cdot 4 + 22\cdot 1 + 23\cdot 1 + 24\cdot 1) = \frac{1}{55}(10 + 11 + 12 + 39 +$$

$$+56 + 45 + 96 + 119 + 126 + 171 + 20 + 84 + 22 + 23 + 24) = \frac{958}{55} \approx 17{,}42$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ n_i = \frac{1}{55}(100\cdot 1 + 11^2\cdot 1 + 12^2\cdot 1 + 13^2\cdot 3 + 14^2\cdot 4 + 15^2\cdot 3 + 16^2\cdot 6 +$$

$$+17^2\cdot 7 + 18^2\cdot 7 + 19^2\cdot 9 + 20^2\cdot 6 + 21^2\cdot 4 + 22^2\cdot 1 + 23^2\cdot 1 + 24^2\cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{55}(100\cdot 1 + 121\cdot 1 + 144\cdot 1 + 169\cdot 3 + 196\cdot 4 + 225\cdot 3 + 256\cdot 6 + 289\cdot 7 +$$

$$+324\cdot 7 + 361\cdot 9 + 400\cdot 6 + +441\cdot 4 + 484\cdot 1 + 529\cdot 1 + 576\cdot 1) = 312 .$$

$$S^2 = 312 - 17{,}42^2 = 8{,}544.$$

2.4.Оцінки невідомих параметрів розподілу

Нехай C – деякий параметр теоретичного розподілу.

Оцінкою цього параметра називають деяку функцію $\theta=\theta(x_1,\ldots,x_n)$ від значень, що спостерігаються, яка мало відмінна в певному розумінні від C.

Означення: оцінку $\theta=\theta(x_1,\ldots,x_n)$ називають незсуненою оцінкою параметра C, якщо при довільному $n\in N$

$$M(\theta)=C.$$

Тобто похибка від зміни C на θ не має систематичного характеру.

Оцінкою математичного сподівання a є вибіркова середня $\bar{x}$ – оцінка незсунена

$$a=\bar{x}.$$

$M(\bar{x})=M(x)$ – на основі теореми Чебишова.

Оцінкою для дисперсії $D(x)=\sigma^2$ є вибіркова дисперсія

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 n_i-\bar{x}^2,$$

S^2 є зсуненою оцінкою для σ^2, бо $M(S^2)\neq\sigma^2$.

$S_1^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}n_i(x_i-\bar{x})^2$ є незсуненою оцінкою σ^2, бо

$$M(S_1^2)=\frac{n}{n-1}M(S^2).$$

2.5. Надійні інтервали

Розглянуті в п.3.4 оцінки характеризуються одним числом, їх називають точковими оцінками. Вони можуть мати великі похибки при малих n. Об'єктивнішою і надійнішою є інтервальна оцінка параметрів, яка характеризується трьома числами: початком і кінцем інтервалу, що покриває оцінку θ, та ймовірністю з якою це виконується.

Ймовірність називається надійністю γ. Застосовують γ в заздалегідь на одному з рівнів 0,95; 0,99; 0,999.

Означення: *надійністю оцінки* параметра θ за його статистичною оцінкою $\bar{\theta}$ називається

$$\gamma=P\left(\left|\theta-\bar{\theta}\right|<\delta\right)=P\left(\bar{\theta}-\delta<\theta<\bar{\theta}+\delta\right)=\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}f(x)dx.$$

Інтервал $\left(\bar{\theta}-\delta;\bar{\theta}+\delta\right)$ називається *надійним інтервалом*.

2.6. Надійні інтервали для математичного сподівання

Будемо вважати, що $P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\delta\right)=\gamma$.

У випадку нормального закону

$$P\left(\left|\overline{x}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

причому

$$M(x)=a;\ \sigma(x)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тоді

$$P\left(\left|\overline{x}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi(t);\ t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma};\ \Phi(t)=\frac{\gamma}{2}\ .$$

З таблиці функції Лапласа знаходимо t.

Надійний інтервал для математичного сподівання a є такий

$$\left(\overline{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\overline{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right).$$

Якщо теоретична дисперсія σ^2 невідома, її замінюють відповідною оцінкою S_1^2. Тоді надійний інтервал для математичного сподівання при рівні γ

$$\left(\overline{x}-\frac{S_1 t}{\sqrt{n-1}};x+\frac{S_1 t}{\sqrt{n-1}}\right).$$

Якщо $n<30$, а генеральну сукупність розподілено нормально з параметрами a та σ, то при надійному рівні γ гарантійний інтервал

$$\left(\overline{x}-\frac{S_1 t_\gamma}{\sqrt{n-1}};x+\frac{S_1 t_\gamma}{\sqrt{n-1}}\right),$$

де $t(\gamma,n)$ визначаємо з таблиці розподілу Стьюдента (табл. 4, додатки).

2.7. Оцінка σ та S для нормального закону

Знайдемо надійний інтервал, який покриває σ з надійністю γ за умови, що випадкова величина розподілена нормально

$$P(S-\delta<\sigma<S+\delta)=\gamma$$

або

$$P\left(S(1-q)<\sigma<S(1+q)\right)=\gamma\ .$$

Введемо безрозмірну величину $\lambda=\frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1}$, що має розподіл „$\chi_i$”. За таблицею $q(\gamma,n)$ (табл. 5, додатки) знаходимо q і будуємо надійний інтервал

$$\left(S(1-q)<\sigma<S(1+q)\right).$$

Приклад 3. Знайти надійні інтервали для середнього та дисперсії, вважаючи, що вибірка розподілена нормально з надійністю γ=0,95, якщо $\overline{x}$=12,57; S^2=0,91; S_1 =0,95, n=16.

Розв'язання. З таблиць

$$t_{0,975}(15) = 2{,}131; \qquad \chi^2_{0,025}(15) = 27{,}48;$$

$$12{,}57 - \frac{0{,}95}{\sqrt{16}} \cdot 2{,}131 \le a \le 12{,}57 + \frac{0{,}95}{\sqrt{16}} \cdot 2{,}131,$$

тобто

$$12{,}06 < a < 13{,}08$$

$$\frac{15 \cdot 0{,}91}{27{,}40} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 0{,}91}{6{,}26}.$$

Звідки 0,498 < σ^2 < 2,186.

2.8. Критерій згоди χ^2

Нехай проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина набуває одне з k значень $x_1, x_2, ..., x_k$.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд емпіричного закону та його параметри. Гіпотезу, яку перевіряють, називають нульовою H_0, а протилежну до неї – альтернативною H_i.

Приймаючи або відкидаючи H_0, можна зробити помилку першого роду (відкинути правильну гіпотезу) або другого роду (прийняти неправильну). Ймовірність зробити помилку першого роду називається рівнем значущості. Його задають заздалегідь (α=0,05; 0,01; 0,001) залежно від життєвої необхідності.

Для перевірки гіпотези H_0, де випадкова величина x розподілена за деяким законом, найчастіше використовують критерії згоди χ^2 Пірсона.

На основі випробувань складемо статистичний ряд розподілу випадкової величини x

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

$\sum n_k = n$.

Приймемо гіпотезу H_0={x – має ряд розподілу $\frac{x_1}{p_1}\left|\frac{x_2}{p_2}\right|\ldots\frac{x_k}{p_k}$}.

Мірою розходження *R* між гіпотетичним розподілом H_0 і статичним розподілом беремо величину

$$R = \chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Розподіл χ^2 залежить від параметра *r* – числа степенів вільності *r* = *k* – *m* – 1, де *k* – число підінтервалів, на які розбито інтервал зміни випадкової величини або число значень x_i, m – число параметрів теоретичного розподілу, визначених за цією вибіркою.

Одиницю віднімаємо, оскільки на статичний ряд впливає зв'язок

$$\sum n_k = n.$$

Входом до таблиці розподілу χ^2 (табл. 5, додатки) є рівень значущості α та *r*. З таблиці розподілу знаходимо χ_{kp}^2 і порівнюємо з *R*=χ^2.

Якщо *R*=$\chi^2 \le \chi_{kp}^2$, то H_0 не відкидаємо.

Приклад 4. Проведено *n* = 100 випробувань. Результати появи випадкової величини *x* задано статичним рядом

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	3	6	10	20	20	14	10	8	3	3

H_0 = {*x* розподілена за законом Пуассона}

при рівні значущості α = 0,15.

Розв'язання. Закон Пуассона $P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

Параметр λ закону Пуассона візьмемо таким, що дорівнює вибірковому середньому $\bar{x}$ (рівень значущості α=0,15).

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(3\cdot 0 + 3\cdot 1 + 2\cdot 6 + 3\cdot 10 + 4\cdot 20 + 5\cdot 20 + 6\cdot 14 + 7\cdot 10 +$$
$$+ 8\cdot 8 + 9\cdot 3 + 10\cdot 3) = 5.$$

Тоді $P_i = \frac{5^i}{i!} e^{-5}$

Обчислимо ймовірність появи x_i за законом Пуассона.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	0,0067	0,337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,018

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(3-0,67)^2}{0,67} + \frac{(3-0,373)^2}{3,373} + \frac{(6-8,42)^2}{8,42} + \frac{(10-14,04)^2}{14,04} +$$
$$\frac{(20-17,55)^2}{17,55} + \frac{(14-14,62)^2}{14,62} + \frac{(10-10,44)^2}{10,44} + \frac{(8-6,53)^2}{6,53} + \frac{(3-3,63)^2}{3,63} +$$
$$\frac{(3-1,81)^2}{1,81} = 10,7904;$$

r = 11–1–1=9 (k = 11; $\bar{x} = \lambda$).

За таблицею для r=9; α=0,15; χ^2 =10,7904.

Умова $\chi^2 \le \chi_{kp}{}^2$ виконується.

Отже, гіпотеза про розподіл випадкових величин за законом Пуассона не суперечить вибірковим даним.

Приклад 5. Проведено n = 55 спостережень над випадковою величиною x.

Результати випробувань зведені в групований статистичний ряд.

Інтервали	(10;12)	(12;14)	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)	(22;24)
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл X за критерієм Пірсона χ^2 зі значущістю α=0,10.

Розв'язання. Ширина інтервалу групування h = 2; об'єм вибірки 55. Складемо статистичний ряд

y_i	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Оцінки середнього і середньоквадратичного відхилення

$$\bar{x} = \frac{1}{55}\left(11 \cdot 2 + 13 \cdot 4 + 15 \cdot 8 + 17 \cdot 12 + 19 \cdot 16 + 21 \cdot 10 + 23 \cdot 3\right) = 17{,}84;$$

$$S^2 = \frac{1}{55}(11^2 \cdot 2 + 13^2 \cdot 4 + 15^2 \cdot 8 + 17^2 \cdot 12 + 19^2 \cdot 16 + 21^2 \cdot 10 + 23^2 \cdot 3) -$$

$$-17{,}84^2 = 8{,}526;$$

S =2,92.

