МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

## Чисельне диференціювання та інтегрування. Системи рівнянь

Методичні вказівки
до практичних занять для студентів,
які навчаються за напрямом підготовки
6.080400 «Комп’ютерні науки»

Київ 2012

ББК 22.193
Ч-66

Укладачі: *О.В. Горда*, асистент
*Н.І. Полтораченко*, канд. техн. наук, доцент.

Рецензент *В.М. Михайленко*, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Демченко, канд. техн. наук, доцент

*Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол №7 від 23.січня 2012 року.*

Видається в авторській редакції.

**Чисельні** методи. Чисельне диференціювання та інтегрування. Системи
Ч-66 рівнянь: Методичні вказівки до практичних занять. – К.:КНУБА, 2012. – 36с.

Методичні вказівки є керівництвом до виконання практичних робіт до курсу «Чисельні методи в інформатиці». Матеріал розбитий за темами згідно з програмою дисципліни, де наведені короткі відомості з теоретичного матеріалу, детально розглянуте розв’язання типових задач. В кінці наведено перелік завдань для самостійного виконання студентами.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.080400 «Комп’ютерні науки».

## Загальні положення

Методичні вказівки присвячені темам другого модуля курсу «Чисельні методи», а саме методам чисельного диференціювання та інтегрування, а також розв'язку систем лінійних та нелінійних рівнянь та спрямовані на покращення засвоєння теоретичного матеріалу на здобуття студентами практичних навичок.

Наведені методи мають широке застосування в інженерних розрахунках, зокрема у задачах будівельної та теоретичної механіки, а також у різних галузях, пов'язаних з інформаційними технологіями – системний аналіз, математичне моделювання і таке інше.

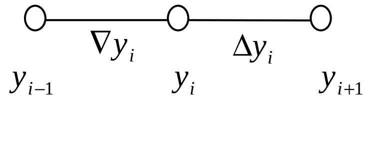
Тема 5. Чисельне диференціювання. Наведені основні формули чисельного диференціювання, обчислення похибки та вибору оптимального кроку.

Тема 6. Чисельне інтегрування. Задачі чисельного інтегрування полягають у наближеному обчисленні визначеного інтегралу. Наведені основні квадратурні формули, оцінка похибки. Методи інтегрування функції із заданою точністю.

Тема 7. Методи розв'язку систем лінійних та нелінійних рівнянь. Для розв'язку систем лінійних та нелінійних рівнянь застосовуються прямі та ітераційні методи. Математичний апарат лінійної алгебри базується на понятті норми вектору та матриці, числа обумовленості. Розглядаються класичні методи виключення невідомих та особливості їх застосування.

## Тема 5. Чисельне диференціювання

В чисельних методах функція від неперервного аргументу заміщується функцією від дискретного аргументу – сітковою функцією. Для сіткової функції вводиться поняття різниць. Так, різниці першого порядку задаються таким чином:




$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – права різниця;

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ – ліва різниця;

$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})$ – центральна різниця.

Для обчислення похідних функції, заданої на сітці, застосовують інтерполяційні многочлени. Наведемо основні центральні формули чисельного диференціювання у таблиці:

| К-ть т. | Формула похідної | Похибка |
|---|---|---|
| 3 | $y' = (y_1 - y_{-1})/2h$<br>$y'' = (y_1 - 2y_0 + y_{-1})/h^2$ | $-h^2 y^{(3)}/6$<br>$-h^2 y^{(4)}/12$ |
| 5 | $y' = (-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2})/12h$<br>$y'' = (-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2})/12h^2$<br>$y''' = (y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2})/2h^3$ | $h^4 y^{(5)}/30$<br>$-h^4 y^{(5)}/90$<br>$-h^2 y^{(5)}/4$ |
| 7 | $y' = (y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3})/60h$<br>$y'' = (2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3})/180h^2$<br>$y' = (-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3})/8h^3$ | $-h^6 y^{(7)}/140$<br>$-h^6 y^{(8)}/560$<br>$7h^4 y^{(7)}/120$ |

При виборі кількості точок необхідно керуватись такими положеннями:

1) точністю, з якою обчислюється похідна;
2) степенем функції, яка диференціюється;
3) розташуванням точки диференціювання на заданому відрізку значень.

**Уточнення похідної за Річардсоном.** Уточнення формули диференціювання виконують виходячи з основного оператора диференціювання $D_h : D_{h,0} y_0 = \dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h}$, де $h$ – крок. Цей оператор дає значення похідної $y_0' \approx f'(x_0)$ з похибкою порядку $h^2$. Для вилучення головного члену помилки цього оператора вводиться оператор $D_{h,1} y_0 = \dfrac{4D_h y_0 - D_{2h} y_0}{3} = D_h y_0 + \dfrac{D_h y_0 - D_{2h} y_0}{3}$, де $D_{2h} y_0 = (y_2 - y_{-2})/4h$ – теж основний оператор чисельного диференціювання. Похибка оператора $D_{h,1} y_0$ має вже порядок $h^4$. Якщо таке уточнення є недостатнім, то вводиться наступний оператор:

$$D_{h,2} y_0 = \frac{2^4 D_{h,1} - D_{2h,1}}{2^4 - 1} = D_{h,1} + \frac{D_{h,1} - D_{2h,1}}{15},$$

який вилучає головну частину похибки оператора $D_{h,1} y_0$. Для процесу уточнення можна вивести рекурентну формулу: $D_{h,n+1} = \dfrac{2^{2n+2} D_{h,n} - D_{2h,n}}{2^{2n+2} - 1}, \quad m = 0,1,2,\ldots$.

Враховуючи той факт, що початкові дані містять похибки, то процес уточнення не доцільно продовжувати досить далеко.

**Типові задачі.**

*Задача 5.1*. Обчислити похідну функції $y = \sin x$ в точці $x = \pi / 6$.

*Розв'язок*. Візьмемо $h = 0.1$

1. $y' = \cos(\pi / 6) = 0{,}866025$ – точне значення;

2. $y' = \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h} = \dfrac{\sin(\pi / 6 + 0.1) - \sin(\pi / 6)}{0.1} = 0{,}839604$ .– права різниця, абсолютна похибка $\Delta = 0{,}026$, відносна похибка $\delta = 0{,}031$;

3. $y' = \dfrac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = \dfrac{\sin(\pi / 6 + 0.1) - \sin(\pi / 6 - 0.1)}{0.2} = 0{,}864583$ – центральна різниця (за трьома точками), абсолютна похибка $\Delta = 0{,}00142$, відносна похибка $\delta = 0{,}001665$;

4. $y' = \dfrac{(-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2})}{12h} =$ $= \dfrac{-\sin(\pi / 6 + 0{,}2) + 8\sin(\pi / 6 + 0{,}1) 18\sin(\pi / 6 - 0{,}1) + \sin(\pi / 6 - 0{,}2)}{12h} = 0{,}866023$ – за п'ятьма точками, абсолютна похибка $\Delta = 2 \cdot 10^{-6}$, відносна похибка $\delta = 2{,}31 \cdot 10^{-6}$.

*Задача 5.2*. Обчислити похідні таблично заданої функції у точках $x = 1{,}2$, $x = 2{,}76$

| $x$ | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,857 | 3,946 | 4,938 | 5,801 | 6,503 | 7,010 | 7,288 | 7,301 |

*Розв'язок*. Точка $x = 1{,}2$ знаходиться на початку таблиці. Візьмемо формулу за трьома точками, тоді $y_{-1} = 2{,}857$, $y_0 = 3{,}946$, $y_1 = 4{,}938$, $h = 0{,}4$

$$y' = \frac{y_{-1} - y_1}{2h} = \frac{4{,}946 - 2{,}857}{0{,}8} = 2{,}611, \quad y'' = \frac{(y_1 - 2y_0 + y_{-1})}{h^2} = \frac{4{,}946 - 2 \cdot 3{,}946 + 2{,}857}{0{,}16} = -0{,}556$$

Точка $x = 2{,}76$ знаходиться ближче до кінця таблиці, то приймемо $y_{-1} = 6{,}503$, $y_0 = 7{,}010$, $y_1 = 7{,}288$, тоді: $y' = (y_{-1} - y_1)/2h = (7{,}288 - 6{,}503)/0{,}8 = 0{,}981$,

$$y'' = (y_1 - 2y_0 + y_{-1})/h^2 = (7{,}288 - 2 \cdot 7{,}010 + 6{,}503)/0{,}16 = -1{,}431.$$

Для оцінки похибки похідної в точці $x = 1{,}2$ скористаємось формулою залишкового члену $\Delta_1 = M_3 h^2 / 6$– для першої і $\Delta_1 = M_4 h^2 / 12$ – для другої похідної, де $M_i = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f^{(i)}(x) \right|$. Для оцінки $M_3$ та $M_4$ побудуємо таблицю скінченних різниць:

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ | $\Delta^5 y_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 2,857 | | | | | | $M_4 = \max\limits_{x\in[0,8;3,6]} \lvert \Delta^4 y_i \rvert / h^4 =$ |
| 1,2 | 3,946 | 1,098 | | | | | |
| 1,6 | 4,938 | 0,992 | -0,106 | | | | $0{,}009/0{,}0256 = 0{,}3516$ |
| 2,0 | 5,801 | 0,863 | -0,129 | -0,023 | | | |
| 2,4 | 6,503 | 0,702 | -0,161 | -0,032 | -0,009 | | $M_3 = \max\limits_{x\in[0,8;3,6]} \lvert \Delta 3 y_i \rvert / h =$ |
| 2,8 | 7,010 | 0,507 | -0,195 | -0,034 | -0,002 | 0,007 | |
| 3,2 | 7,288 | 0,278 | -0,229 | -0,034 | 0,000 | 0,002 | |
| 3,6 | 7,301 | 0,013 | -0,265 | -0,036 | -0,002 | -0,002 | $0{,}034/0{,}064 = 0{,}5$ |

Відповідні залишкові похибки: $\Delta_1 = 0{,}5\cdot(0{,}4)^2/6 = 0{,}0133$ $\Delta_1 = 0{,}3516\cdot(0{,}4)^2/12 = 0{,}0047$, обчислювальна похибка становить $\Delta_2 = \Delta^*/h = 0{,}0005/0{,}4 = 0{,}00125$, де $\Delta^*$ – абсолютна похибка $y_i$. Остаточно похибки відповідно першої та другої похідної:

$$\Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = 0{,}0133 + 0{,}0012 \approx 0{,}0145,\ \Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = 0{,}0047 + 0{,}0012 \approx 0{,}006.$$

Аналогічно обчислюється похибка для $x = 2{,}76$. Оптимальний крок для обчислення першої похідної: $h = \sqrt[3]{3\Delta^*/M_3} = 1{,}44$.

*Задача 5.3.* Нехай задана функція $y = e^x$ з кроком $h = 0{,}1$ з точністю до четвертого знака. Знайти похідні і оцінити їх похибку, застосовуючи уточнення за Ромбергом:

| | $x$ | $y$ | $D_h y$ | $D_{2h} y$ | $D_{h,1} y$ | $\Delta D_{h,1} y$ | $\Delta D_h y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 2,7183 | | | | | |
| | 1,1 | 3,0042 | 3,0090 | | | | 0,0048 |
| | 1,2 | 3,3201 | 3,3255 | | | | 0,0054 |
| *Розв'язок.* | 1,3 | 3,6693 | 3,6755 | 3,3422 | 3,3199 | -0,0002 | 0,0062 |
| | 1,4 | 4,0552 | 4,0620 | 3,6937 | 3,6694 | 0,0001 | 0,0068 |
| | 1,5 | 4,4817 | 4,4890 | 4,0822 | 4,0553 | 0,0001 | 0,0073 |
| | 1,6 | 4,9530 | 4,9610 | 4,5115 | 4,4815 | -0,0002 | 0,0080 |
| | 1,7 | 5,4739 | 5,4830 | 4,9860 | 4,9527 | -0,0003 | 0,0091 |
| | 1,8 | 6,0496 | | | | | |

*Необхідні відомості з теорії*

1. Яка функція називається сітковою?
2. Дайте визначення лівої, правої та центральної різниці?.
3. Яка основна ідея лежить в основі методів чисельного диференціювання?
4. Які методи застосовуються для обчислення похідної із заданою точністю?
5. Як оцінити оптимальний крок для чисельного диференціювання?
6. Як оцінюється точність обчислення похідної?