Складемо таблицю, де $f(z_1)$ – ординати щільності нормального розподілу $N(0;1)$.

y_i	n_i	$z_i = \frac{\lvert y_i - \bar{x} \rvert}{S}$	$f(z_c)$	$np_i = \frac{nh}{S} f(z_c)$		$\frac{(n_i - np_i)^2}{np}$
11	2	2,34	0,0258	0,972		0,0016
13	4	1,66	0,1006	3,790	1	
15	8	0,97	0,2492	9,388		
17	12	0,29	0,3825	14,409	2	0,403
19	16	0,40	0,3625	13,874	3	0,326
21	10	1,08	0,2227	8,389	4	0,138
23	3	1,77	0,0833	3,198		

$$\chi^2 = 0{,}919.$$

Оскільки при виборі визначаються оцінки двох параметрів, то r = 4–2–1 = 1.

За таблицею $\chi^2_{kp}(1)$=2,71; $\chi^2 = 0{,}919 < \chi^2_{kp}$.

Тобто гіпотеза про нормальний розподіл не суперечить результатам випробувань.

МОДУЛЬ 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

3.1. Основні поняття. Пряма регресія

Дві випадкові величини можуть бути зв’язані або не зв’язані одна з однією деякою залежністю.

Статистичну залежність, при якій зміна однієї випадкової величини впливає на розподіл другої, якщо при цьому змінюється середнє значення другої, називають кореляційною.

Якщо X та Y незалежні випадкові величини, то коефіцієнт кореляції $\rho(x; y) = 0$; якщо $|\rho(x; y)| = 1$, то x, y зв’язані лінійно; якщо $0 < |\rho(x; y)| < 1$, то x, y залежні. Причому чим ближче $|\rho(x; y)|$ до одиниці, тим функціональна залежність ближче до вигляду $Y=ax+b$. Тому цілком природним є питання про наближене зображення зв’язку між Y та X лінійною функцією.

Означення: пряма $y = ax+b$ називається *прямою регресії* y на x, якщо a та b вибрані так, щоб середнє квадратичне відхилення $ax+b$ від Y було мінімальним

$$M(y-ax-b)^2 = \min.$$

Аналогічно визначається пряма регресії x на y.

Рівняння прямої регресії Y на X має вигляд

$$y - M(y) = \rho\frac{\sigma y}{\sigma x}\left(x - M(x)\right).$$

Аналогічно X на Y

$$x - M(x) = \rho\frac{\sigma x}{\sigma y}\left(x - M(y)\right).$$

Обидві прямі збігаються, якщо $|\rho(x; y)| = 1$.

3.2. Вибіркові характеристики. Обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції

Нехай в результаті n випробувань дістали n пар значень $(x_i; y_i)$ випадкових величин X та Y $(i = \overline{1,n})$. Вибіркові середні та дисперсії позначимо $\overline{x}$, $\overline{y}$, S_x^2, S_y^2.

За оцінку коефіцієнта кореляції $\rho(x; y)$ можна взяти вибірковий коефіцієнт кореляції $r(x; y)$ між розподілами вибірок

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

$$y_1, y_2, ..., y_n.$$

Тоді

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{nS_x S_y}.$$

Аналогічно визначаються рівняння вибіркових прямих регресій X на Y

$$x - \overline{x} = r\frac{S_x}{S_y}(y - \overline{y}),$$

Y на *X*

$$y - \overline{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \overline{x}).$$

При невеликому *n* вибірковий коефіцієнт *r* обчислюється за формулою

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{nS_x S_y}.$$

Якщо *n* – велике, то дані записуються у вигляді, так званої, кореляційної таблиці:

$x \backslash y$	y_1	y_2	…	y_e	$\sum$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1e}	m_1
x_2	n_{12}	n_{22}	…	n_{2e}	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{ke}	m_k
$\sum$	n_1	n_2	…	n_e	n

Тоді

$$n_j = \sum_{j=1}^{k} n_{ej}; \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{e} n_j = n;$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{e} n_{ij} x_i y_j - n\overline{x}\overline{y}}{nS_x S_y}.$$

Приклад 1. В результаті n = 10 незалежних випробувань над (*X*, *Y*) отримано таблицю значень:

x_i	2	2	2,1	3	3,1	3,1	4	4	4,5	5
y_i	3	2,8	2	1,8	1,8	2	2,3	2,4	2,5	3,4

Знайти рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та *X* на *Y*. Побудувати графік одержаних прямих регресій.

Розв'язання. Для зручності обчислень складемо таблицю:

N	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2	y_i^2
1	2	3	6	4	9
2	2	2,8	5,6	4	7,84
3	2,1	2	4,2	4,41	4
4	3	1,8	5,4	9	3,24
5	3,1	1,8	5,58	9,61	3,24
6	3,1	2	6,2	9,61	4
7	4	2,3	9,2	16	5,29
8	4	2,4	9,6	16	5,76
9	4,5	2,5	11,25	20,25	6,25
10	5	3,4	17	25	11,56
$\sum$	32,8	24	80,03	117,88	60,18

Тоді

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{32,8}{10} = 3,28;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{24}{10} = 2,4.$$

$$S_x = 1,01. \qquad S_y = 0,51.$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x} = \frac{1}{10}\cdot 117,88 - 3,28^2 11,788 - 10,7584 \approx 1,03.$$

$$S_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{y} = \frac{1}{10}\cdot 60,18 - 2,4^2 = 6,018 - 5,76 = 0,258.$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{nS_x S_y} = \frac{80,03 - 10\cdot 3,28\cdot 2,4}{10\cdot 1,01\cdot 0,51} = 0,25;$$

$$r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}25 \cdot \frac{1{,}01}{0{,}51} = 0{,}50; \qquad r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}25 \cdot \frac{0{,}51}{1{,}01} = 0{,}13.$$

Підставимо знайдені значення у рівняння лінійної регресії (рис. 13) *Y* на *X*

$y - 2{,}4 = 0{,}13(x - 3{,}28);$

$y = 0{,}13x + 1{,}97;$

X на *Y*

$x - 3{,}28 = 0{,}50(y - 2{,}4);$

$x = 0{,}50y + 2{,}08.$

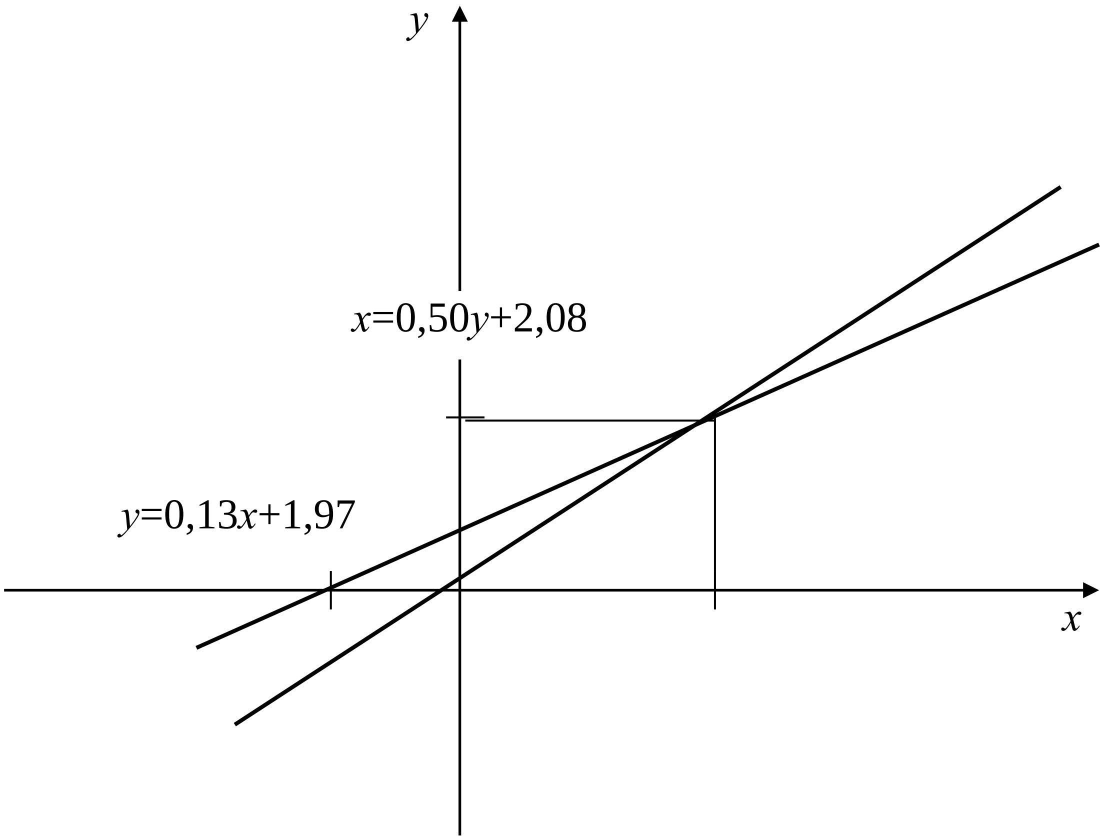

Рис.13

3.3. Нелінійна кореляція

Нелінійна кореляція розв'язує ті самі задачі, що і лінійна, а саме встановлює параметри залежності $y_x = f(x, \alpha, \beta\ldots)$ та ступені залежності X та Y. Для першої задачі використовують метод найменших квадратів. Для оцінки ступеня зв'язку користуються кореляційним відношенням:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y};$$

де $\sigma_{yx} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{xi} - \overline{y})^2 n_{xi}}$; $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y})^2}$;

n_{xi} – число значень x в i-ому інтервалі.

Приклад 2. В результаті $n = 5$ незалежних випробувань отримано таблицю значень:

x_i	5	10	15	20	25
y_i	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

Вважаючи, що залежність між цими змінними має вигляд $y = a + bx + cx^2$, знайти оцінки параметрів a, b, c за методом найменших квадратів.

Розв'язання. Перетворимо вихідні дані за формулами спрощення обчислень та визначимо

$$t = \frac{x-15}{5}; z = 10(y-60);$$

$$z = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2.$$

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum t_i + \beta_2 \sum t_i^2 = \sum z_i, \\ \beta_0 \sum t_i + \beta_1 \sum t^2{}_i + \beta_2 \sum t_i^3 = \sum t_i z_i, \\ \beta_0 \sum t^2{}_i + \beta_1 \sum t^3{}_i + \beta_2 \sum t_i^4 = \sum t^2{}_i z_i. \end{cases}$$

Складемо таблицю

x	t	y	z	tz	t^2	zt^2	t^3	t^4
5	-2	59,3	-7	14	4	-28	-8	16
10	-1	59,8	-2	2	1	-2	-1	1
15	0	60,1	1	0	0	0	0	0
20	1	64,9	49	49	1	49	1	1
25	2	70,2	102	204	4	408	8	16
$\sum$	0	-	143	269	10	427	0	34

Тоді маємо

$$\begin{cases} 5\beta_0 + 10\beta_2 = 143; \\ 10\beta_1 = 269; \\ 10\beta_0 + 34\beta_2 = 427. \end{cases}$$

Звідки $\beta_1 = 26{,}9$; $\beta_0 \approx 8{,}457$; $\beta_2 \approx 10{,}07$;

$z = 8{,}457 + 26{,}9t + 10{,}07t^2$ або $y = 61{,}84 - 0{,}67x + 0{,}04x^2$ – залежність між змінними x та y.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1
МОДУЛЬ 1 “Теорія ймовірностей”

Завдання 1 - 4 . Розв’язати задачу.

Завдання 5. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання *M(X)*, дисперсію *D(X)*, середньоквадратичне відхилення *σ(X)*, функцію розподілу *F(X)* та побудувати її графік.

Завдання 6. Випадкова величина задана щільністю розподілу *f(x)*. Знайти функцію розподілу *F(x)*, математичне сподівання *M(X)*, дисперсію *D(X)* випадкової величини та ймовірність того, що в результаті випробувань *x* набуде значення, що належить інтервалу *(a,b)*. Побудувати графіки *f(x)* та *F(x)*.

Завдання 7. Відомі математичне сподівання *a* та середнє квадратичне відхилення *σ* випадкової величини *x*, яка розподілена нормально. Обчислити ймовірність того, що: а) ця випадкова величина прийме значення, які належать інтервалу *(α,β)*; б) абсолютна величина відхилення $|x - a|$ буде менше ξ.

Варіант 1.

Завдання 1. Із коробки, в якій 10 білих, 6 чорних та 4 синіх кульок, навмання виймають 3 кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі білі;

б) одна біла і дві чорні;

в) одна біла, одна чорна, одна синя.

Завдання 2. Для обслуговування деякого будівництва виділено 5 автомобілів. За однакових і незалежних умов з ймовірністю 0,8 вони прибувають на будівництво. Знайти ймовірність того, що в даний момент будівництво обслуговують:

а) всі п’ять автомобілів;

б) не менше трьох;

в) жодний автомобіль не прибув для обслуговування.

Завдання 3. На трьох лініях заводу залізобетонних виробів при однакових і незалежних умовах виготовляються конструкції однієї назви, причому: перша лінія випускає 60%, друга - 30%, третя - 10% всіх виробів. Ймовірність, що кожна конструкція є небракованою відповідно для першої лінії 0,8, для другої - 0,7, для третьої - 0,4. Знайти ймовірність, якщо

а) конструкція, що знаходиться під навантаженням, є небракованою;

б) за умови, що вона небракована, знайти ймовірність того, що її виготовлено на третій лінії.

Завдання 4. Монета кинута 100 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде:

а) 60 раз;

б) не менше 40 і не більше 90 разів.

Завдання 5. Монету кинуто чотири рази. X – число появ герба.

Завдання 6. $$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le 2; \\ \dfrac{1}{4} \text{ при } 2 < x \le 4; x \in (2{,}5:3). \\ 0 \text{ при } x > 4;\end{cases}$$

Завдання 7. a=1; σ=2; α=0; β=4; ξ=5.

Варіант 2.

Завдання 1. В урні 15 білих, 5 – чорних, 20 синіх кульок. Навмання вийняли 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) 3 білих та 2 чорних;

б) 5 синіх;

в) 1 біла, 3 чорних та 1 синя кульки.

Завдання 2. На виробництві для сигналізації про аварію встановлено чотири незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що при аварії пристрої спрацюють відповідно дорівнює p_1=0,9, p_2=0,95, p_3=0,94, p_4=0,79. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють:

а) всі пристрої;

б) лише три пристрої;

в) не менше одного.

Завдання 3. На заводи ЗБК надходить цемент різних марок, що виготовлений на цементних заводах №1, №2 та №3. Обсяг виготовлення деякої марки 1 цементу для кожного заводу відповідно дорівнює: для заводу №1 - 30% від загального виробництва; №2 - 20% від загального виробництва; №3 - 50%. Надійшло п'ять вагонів із заводу №1, 10 - із заводу №2 та 15 - із заводу №3. Навмання взятий вагон розвантажується. Знайти ймовірність того, що в ньому знаходиться цемент марки I та ймовірність того, що його виготовлено на заводі №2.

Завдання 4. Ймовірність появи події в кожному експерименті дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в 245 експериментах подія з’явиться:

а) рівно сто разів;

б) не менше 50 разів і не більше 200.

Завдання 5. З ймовірністю 0,4 стрілець влучив в ціль за один постріл. Стрілець вистрілив чотири рази. X – число влучень стрільця в ціль.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2} \cos x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } x \le 0; \end{cases}$ $\qquad x \in (0; \dfrac{\pi}{4}).$

Завдання 7. a=2; σ=4; α=-2; β=3; ξ=4.

Варіант 3.

Завдання 1. Із партії в 30 деталей, серед яких 25 стандартних вийняли 5 деталей. Знайти ймовірність того, що:

а) всі стандартні;

б) всі нестандартні;

в) одна стандартна, а чотири нестандартні.

Завдання 2. На будівництві об'єкта працюють в однакових та незалежних умовах з ймовірністю роботи для кожного 0,8 шість бульдозерів. Знайти ймовірність того, що в даний момент на будівництві:

а) працює лише чотири бульдозери;

б) не менше п'яти;

в) жодний бульдозер не працює.

Завдання 3. На трьох заводах виготовляються конструкції для будівництва деякого об'єкта. Відомо, що для першого заводу процент браку складає 0,2% від загального виробництва, для другого - 0,3%, для третього - 0,5%- На об'єкт доставлено 200 виробів першого заводу; 100 - другого та 30 - третього. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що: бракована конструкція поставлена першим заводом; брак поставлено другим заводом.

Завдання 4. Ймовірність влучити в ціль для стрільця 0,7. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що стрілець попадав в ціль:

а) 90 разів;

б) не менше 75 разів.

Завдання 5. Гральний кубик кинуто три рази. X – число появ "шістки".

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x > \pi; \\ \dfrac{1}{2} \sin x \text{ при } 0 < x \le \pi; \\ 0 \text{ при } x \le 0; \end{cases} \quad x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}).$

Завдання 7. a=3; σ=2; α=-3; β=2; ξ=5.

Варіант 4.

Завдання 1. Із коробки, в якій 18 білих, 9 чорних та 7 зелених деталей, складених навмання, вийняв 6 деталей. Знайти ймовірність того, що:

а) всі деталі зелені;

б) всі деталі білі;

в) 2 чорні, 2 білі, 2 зелені.

Завдання 2. У цеху чотири верстати. Ймовірність відмовити 1-го дорівнює 0,1; 2-го – 0,2; 3-го – 0,1; 4-го – 0,3. Обчислити ймовірність роботи:

а) всіх верстатів;

б) двох верстатів;

в) хоча б одного.

Завдання 3. В будинку встановлюються електроплити, які виготовлені на чотирьох заводах. Процент браку плит для кожного заводу відповідно дорівнює: для першого - 0,07%, для другого - 0,08%, для третього - 0,1%. Встановлена навмання плита виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена на третьому заводі, якщо на об'єкт було поставлено 50 плит з 1-го заводу, 100-з другого, 20 - з третього та 40 - з четвертого.

Завдання 4. Ймовірність влучити в ціль для стрільця 0,8. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що стрілець не попав в ціль:

а) рівна 20 разів;

б) не більше 15 разів.

Завдання 5. В сім’ї четверо дітей. Ймовірність народження хлопчика p=0,51. X – число хлопчиків в сім’ї.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } 0 \;\; x \le 0; \\ 1 \;\text{ при }\; 0 < x \le 1; \\ 0 \;\text{ при }\; x > 1; \end{cases} \quad x \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}).$

Завдання 7. a = 4; σ = 5; α = 0; β = 4; ξ = 3.

Варіант 5.

Завдання 1. В бригаді 20 робітників, серед яких 11 дівчат, решта хлопці. На нараду послали 4-х представників від бригади. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) одні чоловіки;

б) одні жінки;

в) дві жінки і 1 чоловік.

Завдання 2. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й – 0,7; 3-й – 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит:

а) всі студенти;

б) тільки один;

в) хоча б один.

Завдання 3. На складі в трьох ящиках знаходяться деталі для ремонту автомобілів. Відомо, що в першому ящику 50 деталей, з яких 6 бракованих, у другому – 30 деталей, з яких 5 бракованих, у третьому - 40 деталей, з яких 6 бракованих. Майстер навмання вибирає деталь з будь-якого ящика. Знайти ймовірність того, що взята деталь бракована, й того, що майстер взяв її з другого ящика.

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених:

а) рівно 50 хлопчиків;

б) не менше 30 і не більше 70.

Завдання 5. В білеті чотири запитання. З ймовірністю 0,4 студент правильно відповідає на кожне з них. X – число правильних відповідей студента.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 5\mathrm{e}^{-5\mathrm{e}} & x \geq 0; \\ 0 \text{ при } x < 0; \end{cases}$ $x \in (1;2)$.

Завдання 7. a=5; σ=4; α=0; β=6; ξ=9.

Варіант 6.

Завдання 1. В групі 30 студентів, серед яких 10 відмінників, 5 відстаючих, а інші встигаючі. По списку відібрали 5 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі відмінники;

б) один відмінник та 4 відстаючих;

в) один відмінник, 2 відстаючих та 2 встигаючих.

Завдання 2. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент не складе іспит дорівнює 0,1, для 2-го – 0,2, 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність того, що студенти складуть іспит:

а) всі студенти;

б) двоє студентів;

в) хоча б один студент.

Завдання 3. В групі з 25 чоловік, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей 10 відмінників, 7 - підготовлених добре, 5 задовільно та 3 - погано підготовлених студенти. Відмінники знають всі 25 питань програми, добре підготовлені - 20, задовільно підготовлені - 15, погано підготовлені - 10. Викликаний навмання студент відповів на два запитання. Знайти ймовірність події:

- студент підготовлений на відмінно або добре;
- студент підготовлений погано.

Завдання 4. Подія в кожному із 200 експериментів з'являється з постійною ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:

а) 75 разів;

б) не менше 30 і не більше 170 разів.

Завдання 5. На прилавках магазина виставлено для продажу п'ять тортів "Космос" та чотири – "Київських". X – число проданих в даний момент "Київських" тортів.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 4e^{-4e} \quad x \geq 0; \end{cases}$ $x \in (1;3)$.

Завдання 7. a=6; σ=5; α=1; β=6; ξ=10.

Варіант 7.

Завдання 1. В групі 30 студентів, серед яких 15 дівчат карокі, 5 сіроокких інші – чорноокі. По списку вибрали 6 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них є:

а) всі карокі;

б) 3 карокі та 3 чорноокі;

в) по двоє кароокких, сіроокких та чорноокких.

Завдання 2. Прилад має чотири вузли. Ймовірність виходу із ладу для 1-го вузла – 0,1, для 2-го – 0,2, 3-го – 0,4, для 4-го – 0,15. обчислити ймовірність роботи:

а) всіх вузлів;

б) хоча б одного;

в) одного вузла.

Завдання 3. В магазин з першого заводу поступило 150 електролампочок, з другого – 100, а з третього – 200. Ймовірність того, що електролампа не бракована, для 1-го заводу дорівнює 0,9, другого – 0,8, третього – 0,6. Куплена електролампочка небракована. Знайти ймовірність того, що вона вироблена 2-м заводом.