**Завдання 5**

*Завдання 5.1.* Обчислити похідні таблично заданої функції при заданому значенні аргументу та оцінити похибки:

а) першу та другу похідні використовуючи центральні формули, визначити оптимальний крок;

б) першу похідну з точністю до третього знаку, використовуючи уточнення за Ромбергом.

| $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ | | $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ | | $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 0,89121 | 1 | 1,18 | | 0,50 | 1,6487 | 7 | 0,504 | | 1010 | 3,0432 | 13 | 1013 |
| 1,2 | 0,93204 | | 2,16 | | 0,51 | 1,6653 | | 0,535 | | 1020 | 3,0860 | | 1065 |
| 1,3 | 0,96356 | 2 | 1,12 | | 0,52 | 1,6820 | 8 | 0,204 | | 1030 | 3,1284 | 14 | 1043 |
| 1,4 | 0,98545 | | 2,18 | | 0,53 | 1,6989 | | 0,604 | | 1040 | 3,1703 | | 1113 |
| 1,5 | 0,99750 | 3 | 1,16 | | 0,54 | 1,7160 | 9 | 0,503 | | 1050 | 3,2119 | 15 | 1012 |
| 1,6 | 0,99957 | | 1,65 | | 0,55 | 1,7333 | | 0,535 | | 1060 | 3,2531 | | 1055 |
| 1,7 | 0,99166 | 4 | 1,15 | | 0,56 | 1,7507 | 10 | 0,545 | | 1070 | 3,2938 | 16 | 1032 |
| 1,8 | 0,97385 | | 1,75 | | 0,57 | 1,7683 | | 0,603 | | 1080 | 3,3342 | | 1113 |
| 1,9 | 0,94630 | 5 | 1,25 | | 0,58 | 1,7860 | 11 | 0,502 | | 1090 | 3,3743 | 17 | 1014 |
| 2,0 | 0,90930 | | 2,05 | | 0,59 | 1,8040 | | 0,555 | | 1100 | 3,4139 | | 1075 |
| 2,1 | 0,86321 | 6 | 1,33 | | 0,60 | 1,8221 | 12 | 0,525 | | 1110 | 3,4532 | 18 | 1066 |
| 2,2 | 0,80850 | | 2,09 | | 0,61 | 1,9404 | | 0,0,590 | | 2120 | 3,4922 | | 1116 |

| $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ | | $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ | | $x_i$ | $y_i$ | № | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,70 | 0,3704 | 19 | 2,706 | | 0,6 | 1,8221 | 23 | 0,64 | | 2,86 | 0,3497 | 27 | 2,735 |
| 2,72 | 0,3676 | | 2,77 | | 0,7 | 2,0138 | | 1,55 | | 2,88 | 0,3472 | | 2,875 |
| 2,74 | 0,3650 | 20 | 2,756 | | 0,8 | 2,2255 | 24 | 0,68 | | 2,90 | 0,3448 | 28 | 2,733 |
| 2,76 | 0,3623 | | 2,906 | | 0,9 | 2,4596 | | 1,62 | | 2,92 | 0,3425 | | 2,909 |
| 2,78 | 0,3597 | 21 | 2,708 | | 1,0 | 2,7183 | 25 | 0,73 | | 1,4 | 4,0552 | 29 | 0,81 |
| 2,80 | 0,3571 | | 2,907 | | 1,1 | 3,0042 | | 1,65 | | 1,5 | 4,4817 | | 1,61 |
| 2,82 | 0,3546 | 22 | 2,768 | | 1,2 | 3,3201 | 26 | 0,78 | | 1,6 | 4,9530 | 30 | 0,75 |
| 2,84 | 0,3521 | | 2,875 | | 1,3 | 3,6693 | | 1,59 | | 1,7 | 5,4739 | | 1,61 |

## Тема 6. Чисельне інтегрування

## Основні квадратури

Формула вигляду: $Q(f)=\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)=c_0 f(x_0)+c_1 f(x_1)+...+c_n f(x_n)$, яка має таку властивість: $\int_a^b f(x)dx = Q(f)+E(f)$ називається формулою чисельного інтегрування або формулою квадратури (підінтегральна функція заміщується сумою). Доданок $E(f)$ – залишковий член, який становить похибку усікання. Множина точок $\{x_i\}$ називається вузлами квадратури, а $\{c_i\}$ – вагою квадратури.

Основні квадратурні формули:

- **формули трапецій**:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h\left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right) \text{ або } I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left( f(x_{k-1}) + f(x_k) \right)$$

похибка $E(x) \le \frac{b-a}{12} h^2 M_2$, де $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$

- **формула Сімсона**: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{n}\left( f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right)$ або

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left( f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) \right)$$

похибка $E(f,h) = \frac{-(b-a) f^{(4)}(c) h^4}{180} = O(h^4)$, $c \in [a,b]$):

- **формула «3/8»**: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left( f(a) + f(b) + 3\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) \right)$

- **формула Гаусса**: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left( C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) \right)$,

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Значення $C_i$, $t_i$ беруться з таблиці:

**Таблиця значень коефіцієнтів $C_i$, $t_i$ для формули Гаусса**

| $n$ | $t_i$ | $C_i$ | $n$ | $t_i$ | $C_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $t_1 = 0$ | $C_1 = 2$ | 4 | $t_{2,3} = \pm 0{,}339981$<br>$t_{1,4} = \pm 0{,}861136$ | $C_1 = C_4 = 0{,}347855$<br>$C_2 = C_3 = 0{,}652145$ |
| 2 | $t_{1,2} = \pm 0{,}57735$ | $C_1 = C_2 = 1$ | 5 | $t_{1,5} = \pm 0{,}9061798$<br>$t_{2,4} = \pm 0{,}5384693$<br>$t_3 = 0$ | $C_1 = C_5 = 0{,}4786287$<br>$C_2 = C_4 = 0{,}2369269$<br>$C_3 = 0{,}5688888$ |
| 3 | $t_{1,3} = \pm 0{,}774597$<br>$t_2 = 0$ | $C_1 = C_3 = 5/9 = 0{,}555556$<br>$C_2 = 8/9 = 0{,}888889$ | 6 | $t_{1,6} = \pm 0{,}9324700$<br>$t_{2,5} = \pm 0{,}6612094$<br>$t_{3,4} = \pm 0{,}2386142$ | $C_1 = C_6 = 0{,}1713245$<br>$C_2 = C_5 = 0{,}3607616$<br>$C_3 = C_4 = 0{,}4679140$ |

**Уточнення за Річардсоном.** Нехай $I_{n1}$ та $I_{n2}$ – два наближених значення $\int_a^b f(x)dx$, знайдених за однією формулою при $n1$ та $n2$ ($n2 > n1$), тоді більш точне значення інтеграла можна знайти за формулою:

$I_{n1,n2} = I_{n1} + \frac{n1^m}{n2^m - n1^m}\left(I_{n2} - I_{n1}\right)$, де $m$ – порядок залишкового члену (для формули трапецій $m=2$, для формули Сімпсона $m=4$).

## Типові задачі.

*Задача 6.1*. Обчислити інтеграл за формулою:

1) трапецій з $\varepsilon = 0{,}001$;2) Сімпсона при $n=8$. Оцінити похибку результату.

$$1)\ \int_{0,7}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0{,}3}} \qquad 2)\ \int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2{,}1)}{x^2+1}dx$$

*Розв'язок*. 1) Для досягнення точності визначимо $n$ так, щоб $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 < 0{,}0005$, $M_2 \ge \max\limits_{[0,7;\,1,3]}\left|f''(x)\right|$. Знайдемо $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{\left(2x^2+0{,}3\right)^3}}$,

$f''(x) = \frac{8x^2-0{,}6}{\sqrt{\left(2x^2+0{,}3\right)^5}}$, $\max\limits_{[0,7;\,1,3]}\left|f''(x)\right| < \frac{8*1{,}3^2-0{,}6}{\sqrt{\left(2*0{,}7^2+0{,}3\right)^5}} \approx 6{,}98 \Rightarrow M_2 = 7 \Rightarrow$

$\frac{0{,}6^3\cdot 7}{12n} < 0{,}0005 \Rightarrow n^2 > 252 \Rightarrow n>16$, отже візьмемо $n=20$, тоді $h=(b-a)/n = 0{,}6/20 = 0{,}03$, $y_0 = f(a) = 0{,}88386$, $y_{20} = f(b) = 0{,}52129$. Побудуємо розрахункову таблицю $x_i = 0{,}7 + ih$, $y_i = f(x_i)$.

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $2x_i^2+0{,}3$ | $\sqrt{2x_i^2+0{,}3}$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,73 | 0,5329 | 1,3658 | 1,1686 | 0,85572 |
| 2 | 0,76 | 0,5776 | 1,4552 | 1,2063 | 0,82898 |
| 3 | 0,79 | 0,6241 | 1,5482 | 1,2443 | 0,80366 |
| 4 | 0,82 | 0,6724 | 1,6448 | 1,2825 | 0,77973 |
| 5 | 0.85 | 0,7225 | 1,7450 | 1,3210 | 0,75700 |
| 6 | 0,88 | 0,7744 | 1,8488 | 1,3597 | 0,73546 |
| 7 | 0,91 | 0,8281 | 1,9562 | 1,3986 | 0,71501 |
| 8 | 0,94 | 0.8836 | 2,0672 | 1,4378 | 0,69551 |
| 9 | 0,97 | 0,9409 | 2,1818 | 1,4771 | 0,67700 |
| 10 | 1,00 | 1,0000 | 2,3000 | 1,5166 | 0,65937 |
| 11 | 1,03 | 1,0609 | 2,4218 | 1,5562 | 0,64259 |
| 12 | 1,06 | 1,1236 | 2,5472 | 1,5960 | 0,62657 |
| 13 | 1,09 | 1,1881 | 2,6762 | 1,6356 | 0,61140 |
| 14 | 1,12 | 1,2544 | 2,8088 | 1.6759 | 0.59669 |
| 15 | 1,15 | 1,3225 | 2,9450 | 1.7161 | 0,58272 |
| 16 | 1,18 | 1,3924 | 3,0848 | 1,7564 | 0,56935 |
| 17 | 1,21 | 1,4641 | 3,2282 | 1,7967 | 0,55658 |
| 18 | 1,24 | 1,5376 | 3,3752 | 1,8372 | 0,54431 |
| 19 | 1,27 | 1,6129 | 3,5258 | 1,8777 | 0,53253 |

$y_0 + y_{20} = 1{,}40515$, $\sum_{i=1}^{19} y_i = 12{,}77022$, $I = 0{,}03(0{,}5 \cdot 1{,}40515 + 12{,}77022) = 0{,}40418 \approx 0{,}404$.

2) За умовою $n = 8 \Rightarrow h = (b-a)/n = (1{,}6 - 1{,}2)/8 = 0{,}05$, $x_i = 1{,}2 + ih$, $y_i = f(x_i)$. $y(a) = 0{,}1211$, $y(b) = 0{,}2503$, $y(a) + y(b) = 0{,}3713$.

Складемо розрахункову таблицю для середніх точок:

| $i$ | $x_i$ | $2x_i - 2{,}1$ | $\sin(2x_i - 2{,}1)$ | $x_i^2 + 1$ | $y_{2i-1}$ | $y_{2i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,25 | 0,40 | 0,38942 | 2,5625 | 0,1520 | |
| 2 | 1,30 | 0,50 | 0,4794 | 2,69 | | 0,1782 |
| 3 | 1,35 | 0,60 | 0,5646 | 2,8225 | 0,2000 | |
| 4 | 1,40 | 0,70 | 0,6442 | 2,96 | | 0,2176 |
| 5 | 1,45 | 0,80 | 0,7174 | 3,1024 | 0,2312 | |
| 6 | 1,50 | 0,90 | 0,7833 | 3,25 | | 0,2410 |
| 7 | 1,55 | 1.00 | 0,8415 | 3,4025 | 0,2473 | |
| $\Sigma$ | | | | | 0,8305 | 0,6368 |

За формулою Сімпсона $I = \frac{0{,}05}{3}(0{,}3714 + 4 \cdot 0{,}8305 + 2 \cdot 0{,}6368) \approx 0{,}88278$.

Для оцінки точності складемо таблицю скінченних різниць до четвертого порядку:

| $i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1211 | | | | |
| 1 | 0,1520 | 0,0309 | | | |
| 2 | 0,1782 | 0,0262 | -0,0047 | | |
| 3 | 0,2000 | 0,218 | -0,0044 | 0,0003 | |
| 4 | 0,2176 | 0,0176 | -0,0042 | 0,0002 | -0,0001 |
| 5 | 0,2312 | 0,0136 | -0,0040 | 0,0002 | 0,0000 |
| 6 | 0,2410 | 0.0098 | -0,0038 | 0,0002 | 0,0000 |
| 7 | 0,2473 | 0,0063 | -0,0035 | 0,0003 | 0,0001 |
| 8 | 0.2503 | 0.0030 | -0,0033 | 0,0002 | -0,0001 |

Оскільки $\max\left|\Delta^4 y_i\right| = 0{,}0001$, то залишковий член оцінюється так:

$$R_{зал} = \frac{(b-a)\max\left|\Delta^4 y_i\right|}{180} \approx \frac{0{,}4 \cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003.$$

Обчислення виконувались з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, отже величина залишкового члену на похибку не впливає. Похибку обчислень можна оцінити із співвідношення: $\Delta I = (b-a)\Delta y \le 0{,}4 \cdot 0{,}0001 < 0{,}00005$. Отже, отримані чотири десяткових знаки є вірними.

*Задача 6.2*. Обчислити наближене значення інтегралу за формулою «3/8», для контролю точності виконати подвійний розрахунок при $n_1 = 9$ та $n_2 = 12$.

$$I=\int_{1,2}^{3,36}\frac{1+0,4x^2}{2+\sqrt{0,5x^2+1,3}}dx\,.$$

*Розв'язок*. Для цієї формули $n$ повинно бути кратне 3.

1) $n_1=9$, $h_1=(3,36-1,2)/9=0,24$,.