Завдання 4. Ймовірність того, що взятий навмання по списку студент складає іспит складає 0,8. На курсі 80 студентів. Знайти ймовірність того, що іспит складуть:

а) 50 студентів;

б) не менше 70 студентів.

Завдання 5. В лотереї 5 із 30 довільно закреслено п'ять номерів. Х – число правильно вгаданих номерів.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2;\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $\quad x\in(1;1,5).$

Завдання 7. a=7; σ=3; α=0; β=3; ξ=1.

Варіант 8.

Завдання 1. В колоді 36 карт. З колоди вибрали 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі червоної масті; б) дві червоної та дві чорної; в) дама, туз, десять, шість.

Завдання 2. Ймовірність попадання в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,7, 2-го – 0,8, 3-го – 0,9. Стрільці зробили по одному пострілу. Обчислити ймовірність того, що в ціль не попали:

а) хоча б один стрілець;

б) всі стрільці;

в) два стрільці.

Завдання 3. Три стрілки провели залп, причому дві кулі попали в мішень. Знайти ймовірність того, що перший стрілок попав у мішень, якщо ймовірності попадання в мішень першим, другим та третім стрілків відповідно дорівнює 0,2; 0,4; 0,6.

Завдання 4. Ймовірність того, що автомат запрацює при одному включенні 0,8. Автомат включали 200 разів. Знайти ймовірність того, що він запрацював:

а) 150 разів;

б) не менше 100 і не більше 190 разів.

Завдання 5. В ящику 50 деталей серед яких 5 бракованих. Навмання взяті п'ять деталей. X – число бракованих серед вибраних.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 2x \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases} \quad x \in (0{,}1;0{,}2).$

Завдання 7. a=8; σ=6; α=3; β=6; ξ=12.

Варіант 9.

Завдання 1. В колоді 36 карт. З колоди вибрали 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі чорної масті;

б)3 чорної та одна червона;

в) два тузи і дві дами.

Завдання 2. На ціль скинуто чотири авіаційні бомби. Ймовірність попадання яких відповідно рівні: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили:

а) всі бомби;

б) дві бомби;

в) хоча б одна.

Завдання 3. Два із незалежно працюючих елементів відмовили. Знайти ймовірність, що відмовили перший та другий елементи, якщо ймовірність роботи першого, другого та третього відповідно рівні 0,7; 0,8; 0,6.

Завдання 4. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчика та дівчинки однакова, знайти ймовірність того, що серед 300 народжених дітей хлопчиків буде:

а) 200 осіб;

б) не менше 100.

Завдання 5. Ймовірність настання деякої події в кожному з однакових і незалежних дослідів 0,5. X – число настання події в чотирьох дослідах.

Завдання 6. $$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0; \\ 2\cos x \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{6}; \quad x\in(\dfrac{\pi}{12}:\dfrac{\pi}{6}). \\ 0 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Завдання 7. а=9; σ=7.; α=2; β=6; ξ=13.

Варіант 10.

Завдання 1. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі браковані;

б) всі небраковані;

в) 3 браковані і 1 небракована.

Завдання 2. Три дослідники, незалежно один від одного, виміряють деяку фізичну величину. Ймовірність помилитися рівна 0,1; 0,2;0,4. Знайти ймовірність того, що при одному вимірі:

а) помилився лише один;

б) помилився хоча б один;

в) жоден не помилився.

Завдання 3. В цех поступили однакові деталі із трьох верстатів. Ймовірність браку на 1-му верстаті дорівнює 0,05, на 2-ому – 0,15, на 3-му – 0,1. Складальник взяв одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона доброякісна, якщо продуктивність верстатів відноситься як 2:3:5 та виготовлена на 2-ому.

Завдання 4. Монету кинуто 200 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде:

а) 150 раз;

б) не менше 20 раз.

Завдання 5. В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль. Навмання взято три кулі. X – число білих куль із трьох взятих з урни.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 3x^2 \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases} \quad x \in (0{,}2;0{,}4).$

Завдання 7. a=10; σ=5; α=1; β=10; ξ=10.

Варіант 11.

Завдання 1. В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. По табельним номерам вибирають семеро чоловік. Знайти ймовірність того, що серед вибраних

а) три жінки;

б) 2 чоловіки і 2 жінки;

в) три чоловіка.

Завдання 2. Ймовірність того, що при аварії не спрацює 1-й сигналізатор дорівнює0,1; 2-й – 0,2; 3-й – 0,4; 4-й – 0,15. Всі вони працюють незалежно один від одного. Обчислити ймовірність того, що при аварії спрацює:

а) хоча б один сигналізатор;

б) два сигналізатори;

в) жоден не спрацює.

Завдання 3. На будівництво поступають однакові деталі, виготовлені на 3-х заводах, з продуктивністю заводів 1:2:4. Ймовірність браку на 1-му заводі дорівнює 0,3, 2-му – 0,6, 3-му – 0,1. Взята навмання деталь – бракована. Знайти ймовірність того, що вона виконана на 3-му заводі.

Завдання 4. З ймовірністю 0,7 продається кожна партія деякого товару. На аукціон виставлено 700 партій. Знайти ймовірність того, що буде продано:

а) 300 партій;

б) не менше 500 партій.

Завдання 5. Ймовірність виграти по 1 лотерейному білету дорівнює 0,02. Х – число виграних білетів для володаря чотирьох білетів.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1; \\ \frac{1}{4}x \text{ при } 1 \le x \le 3; \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

Завдання 7. а=7; σ=6; α=2; β=12; ξ=15.

Варіант 12.

Завдання 1. В ящику 25 деталей, серед яких 10 кольорові. Навмання витягують 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей:
а) всі кольорові;
б) всі не кольорові;
в) 2 кольорові та 3 некольорові.

Завдання 2. Ймовірність не попадання в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,2; для 2-го – 0,1; для 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність попадання в ціль:
а) хоча б одного;
б) двох;
в) всіх.

Завдання 3. Для 10 студентів 1-ї групи ймовірність скласти іспит дорівнює 0,9, для 12 (2-га група) – 0,6, для 15 (3-тя група) – 0,8. Навмання викликаний студент склав іспит. Знайти ймовірність того, що студент, що склав іспит, належить до 2-ї групи.

Завдання 4. Ймовірність появи події в кожному із 900 незалежних експериментів дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:
а) рівно 450 разів;
б) не менше 50 та не більше 350.

Завдання 5. Зроблено чотири постріли в ціль. Ймовірність попадання при одному пострілі 0,6. X – число попадань.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -4; \\ \frac{1}{8}(x+4) \text{ при } -4 \le x \le 0; \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

Завдання 7. a=8; σ =10; α=0; β=20; ξ=16.

Варіант 13.

Завдання 1. Серед 100 фотографій знаходяться 10 розшукуваних. З конверта навмання витягнуто 10 фотографій. Знайти ймовірність того, що серед взятих будуть:

а) всі потрібні;

б) всі непотрібні;

в) 6 потрібних та 4 непотрібні.

Завдання 2. У цеху чотири верстати. Ймовірність роботи 1-го верстата дорівнює 0,9; 2-го – 0,8; 3-го – 0,6; 4-го – 0,1. Обчислити ймовірність відмови:

а) всіх верстатів;

б) одного верстату;

в) хоча б одного.

Завдання 3. В першій урні 10 кульок, з них 8 білих, в другій – 20, із них 4 білих. З урни навмання вийняли по одній кульці, а потім з двох навмання взято одну кульку. Знайти ймовірність того, що взята біла кулька.

Завдання 4. Ймовірність того, що подія з'явиться в кожному із 2400 експериментах постійна і дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:

а) 1400 раз;

б) не менше 1000 разів.

Завдання 5. Ймовірність правильно відповісти на кожне питання лектора для студента становить 0,8. X – число правильних відповідей на 4 запитання.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ \dfrac{1}{2}(x-3) \text{ при } 0 \le x \le 5; \\ 0 \text{ при } x > 5. \end{cases}$

Завдання 7. a=9; σ=11; α=-1; β=10; ξ=9.

Варіант 14.

Завдання 1. В колоді 36 карт. Навмання витягнуто три карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) дама, валет, король;

б) дві десятки ті сімка;

в) всі тузи.

Завдання 2. У цеху чотири верстати. Ймовірність відмови 1-го верстата дорівнює 0,3; 2-го – 0,4; 3-го – 0,6; 4-го – 0,1. Обчислити ймовірність роботи:

а) хоча б одного верстату;

б) двох верстатів;

в). всіх верстатів.

Завдання 3. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілок влучить в ціль при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок вразив ціль. Що ймовірніше: стрілок влучив з гвинтівки з оптичним прицілом чи ні?

Завдання 4. В страховій компанії застраховано 1000 автомобілів. Ймовірність поломки довільного автомобіля 0,006. Кожний володар сплачує в рік 450 гривень, а страхова компанія виплачує в результаті аварії 1000 гривень. Знайти ймовірність подій:

A={за рік страхова компанія не отримає прибутку};

B={прибуток компанії не менше 80000 гривень}.

Завдання 5. В партії з 6 деталей чотири стандартних. Навмання взято три деталі. X – число стандартних серед вибраних.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -4; \\ \dfrac{2}{9}(x+4) \text{ при } -4 \le x \le -1; \\ 0 \text{ при } x > -1. \end{cases}$

Завдання 7. a=10; σ=6; α=3; β=4; ξ=11.

Варіант 15.

Завдання 1. В коробці 6 ірисок, 6 шоколадок та 6 зефірів. Навмання витягнуто 4 цукерки. Знайти ймовірність, що серед них будуть:

а) всі шоколадки;

б) 2 зефіра, 2 іриски та 2 шоколадки;

в) всі іриски.

Завдання 2. Четверо студентів з ймовірністю відповідно для кожного 0,7; 0,8; 0,9; 0,6 можуть отримати залік. Знайти ймовірність того, що залік здали:

а) двоє студентів;

б) хоча б один студент;

в) жоден студент не здав залік.

Завдання 3. Число вантажних машин, що проїздять повз бензозаправну, відноситься до числа легкових машин, які проїздять там же, як 3:2. Ймовірність того, що вантажівка буде заправлятись, дорівнює 0,1; для легкової – 0,2. На заправку під'їхала машина. Знайти ймовірність, що вона вантажна.

Завдання 4. Відомо, що 5% студентів носять окуляри. Знайти ймовірність того, що серед 150 студентів, що сидять в аудиторії носять окуляри:

а) 50 студентів;

б) не менше 10 і не більше 40.

Завдання 5. В партії із 10 деталей 8 стандартних. Навмання взяті три деталі. X – число стандартних серед вибраних.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -5; \\ \frac{1}{2}(x+5) \text{ при } -5 \le x < -3; \\ 0 \text{ при } x \ge -3. \end{cases}$

Завдання 7. a=11; σ=7; α=2; β=10; ξ=5.

Варіант 16.

Завдання 1. Навмання складається букет із трьох квіток. Серед квіток є 6 айстр, 5 троянд та 3 ромашки. Знайти ймовірність того, що букет складається:

а) із трьох троянд;

б) із трьох ромашок;

в) із 1 троянди, 1 ромашки та 1 айстри.