Складемо розрахункову таблицю:

| $i$ | $x_i$ | $i+0,4x_i^2$ | $2+\sqrt{0,5x_i^2+1,3}$ | $y_{1,2,4,5,7,8}$ | $y_{3,6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,2 | 1,576 | 3,42127 | | |
| 1 | 1,44 | 1,82944 | 3,52866 | 0,51845 | |
| 2 | 1,68 | 2,12896 | 3,64657 | 0,58383 | |
| 3 | 1,92 | 2,47456 | 3,77291 | | |
| 4 | 2,16 | 2,86624 | 3,90599 | 0,73381 | 0,65588 |
| 5 | 2,40 | 3,304 | 4,04450 | 0,81691 | |
| 6 | 2,64 | 3,78784 | 4,18742 | | |
| 7 | 2,88 | 4,31776 | 4,33392 | 0,99627 | 0,90458 |
| 8 | 3,12 | 4,89376 | 4,48338 | 1,09153 | |
| 9 | 3,36 | 5,51584 | 4,63530 | | |
| $\Sigma$ | | | | 4,74080 | 1,56046 |

$f(1,2)=0,46065$, $f(3,36)=1,18996$, $f(1,2)+f(3,36)=1,65061$

$$I_1=\frac{3\cdot 0,24}{8}(1,65061+3\cdot 4,74080+2\cdot 1,56046)=1,709453.$$

2) $n_1=12$, $h_1=(3,36-1,2)/12=0,18$,.

Складемо розрахункову таблицю:

| $i$ | $x_i$ | $i+0,4x_i^2$ | $2+\sqrt{0,5x_i^2+1,3}$ | $y_{1,2,4,5,7,8,10,11}$ | $y_{3,6,9}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,2 | 1,576 | 3,42127 | | |
| 1 | 1,38 | 1,76176 | 3,50073 | 0,50325 | |
| 2 | 1,56 | 1,97344 | 3,58644 | 0,55025 | |
| 3 | 1,74 | 2,21104 | 3,67744 | | |
| 4 | 1,92 | 2,47456 | 3,77299 | 0,65588 | 0,60124 |
| 5 | 2,10 | 2,764 | 3,87216 | 0,71381 | |
| 6 | 2,28 | 3,07936 | 3,97464 | | |
| 7 | 2,46 | 3,42064 | 4,07986 | 0,83842 | 0,77475 |
| 8 | 2,64 | 3,78784 | 4,18742 | 0,90458 | |
| 9 | 2,82 | 4,18096 | 4,29700 | | |
| 10 | 3,00 | 4,6000 | 4,40832 | 1,04348 | 0,97300 |
| 11 | 3,18 | 5,04496 | 4,52115 | 1,11586 | |
| 12 | 3,36 | 5,51584 | 4,63530 | | |
| $\Sigma$ | | | | 6,32553 | 2,34899 |

$f(1,2)=0,46065$, $f(3,36)=1,18996$, $f(1,2)+f(3,36)=1,65061$

$$I_1=\frac{3\cdot 0,18}{8}(1?65061+3\cdot 6,32553+2\cdot 2,34899)=1,709450$$

Отримані результати співпадають з точністю до стотисячних, отже приймаємо $I = 1{,}70945$.

*Задача 6.3.* Застосовуючи уточнення Річардсона, обчислити інтеграл за формулою Сімпсона при $n_1 = 2$ та $n_2 = 4$. $I = \int_2^6 \ln\left(x^2 + 3{,}5\right)dx$.

*Розв'язок.* Обчислимо інтеграл

При, $h = (6-2)/2 = 2$.

При $n_2 = 4$, $h = (6-2)/4 = 1$.

Оскільки вузли для першого випадку є підмножиною вузлів другого, то складемо розрахункову таблицю при $h = 1$.

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2 + 3{,}5$ | $\ln\left(x_i^2 + 3{,}5\right)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 7,5 | 0,8751 |
| 1 | 3 | 12,5 | 1,0969 |
| 2 | 4 | 19,5 | 1,2900 |
| 3 | 5 | 28,5 | 1,4548 |
| 4 | 6 | 39,5 | 1,5966 |

$$n_1 = 2$$

$$I_1 \approx \frac{h_1}{3}\left(y_0 + 4y_2 + y_4\right) = \frac{2}{3}\left(0{,}8751 + 4 \cdot 1{,}2900 + 1{,}5966\right) = 5{,}0878$$

$$n_2 = 4,$$

$$I_2 \approx \frac{h_2}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right) = 5{,}0862$$

Знайдемо уточнення, покладаючи $m = 4$:

$$I_{1,2} = 5{,}0862 + \frac{2^4}{4^4 - 2^4}\left(5{,}0862 - 5{,}0878\right) = 5{,}0861.$$

*Задача 6.4.* Обчислити інтеграл за формулою Гаусса. Для оцінки точності виконати подвійний розрахунок ( при $n_1 = 4$, $n_2 = 5$). $I = \int_{1,6}^{2,7} \frac{x + 0{,}8}{\sqrt{x^2 + 1{,}2}}dx$.

*Розв'язок.* За формулою Гаусса:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i = \frac{2{,}7 + 1{,}6}{2} + \frac{2{,}7 - 1{,}6}{2}t_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_i C_i f(x_i),$$

де значення $t_i$, $C_i$ беруться з таблиці квадратурних коефіцієнтів Гаусса.

Складемо розрахункові таблиці.

$n_1 = 4$

| $C_i$ | $t_i$ | $x_i$ | $x_i^2 + 1{,}2$ | $\sqrt{x_i^2 + 1{,}2}$ | $f(x_i)$ | $C_i f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,34785 | -0,86114 | 1,6764 | 4,0103 | 2,0026 | 1,2366 | 0,43015 |
| 0,65215 | -0,33998 | 1,9630 | 5,0534 | 2,2248 | 1,2291 | 0,80155 |
| 0,65215 | 0,33998 | 2,3370 | 6,6616 | 2,5810 | 1,2154 | 0,79264 |
| 0,34785 | 0,86114 | 2,6236 | 8,0833 | 2,8431 | 1,2042 | 0,41887 |
| | | | | | | $\Sigma = 2{,}44321$ |

Обчислимо значення інтегралу:

$$I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44321 = 1{,}3438 .$$

$$n_2 = 5$$

| $C_i$ | $t_i$ | $x_i$ | $x_i^2 + 1{,}2$ | $\sqrt{x_i^2 + 1{,}2}$ | $f(x_i)$ | $C_i f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,23693<br>0,47863<br>0,56889<br>0,47863<br>0,23693 | -0,90618<br>-0,538469<br>0<br>0,538469<br>0,90618 | 1,6516<br>1,8538<br>2,1500<br>2,4462<br>2,6484 | 3,9278<br>4,6366<br>5,8225<br>7,1839<br>8,2140 | 1,9819<br>2,1533<br>2,4130<br>2,6803<br>2,8660 | 1,2370<br>1,2324<br>1,2225<br>1,2111<br>1,2032 | 0,2903<br>0,58988<br>0,69549<br>0,57968<br>0,28508 |
| | | | | | | $\Sigma = 2{,}44321$ |

Співпадіння результатів розрахунків при $n_2 = 4$ та $n_2 = 5$ свідчить про правильність їх виконання.

*Необхідні відомості з теорії*

1. Основні положення чисельних методів наближеного обчислення визначених інтегралів.

2. Квадратурні формули прямокутників та їх застосування у практичних задачах.

3. Квадратурна формула трапецій

4. Квадратурна формула Сімпсона.

5. Квадратурні формула «3/8»

6. Квадратурна формула Буля . Основна ідея. Що лежить в основі цієї формули та доцільність застосування інтерполяційних полінмів високих порядків.

7. Квадратурна формула Гаусса

8. Строга оцінка похибок цих формул.

9. Оцінка похибок методом подвійного перерахунку.

10. Уточнення значення інтегралу за Річардсоном.

11. Визначення кроку розбиття відрізка інтегрування, при якому квадратурна формула забезпечує задану точність.

12. Обчислення інтегралів від функцій, що мають розриви на проміжку інтегрування.

13. Обчислення інтегралів на відрізку $(0,\infty),.-(\infty,\infty)$.

14. Обчислення кратних інтегралів.

15. Застосування статистичних методів до задач чисельного інтегрування. Метод Монте-Карло обчислення визначених інтегралів

**Завдання 6**

*Завдання 6.1.* Обчислити інтеграл за формулою

а) трапецій з трьома десятковими знаками.

б) Сімпсона при $n = 8$. Оцінити похибку результату, склавши таблицю скінченних різниць.

| № | а) | б) | № | а) | б) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ | $\int_{1,2}^{2} \frac{tg(x+2)}{x} dx$ | 16 | $\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ | $\int_{0,8}^{1,6} (x^2+1)\sin(x-0,5)dx$ |
| 2 | $\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$ | $\int_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x dx$ | 17 | $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$ | $\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos(x) dx$ |
| 3 | $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$ | $\int_{0,2}^{1} \frac{tg(x^2)}{x^2+1} dx$ | 18 | $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$ | $\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$ |
| 4 | $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos(x)}{x+1} dx$ | 19 | $\int_{1,4}^{3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$ | $\int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2++0.8)}{x-1} dx$ |
| 5 | $\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ | $\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx$ | 20 | $\int_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$ | $\int_{0,5}^{1,2} \frac{tg(x^2)}{x+1} dx$ |
| 6 | $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+2}}$ | $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$ | 21 | $\int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$ | $\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$ |
| 7 | $\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ | $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$ | 22 | $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$ | $\int_{0,2}^{1} (x+1)\cos(x^2) dx$ |
| 8 | $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,5}}$ | $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x)}{x+2} dx$ | 23 | $\int_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ | $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2} dx$ |
| 9 | $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ | $\int_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x dx$ | 24 | $\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$ | $\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3) dx$ |
| 10 | $\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ | $\int_{0,4}^{0,8} \frac{tg(x^2+0,5)}{2x^2+1} dx$ | 25 | $\int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+12x^2}}$ | $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1} dx$ |
| 11 | $\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin(x)}{x+1} dx$ | 26 | $\int_{1,3}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$ | $\int_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x}+1) tg(2x) dx$ |
| 12 | $\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$ | $\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cos(x^2) dx$ | 27 | $\int_{1,4}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$ | $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$ |
| 13 | $\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$ | $\int_{1,4}^{3} x^2 \lg(x) dx$ | 28 | $\int_{0,15}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,6}}$ | $\int_{1,2}^{2,8} (0,5x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ |
| 14 | $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ | $\int_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$ | 29 | $\int_{2,3}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ | $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$ |
| 15 | $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ | $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$ | 30 | $\int_{0,32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,3}}$ | $\int_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ |

*Завдання 6.2*. Обчислити наближене значення інтегралу, за формулою «3/8», використовуючи для контролю точності подвійний розрахунок при $n_1 = 9$, $n_2 = 12$.

| № | | № | | № | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\int\limits_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1+\sqrt{0,8x^2+1,4}}$ | 11 | $\int\limits_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,4+\sqrt{0,6x^2+1,5}}$ | 21 | $\int\limits_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,9+\sqrt{0,7x^2+1,5}}$ |
| 2 | $\int\limits_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0,7x^2)dx}{1,5+\sqrt{2x^2+0,3}}$ | 12 | $\int\limits_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0,7x^2)dx}{0,8+\sqrt{0,4x^2+1,3}}$ | 22 | $\int\limits_{0,7}^{2,5} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1,5+\sqrt{2x^2+0,4}}$ |
| 3 | $\int\limits_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0,6x^2)dx}{0,9+\sqrt{x^2+1,5}}$ | 13 | $\int\limits_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0,4x^2)dx}{0,7+\sqrt{1,1x^2+1,2}}$ | 23 | $\int\limits_{1}^{3,16} \frac{(1+0,8x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,4x^2+2,1}}$ |
| 4 | $\int\limits_{0,7}^{2,5} \frac{(1+1,5x^2)dx}{0,5+\sqrt{x^2+0,8}}$ | 14 | $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+1,2x^2)dx}{0,8+\sqrt{x^2+1,3}}$ | 24 | $\int\limits_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0,8x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+1}}$ |
| 5 | $\int\limits_{1}^{3,16} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+2,5}}$ | 15 | $\int\limits_{0,8}^{2,6} \frac{(1+1,5x^2)dx}{0,7+\sqrt{2,2x^2+0,5}}$ | 25 | $\int\limits_{1,3}^{3,46} \frac{(1+0,9x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+0,7}}$ |
| 6 | $\int\limits_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0,4x^2)dx}{1,2+\sqrt{1,2x^2+1}}$ | 16 | $\int\limits_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0,3x^2)dx}{1,2+\sqrt{0,6x^2+1,2}}$ | 26 | $\int\limits_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0,4x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,8x^2+0,4}}$ |
| 7 | $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,2x^2)dx}{0,7+\sqrt{0,5x^2+1,2}}$ | 17 | $\int\limits_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0,9x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,5x^2+1}}$ | 27 | $\int\limits_{0,4}^{2,56} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1,2+\sqrt{0,6x^2+1,5}}$ |
| 8 | $\int\limits_{0,5}^{2,3} \frac{(1+1,2x^2)dx}{1,2+\sqrt{0,6x^2+1,3}}$ | 18 | $\int\limits_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0,0x^2)dx}{0,4+\sqrt{x^2+1,5}}$ | 28 | $\int\limits_{1,3}^{3,46} \frac{(1+1,2x^2)dx}{2,3+\sqrt{0,4x^2+3,2}}$ |
| 9 | $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,4x^2)dx}{0,8+\sqrt{0,7x^2+1,3}}$ | 19 | $\int\limits_{0,4}^{2,56} \frac{(1+0,3x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,8x^2+0,4}}$ | 29 | $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,3x^2)dx}{0,9+\sqrt{1,2x^2+0,5}}$ |
| 10 | $\int\limits_{0,8}^{2,6} \frac{(1+0,9x^2)dx}{0,7+\sqrt{1,2x^2+0,5}}$ | 20 | $\int\limits_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,4+\sqrt{2x^2+0,5}}$ | 30 | $\int\limits_{0,5}^{2,3} \frac{(1+0,6x^2)dx}{2,5+\sqrt{0,3x^2+1,6}}$ |

*Завдання 6.3*. Використовуючи уточнення за Річардсоном, обчислити інтеграл :

а) $\int\limits_{a}^{a+3} \sqrt{x^2+bx}dx$ за формулою трапецій при $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, знайти його уточнене значення: $a = 0,1k$, $b = 4 - 0,1k$, де $k$ – номер варіанта.

б) $\int\limits_{a}^{a+4} \lg(x^2+2)dx$ за формулою Сімпсона при $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, знайти його уточнене значення: $a = 3 - 0,1k$, де $k$ – номер варіанта.

*Завдання 6.4.* Використовуючи формулу Гаусса, обчислити інтеграл, для оцінки точності виконати подвійних розрахунок ($n_1 = 4$, $n_2 = 5$).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 2 | $\int_{2}^{3,2} \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 3 | $\int_{2}^{3,2} \frac{(x^2+0,5)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 4 | $\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| 5 | $\int_{1,2}^{2} \frac{(x^2-0,5)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 6 | $\int_{2,2}^{3,8} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2}}$ | | 7 | $\int_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}dx}{x+2}$ | | 8 | $\int_{1}^{2,6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$ |
| 9 | $\int_{0,8}^{1,6} \frac{(0,5x+2)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 10 | $\int_{-0,4}^{1,6} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 11 | $\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$ | | 12 | $\int_{2,6}^{3,4} \frac{(x+0,5)dx}{\sqrt{x^2+1,5}}$ |
| 13 | $\int_{0,8}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ | | 14 | $\int_{2,4}^{3,2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2}}$ | | 15 | $\int_{0,2}^{2} \frac{(x+0,5)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 16 | $\int_{0,7}^{1,5} \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| 17 | $\int_{0,4}^{1,6} \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 18 | $\int_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}dx}{x+2}$ | | 19 | $\int_{1,4}^{2,6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ | | 20 | $\int_{2,2}^{3,4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| 21 | $\int_{-2,5}^{-1,3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1,8}}$ | | 22 | $\int_{-0,4}^{1,8} \frac{(x^2+2)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 23 | $\int_{0,6}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2}}$ | | 24 | $\int_{1,6}^{2,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ |
| 25 | $\int_{0,6}^{1,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1,7}}$ | | 26 | $\int_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}dx}{2x+2,5}$ | | 27 | $\int_{2,2}^{2,8} \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 28 | $\int_{0,8}^{1,5} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2,4}}$ |
| 29 | $\int_{0,4}^{1,7} \frac{(x+2,2)dx}{\sqrt{x^2+1}}$ | | 30 | $\int_{0,4}^{1,8} \frac{(x^2+1,4)dx}{\sqrt{x^2+0,2}}$ | | | | | | |

## Тема 7. Розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь

7.1. Обчислення норми вектора та матриці. Оцінка обумовленості

Нехай задано вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ та матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1n} \\ ............... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{pmatrix}$, то найчастіше застосовуються наступні норми:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{mazx}(A \cdot A^T)}$, де $\lambda_{\max}$ -- найбільше власне число;
- $\|x\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$;
- $\|x\|_i = \max_i |x_i|$, $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Властивості норм:

1) $\|x\| \ge 0$ причому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\|A\| \ge 0$ причому $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ $\forall \alpha$ – число, $\forall x$ – вектора або $\forall A$ – матриці;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ для будь-яких векторів $x, y$, $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ для будь-яких матриць $A, B$.

Абсолютна та відносна похибки векторів та матриць визначаються за такими формулами:

$$\Delta x^* = \|x^* - x\|,\ \delta x^* = \Delta x^* / \|x\|,\ \Delta A^* = \|A^* - A\|,\ \delta A^* = \Delta A^* / \|A\|.$$

Система лінійних рівнянь може бути добре обумовленою або погано обумовленою. Число обумовленості визначається як: $\lambda = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Якщо $\lambda \ge 10$, то система є погано обумовленою, так як можливим є значне зростання похибки.

7.2. Точні методи

**Метод Гаусса.** Нехай задана система лінійних рівнянь $Ax = b$. Запишемо розширену матрицю цієї системи:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\ b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn}\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Прямий хід – зведення матриці до верхньої трикутної (починається зверху до низу). На першому кроці елемент $a_{11} \ne 0$ вибираємо як ведучий і ділимо на нього перший рядок: $\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1\ \ a'_{12} .. a'_{1n}\ b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} .. a_{nn}\ b_n \end{pmatrix}$, де $a'_{ij} = a_{1j} / a_{11}$, $j = \overline{1, n}$, $b'_1 = b_1 / a_{11}$.

Далі, послідовно помножуючи перший рядок на $a_{i1}, i = \overline{2, n}$ і віднімаючи його від відповідного рядка, занулимо коефіцієнти першого стовпчика:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1\ \ a'_{12} .. a'_{1n}\ b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ a'_{n2} .. a'_{nn}\ b'_n \end{pmatrix}$$

Повторимо цю операцію для інших рядків, починаючи з другого і до $n - 1$ (цим рядком ми виконаємо перетворення $n$-го рядка) і на кожному кроці нові елементи матриці будуть визначатись за рекурентною формулою: $a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * a_{ik} / a_{kk}$. Отримаємо верхню трикутну матрицю:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} \ldots a'_{1n} \; b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 & \ldots a'_{nn} \; b'_n \end{pmatrix}$$

2. Зворотній хід – розв'язання верхньої трикутної матриці (починається з останнього рядка) $x_n = b'_n / a'_{nn}$, $x_{n-1} = (b'_{n-1} - x_n a'_{n-nn}), \ldots, x_1 = \left( b'_1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n}^{2} x_j a'_{ijn} \right)$.

Головною вимогою до застосування методу Гаусса є відсутність нульових елементів на головній діагоналі.

Також метод Гаусса застосовують для обчислення визначника, для цього виконують прямих хід – зведення матриці до верхньої трикутної і тоді визначник обчислюють як добуток елементів головної діагоналі: $\Delta = \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$.

Однією з модифікацій методу Гаусса є схема з вибором головного елемента, де як ведучий елемент кожного рядка вибирається найбільший за модулем коефіцієнт.

**Метод LU-розкладу.** Невироджену матрицю $A$ завжди модна представити у вигляді добутку нижньої трикутної матриці $L$ і верхньої трикутної матриці $U$: $A = LU$. В матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \ldots 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \cdots u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \cdots u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{23} \cdots u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \cdots u_{nn} \end{pmatrix}$$

Тоді розв‘язання системи лінійних рівнянь можна представити $Ax = LUx = b$.Розв‘язок такої системи можна розбити на два кроки:

1. $Ly = b$ – застосовуючи прямий хід;
2. $Ux = y$ – застосовуючи зворотній хід.

Для розвинення матриці $A$ на нижню та верхню трикутні матриці застосовують метод виключення Гаусса.

**Метод Халецького.** Якщо матриця А, що задає систему лінійних рівнянь симетрична, то метод LU-розкладу можна спростити, так як матрицю можна розкласти як $A = LL^T$, де $L$ - верхня трикутна матриця. Для обчислення елементів матриці $L$ застосовуються такі формули:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2}, \quad j+1 \le i \le k \text{ і } l_{ij} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{ii}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

**Метод прогонки** Розглянемо метод прогонки для трьох діагональної матриці. Трьохдіагональною матрицею або матрицею Якобі називають матрицю наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n & C_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь $Ax = F$ рівносильна співвідношенню:

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i .$$

Метод прогонки базується на положенні, що шукані невідомі зв'язані рекурентним співвідношенням:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1, n-2, \dots, 1 .$$

Звідси випливає: $\begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i} \end{cases}$. З 1-го рівняння знаходимо: $\alpha_2 = \dfrac{-B_1}{C_1}$, $\beta_2 = \dfrac{F_1}{C_1}$

Далі, використовуючи рекурентні формули, знаходимо всі прогоночні коефіцієнти $\alpha_i, \beta_i$ та знаходимо розв'язок системи:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1, n-2, \dots, 1,\ x_n = \frac{F_n - A\beta_n}{C_n - A_n \alpha_n}$$

7.3. Наближені методи

Нехай задана система лінійних рівнянь $Ax = b$. Для застосування ітераційних методів її необхідно звести до еквівалентного вигляду: $x = Bx + d$, де $b_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$, $d_i = b_i / a_{ii}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Далі, задавши початкове наближення $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$, знаходять послідовне наближення до кореня. Для збіжності ітераційного процесу достатньо, щоб виконувалась умова $\|B\| < 1$. Якщо ця умова не виконується, то матрицю необхідно нормувати. Критерій завершення процесу ітерацій залежить від методу.

Аналогічно ці методи застосовуються для розв'язання систем нелінійних рівнянь. Система рівнянь приводиться до еквівалентного вигляду:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)} = \varphi_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \end{cases}$$

Для систем нелінійних рівнянь достатньою умовою збіжності є $\|M\| < 1$, де $M_{kj} = \max\left|\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right|$.

**Метод простих ітерацій (метод Якобі).** Розрахункова формула має вигляд: $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + d$ або у по координатному вигляді $x_i^{(k+1)} = b_{i1}x_1^{(k)} + b_{i1}x_2^{(k)} + \ldots + b_{in}x_n^{(k)}$.

Критерій завершення ітерацій: $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 = \varepsilon(1 - \|B\|)/\|B\|$. Якщо $\|B\| < 1/2$, то можна застосовувати більш простий критерій: $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$ .

Швидкість збіжності значною мірою залежить від представлення системи рівнянь.

**Метод Зейделя.** Це модифікація методу простих ітерацій, де розрахункова формула має вигляд: $x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)} + d$ – на кожному кроці застосовуються вже знайдені значення невідомих. Для існування єдиного розв‘язку і збіжності методу Зейделя достатньо, щоб виконувалась хоча б одна з умов:

1. $\sum_{j \neq i} |c_{ij}| < |c_{ii}|, \quad i = \overline{1,n}$ (матриця строго діагонально домінуюча);
2. матриця $C$ є симетричною додатно визначеною (всі її власні числа додатні).

**Метод Ньютона.** Розглянемо систему нелінійний рівнянь, яку у загальному вигляді можна записати:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}$$

або у векторній формі $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ (1). Матриця вигляду:

$$F(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

називається якобіаном або матрицею Якобі. Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь можна представити ітераційною формулою: $x^{(k)} = x^{(k-1)} - F^{-1}\left(x^{(k-1)}\right) f\left(x^{(k-1)}\right), \quad k = \overline{1,n}$.

Метод Ньютона для систем пов‘язаний з великою кількістю обчислень (на кожному кроці необхідно обчислювати $F^{-1}(x)$), тому на практиці часто користуються спрощеним рекурентним співвідношенням: $x^{(k)} = x^{(k-1)} - F^{-1}\left(x^{(0)}\right) f\left(x^{(k-1)}\right), \quad k = \overline{1,n}$, де матриця обернена до якобіана відшукується лише один раз для початкового наближення вектора $x^{(0)}$. Критерій завершення ітерацій: $\left\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\right\|<\varepsilon$, де $\|\bar{x}\|_i=\max\limits_i|x_i|$. Збіжність залежить від вибору початкового наближення, якщо $\det(F)\neq 0$, то ітерації збігаються до кореня.

### Типові задачі

*Задача 6.1.* Обчислити норму матриці та оцінити ступінь обумовленості системи лінійних рівнянь:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 4\\ 7 & 10 & -10\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$$

*Розв'язок.* $\|b\|_1=7$, $\|b\|_2=\sqrt{9+16}=5$, $\|b\|_\infty=4$ для вектора.

$\|A\|_1=\max(10,15,17)$, $\|A\|_e=\sqrt{304}=17.436$, $\|A\|_\infty=\max(4,11,27)=7$ для матриці.

Обчислимо $\Delta A=45$, та матрицю алгебраїчних доповнень:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-90 & 30 & -15\\ 48 & -11 & 10\\ -15 & 10 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2/3 & -1/3\\ 16/15 & -11/45 & 2/9\\ -1/3 & 2/9 & -1/9\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|A^{-1}\right\|=2.444$$

$\lambda=\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=17.436*2.444=42.614$ - число обумовленості більше 10, отже похибка результату буде швидко зростати ( у 42.614 разів), для отримання розв'язку такої системи її необхідно нормувати.