Завдання 2. Студент знає 20 питань із 25 програми. Знайти ймовірність, що студент із трьох запитань відповів:

а) на одне запитання;

б) на всі запитання;

в) не відповів на жодне.

Завдання 3. На контроль поступили вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 20 виробів, серед яких 4% браку, другий – 30 виробів, в яких 1% браку, а третій – 50, серед яких 5% браку. Взята навмання деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 3-й робітник.

Завдання 4. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі 0,6. Знайти ймовірність того, що при 250 пострілах в мішень попали:

а) 100 разів;

б) не менше 150 і не більше 200.

Завдання 5. В партії 10% нестандартних деталей. Взято навмання чотири. X – число нестандартних серед відібраних.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<2; \\ \frac{1}{2}(x-2) \text{ при } 2 \le x \le 4; \\ 0 \text{ при } x>4. \end{cases}$

Завдання 7. a=12; σ=13; α=10; β=20; ξ=6.

Варіант 17.

Завдання 1. Із урни, в якій 10 білих, 4 чорних та 5 синіх кульок, навмання вибирають три кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі білі;

б) всі чорні;

в) 1 біла, 1 синя, 1 чорна.

Завдання 2. В продукції заводу брак складає 5% від загальної кількості деталей. Для контролю відібрано 20 деталей. Знайти ймовірність того, що серед відібраних:

а) одна бракована;

б) не більше чотирьох бракованих;

в) жодна не бракована.

Завдання 3. На контроль поступили вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 30 виробів, серед яких 7% браку, 2-й – 50, серед яких 4% браку, 3-й – 40, серед яких 3% браку. Взятий навмання виріб – доброякісний. Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 2-й робітник.

Завдання 4. Вважаючи, що ймовірність навчатися у ВУЗі для хлопців та дівчат рівна, знайти ймовірність того, що серед 300 студентів:

а) 200 дівчат;

б) не менше 100 і не більше 170 дівчат.

Завдання 5. В партії 20% нестандартних деталей. Навмання вибрані чотири з них. X – число стандартних серед відібраних.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-1; \\ \dfrac{2}{9}(x+1) \text{ при } -1\le x\le 2; \\ 0 \text{ при } x>2. \end{cases}$

Завдання 7. a=15; σ=14; α=0; β=30; ξ=11.

Варіант 18.

Завдання 1. В лотереї 5 із 36 навмання закреслено 5 номерів. Знайти ймовірність того, що:

а) вгадано 5 із 5;

б) жоден номер не вгаданий;

в) вгадано 3 номера.

Завдання 2. Ймовірність того, що три електролампочки відпрацюють необхідну кількість годин відповідно дорівнює 0,5; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність, що відпрацюють необхідну кількість годин:

а) дві лампочки;

б) хоча б одна;

в) всі лампочки.

Завдання 3. Три стрілки проводять по одному пострілу у мішень. Ймовірність попадання в ціль для них відповідно рівні: 0,7; 0,8; 0,9. Яка ймовірність того, що не влучив 2-й стрілець, якщо в мішені 2 пробоїни?

Завдання 4. З ймовірністю 0,1 студент може запізнитися на лекцію. Знайти ймовірність того, що на лекцію не запізняться із 100 студентів:

а) 75 студентів;

б) не менше 70.

Завдання 5. Ймовірність відмови одного автомата 0,1. Працюють чотири автомати. X – число автоматів, що працюють.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1; \\ \frac{1}{2}(x-1) \text{ при } 1 \le x \le 3; \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

Завдання 7. a=14; σ=7; α=-5; β=20; ξ=10.

Варіант 19.

Завдання 1. В лотереї 6 із 36 навмання закреслено 6 номерів. Знайти ймовірність того, що:

а) жоден номер не вгадано;

б) вгадано 2 номери;

в) вгадано 4 номери.

Завдання 2. Ймовірність того, що при аварії спрацює 1-й сигналізатор дорівнює 0,6, другий – 0,9, 3-й – 0,8. Обчислити ймовірність того, що при аварії не спрацюють:

а) всі сигналізатори;

б) два сигналізатори;

в) хоча б один.

Завдання 3. В спортивних змаганнях приймають участь 4 команди. Склад їх відповідно 20, 10, 30, 15 – спортсменів. З ймовірністю 0,9 може перемогти I команда, 0,8 – II-га, 0,7 – III-тя, 0,75 – IV-та. Знайти ймовірність того, що переможе IV команда.

Завдання 4. Ймовірність бути викликаним за пропуски у деканат для кожного студента, який прогулює, 0,7. Знайти ймовірність того, що серед 30 прогульщиків викликано у деканат:

а) 10 студентів;

б) не менше 15.

Завдання 5. Із ймовірністю 0,9 кожен студент із навмання вибраних чотирьох, відмінник. X – число відмінників серед вибраних.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -2; \\ \dfrac{2}{9}(x+2) \text{ при } -2 \le x \le 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Завдання 7. a=1; σ=2; α=0; β=4; ξ=5.

Варіант 20.

Завдання 1. Серед кандидатів на студентську конференцію: 6 – першокурсників, 5 – другокурсників та 10 – чотирикурсників. За списками вибрали навмання чотирьох студентів. Знайти ймовірність, що серед вибраних:

а) всі студенти 2-го курсу;

б) 2 студенти 1-го курсу та 2 чотирикурсника;

в) всі студенти першого курсу.

Завдання 2. Ймовірність того, що стрілок може влучити в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,7. Стрілок вистрілив чотири рази. Знайти ймовірність того, що із чотирьох разів він влучив:

а) один раз;

б) хоча б один раз;

в) не влучив жодного разу.

Завдання 3. В спортивних змаганнях приймають участь 4 команди. Склад їх відповідно 10, 15, 12, 13 – спортсменів. Перемогти в іграх вони можуть з ймовірністю 0,4; 0,6; 0,7; 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що у турнірі перемогла I команда.

Завдання 4. З ймовірністю 0,9 автомат видає порцію кави. Купують за день 100 покупців. Знайти ймовірність того, що кількість людей, що випили каву:

а) 90 чоловік;

б) не менше 80.

Завдання 5. З ймовірністю 0,3 кожен студент з навмання вибраних чотирьох має борг з деякою предмету. X – число боржників серед вибраних.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -3; \\ \frac{2}{9}(x+3) \text{ при } -3 \le x \le 0; \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

Завдання 7. a=2; σ=4; α=-2; β=6; ξ=6.

Варіант 21.

Завдання 1. В бібліотеці знаходяться книги із 16 розділів науки. Надійшло замовлення на 4 книги. Вважаючи, склад замовлення рівноможливим, знайти ймовірність того, що:

а) всі книги із різних розділів науки;

б) всі книги з одного розділу науки;

в) 2 із одного, 2 із іншого.

Завдання 2. З ймовірностями 0,1; 0,2; 0,3 та 0,4 контролери при перевірці деталі можуть зробити помилку. Знайти ймовірність того, що не помилилися:

а) всі контролери;

б) два контролера;

в) три контролери.

Завдання 3. Для обслуговування фірми виділено п’ятеро спеціалістів, які з ймовірністю 0,7; 0,6; 0,5 повинні вчасно приступити до виконання робіт. Знайти ймовірність того, що п’ятий спеціаліст невчасно розпочав виконувати задану роботу.

Завдання 4. Ймовірність того, що деталь бракована 0,05. Знайти ймовірність того, що в партії із 2000 деталей:

а) 500 бракованих;

б) не менше 30 і не більше 100.

Завдання 5. Монету підкинуто п’ять разів. X – число не випадання герба.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \cos x, \text{ при } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Завдання 7. a=3; σ=2; α=-3; β=2; ξ=7.

Варіант 22.

Завдання 1. На підприємстві працюють 20 людей. Серед них 5 мають вищу освіту, 6 середню. На профсоюзну конференцію вибираються 4 делегати. Знайти ймовірність того, що серед делегатів:

а) всі з вищою освітою;

б) двоє з середньою і двоє з вищою;

в) всі не мають вищої і середньої освіти.

Завдання 2. Відомо, що в партії із 100 телевізорів брак становить 0,5%. На перевірку взято 6 телевізорів. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) 2 браковані;

б) хоча б 2 браковані;

в) жоден телевізор не бракований.

Завдання 3. На конкурс подано 4 роботи. З імовірністю 0,7; 0,6; 0,9; 0,8 відповідно кожна з них може отримати приз. Знайти ймовірність того, що приз не отримає третя робота.

Завдання 4. Ймовірність не появи події в кожному із 100 експериментів 0,2. Знайти ймовірність того, що подія А з'явиться:

а) 50 разів;

б) не менше 3 і не більше 90 раз.

Завдання 5. В урні 5 кульок білих та 10 чорних. Навмання взято чотири кульки. X – число білих серед вибраних.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1; \\ x-\dfrac{1}{2} \quad \text{при } 1<x\le 2; \\ 0 \text{ при } x>2. \end{cases}$

Завдання 7. a=4; σ=1; α=-3; β=4; ξ=6.

Варіант 23.

Завдання 1. В ящику 10 яблук – 1-го сорту, 20 – 2-го і 30 – 3-го. Навмання вибирають 10 яблук. Знайти ймовірність того, що серед вибраних:
а) всі третього сорту;
б) 2 – 1-го і 8 – 2-го;
в) 5 – 1-го, 2 – 2-го і 3 – 3-го.

Завдання 2. Ймовірність того, що радіоприймач бракований -0,09. На перевірку взято 10 приймачів. Знайти ймовірність того, що серед них:
а) хоча б три браковані;
б) жоден не бракований;
в) всі браковані.

Завдання 3. На біржу поступили чотири партії товару. В першій 100 одиниць товару, у ІІ –й – 300; у ІІІ-й – 50 та у VІ-й – 500. З ймовірностями 0,6; 0,5; 0,3 та 0,4 відповідно вони можуть бути продані в перший день торгу. Знайти ймовірність того, що І-а партія не буде продана у перший день торгу.

Завдання 4. Ймовірність появи події А в кожному із 1000 експериментів дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що подія не з'явитися:
а) рівно 900 разів;
б) не менше 500 раз.

Завдання 5. З ймовірністю 0,3 рибак може спіймати на одного черв'яка одну рибину. Насаджено чотири черв'яка. Х – число спійманих рибин.

Завдання 6. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ \sin x \text{ при } 0<x\le\frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Завдання 7. a=5; σ=4; α=10; β=40; ξ=7.

Варіант 24.

Завдання 1. Серед 25 іграшок три мають дефект. Вибрано навмання три іграшки. Знайти ймовірність того, що:

а) всі іграшки будуть без дефекту;

б) 2 з дефектом;

в) 1 з дефектом.

Завдання 2. Ймовірність браку одного виробу -0,1. На перевірку взято 6 виробів. Знайти ймовірність, що серед вибраних виробів не браковані:

а) 5 виробів;

б) хоча б 3 вироби;

в) всі вироби.