*Примітка.* Для обчислення норми матриці, та визначення числа обумовленості можна використовувати стандартні функції середовища Mathcad – norme() та conde().

*Задача 6.2.* Обчислити визначник та розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases}0.32x_1+0.55x_2+0.61x_3=2.25\\ 0.70x_1-0.65x_2-0.26x_3=-0.12\\ 1.20x_1-2.32x_2+0.75x_3=1.28\end{cases}$$

*Розв'язок.* Складемо розрахункову таблицю:

| Коефіцієнти системи | | | Права частина | Зворотній хід |
|---|---|---|---|---|
| **0.32** | 0.55 | 0.61 | 2.25 | |
| 0.70 | -0.65 | -0.26 | -0.12 | |
| 1.20 | -2.32 | 0.75 | 0.98 | |
| 1 | 1.71875 | 1.90625 | 7.03125 | $x_1 = 7.03125 - 1 * 1.71875 - 2 * 1.9062 = 1.5$ |
| 0 | **-1.85313** | -1.59437 | -5.04188 | |
| 0 | -4.3825 | -1.5375 | -7.4575 | |
| | 1 | 0.86037 | 2.72074 | $x_2 = 2.72074 - 2 * 0.86037 = 1$ |
| | 0 | **2.23307** | 4.46614 | $x_3 = 4.46614 / 2.3307 = 2$ |

Визначник: $\Delta = 0.32 * (-1.85313) * 2.23307 = -1.32421$.

*Задача 6.3*. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом LU-розкладу:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 22 \end{cases}$$

*Розв'язок*. Запишемо матрицю коефіцієнтів та праву частину:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Розкладення матриці:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ Помножимо послідовно перший рядок на 0,5 і 0,25 та віднімемо з 2-го та 3-го рядка, отримаємо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2{,}5 & 4{,}5 \\ 0 & 1{,}25 & 6{,}25 \end{pmatrix}$

Тепер у якості ведучого рядка візьмемо другий рядок матриці. Помножимо його на -0,5 і віднімемо від 3-го рядка, отримаємо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2{,}5 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 8{,}5 \end{pmatrix}$

Розв'яжемо систему $Ly = b$: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 34 \end{pmatrix}$.

Розв‘яжемо систему $Ux = y$ : $U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2{,}5 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 8{,}5 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 25.5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

*Задача 6.3* Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Халецького:

$$A = \begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$$

*Розв'язок*. Знайдемо елементи матриці $L$:

$l_{11} = \sqrt{81} = 9$, $l_{22} = \sqrt{50 - (-5)^2} = 5$, $l_{33} = \sqrt{38 - 5^2 - 2^2} = 3$,

$l_{21} = -45/9 = -5$, $l_{32} = (-15 - 5(-5))/5 = 2$, $l_{31} = 45/9 = 5$.

Отже матрицю А можна представити наступним чином:

$$A = L \cdot L^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Далі послідовно розв'язуємо системи рівнянь:

$$Ly = b \;\Rightarrow\; y = \begin{pmatrix} 59 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{ та } L^T x = y \;\Rightarrow\; x = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

*Задача 6.3*. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом прогонки:

$$\begin{cases} 2.05x_1 + 1.07x_2 = 1.78 \\ 1.83x_1 + 2.42x_2 - 1.02x_3 = 2.45. \\ -3.49x_2 + 1.51x_3 = 3.26 \end{cases}$$

*Розв'язок*. Обчислимо прогоночні коефіцієнти:

$$A_1 = \frac{c_1}{b_1} = -\frac{1.07}{2.05} = -0.522, \; B_1 = \frac{f_1}{b_1} = \frac{1.78}{2.05} = 0.868.$$

$$A_2 = \frac{-c_2}{A_1 a_2 + b_2} = \frac{-1.02}{-0.522 \cdot 1.83 + 2.42} = 0.696,$$

$$B_2 = \frac{f_2 - a_2 B_1}{A_1 a_2 + b_2} = \frac{2.45 - 1.83 \cdot 0.868}{-0.522 \cdot 1.83 + 2.42} = 0.588.$$

Знайдемо невідомі $x_i$:

$$x_3 = \frac{f_3 - a_3 B_2}{b_3 + a_3 A_2} = \frac{3.26 - 3.49 \cdot 0.588}{1.51 - 3.49 \cdot 0.696} = -5.78;$$

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2 = 0.696 \cdot (-5.78) + 0.588 = -3.435;$$

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1 = -0.522 \cdot (-3.435) + 0.868 = 2.661$$

*Задача 6.4.* Розв'язати систему лінійних рівнянь методом простих ітерацій та методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 \end{cases}.$$

*Розв'язок.* Матриця цієї системи є діагонально домінуючою, отже, вона задовольняє умові збіжності ітерацій. Якщо почати виконувати ітерації, то буде очевидним, що вони збігаються дуже повільно. Прискорити їх збіжність можна, якщо коефіцієнти матриці будуть задовольняти умові $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1,\ i = \overline{1,n}$. Для досягнення виконання цієї умови можна зробити наступні перетворення:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 10x_2 - 0.99x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 10x_3 - 4{,}2x_3 = -1{,}4 \end{cases}$$

Коефіцієнти на головній діагоналі ми представляємо у вигляді $a_{ii}x_i = mx_i - lx_i$, підбираючи значення числа $m$ так, щоб сума діагональних елементів була меншою за одиницю. Тоді ітерації можна записати наступним чином:

$$\begin{array}{l} 10x_1 = 1{,}9 + 2{,}4x_1 - 0{,}5x_2 - 2{,}4x_3 \\ 10x_2 = 9{,}7 - 2{,}2x_1 + 0{,}9x_2 - 4{,}4x_3 \\ 10x_3 = -1.4 + 1{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 4{,}2x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{array}$$

Тоді будемо мати:

$$\sum_{j=1}^{3} |a^*_{1j}| = 0{,}53 < 1, \quad \sum_{j=1}^{3} |a^*_{2j}| = 0{,}75 < 1, \quad \sum_{j=1}^{3} |a^*_{3j}| = 0{,}57 < 1 \quad \sum_{i=1}^{3} |b^*_i| = 1{,}3.$$

Можна дати оцінку на кількість кроків для отримання розв'язку:

$$\frac{q^{i+1}}{1-q} \sum_{i=1}^{n} |b^*_i| < \varepsilon, \qquad \text{де} \qquad q = \max_i \sum_j |a^*_{ij}| \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{0{,}75^{i+1}}{1-0{,}75} 1{,}3 < 10^{-3} \Rightarrow 0{,}75^{i+1} \le 0{,}19 \cdot 10^{-3} \Rightarrow i \le 29.$$

Як видно, після виконаного нормування матриці ітерації будуть збігатись значно швидше. В якості початкових наближень візьмемо вектор правої частини $x^{(0)} = (0.19;\ 0.97;\ -0.14)$.

1) Розв'язок системи лінійних рівнянь методом простих ітерацій:

| № | $\overline{x}_i$ | Ітерація | Похибка |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 0.19$<br>$x_2 = 0.97$<br>$x_3 = -0.14$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.19 - 0.05 * 0.97 - 0.24 * (-0.14) = 0.2207$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.19 + 0.09 * 0.97 - 0.44 * (-0.14) = 1.0771$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.19 - 0.02 * 0.97 + 0.42 * (-0.14) = -0.1935$ | $\Delta_1 = 0.0307$<br>$\Delta_2 = 0.1071$<br>$\Delta_3 = 0.0535$ |
| 2 | $x_1 = 0.2207$<br>$x_2 = 1.0771$<br>$x_3 = -0.1935$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2207 - 0.05 * 1.0771 - 0.24 * (-0.1935) = 0.2355$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2207 + 0.09 * 1.0771 - 0.44 * (-0.1935) = 1.1035$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2207 - 0.02 * 1.0771 + 0.42 * (-0.1935) = -0.2141$ | $\Delta_1 = 0.0148$<br>$\Delta_2 = 0.0264$<br>$\Delta_3 = 0.0206$ |
| 3 | $x_1 = 0.2355$<br>$x_2 = 1.1035$<br>$x_3 = -0.2141$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2355 - 0.05 * 1.1035 - 0.24 * (-0.2141) = 0.2427$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2355 + 0.09 * 1.1035 - 0.44 * (-0.2141) = 1.1117$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2355 - 0.02 * 1.1035 + 0.42 * (-0.2141) = -0.2214$ | $\Delta_1 = 0.0072$<br>$\Delta_2 = 0.0082$<br>$\Delta_3 = 0.0072$ |
| 4 | $x_1 = 0.2427$<br>$x_2 = 1.1117$<br>$x_3 = -0.2214$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2427 - 0.05 * 1.1117 - 0.24 * (-0.2214) = 0.2458$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2427 + 0.09 * 1.1117 - 0.44 * (-0.2214) = 1.1141$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2427 - 0.02 * 1.1117 + 0.42 * (-0.2214) = -0.2237$ | $\Delta_1 = 0.0031$<br>$\Delta_2 = 0.0024$<br>$\Delta_3 = 0.0023$ |
| 5 | $x_1 = 0.2458$<br>$x_2 = 1.1141$<br>$x_3 = -0.2237$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2458 - 0.05 * 1.1141 - 0.24 * (-0.2237) = 0.247$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2458 + 0.09 * 1.1141 - 0.44 * (-0.2237) = 1.1146$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2458 - 0.02 * 1.1141 + 0.42 * (-0.2237) = -0.2243$ | $\Delta_1 = 0.001$<br>$\Delta_2 = 0.001$<br>$\Delta_3 = 0.001$ |

На п’ятому кроці знайдено розв’язок з точністю $\varepsilon - 0.0001$.

2) Розв’язок системи лінійних рівнянь методом Зейделя:

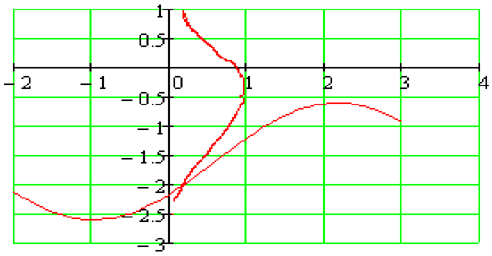
| № | $\overline{x}_i$ | Ітерація | Похибка |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 0.19$<br>$x_2 = 0.97$<br>$x_3 = -0.14$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.19 - 0.05 * 0.97 - 0.24 * (-0.14) = 0.2207$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2207 + 0.09 * 0.97 - 0.44 * (-0.14) = 1.0703$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2207 - 0.02 * 1.0703 + 0.42 * (-0.14) = -0.1915$ | $\Delta_1 = 0.0307$<br>$\Delta_2 = 0.1003$<br>$\Delta_3 = 0.0515$ |
| 2 | $x_1 = 0.2207$<br>$x_2 = 1.0703$<br>$x_3 = -0.1915$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2207 - 0.05 * 1.0703 - 0.24 * (-0.1915) = 0.2354$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2354 + 0.09 * 1.0703 - 0.44 * (-0.1915) = 1.1099$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2354 - 0.02 * 1.1099 + 0.42 * (-0.1915) = -0.2118$ | $\Delta_1 = 0.0147$<br>$\Delta_2 = 0.0284$<br>$\Delta_3 = 0.0202$ |
| 3 | $x_1 = 0.2354$<br>$x_2 = 1.1099$<br>$x_3 = -0.2118$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2355 - 0.05 * 1.1099 - 0.24 * (-0.2118) = 0.2424$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2424 + 0.09 * 1.1099 - 0.44 * (-0.2118) = 1.1087$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2424 - 0.02 * 1.1087 + 0.42 * (-0.2118) = -0.2196$ | $\Delta_1 = 0.0069$<br>$\Delta_2 = 0.0099$<br>$\Delta_3 = 0.0078$ |
| 4 | $x_1 = 0.2424$<br>$x_2 = 1.1087$<br>$x_3 = -0.2196$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2424 - 0.05 * 1.1087 - 0.24 * (-0.2196) = 0.2455$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2424 + 0.09 * 1.1087 - 0.44 * (-0.2196) = 1.1124$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2424 - 0.02 * 1.1124 + 0.42 * (-0.2196) = -0.2226$ | $\Delta_1 = 0.0031$<br>$\Delta_2 = 0.0036$<br>$\Delta_3 = 0.0029$ |
| 5 | $x_1 = 0.2455$<br>$x_2 = 1.1124$<br>$x_3 = -0.2226$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.2455 - 0.05 * 1.1124 - 0.24 * (-0.2226) = 0.247$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.247 + 0.09 * 1.1124 - 0.44 * (-0.2226) = 1.114$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.247 - 0.02 * 1.114 + 0.42 * (-0.2226) = -0.224$ | $\Delta_1 = 0.0012$<br>$\Delta_2 = 0.0012$<br>$\Delta_3 = 0.0011$ |
| 6 | $x_1 = 0.247$<br>$x_2 = 1.114$<br>$x_3 = -0.224$ | $x_1 = 0.19 + 0.24 * 0.247 - 0.05 * 1.114 - 0.24 * (-0.224) = 0.2473$<br>$x_2 = 0.97 - 0.22 * 0.2473 + 0.09 * 1.114 - 0.44 * (-0.224) = 1.1143$<br>$x_3 = -0.14 + 0.13 * 0.2473 - 0.02 * 1.1143 + 0.42 * (-0.224) = -0.2242$ | $\Delta_1 = 0.0005$<br>$\Delta_2 = 0.0005$<br>$\Delta_3 = 0.0004$ |

*Задача 6.5.* Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом простих ітерацій з точністю до 0,001:

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6)-y=1{,}6 \\ 3x-\cos y=0.9 \end{cases}$$

*Розв'язок.* Приведемо систему до необхідного вигляду:

$$\begin{cases} y=\sin(x-0{,}6)-1{,}6 \\ x=\cos y/3+0{,}3 \end{cases}$$




З графіку видно, що система має єдиний розв'язок в області: $D: 0<x<0{,}3; -2{,}2<y<-1{,}8$.