Завдання 3. Поставки муки на хлібокомбінат проводяться з трьох заводів у відношенні 2:3:4. Ймовірність поставок вищого сорту муки для I-го заводу складає 0,7; II-го – 0,6; III-го – 0,4. Знайти ймовірність того, що поставлена I-м заводом мука не вищого сорту.

Завдання 4. Ймовірність спізнитися на лекцію для деякого студента стала і дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що на 300 лекцій студент запізнився:

а) рівно 100разів;

б) не більше 200 разів.

Завдання 5. З ймовірністю 0,2 покупець може купити деякі чотири предмети. X – число куплених предметів.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x \text{ при } \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}; \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Завдання 7. a=7; σ=5; α=0; β=20; ξ=6.

Варіант 25.

Завдання 1. В ялинковій гірлянді 10 зелених, 6 жовтих та 4 червоних ліхтарика. Відомо, що три з них не працюють. Знайти ймовірність того, що не працюють:

а) три зелених;

б) три жовтих;

в) 1 зелений, 1 жовтий, 1 червоний.

Завдання 2. Прилад має чотири вузли, що працюють незалежно один від одного. Надійність 1-го вузла 0,8; 2-го – 0,9; 3-го – 0,7; 4-го – 0,6. Знайти ймовірність відмови:

а) хоча б трьох вузлів;

б) одного;

в) жодного.

Завдання 3. На будівництво поставляє цеглу чотири підприємства. Розміри поставок з I-го – 5000 штук, з II-го -- 3000 штук, III –го – 10000 штук, IV-го – 2000 штук цегли. Ймовірність браку для I-го заводу 3%, II-го – 2%, III-го – 4%, IV-го – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взята цегла бракована і виготовлена на III заводі.

Завдання 4. Монету кинуто 1500 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде:

а) рівно 1000 разів;

б) не менше 800 разів.

Завдання 5. Ймовірність виграти по одному білету лотереї 0,1.куплено 5 білетів. X – число білетів, що виграли.

Завдання 6. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\dfrac{\pi}{2}; \\ -\sin x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0; \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

Завдання 7. а = 6; σ = 8; α = -1; β = 4; ξ = 1.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

МОДУЛЬ 2 “Математична статистика та елементи теорії кореляції”

Завдання 1. В таблиці наведені значення деякої випадкової величини X.

1) Побудувати варіаційний та статичний ряди.
2) Побудувати інтервальний ряд довжиною h=5.
3) Побудувати полігон, гістограму, графік емпіричної функції.
4) Обчислити середнє, моду та медіану, дисперсію.
5) Користуючись критерієм Пірсона перевірити гіпотезу H_0=(вибірка розподілена за деяким законом) при рівні значущості α=0,1.

Завдання 2. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання “*a*” нормального розподілу з надійністю 0,95, якщо відомо вибіркове середнє $\overline{x}$, об’єм вибірки *n* і середньоквадратичне відхилення σ.

Завдання 3. Знайти закони розподілу дискретної двомірної величини та їх умовне математичне сподівання, коефіцієнт кореляції, що задана законом розподілення.

Завдання 4. Залежність між двома випадковими величинами задана таблицею кореляції. Визначити коефіцієнт лінійної кореляції, знайти рівняння прямих регресій *y* на *x* та *x* на *y*.

Варіант 1.

Завдання 1. 17; 19; 23; 17; 21; 21; 20; 20; 17; 15; 16; 5; 15; 13; 13; 15; 12; 12; 18; 19; 17; 19; 201; 13; 11; 11; 11; 12; 16; 16; 18; 19; 19; 19; 4; 13; 20; 20; 20; 12; 19; 17; 18; 20; 19; 20; 1; 15; 17; 14; 14; 13; 17; 16; 19; 20; 20; 20; 1. H_0= (за законом Пуасона).

Завдання 2. σ=2; $\overline{x}_b$ =5,40; *n*=10.

Завдання 3.

$y \backslash x$	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Завдання 4.

$y \backslash x$	5	10	15	20	n_y
10	2	-----	-----	-----	2
20	5	4	1	-----	10
30	3	8	6	3	20
40	-----	3	6	6	15

50	-----	-----	2	1	3
n_x	10	15	15	10	*n=50*

Варіант 2.

Завдання 1. 17; 21; 17; 19; 10; 9; 8; 7; 7; 7; 8; 8; 10; 9; 7; 6; 9; 8; 6; 3; 3; 5; 3; 4; 5; 9; 8; 7; 6; 3; 2; 1; 1; 2; 3; 5; 5; 5; 6; 7; 7; 2; 2; 2; 4; 3; 3; 3; 3; 4; 17; 20; 21; 19; 19. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =20,12; *n*=25.

Завдання 3.

*y**x*	1	2	3
1	0,10	0,30	0,20
2	0,06	0,18	0,16

Завдання 4.

*y**x*	65	95	125	155	n_y
30	5	-----	-----	-----	5
40	4	12	-----	-----	16
50	-----	8	5	4	17
60	2	1	5	7	15
70	-----	-----	1	1	2
n_x	11	21	11	12	*n*=55

Варіант 3.

Завдання 1. 13; 4; 17; 2; 14; 3; 14; 3; 14; 3; 6; 11; 12; 9; 11; 12; 13; 14; 13; 4; 17; 2; 17; 2; 6; 5; 5; 6; 9; 9; 9; 11; 8; 12; 11; 10; 6; 13; 4; 13; 4; 13; 14; 8; 8; 10; 8; 9; 17; 2; 15; 15; 15; 1; 11; 12; 9; 11; 8; 8; 8; 9; 9; 10; 9; 10; 11; 10; 9. H_0= (за нормальним законом).

Завдання 2. σ=9; $\bar{x}_b$ =80,14; *n*=25.

Завдання 3.

*y**x*	0	2	5
1	0,12	0,18	0,10
2	0,10	0,11	0,39

Завдання 4.

*y**x*	10	15	20	30	n_y

1	5	7	-----	-----	12
2	-----	20	23	-----	43
3	30	47	2	-----	79
4	10	11	20	6	47
5	-----	9	7	3	19
n_x	45	94	52	9	n=200

Варіант 4.

Завдання 1. 1, 9; 3,1; 0,7; 3,2; 1,1; 1,1; 2,9; 2,9; 2,2; 2,7; 1,7; 3,2; 0,9; 0,8; 3,1; 1,2; 2,6; 2; 2,6; 2,7; 2,7; 2,6; 2,7; 3;2; 1,8; 1,8; 2; 0,8; 0,8; 0,9; 2,9; 2,6; 1,7; 3,1; 0,7; 0,7; 1; 1,1; 0,8; 0,9; 4; 4,1; 3,8; 3,8; 3; 3,9; 4; 3,9; 1,1; 0,8; 0,9. H_0= (за законом Пуасона).

Завдання 2. σ=10; $\overline{x}_b$ =71,2; n=90.

Завдання 3.

$y\backslash x$	3	3,5	4
2	0,10	0,20	0,10
2,5	0,19	0,31	0,10

Завдання 4.

$y\backslash x$	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-----	7	14	26
0,6	-----	2	6	4	12
0,8	3	19	-----	-----	22
1	-----	5	-----	10	15
1,2	5	-----	20	-----	25
n_x	13	26	33	28	n=100

Варіант 5.

Завдання 1. 10; 14,0; 14; 14,1; 14,5; 12,5; 14; 14,5; 10; 10,1; 10; 13,7; 12,7; 14,1; 14; 13,7; 14,7; 10,1; 14,1; 14; 12,3; 12,8; 11; 13,1; 13,5; 14,7; 15; 14,2; 14,5; 12,5; 12,3; 11,5; 12,9; 12,8; 14; 14; 13,5; 14,7; 13,6; 13,6; 13,7; 12,3; 11,5; 12,8; 11,1; 12,8; 13; 12,9; 14,5; 14,5; 13,7; 13,8; 12,4; 12,1; 12,8. H_0= (за нормальним законом).

Завдання 2. σ=6; $\overline{x}_b$ =70,2; n=110.

Завдання 3.

$y\backslash x$	3	4	6
4	0,11	0,19	0,10
5	0,20	0,30	0,10

Завдання 4.

$y\backslash x$	1	2	3	4	n_y
1	-----	-----	5	7	12
1,5	20	23	-----	-----	43
2	30	-----	47	2	79
2,5	10	11	20	6	47
3	9	-----	7	33	49
n_x	69	34	79	48	n=230

Варіант 6.

Завдання 1. 69; 73; 70; 68; 61; 73; 70; 72; 67; 70; 71; 66; 70; 76; 68; 71; 68; 70; 64; 65; 72; 70; 70; 69; 66; 70; 77; 69; 71; 74; 71; 66; 75; 76; 69; 71; 67; 70; 78; 73; 71; 74; 72; 72;72; 68; 70; 67; 71; 67; 72; 69; 69. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=9; $\overline{x}_b$ =83,2; n=90.

Завдання 3.

y\x	2	4
1	0,10	0,18
2	0,06	0,20
3	0,30	0,16

Завдання 4.

$y\backslash x$	10	15	16	17	n_y
3	4	6	-----	-----	10
4	-----	7	8	-----	15
5	1	-----	9	-----	10
6	-----	5	-----	5	10
7	5	-----	-----	-----	5
n_x	10	18	17	5	n=50

Варіант 7.

Завдання 1. 13,4; 14; 14,7; 15,2; 15,1; 13; 8,8; 14; 17,9; 16,5; 16,6; 14,2; 16; 16,3; 14,6; 11,7; 16,4; 15,1; 17,6; 14,1; 18,8; 11,6; 18,0; 12,4; 17,2; 14,8; 16,3; 13,7; 15,5; 16,2; 8; 14,7; 15,4; 11,3; 13,4; 14,7; 15,2; 15,2; 16; 13; 8,8; 8; 14; 16,6. H_0= (за законом Пуасона).

Завдання 2. σ=10; $\overline{x}_b$ =84,08; n=100.

Завдання 3.

$y \backslash x$	1	1,5
3	0,11	0,20
3,5	0,19	0,30
4	0,10	0,10

Завдання 4.

$y \backslash x$	12	15	17	20	n_y
3	-----	-----	4	6	10
4	-----	8	-----	7	15
5	9	-----	1	-----	10
10	5	-----	5	-----	10
11	-----	5	-----	-----	5
n_x	14	13	10	13	n=50

Варіант 8.

Завдання 1. 8; 8,1; 8; 8,3; 9; 10; 10,1; 10,1; 10,2; 10,9; 9,5; 8,2; 8,3; 8,4; 11; 10,1; 10,1; 10,2; 10,3; 10,4; 8; 11; 11,2; 8,3; 8,3; 11; 10,5; 10,4; 10,2; 10,4; 10,3; 9; 11,2; 11,3; 8,1; 8; 8,5; 10,6; 10,4; 10,1; 10,5; 10,5; 8,1; 8,1; 8,1; 9; 9; 8,5; 10,4; 10,3; 11,5; 12; 12; 11. H_0= (за нормальним законом).

Завдання 2. σ=7; $\overline{x}_b$ =83,01; n=60.

Завдання 3.