Перевіримо збіжність методу:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y)=\sin(x-0{,}6)-1{,}6 \\ \varphi_2(x,y)=\cos y/3+0{,}3 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\cos(x-0{,}6)$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-\dfrac{1}{3}\sin y$, $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0$. В області $D$ маємо:

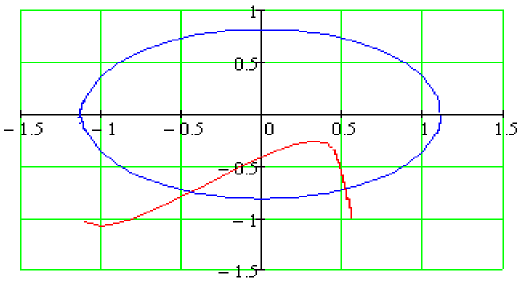
$\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|=\left|\cos(x-0{,}6)\right|\le\cos 0{,}3<1$, $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=\left|\dfrac{1}{3}\sin y\right|\le\left|\dfrac{1}{3}\sin(-1{,}8)\right|<1$. Отже умова збіжності виконується. Визначимо початкове наближення: $x_0=0{,}15$, $y_0=-2$. Складемо розрахункову таблицю:

| № | $x_i$ | $y_i$ | $x_i-0{,}6$ | $\sin(x_i-0{,}6)$ | $\cos y_i$ | $\cos y_i/3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,15 | -2 | -0,45 | -0,4350 | -0,4161 | -0,1384 |
| 1 | 0,1616 | -2,035 | -0,4384 | -0,4245 | -0,4477 | -0,1492 |
| 2 | 0,1508 | -2,0245 | -0,4492 | -0,4342 | -0,4382 | -0,1461 |
| 3 | 0,1539 | -2,0342 | -0,4461 | -0,4313 | -0,4470 | -0,1490 |
| 4 | 0,1510 | -2,0313 | -0,4490 | -0,4341 | -0,4444 | -0,1481 |
| 5 | 0,1519 | -2,0341 | -0,4481 | -0,4333 | -0,4469 | -0,1490 |
| 6 | 0,1510 | -2,0333 | -0,449 | -0,4341 | -0,4462 | -0,1487 |
| 7 | 0,1513 | -2,0341 | -0,4487 | -0,4340 | -0,4469 | -0,1490 |
| 8 | **0,1510** | **-20340** | | | | |

*Задача 6.6.* Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом Ньютона з точністю до 0,001:

$$\begin{cases} \sin(2x-y)-12x=0{,}4 \\ 0{,}8x^2+1{,}5y^2=1 \end{cases}$$

*Розв'язок.* Перепишемо перше рівняння: $y = 2x - \arcsin(0,4 + 1,2x)$. Друге рівняння описує еліпс. Побудуємо графіки для визначення кількості коренів та області їх локалізації. Як видно з рис. 3, система має два корені. Будемо шукати розв'язок, що лежить в області $D: 0,4 < x < 0.5; -0,8 < y < -0,7$




Для цього приймемо початкове наближення: $x_0 = 0,4$, $y_0 = -0,75$

Позначимо: $\begin{cases} F(x,y) = \sin(2x - y) - 1,2x - 0,4 \\ G(x,y) = 0,8x^2 + 1,5y^2 - 1 \end{cases}$

Для визначення якобіану знайдемо похідні: $\begin{cases} F'_x = 2\cos(2x - y) - 1,2 \\ G'_x = 1,6x \end{cases}$,

$\begin{cases} F'_y = -\cos(2x - y) \\ G'_y = 3y \end{cases}$

Уточнення кореня виконується за ітераційними формулами: $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + k_i \end{cases}$, де $h_i = \Delta_{xi} / \Delta$, $k_i = \Delta_{yi} / \Delta$,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} F'_x(x_i, y_i) & F'_y(x_i, y_i) \\ G'_x(x_i, y_i) & G'_y(x_i, y_i) \end{vmatrix}, \Delta_{xi} = \begin{vmatrix} F'_y(x_i, y_i) & F(x_i, y_i) \\ G'_y(x_i, y_i) & G(x_i, y_i) \end{vmatrix}, \Delta_{yi} = \begin{vmatrix} F(x_i, y_i) & F'_x(x_i, y_i) \\ G(x_i, y_i) & G'_x(x_i, y_i) \end{vmatrix}.$$

Для відшукання кореня складемо розрахункову таблицю:

| № | $x_i$ | $0,8x_i^2$ | $z_i = 2x_i - y_i$ | $\sin(z_i)$ | $F(x_i, y_i)$ | $F'_x(x_i, y_i)$ | $F'_y(x_i, y_i)$ | $\Delta_i$ | $\Delta_{xi}$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_i$ | $1,5y_i^2$ | | $\cos(z_i)$ | $G(x_i, y_i)$ | $G'_x(x_i, y_i)$ | $G'_y(x_i, y_i)$ | | $\Delta_{yi}$ | $k_i$ |
| 0 | 0,4 | 0,128 | 0,55 | 0,9988 | 0,1198 | -1,1584 | -0,0208 | 2,6 | 0,2701 | 0,10 |
| | -0,75 | 0,8438 | | 0,0208 | -0,0282 | 0,64 | -2,25 | 197 | 0,0440 | 0,017 |
| 1 | 0,50 | 0,2 | 0,7333 | 0,9869 | -0,0131 | -1,523 | 0,1615 | 3,2 | -0,019 | -0,006 |
| | -0,733 | 0,8059 | | -0,162 | 0,059 | 0,8 | -2,199 | 199 | 0,0794 | 0,0247 |
| 2 | 0,4940 | 0,1952 | 1,6963 | 0,9921 | -0,0007 | -1,4502 | 0.1251 | 2,9 | -0,008 | -0,003 |
| | -0,708 | 0,7525 | | -0,125 | -0,0523 | 0,7904 | -2,1249 | 827 | -0,076 | -0.026 |
| 3 | 0,4913 | 0,1931 | 1,7265 | 0,9894 | -0,0002 | -1,4904 | 0,1452 | 3,1 | -3*10$^{-4}$ | 10$^{-4}$ |
| | -0,739 | 0,8079 | | -0,145 | 0,0010 | 0,7861 | -2,2017 | 673 | 0,0013 | 4*10$^{-4}$ |

Отже корені рівняння з точністю до 0,001: $x = 0,4912$, $y = -0,7335$

*Необхідні відомості з теорії*

**1.** Обчислення норми вектора та матриці. Властивості норми.

2. Поняття обумовленості матриці. Визначення числа обумовленості.

3. Класифікація методів розв'язку систем лінійних рівнянь.

4. Метод Гаусса, його недоліки. Модифікації методу Гаусса.

5. Методи розв’язку систем із симетричною матрицею.

6. Розв’язання систем лінійних рівнянь з матрицями діагонального типу (метод прогонки та його застосування до розв’язання диференційних рівнянь).

7. Наближені методи розв’язку систем лінійних рівнянь, їх недоліки та переваги.

8. Метод простих ітерацій для розв’язку систем нелінійних рівнянь. Умови його застосування.

9. Метод Ньютона для розв’язку систем нелінійних рівнянь та його спрощення.

**Завдання 7**

*Завдання 7.1.*

*а)* Обчислити норму матриці та вектора правої частини, оцінити число обумовленості.

*б)* Обчислити визначник та розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

*в)* Розв’язати систему лінійних рівнянь методом LU-розкладу.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} 3.75x_1 - 0.28x_2 + 0.17x_3 = 0.75 \\ 2.11x_1 - 0.11x_2 - 0.12x_3 = 1.11 \\ 0.22x_1 - 3.17x_2 + 1.81x_3 = 0.05 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 0.21x_1 - 0.18x_2 + 0.75x_3 = 0.11 \\ 0.13x_1 + 0.75x_2 - 0.11x_3 = 2.00 \\ 3.01x_1 - 0.33x_2 + 0.11x_3 = 0.13 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 0.33x_1 - 0.14x_2 - 2.00x_3 = 0.15 \\ 0.75x_1 + 0.18x_2 - 0.77x_3 = 0.11 \\ 0.28x_1 - 0.17x_2 + 0.39x_3 = 0.12 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 3.01x_1 - 0.14x_2 - 0.15x_3 = 1.00 \\ 1.11x_1 + 0.13x_2 - 0.75x_3 = 0.13 \\ 0.17x_1 - 2.11x_2 + 0.71x_3 = 0.17 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 0.92x_1 - 0.83x_2 + 0.62x_3 = 2.15 \\ 0.24x_1 - 0.54x_2 + 0.43x_3 = 0.62 \\ 0.73x_1 - 0.81x_2 - 0.67x_3 = 0.88 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 1.24x_1 - 0.87x_2 - 3.17x_3 = 0.46 \\ 2.11x_1 - 0.45x_2 + 1.44x_3 = 1.50 \\ 0.48x_1 + 1.25x_2 - 0.63x_3 = 0.35 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} 0.64x_1 - 0.83x_2 + 4.20x_3 = 2.23 \\ 0.58x_1 - 0.83x_2 + 1.43x_3 = 1.71 \\ 0.86x_1 + 0.77x_2 + 0.88x_3 = -0.54 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 0.32x_1 - 0.42x_2 + 0.85x_3 = 1.32 \\ 0.63x_1 - 1.43x_2 - 0.58x_3 = -0.44 \\ 0.84x_1 - 2.23x_2 - 0.52x_3 = 0.64 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} 0.73x_1 + 1.24x_2 - 0.38x_3 = 0.58 \\ 1.25x_1 + 0.66x_2 - 0.78x_3 = 0.66 \\ 0.75x_1 + 1.22x_2 - 0.83x_3 = 0.92 \end{cases}$ |
| 11 | $\begin{cases} 0.62x_1 - 0.44x_2 - 0.86x_3 = 0.68 \\ 0.83x_1 + 0.42x_2 - 0.56x_3 = 1.24 \\ 0.58x_1 - 0.37x_2 - 0.62x_3 = 0.87 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 1.26x_1 - 2.34x_2 + 1.17x_3 = 3.14 \\ 0.75x_1 + 1.24x_2 - 0.48x_3 = -1.17 \\ 3.44x_1 - 1.85x_2 + 1.16x_3 = 1.83 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} 0.46x_1 + 1.72x_2 + 2.53x_3 = 2.44 \\ 1.53x_1 - 2.32x_2 - 1.83x_3 = 2.83 \\ 0.75x_1 + 0.86x_2 + 3.72x_3 = 1.06 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 2.47x_1 + 0.65x_2 - 1.88x_3 = 1.24 \\ 1.34x_1 + 1.17x_2 + 2.54x_3 = 2.35 \\ 0.86x_1 - 1.73x_2 - 1.08x_3 = 3.15 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | $\begin{cases} 4.24x_1 + 2.73x_2 - 1.55x_3 = 1.87 \\ 2.34x_1 + 1.27x_2 + 3.15x_3 = 2.16 \\ 3.05x_1 - 1.05x_2 - 0.63x_3 = -1.25 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} 0.43x_1 + 1.24x_2 - 0.58x_3 = 2.71 \\ 0.74x_1 + 0.83x_2 + 1.17x_3 = 1.26 \\ 1.43x_1 - 1.58x_2 + 0.83x_3 = 1.03 \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} 0.43x_1 + 0.63x_2 + 1.44x_3 = 2.18 \\ 1.64x_1 - 0.83x_2 - 2.45x_3 = 1.84 \\ 0.58x_1 + 1.55x_2 + 3.18x_3 = 0.74 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 1.24x_1 + 0.62x_2 - 0.95x_3 = 1.43 \\ 2.15x_1 - 1.18x_2 + 0.57x_3 = 2.43 \\ 1.72x_1 - 0.83x_2 + 1.57x_3 = 3.88 \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} 0.62x_1 + 0.56x_2 - 0.43x_3 = 1.16 \\ 1.32x_1 - 0.88x_2 + 1.76x_3 = 2.07 \\ 0.73x_1 + 1.42x_2 - 0.34x_3 = 2.18 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 1.06x_1 + 0.34x_2 + 1.26x_3 = 1.17 \\ 2.54x_1 - 1.16x_2 + 0.55x_3 = 2.23 \\ 1.34x_1 - 0.47x_2 - 0.83x_3 = 3.26 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 3.15x_1 - 1.72x_2 - 1.23x_3 = 2.15 \\ 0.72x_1 + 0.57x_2 + 1.18x_3 = 1.43 \\ 2.57x_1 - 1.34x_2 - 0.68x_3 = 1.03 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} 1.73x_1 - 0.83x_2 + 1.82x_3 = 0.36 \\ 0.27x_1 + 0.53x_2 - 0.64x_3 = 1.23 \\ 0.56x_1 - 0.48x_2 + 1.95x_3 = -0.76 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} 0.95x_1 + 0.72x_2 - 1.14x_3 = 2.15 \\ 0.63x_1 + 0.24x_2 + 0.38x_3 = 0.74 \\ 1.23x_1 - 1.08x_2 - 1.16x_3 = 0.97 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 2.18x_1 + 1.72x_2 - 0.93x_3 = 1.06 \\ 1.42x_1 + 0.18x_2 + 1.12x_3 = 2.07 \\ 0.92x_1 - 1.14x_2 - 2.53x_3 = -0.45 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} 2.23x_1 - 0.73x_2 + 1.27x_3 = 2.43 \\ 2.15x_1 + 3.17x_2 - 1.43x_3 = -0.73 \\ 0.83x_1 + 0.72x_2 + 2.12x_3 = 1.42 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 0.65x_1 - 0.93x_2 + 0.45x_3 = -0.72 \\ 1.15x_1 + 0.43x_2 - 0.72x_3 = 1.24 \\ 0.56x_1 - 0.18x_2 + 1.03x_3 = 2.15 \end{cases}$ |
| 27 | $\begin{cases} 1.16x_1 - 0.28x_2 + 2.16x_3 = 1.16 \\ 0.65x_1 + 0.76x_2 - 1.18x_3 = 0.28 \\ 0.53x_1 + 1.07x_2 - 0.63x_3 = 1.27 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 2.16x_1 - 2.83x_2 + 1.15x_3 = 2.32 \\ 1.71x_1 + 2.17x_2 - 0.83x_3 = 1.25 \\ 0.35x_1 - 0.72x_2 + 1.03x_3 = 0.82 \end{cases}$ |
| 29 | $\begin{cases} 1.02x_1 + 0.72x_2 - 0.65x_3 = 1.27 \\ 0.74x_1 - 1.24x_2 - 1.73x_3 = 0.77 \\ 1.78x_1 + 2.32x_2 + 0.74x_3 = 1.16 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} 1.53x_1 - 1.63x_2 - 0.76x_3 = 2.18 \\ 0.86x_1 + 1.17x_2 + 1.84x_3 = 1.95 \\ 0.32x_1 - 0.65x_2 + 1.11x_3 - 0.47 \end{cases}$ |