$y \backslash x$	5	6
1	0,12	0,10
2	0,18	0,11
4	0,10	0,39

Завдання 4.

$y \backslash x$	6	8	10	12	n_y

25	1	3	7	1	12
30	2	4	6	1	13
35	-----	-----	1	7	8
40	2	-----	10	-----	12
45	-----	10	3	2	15
n_x	5	17	27	11	n=60

Варіант 9.

Завдання 1. 40; 40,1; 40,2; 40; 40; 39; 38; 35; 35; 37; 37,2; 40,4; 40,4; 40; 41; 43; 45; 46; 46; 45; 37; 38; 39; 39; 39; 31,4; 45; 46; 47; 47; 48; 30; 30; 38,4; 39; 38,5; 40; 45; 44; 41; 40; 38; 40; 38; 40,5; 40,4; 40,3; 40; 44; 43; 38; 35; 36; 36; 37,2. H_0= (за законом Пуасона)

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =12,04; n=50.

Завдання 3.

$y \backslash x$	5	8
1,5	0,13	0,09
2	0,17	0,12
3	0,10	0,39

Завдання 4.

$y \backslash x$	10	15	16	17	n_y
3	4	6	-----	-----	10
4	-----	7	8	-----	15
5	1	-----	9	-----	10
6	-----	5	-----	5	10
7	5	-----	-----	-----	5
n_x	10	18	17	5	n=50

Варіант 10.

Завдання 1. 18,4; 17,3; 18,4; 10; 20; 20; 21; 20,5; 20,9; 17; 16,5; 20,1; 25; 25; 18,4; 25; 10,4; 25; 21; 20,9; 17,5; 17; 19; 19,1; 19; 19; 25,5; 10,4; 25; 20,5; 20,8; 17,6; 17,5; 18; 18,4; 17,3; 10,1; 10,1; 10,3; 10,4; 25; 20; 17; 16,5. H_0= (за нормальним законом).

Завдання 2. σ=5; $\bar{x}_b$ =50,2; n=25.

Завдання 3.

$y\backslash x$	10	11
0,1	0,14	0,08
0,7	0,16	0,13
1	0,10	0,39

Завдання 4.

$y\backslash x$	9	10	11	12	n_y
3	1	-----	-----	-----	1
8	-----	5	10	-----	15
10	4	-----	-----	10	14
15	-----	20	10	13	43
16	5	2	-----	-----	7
n_x	10	27	20	23	n=80

Варіант 11.

Завдання 1. 35; 35; 36; 36; 37; 37; 38; 38; 39; 39; 20; 20; 22; 22; 21; 21; 23; 23; 24; 24; 24; 24; 20; 20; 22; 22; 23; 24; 23; 24; 40; 41; 42; 43; 44; 44; 45; 15; 15; 19; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 19; 19; 10; 11; 12; 13; 14; 13; 30; 30; 30; 30; 31; 32; 31; 33; 31; 33; 31; 33; 32; 34; 32; 30; 33; 34; 25; 34; 26; 34; 27; 32; 28; 28; 29; 29; 25; 25; 26; 26; 27; 27; 25; 27; 26; 28; 29; 29; 28; 27; 26; 25. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=2; $\bar{x}_b$ =50,2; n=10.

Завдання 3.

$y\backslash x$	2	3	5	6
5	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Завдання 4.

$y\backslash x$	13	15	17	19	n_y
5	10	8	-----	2	20
8	-----	3	7	-----	10
20	11	9	5	-----	25
21	5	3	2	-----	10
22	-----	-----	-----	5	5
n_x	26	23	14	7	n=70

Варіант 12.

Завдання 1. 30; 30; 31; 31; 32; 32; 33; 33; 34; 34; 10; 11; 12; 11; 13; 14; 30; 30; 31; 32; 31; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 33; 34; 38; 36; 35; 39; 15; 17; 16; 18; 19; 19; 18; 25; 15; 27; 25; 26; 25; 27; 25; 27; 28; 29; 25; 26; 26; 28; 29; 28; 26; 29; 40; 26; 26; 27; 28; 20; 21; 22; 23; 24; 45; 44; 43; 28; 42; 40; 22; 41; 20; 21; 20; 22; 23; 21; 20; 21; 23; 21; 24; 24; 23; 24; 26; 22. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=2; $\bar{x}_b$ =20,4; n=15.

Завдання 3.

*y**x*	0	1	4	5
1	0,14	0,06	0,25	0,04
2	0,31	0,10	0,03	0,07

Завдання 4.

*y**x*	4	8	12	16	20	n_y
10	1	6	-----	-----	-----	7
20	-----	5	9	4	-----	18
30	-----	8	16	10	-----	34
40	-----	-----	5	10	4	19
50	-----	-----	3	14	5	22
n_x	1	19	32	38	9	n=100

Варіант 13.

Завдання 1. 25; 25; 26; 26; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 40; 41; 42; 43; 25; 26; 44; 45; 27; 41; 25; 26; 28; 29; 28; 29; 38; 39; 35; 25; 26; 27; 29; 35; 36; 37; 20; 37; 37; 36; 38; 20; 21; 22; 21; 23; 24; 21; 22; 20; 21; 22; 20; 23; 24; 10; 11; 22; 20; 21; 12; 10; 13; 15; 16; 17; 18; 16; 15; 14; 16; 17; 19; 18; 31; 16; 32; 33; 31; 19; 30; 31; 30; 32; 33; 30; 34; 34; 30; 32; 31; 32; 34; 23; 24; 33; 23; 32; 34; 33. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =11,2; n=20.

Завдання 3.

*y**x*	4	5	7
0	0,20	0,30	0,10
2	0,16	0,18	0,06

Завдання 4.

$y \backslash x$	8	13	14	15	16	n_y
8	4	3	2	-----	-----	9
9	-----	1	8	7	-----	16
10	-----	5	10	16	-----	31
11	-----	-----	8	17	1	26
12	-----	-----	9	5	4	18
n_x	4	9	37	45	5	n=100

Варіант 14.

Завдання 1. 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 19; 19; 17; 10; 11; 12; 13; 12; 14; 40; 41; 42; 42; 43; 44; 45; 20; 21; 20; 22; 20; 21; 20; 22; 21; 22; 21; 23; 22; 24; 21; 22; 23; 35; 23; 36; 24; 23; 24; 23; 36; 37; 39; 38; 37; 39; 25; 26; 27; 37; 25; 26; 27; 28; 29; 25; 26; 27; 25; 26; 28; 25; 29; 28; 27; 29; 30; 21; 28; 27; 29; 28; 30; 31; 32; 33; 34; 33; 32; 30; 30; 31; 32; 33; 34; 34; 32; 34; 33; 31. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =30,1; n=100.

Завдання 3.

$y \backslash x$	1	3	5	9
1	0,04	0,15	0,06	0,25
2	0,07	0,30	0,10	0,03

Завдання 4.

$y \backslash x$	5	15	20	25	40	n_y
18	3	5	7	-----	-----	15
19	-----	4	10	6	-----	20
25	-----	12	20	14	-----	46
24	-----	-----	8	5	2	15
36	-----	-----	-----	3	1	4
n_x	3	21	45	28	3	n=100

Варіант 15.

Завдання 1. 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 19; 18; 16; 10; 11; 12; 13; 14; 40; 41; 42; 11; 43; 44; 20; 45; 20; 20; 21; 21; 22; 22; 44; 20; 21; 22; 23; 21; 22; 23; 24; 23; 20; 24; 23 35; 36; 23; 24; 37; 38; 39; 24; 35; 24; 37; 39; 38; 25; 26; 27; 25; 35; 25; 26; 27; 25; 26; 27; 28; 29; 28; 26; 26; 27; 29; 28; 29; 28; 29; 31; 32; 28; 29; 30; 31;

32; 33; 31; 34; 34;31; 30; 30; 31; 32;33;33; 34; 32; 34;33 ;32. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=4; $\bar{x}_b$ =16,2; *n*=15.

Завдання 3.

*y**x*	3	10	11	12
0	0,25	0,06	0,15	0,04
3	0,10	0,03	0,30	0,07

Завдання 4.

*y**x*	18	19	20	25	26	n_y
3	3	5	7	-----	-----	15
7	-----	4	10	6	-----	20
8	-----	12	20	14	-----	46
9	-----	-----	8	5	2	15
11	-----	-----	-----	3	1	4
n_x	3	21	45	28	3	*n*=100

Варіант 16.

Завдання 1. 30; 30; 31; 31; 32; 32; 33; 33; 34; 34; 31; 32; 33; 34; 30; 34; 33; 32; 31; 30; 34; 25; 25; 26; 26; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 26; 27; 29; 25; 29; 28; 27; 26; 25; 25; 27; 28; 20; 20; 21; 21; 22; 22; 29; 23; 23; 24; 24; 21; 20; 22; 23; 24; 20; 21; 22; 23; 35; 36; 23; 24; 38; 39; 22; 35; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 39; 38; 43; 44; 45; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 14; 16; 15; 17; 16; 18; 19; 18 19; 18; 17. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=4; $\bar{x}_b$ =11,4; *n*=15.

Завдання 3.

*y**x*	1	5
0	0,18	0,10
2	0,20	0,06
3	0,16	0,30

Завдання 4.

*y**x*	6	7	10	11	n_y
0,1	-----	-----	5	7	12
2	20	23	-----	-----	43
3	30	-----	47	2	79

3,5	10	11	20	6	47
4,5	9	-----	7	33	49
n_x	69	34	79	48	n=230

Варіант 17.

Завдання 1. 25; 25; 26; 26; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 26; 27; 28; 29; 25; 26; 29; 31; 25; 27; 28; 29; 30; 31; 26; 28; 32; 33; 34; 31; 30; 31; 32; 33; 30; 31; 33; 39; 32; 30; 32; 33; 34; 39; 38; 37; 36; 35; 34; 33; 35; 36; 37; 18; 15; 16; 17; 18; 19; 37; 15; 16; 17; 19; 18; 10; 11; 12; 13; 14; 10; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 20; 21; 45; 20; 21; 22; 23; 24; 20; 21; 23; 20; 22; 21; 22; 23; 24; 22; 23; 22; 24; 21; 20. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =20; n=10.

Завдання 3.

$y \backslash x$	1	8
1	0,20	0,06
4	0,16	0,30
5	0,18	0,10

Завдання 4.

$y \backslash x$	10	11	12	13	n_y
0,2	5	-----	7	14	26
1,2	-----	2	6	4	12
2	3	19	-----	-----	22
3,5	-----	5	-----	10	15
4	5	-----	20	-----	25
n_x	13	26	33	28	n=100

Варіант 18.

Завдання 1. 35; 36; 36; 37; 37; 38; 38; 39; 39; 39; 20; 20; 21; 21; 22; 22; 23; 23; 24; 24; 24; 24; 23; 23; 21; 21; 22; 22; 21; 20; 20; 21; 25; 25; 26; 26; 27; 27; 28; 28; 25; 29; 29; 26; 27; 28; 29; 28; 26; 25; 27; 28; 30; 31; 31;32; 29; 27; 32; 32; 33; 33; 34; 34; 30; 33; 32; 31; 30; 34; 15; 32; 15; 33; 16; 17; 34; 33; 16; 17; 18; 19; 18; 10; 11; 11;12 ;18; 17;12; 13; 14; 40; 42; 45; 43; 45; 44; 40. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=5; $\bar{x}_b$ =15; n=25.

Завдання 3.

$y \backslash x$	0,1	0,2
10	0,14	0,08
20	0,16	0,10
30	0,39	0,13

Завдання 4.

$y \backslash x$	9	10	12	14	n_y
5	5	-----	7	14	26
5,5	-----	2	6	4	12
6	3	19	-----	-----	22
7,5	-----	5	-----	10	15
8	5	-----	20	-----	25
n_x	13	26	33	28	n=100

Варіант 19.

Завдання 1. 15; 15; 16; 17; 17; 18; 18; 19; 19; 15; 18; 10; 11; 12; 13; 14; 13; 40; 41; 43; 41; 43; 44; 45; 37; 35; 36; 37; 38; 39; 37; 38; 39; 38м 20; 20; 21; 21; 22; 22; 22; 23; 23; 24; 24; 21; 22; 23; 21; 20; 21; 22; 24; 23; 24; 25; 25; 26; 26; 23; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 27; 25; 26; 25; 28; 27; 29; 28; 30; 30; 29; 28; 30; 30; 29; 28; 27; 29; 31; 31; 32; 32; 33; 33; 34; 34; 30; 31; 33; 34; 30; 31; 34; 32; 34; 33; 33. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=6; $\overline{x}_b$ =4; n=16.

Завдання 3.

$y \backslash x$	10	12
1,5	0,12	0,11
2,5	0,10	0,39
3,5	0,18	0,10

Завдання 4.

$y \backslash x$	3	7	9	12	n_y
8	4	6	-----	-----	10
9	-----	7	8	-----	15
10	1	-----	9	-----	10
11	-----	5	-----	5	10
12	5	-----	-----	-----	5

n_x	10	18	17	5	n=60

Варіант 20.

Завдання 1. 25; 25; 26; 26; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 26; 27; 25; 27; 28; 26; 29; 27; 25; 26; 28; 29; 30; 31; 31; 32; 32; 33; 28; 33; 34; 34; 31; 30; 32; 33; 34; 31; 30; 32; 35; 36; 34; 35; 37; 36; 39; 34; 32; 39; 36; 38; 39; 40; 41; 42; 44; 42; 45; 45; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 19; 19; 10; 11; 12; 13; 14; 20; 19; 21; 14; 20; 21; 22; 22; 23; 21; 24; 23; 22; 20; 21; 22; 23; 24; 24; 22; 23; 24; 23; 21. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=5; $\overline{x}_b$ =40; n=40.

Завдання 3.

$y\backslash x$	11	11,5	12
1	0,10	0,06	0,18
4	0,30	0,20	0,16

Завдання 4.

$y\backslash x$	11	12	13	14	n_y
6	5	-----	7	14	26
8	-----	2	6	4	12
10	3	19	-----	-----	22
12	-----	5	-----	10	15
14	5	-----	20	-----	25
n_x	13	26	33	28	n=100

Варіант 21.

Завдання 1. 35; 35; 36; 36; 37; 37; 38; 39; 39; 39;20; 20; 22; 21; 21; 23; 24; 24; 22; 23; 24; 24; 20; 20; 21; 21; 22; 22; 23; 24; 23; 24; 40; 41; 42; 43; 44; 44; 45; 15; 15; 10; 11; 10; 10; 20; 20; 21; 22; 23; 24; 27; 35; 27; 31; 40; 40; 19; 21; 22; 24; 28; 30; 29; 30; 29; 42; 41; 29; 22; 24; 28; 27; 24; 30; 21; 20; 38; 40; 41; 47; 47; 20; 45; 15; 19; 18; 17; 16; 14; 49; 49; 20; 20; 14; 20; 21; 22; 23. H_0=(за законом Пуассона).

Завдання 2. σ=1; $\overline{x}_b$ =39; n=25.

Завдання 3.

$y\backslash x$	3	4	5	6

7	0,04	0,07	0,25	0,03
8	0,10	0,06	0,15	0,30

Завдання 4.

$y\backslash x$	8	10	12	14	n_y
25	5	-----	7	14	26
30	-----	2	6	4	12
40	3	19	-----	-----	22
45	-----	5	-----	10	15
50	5	-----	20	-----	25
n_x	13	26	33	28	n=100

Варіант 22.

Завдання 1. 11; 11; 13; 40; 41; 42; 47; 48; 50; 51; 17; 54; 53; 54; 50; 50; 51; 17; 10; 40; 40; 41; 42; 43; 44; 41; 40; 50; 50; 50; 11; 10; 10; 12; 13; 14; 40; 17; 18; 20; 19; 15; 15; 18; 18; 20; 31; 30; 36; 20; 20; 18; 12; 17; 16; 16; 18; 20; 21; 20; 19; 17; 15; 14; 13; 13; 13; 17; 18; 18; 20; 17; 13; 11; 10; 10; 41; 42; 43; 48; 50; 41; 40; 39; 39; 38; 41; 42; 20; 19; 18; 13; 14; 17; 15; 16; 18; 20. H_0=(за законом Пуассона).

Завдання 2. σ=1; $\overline{x}_b$ =45; n=100.

Завдання 3.

$y\backslash x$	5	6
1	0,15	0,30
1,5	0,06	0,10
2	0,25	0,03
2,5	0,04	0,07

Завдання 4.

$y\backslash x$	0,1	0,5	1	1,5	n_y
3	4	6	-----	-----	10
6	-----	7	8	-----	15
7	1	-----	9	-----	10
10	-----	5	-----	5	10
15	5	-----	-----	-----	5
n_x	10	18	17	5	n=50

Варіант 23.

Завдання 1. 2; 3; 3; 3; 4; 11; 22; 22; 22; 30; 29; 28; 7; 7; 6; 10; 10; 7; 8; 9; 11; 13; 14; 11; 8; 9; 10; 8; 7; 5; 5; 4; 4; 3; 2; 3; 10; 8; 7; 15; 20; 20; 21; 21; 22; 3; 4; 5; 8; 12; 12; 13; 13; 15; 15; 20; 21; 22; 24; 23; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 8; 11; 9; 10; 2; 4; 4; 5; 5; 9; 12; 11; 12; 11; 29; 29; 30; 31; 31; 20; 18; 17; 16; 15; 5; 21; 22; 27; 28; 30; 29; 30; 17; 16. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=2; $\bar{x}_b$ =11,6; n=30.

Завдання 3.

$y \backslash x$	7	8
0	0,04	0,07
2	0,25	0,03
4	0,06	0,10
6	0,15	0,30

Завдання 4.

$y \backslash x$	8	10	12	14	n_y
9	10	8	-----	2	20
11	-----	3	7	-----	10
40	11	9	5	-----	25
41	5	3	2	-----	10
50	-----	-----	-----	5	5
n_x	26	23	14	7	n=70

Варіант 24.

Завдання 1. 11; 25; 30; 40; 60; 61; 61; 61; 60; 59; 58; 20; 20; 58; 58; 27; 23; 24; 25; 24; 24; 27; 28; 29; 31; 31; 24; 20; 20; 20; 25; 16; 17; 16; 18; 19; 19; 40; 50; 51; 52; 25; 50; 50; 59; 59; 60; 60; 49; 48; 48; 26; 31; 32; 33; 34; 34; 34; 35; 36; 37; 27; 27; 30; 40; 49; 49; 59; 60; 60; 57; 28; 56; 56; 55; 40; 40; 20; 20; 20; 20; 29; 19; 11; 19; 11; 20; 19; 18; 18; 18; 40; 40; 49; 47; 46; 34; 35; 35; 36; 36; 36. H_0=(за законом Пуассона).

Завдання 2. σ=3; $\bar{x}_b$ =10,4; n=25.

Завдання 3.

$y \backslash x$	10	11	12
0,5	0,10	0,30	0,20

0,6	0,06	0,18	0,16

Завдання 4.

$y\backslash x$	11	19	20	21	n_y
5	1	-----	-----	-----	1
8	-----	5	10	-----	15
10	4	-----	-----	10	14
15	-----	20	10	13	43
20	5	2	-----	----	7
n_x	10	27	20	23	n=80

Варіант 25.

Завдання 1. 40; 40; 50; 41; 42; 46; 47; 48; 49; 40; 30; 60; 60; 70; 80; 90; 100; 91; 91; 91; 90; 80; 85; 85; 71; 71; 71; 40; 41; 42; 36; 36; 30; 31; 32; 41; 43; 44; 45; 46; 80; 80; 79; 78; 77; 75; 40; 41; 45; 42; 31; 32; 33; 44; 45; 43; 41; 61; 62; 63; 40; 40; 80; 82; 84; 85; 90; 92; 93; 91; 100; 100; 99; 89; 87; 99; 91; 30; 30; 30; 90; 81; 81; 90; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 41; 42; 35; 40; 46; 46; 47; 80; 80; 91. H_0=(за нормальним законом).

Завдання 2. σ=1; $\bar{x}_b$ =20; n=25.

Завдання 3.

$y\backslash x$	9	10	11
8	0,10	0,20	0,10
9	0,19	0,31	0,10

Завдання 4.

$y\backslash x$	10	11	13	18	n_y
6	1	-----	-----	-----	1
12	-----	5	10	-----	15
18	4	-----	10	-----	14
19	-----	20	10	13	43
20	5	2	-----	-----	7
n_x	10	27	30	13	n=80

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	l	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	2637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3064	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2860	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1738	1738
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

Продовження табл. 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,04	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3488
,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3608
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,1554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2196	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продовження табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4982	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0.4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблиця 3

Таблиця значень $t_\beta = t(\beta, n)$

β / n	0,95	0,99	0,999	β / n	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,10	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця 4

Критичні точки розподілення Стьюдента

Число степенів свободи, k	Рівень значущості α (двостоння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,95
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85

Продовження табл. 4

21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
00	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Таблиця 5

Критичні точки розподілення χ^2

Число степеней свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01

Продовження табл. 5

19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Список літератури

1. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Математика для економістів. Теорія ймовірності та математична статистика. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 5-е, стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 400 с.
3. *Журавель О.О.* Вища математика. Збірник завдань для курсових і самостійних робіт. – К.: КДТУБА, 1997. – 267 с.
4. *Ізварін В.О.* Застосування операційного числення до інженерних задач. – К.: КНУБА. – 1997. – 175 с.
5. *Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Математичний аналіз для економістів. – К.: Європейський університет, 2002. – 297 с.
6. *Овчінніков Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика (ч.1). – К.: Техніка, 2000. – 590 с.
7. *Овчінніков Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика (ч.2). – К.: Техніка, 2000. – 790 с.
8. *Справочник* по теории вероятности и математической статистике. Под ред. В.С.Королюка. – К.: Наукова думка., 1978. – 582 с.
9. *Федоренко Н.Д., Баліна О.І. та інші.* Вища математика. ч.2. – К.: Віпол, 2005. – 245с.