*Завдання 7.1.* Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Халецького

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3{,}14 & -2{,}12 & 1{,}17 & 1{,}27 \\ -2{,}12 & 1{,}32 & -2{,}45 & 2{,}13 \\ 1{,}17 & -2{,}46 & 1{,}18 & 3{,}14 \end{array}\right)$ | 2 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}45 & 1{,}75 & -3{,}24 & 1{,}23 \\ 1{,}75 & -1{,}16 & 2{,}18 & 3{,}43 \\ -3{,}24 & 2{,}18 & -1{,}85 & -0{,}16 \end{array}\right)$ |
| 3 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}65 & -2{,}27 & 0{,}18 & 2{,}25 \\ -2{,}27 & 1{,}73 & -0{,}46 & 0{,}93 \\ 0{,}18 & -0{,}46 & 2{,}16 & 1{,}33 \end{array}\right)$ | 4 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3{,}23 & 1{,}62 & 0{,}65 & 1{,}28 \\ 1{,}62 & -2{,}33 & -1{,}43 & 0{,}87 \\ 0{,}65 & -1{,}43 & 2{,}18 & -2{,}87 \end{array}\right)$ |
| 5 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}93 & 1{,}42 & -2{,}55 & 2{,}48 \\ 1{,}42 & -2{,}87 & 2{,}36 & -0{,}75 \\ -2{,}55 & 2{,}36 & -1{,}44 & 1{,}83 \end{array}\right)$ | 6 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}42 & -2{,}15 & 1{,}07 & 2{,}48 \\ -2{,}15 & 0{,}76 & -2{,}18 & 1{,}15 \\ 1{,}07 & -2{,}18 & 1{,}23 & 0{,}88 \end{array}\right)$ |
| 7 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}23 & -0{,}71 & 0{,}63 & 1{,}28 \\ -0{,}71 & 1{,}45 & -1{,}34 & 0{,}64 \\ 0{,}63 & -1{,}34 & 0{,}77 & -0{,}87 \end{array}\right)$ | 8 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}63 & 1{,}27 & -0{,}84 & 1{,}51 \\ 1{,}27 & 0{,}65 & 1{,}27 & -0{,}63 \\ -0{,}84 & 1{,}27 & -1{,}21 & 2{,}15 \end{array}\right)$ |
| 9 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}78 & 1{,}08 & -1{,}35 & 0{,}57 \\ 1{,}08 & -1{,}28 & 0{,}37 & 1{,}27 \\ -1{,}35 & 0{,}37 & 2{,}86 & 0{,}47 \end{array}\right)$ | 10 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}83 & 2{,}18 & -1{,}73 & 0{,}28 \\ 2{,}18 & -1{,}41 & 1{,}03 & -1{,}18 \\ -1{,}73 & 1{,}03 & 2{,}27 & 0{,}72 \end{array}\right)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}74 & -1{,}18 & 1{,}23 & 0{,}16 \\ -1{,}18 & 1{,}71 & -0{,}52 & 1{,}81 \\ 1{,}23 & -0{,}52 & 0{,}62 & -1{,}25 \end{array}\right)$ | 12 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}35 & -0{,}72 & 1{,}38 & 0{,}88 \\ -0{,}72 & 1{,}45 & -2{,}18 & 1{,}72 \\ 1{,}38 & -2{,}18 & 0{,}93 & -0{,}72 \end{array}\right)$ |
| 13 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}48 & 0{,}75 & -1{,}23 & 0{,}83 \\ 0{,}75 & -0{,}96 & 1{,}64 & -1{,}12 \\ -1{,}23 & 1{,}64 & -0{,}55 & 0{,}47 \end{array}\right)$ | 14 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}16 & -3{,}18 & 1{,}26 & 1{,}83 \\ -3{,}18 & 0{,}63 & -2{,}73 & 0{,}54 \\ 1{,}26 & -2{,}73 & 3{,}15 & 1{,}72 \end{array}\right)$ |
| 15 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}63 & -1{,}72 & 3{,}37 & -0{,}75 \\ -1{,}72 & -2{,}27 & 1{,}62 & 1{,}27 \\ 3{,}37 & 1{,}62 & -0{,}43 & 2{,}74 \end{array}\right)$ | 16 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}36 & 0{,}92 & -1{,}87 & 2{,}15 \\ 0{,}92 & -2{,}24 & 0{,}77 & -2{,}06 \\ -1{,}87 & 0{,}77 & -0{,}55 & 0{,}17 \end{array}\right)$ |
| 17 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}32 & 1{,}17 & -0{,}28 & 1{,}43 \\ 1{,}17 & -1{,}43 & 0{,}88 & -0{,}47 \\ -0{,}28 & 0{,}88 & -1{,}45 & 1{,}09 \end{array}\right)$ | 18 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}75 & -1{,}24 & 1{,}56 & 0{,}49 \\ -1{,}24 & 0{,}18 & -1{,}72 & -0{,}57 \\ 1{,}56 & -1{,}72 & 0{,}79 & 1{,}03 \end{array}\right)$ |
| 19 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}18 & 2{,}32 & -0{,}67 & 1{,}83 \\ 2{,}32 & 1{,}87 & 1{,}35 & -0{,}73 \\ -0{,}67 & 1{,}35 & -0{,}88 & 0{,}68 \end{array}\right)$ | 20 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}78 & 1{,}13 & 1{,}87 & 0{,}83 \\ 1{,}13 & -0{,}68 & 2{,}16 & -0{,}27 \\ 1{,}87 & 2{,}16 & 0{,}79 & 1{,}37 \end{array}\right)$ |
| 21 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}17 & -0{,}65 & 1{,}54 & -1{,}43 \\ -0{,}65 & 1{,}16 & -1{,}73 & 0{,}68 \\ 1{,}54 & -1{,}73 & 2{,}15 & 1{,}87 \end{array}\right)$ | 22 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}87 & 1{,}35 & -0{,}44 & 1{,}51 \\ 1{,}35 & -1{,}22 & 2{,}32 & 0{,}71 \\ -0{,}44 & 2{,}32 & -3{,}73 & 0{,}53 \end{array}\right)$ |
| 23 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}17 & 2{,}23 & -0{,}77 & -1{,}11 \\ 2{,}23 & -0{,}81 & 1{,}72 & 1{,}88 \\ -0{,}77 & 1{,}72 & -0{,}65 & 0{,}57 \end{array}\right)$ | 24 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}16 & 1{,}45 & -0{,}89 & 0{,}61 \\ 1{,}45 & -2{,}44 & 1{,}18 & 1{,}05 \\ -0{,}89 & 1{,}18 & -2{,}07 & -0{,}83 \end{array}\right)$ |
| 25 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}64 & 1{,}05 & -2{,}93 & -1{,}18 \\ 1{,}05 & -1{,}41 & 0{,}16 & -0{,}27 \\ -2{,}93 & 0{,}16 & -1{,}51 & 0{,}72 \end{array}\right)$ | 26 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}54 & -0{,}75 & 1{,}36 & 2{,}45 \\ -0{,}75 & 0{,}87 & -0{,}79 & 1{,}07 \\ 1{,}36 & -0{,}79 & 0{,}64 & 0{,}54 \end{array}\right)$ |
| 27 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}44 & -1{,}16 & 0{,}83 & -1{,}18 \\ -1{,}16 & -3{,}45 & 0{,}57 & 1{,}88 \\ 0{,}83 & 0{,}57 & -1{,}71 & 0{,}74 \end{array}\right)$ | 28 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}56 & 0{,}67 & -2{,}93 & 1{,}14 \\ 0{,}67 & -2{,}67 & 1{,}35 & 0{,}66 \\ -1{,}79 & 1{,}35 & -0{,}55 & 1{,}72 \end{array}\right)$ |
| 29 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}53 & -0{,}75 & 1{,}83 & 0{,}68 \\ -0{,}75 & 0{,}68 & -1{,}19 & 0{,}95 \\ 1{,}83 & -1{,}19 & 2{,}15 & 1{,}27 \end{array}\right)$ | 30 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}65 & -1{,}76 & 0{,}77 & 2{,}15 \\ -1{,}76 & 1{,}04 & -2{,}16 & 0{,}82 \\ 0{,}77 & -2{,}61 & -3{,}18 & -0{,}73 \end{array}\right)$ |

*Завдання 7.3.* Розв’язати систему лінійних рівнянь методом прогонки

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}7 & 2{,}5 & 0 & 3{,}85 \\ 2{,}4 & -1{,}2 & 0{,}5 & 1{,}01 \\ 0 & 0{,}6 & 2{,}1 & 5{,}97 \end{array}\right)$ | 2 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}7 & 2{,}5 & 0 & 3{,}35 \\ 2{,}4 & 1{,}2 & -0{,}5 & 1{,}39 \\ 0 & 1{,}6 & 2{,}0 & 7{,}17 \end{array}\right)$ | 3 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}25 & 0{,}8 & 0 & 1{,}55 \\ 0{,}4 & -1{,}5 & 1 & 2{,}79 \\ 0 & 2{,}1 & -0{,}7 & 5{,}97 \end{array}\right)$ |
| 4 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3{,}6 & -2{,}2 & 0 & 2{,}76 \\ 1{,}4 & -1{,}6 & 0{,}3 & 0{,}78 \\ 0 & 2{,}7 & 0{,}2 & 3{,}64 \end{array}\right)$ | 5 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2{,}7 & -1{,}8 & 0 & 1{,}89 \\ -1{,}4 & 1{,}6 & 0{,}3 & 0{,}42 \\ 0 & 3{,}7 & -1{,}2 & 2{,}04 \end{array}\right)$ | 6 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}7 & -2{,}8 & 0 & 1{,}24 \\ 2{,}1 & -4{,}3 & 1{,}5 & 2{,}67 \\ 0 & 2{,}6 & -3{,}7 & -2{,}02 \end{array}\right)$ |
| 7 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}7 & 2{,}5 & 0 & 1{,}55 \\ 2{,}4 & 1{,}2 & -0{,}5 & 2{,}79 \\ 0 & 1{,}6 & 2{,}0 & 7{,}93 \end{array}\right)$ | 8 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 7{,}5 & -4{,}8 & 0 & 15{,}3 \\ 2{,}4 & 4{,}6 & -3{,}5 & 5.0 \\ 0 & -4{,}6 & 6{,}7 & 10{,}52 \end{array}\right)$ | 9 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}7 & 2{,}5 & 0 & 4{,}54 \\ 2{,}4 & -2{,}1 & 1{,}8 & 1{,}68 \\ 0 & 0{,}7 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{array}\right)$ |
| 10 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}8 & -1{,}2 & 0 & 0{,}33 \\ 1{,}2 & 3{,}1 & -1{,}8 & 5{,}56 \\ 0 & 2{,}7 & -1{,}6 & 3{,}52 \end{array}\right)$ | 11 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4{,}4 & -2{,}5 & 0 & 5{,}93 \\ 5{,}5 & -9{,}3 & 13{,}2 & 6{,}07 \\ 0 & 5{,}3 & 6{,}7 & 11{,}97 \end{array}\right)$ | 12 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1{,}7 & -1{,}8 & 0 & 1{,}04 \\ 1{,}1 & -4{,}3 & 1{,}5 & -3{,}13 \\ 0 & 1{,}6 & -0{,}7 & 1{,}98 \end{array}\right)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1,6 & 2,8 & 0 & 4,72 \\ 0,3 & 2,1 & -1,8 & 1,56 \\ 0 & 2,7 & -0,2 & 2,6 \end{array}\right)$ | 14 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3,5 & -2,8 & 0 & 7,0 \\ 2,1 & -4,3 & 3,5 & 5,87 \\ 0 & 5,6 & -4,7 & 0,88 \end{array}\right)$ | 15 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 7,5 & -4,8 & 0 & 16,8 \\ 2,4 & 4,6 & -3,5 & 8,98 \\ 0 & -4,6 & 6,7 & 3,82 \end{array}\right)$ |
| 16 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5,6 & -3,8 & 0 & 7,3 \\ 3,5 & -2,1 & 4,1 & 1,15 \\ 0 & 4,7 & 2,5 & 9,25 \end{array}\right)$ | 17 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4,8 & 1,6 & 0 & 8,8 \\ 4,5 & 2,6 & -5,4 & -5,2 \\ 0 & 2,7 & -1,2 & 3,15 \end{array}\right)$ | 18 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 8,4 & -5,2 & 0 & 3,8 \\ 2,4 & 4,6 & -3,5 & 5,8 \\ 0 & 3,6 & -1,8 & 3,6 \end{array}\right)$ |
| 19 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5,6 & 3,4 & 0 & 8,3 \\ 3,5 & 2,5 & 4,2 & 8,45 \\ 0 & 1,8 & 2,5 & -2 \end{array}\right)$ | 20 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2,8 & -1,2 & 0 & -0,2 \\ 3,5 & 2,6 & -3,5 & -0,5 \\ 0 & 3,6 & -1,8 & 3,6 \end{array}\right)$ | 21 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1,8 & -1,2 & 0 & 0,24 \\ 1,2 & 3,1 & -1,8 & 5,5 \\ 0 & 2,7 & -1,6 & 3,52 \end{array}\right)$ |
| 22 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 6,1 & 1,2 & 0 & 9,1 \\ 3,5 & -2,6 & 5,1 & 12,3 \\ 0 & 2,0 & 1,8 & 10,4 \end{array}\right)$ | 23 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 6,4 & -4,2 & 0 & 2,3 \\ 1,4 & -4,6 & 3,5 & 1,8 \\ 0 & 5,6 & -1,8 & 8,6 \end{array}\right)$ | 24 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4,8 & -3,6 & 0 & 5,4 \\ 4,5 & -2,6 & 5,4 & 1,6 \\ 0 & 2,7 & 1,2 & 5,55 \end{array}\right)$ |
| 25 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 6,2 & 5,4 & 0 & 8,2 \\ 6,7 & 5,1 & 1,3 & 9,4 \\ 0 & -6,7 & 8,5 & 8,25 \end{array}\right)$ | 26 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2,6 & -0,8 & 0 & 2,32 \\ 0,4 & -0,8 & 1,1 & 1,44 \\ 0 & 3,1 & -1,5 & 0,7 \end{array}\right)$ | 27 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 6,1 & 4,2 & 0 & 24,6 \\ 1,4 & -4,6 & 3,5 & 6,4 \\ 0 & 5,6 & -1,8 & 3,72 \end{array}\right)$ |
| 28 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4,8 & 3,4 & 0 & 5,9 \\ 7,5 & 5,2 & 1,6 & 11,1 \\ 0 & 3,7 & 8,3 & -0,95 \end{array}\right)$ | 29 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4,3 & 5,4 & 0 & 1,55 \\ 2,3 & 3,1 & -1,3 & 1,6 \\ 0 & 4,3 & -8,7 & -2,05 \end{array}\right)$ | 30 | $\left(\begin{array}{ccc\|c} 4,5 & 5,4 & 0 & 4,5 \\ 6,7 & 5,1 & 1,3 & 12,75 \\ 0 & -6,7 & 8,5 & 8,25 \end{array}\right)$ |

*Завдання 7.4.* Розв’язати систему лінійних рівнянь з точністю до 0.001:

а) методом Якобі; б) методом Зейделя.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1 \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7 \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5 \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24 \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2 \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1 \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8 \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7 \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9 \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1 \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7 \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7 \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1 \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5 \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7 \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 1,5x_1 + 2,3x_2 - 3,7x_3 = 4,5 \\ 2,8x_1 + 3,4x_2 + 5,8x_3 = -3,2 \\ 1,2x_1 + 7,3x_2 - 2,3x_3 = 5,6 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,8x_3 = 0,8 \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7 \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2 \end{cases}$ |
| 11 | $\begin{cases} 2,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5 \\ 4,5x_1 - 2,8x_2 + 6,7x_3 = 2,6 \\ 5,1x_1 + 3,7x_2 - 1,4x_3 = -0,14 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5 \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5 \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} 7,8x_1 + 5,3x_2 + 4,8x_3 = 1,8 \\ 3,3x_1 + 1,1x_2 + 1,8x_3 = 2,3 \\ 4,5x_1 + 3,3x_2 + 2,8x_3 = 3,4 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 3,8x_1 + 6,7x_2 - 1,2x_3 = 5,2 \\ 6,4x_1 + 1,3x_2 - 2,7x_3 = 3,8 \\ 2,4x_1 - 4,5x_2 + 3,5x_3 = -0,6 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | $\begin{cases} 5,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,52 \\ 3,4x_1 + 2,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8 \\ 2,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} 1,7x_1 - 2,2x_2 + 3,0x_3 = 1,8 \\ 2,1x_1 + 1,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8 \\ 4,2x_1 + 3,9x_2 - 3,1x_3 = 5,1 \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} 3,8x_1 + 4,1x_2 - 2,3x_3 = 4,8 \\ -2,1x_1 + 3,9x_2 - 5,8x_3 = 3,3 \\ 1,8x_1 + 1,1x_2 - 2,1x_3 = 5,8 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 6,3x_1 + 5,2x_2 - 0,6x_3 = 1,5 \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = 2,7 \\ 0,8x_1 + 1,4x_2 + 3,5x_3 = -2,3 \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} 3,3x_1 + 3,7x_2 + 4,2x_3 = 5,8 \\ 2,7x_1 + 2,3x_2 - 2,9x_3 = 6,1 \\ 4,1x_1 + 4,8x_2 - 5,0x_3 = 7,0 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8 \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4 \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 3,7x_1 + 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,0 \\ 4,1x_1 + 4,5x_2 - 4,8x_3 = 4,9 \\ -2,1x_1 - 3,7x_2 + 1,8x_3 = 2,7 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} 4,1x_1 + 5,2x_2 - 5,8x_3 = 7,0 \\ 3,8x_1 - 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,3 \\ 7,8x_1 + 5,3x_2 - 6,3x_3 = 5,8 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} 3,7x_1 - 2,3x_2 + 4,5x_3 = 2,4 \\ 2,5x_1 + 4,7x_2 - 7,8x_3 = 3,5 \\ 1,6x_1 + 5,3x_2 + 1,3x_3 = -2,4 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4 \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5 \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 - 3,2x_3 = 4,5 \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1 \\ 6,5x_1 - 7,1x_2 + 4,8x_3 = 6,3 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 2,4x_1 + 2,5x_2 - 2,9x_3 = 4,5 \\ 0,8x_1 + 3,5x_2 - 1,4x_3 = 3,2 \\ 1,5x_1 - 2,3x_2 + 8,6x_3 = -5,5 \end{cases}$ |
| 27 | $\begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,8x_3 = 5,5 \\ 2,5x_1 + 6,8x_2 - 1,1x_3 = 4,3 \\ 2,7x_1 - 0,6x_2 + 1,5x_3 = -3,5 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,0 \\ 5,0x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1 \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8 \end{cases}$ |
| 29 | $\begin{cases} 2,4x_1 + 3,7x_2 - 8,3x_3 = 2,3 \\ 1,8x_1 + 4,3x_2 + 1,2x_3 = -1,2 \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 5,2x_3 = 3,5 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5 \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$ |

*Завдання 7.5.* Розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю до 0.001:
а) методом простих ітерацій; б) методом Ньютона.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tg(xy+0.4) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \\ x > 0, \quad y > 0 \end{cases}$ | 11<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$<br>$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, \quad y > 0 \end{cases}$ | 21<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tg(xy+0.2) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$ |
| 2<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tg(xy+0.2) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$ | 12<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$<br>$\begin{cases} \sin(x+y) = -1.5x - 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ | 22<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$<br>$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ |
| 3<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin(x) + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$ | 13<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0.7 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tg(xy+0.4) = x^2 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$ | 23<br>а)<br>б) | $\begin{cases} \sin x + 2y = 1.6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$<br>$\begin{cases} tgxy = x^2 \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos x + y = 1.5\\ 2x - \sin(y-0.5) = 1\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.2x = 0.\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 14<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos x + y = 1.5\\ 2y - \sin(x-0.5) = 1\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) = 1.2x - 0.1\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 24<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos x + y = 1.2\\ 2x - \sin(y-0.5) = 2\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) = 1.2x - 0.2\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ |
| 5<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(x+0.5) - y = 1\\ \cos(y-2) + x = 0\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(xy+0.3) = x^2\\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 15<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(y+0.5) - x = 1\\ \cos(x-2) + y = 0\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(xy+0.1) = x^2\\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 25<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(x+0.5) - y = 1.2\\ \cos(y-2) + x = 0\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(xy+0.1) = x^2\\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ |
| 6<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x+0.5) + y = 0.\\ \sin y - 2x = 1.6\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.2x = 0.\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 16<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(y+0.5) + x = 0.8\\ \sin x - 2y = 1.6\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.4x = 0\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 26<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x+0.5) + y = 1\\ \sin y - 2x = 2\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.5x = 0.2\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ |
| 7<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(x-1) = 1.3 - y\\ x - \sin(y+1) = 0.8\end{cases}$<br>$\begin{cases}tgxy = x^2\\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 17<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(y-1) + x = 1.3\\ y - \sin(x+1) = 0.8\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(xy+0.1) = x^2\\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 27<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(x-1) + y = 1.5\\ x - \sin(y+1) = 1\end{cases}$<br>$\begin{cases}tgxy = x^2\\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ |
| 8<br>а)<br>б) | $\begin{cases}2y - \cos(x+1) = 0\\ x + \sin y = -0.4\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.5x = 0.\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 18<br>а)<br>б) | $\begin{cases}2x - \cos(y+1) = 0\\ y + \sin x = -0.4\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) = 1.1x - 0.1\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 28<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(y+1) - x = 1\\ 2y + \cos x = 2\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.2x = 0\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ |
| 9<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x+0.5) - y = 2\\ \sin y - 2x = 1\end{cases}$<br>$\begin{cases}tgxy = x^2\\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 19<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x+0.5) - x = 2\\ \sin x - 2y = 1\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(x-y) - xy = 0\\ x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ | 29<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(y-1) + x = 0.8\\ y - \cos x = 2\end{cases}$<br>$\begin{cases}tg(xy+0.3) = x^2\\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1\end{cases}$ |
| 10<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x+2) - y = 1{,}5\\ x + cos(y-2) = 0.5\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.2x = 0.\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ | 20<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\sin(x-y) - xy = -1\\ x^2 - y^2 = \frac{3}{4}\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(y+2) - x = 1.5\\ y + \cos(x-2) = 0.5\end{cases}$ | 30<br>а)<br>б) | $\begin{cases}\cos(x-1) + y = 1\\ \sin y + 2x = 1.6\end{cases}$<br>$\begin{cases}\sin(x+y) - 1.1x = 0.1\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ |

## Список літератури


1. *Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по вычислительной математике. –М: Высш. шк.,. 1990. – 108 с.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. – М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003. – 632 с.
3. *Бахвалов Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях. / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000. 192 с.
4. *Вержбицкий В. М.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: Высш.шк., 2000. – 268 с.
5. *Вержбицкий В. М.* Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш.шк., 2001. – 383 с.
6. *Волков Е. А.* Численные методы. – СПб.: Лань, 2004. – 248 с.
7. *Мэтьюз Дж.Г., Финк К.* Численные методы. Использование Matlab. – М.; СПб.; К.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 714 с.

**Зміст**

Навчально-методичне видання

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

## Чисельне диференціювання та інтегрування. Системи рівнянь

Методичні вказівки
до практичних занять для студентів,
які навчаються за напрямом підготовки
6.080400 «Комп'ютерні науки»

Укладачі **ГОРДА** Олена Володимирівна
**ПОЛТОРАЧЕНКО** Наталія Іванівна

Комп'ютерне верстання *А.П. Морозюк*

Підписано до друку 2012. Формат $60 \times 84$ $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 2,25.
Тираж 30 прим. Вид. № 10/ІІІ-12. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.