ББК 22.311
В41

Укладачі:
О.І. Баліна, канд. техн. наук, доцент
І.С. Безклубенко, канд. техн. наук, доцент
Ю.П. Буценко, канд. техн. наук, доцент

Рецензент доктор техн.. наук, професор В.М. Міхайленко

Відповідальний за випуск доктор техн.. наук, професор В.М. Міхайленко, завідувач кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування прикладної математики, протокол №3 від 23 жовтня 2017 р.

Вища математика: Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань / Уклад.: О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, Н.Д., Буценко Ю.П. – К.: КНУБА, 2017. – с.

Містять загальні положення, завдання та послідовність виконання індивідуальної роботи, список літератури.

Призначені для студентів, які займаються за напрямом підготовки 122 – “Комп’ютерні науки”.

КНУБА 2017

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення загального курсу вищої математики студентами другого курсу інженерних спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки».

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи з розділу математики «Ряди», а саме: дослідження на збіжність рядів з додатними членами, знакозмінних рядів; знаходження області збіжності ряду; розвинення функції в ряд Тейлора або Маклорена; наближені обчислення за допомогою рядів; знаходження розв'язків диференціальних рівнянь; розвинення функцій в ряди Фур'є.

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконання індивідуального завдання.

У даних методичних вказівках наведені завдання по варіантах для виконання самостійної роботи, а також приклади розв'язання типових задач.

Розділ. РЯДИ

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю α, використовуючи розвинення в степеневий ряд.

Завдання 5. Знайти розв'язки диференціального рівняння, розвинувши його в степеневий ряд (записати три перших, відмінних від нуля членів цього розкладу).

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n+2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\,\dfrac{\pi}{3n};$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+1}{2^{n-1}};$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{ln(n+1)}\right)^n;$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n^2+3}.$

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+2}=2\neq 0,$ тому даний ряд розбіжний (достатня умова розбіжності).

б) Оскільки $\frac{1}{n \cdot 3^n} \le \frac{1}{3^n}, n = 1,2,\dots,$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збіжний як геометрична прогресія зі знаменником $g = \frac{1}{3} < 1,$ то даний ряд теж збіжний (достатня ознака порівняння).

в) Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{tg\frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{3} \ne 0$ і гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то даний ряд також розбіжний (достатня гранична ознака порівняння).

г) Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)^3+1\right)\cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot \left(n^3+1\right)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

отже, даний ряд збіжний.

д) Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\ln(n+1)}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$ тому даний ряд збіжний.

е) Застосуємо інтегральну ознаку Коші: нехай $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}, \quad x \in [1;+\infty)$ і розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+3} = \lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+3)\Big|_1^b = \infty.$ Цей інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

Відповідь: а), в), е) – розбіжний; б), г), д) – збіжний.

Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n\alpha}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Розв'язання:

а) Оскільки $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ - збіжний, як узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле), то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^3}\right|$ збіжний, тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}$ абсолютно збіжний.

б) За ознакою Лейбніца даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, утворений з модулів його членів, розбіжний. Тому даний ряд б). є умовно збіжним.

Відповідь: а). абсолютно збіжний; б). умовно збіжний.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n+1}$.

Розв'язання:

Маємо $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-3)^{n+1}\cdot(2n+1)}{(2n+3)\cdot(2x-3)^n}\right| = |2x-3|$.

За ознакою Д'Аламбера ряд збіжний, якщо

$$|2x-3|<1, \text{ або } -1<2x-3<1,\; 2<2x<4,\; 1<x<2.$$

Отже, радіус збіжності $R=\frac{1}{2}$, інтервал збіжності (1;2). Щоб знайти область збіжності, дослідимо збіжність ряду в крайніх точках.

При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ - збіжний за ознакою Лейбніца.

При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cdot 2-3)^n}{2n+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$, який є розбіжним.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $x \in [1,2)$.

Відповідь: $[1;2)$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена:

а) Розкласти функцію $y = cos^2 x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = \frac{\pi}{3}\cdot$ Знайти область збіжності ряду до цієї функції.

б) Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x^2\, ln(1 - x^3\,).$

Розв'язання:

а) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,2x,$ $\qquad f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4};$

$f'(x) = -sin\,2x;$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$f''(x) = -2\,cos\,2x;$ $\qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\,cos\frac{2\pi}{3} = 1;$

$f'''(x) = 4\,sin\,2x;$ $\qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\,sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3};$

… … …

$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\,sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right);$ $\qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^{n-1}\,sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$

Отже, $cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots +$

$$+\frac{1}{n!}\left(-2^{n-1}\,sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n.$$

Залишковий член ряду Тейлора $R_n(x) = \frac{-2^n}{(n+1)!}sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$, де $\varepsilon \in (x; x_0)$.

Оскільки $\left|sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,$ достатньо знайти область збіжності ряду з загальним членом $\frac{2^n}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$. За ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^n\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left|x - \frac{\pi}{3}\right|}{n+2} = 0 < 1.$$

Отриманий ряд збігається для будь-якого x. Отже, область його збіжності до функції $f(x) = cos^2 x$ буде: $-\infty < x < \infty$.

Відповідь: $cos^2 x = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n; \ -\infty < x < \infty.$

б) Скористаємось відомим розкладом:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \ldots, \text{ де } x \in (-1;1];$$

поклавши $-x^3$ замість x. Маємо:

$$ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \ldots - \frac{x^{3n}}{n}\ldots, \text{ де } x \in [-1;1). \text{ Тоді}$$

$$x^2\, ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \ldots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \ldots, \text{ де } x \in [-1;1).$$

Відповідь: $x^2\, ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{n}$, де $x \in [-1;1)$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю α, використовуючи розвинення в степеневий ряд:

а) $\sin 18^\circ, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \qquad \alpha = 0{,}001.$

Розв'язання:

а) Скористаємось відомим розкладом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \text{ де } x \in R.$$

Отже, при $x = 18^\circ = \frac{\pi}{10}$, маємо:

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \ldots$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$\frac{\pi}{10} > 0{,}001$; $\frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0{,}001$, $\frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0{,}001$, то з точністю до $0{,}001$ маємо:

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0{,}309.$$

б) Скориставшись відомим рядом

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, де $x \in R$, маємо: $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$.

Цей ряд рівномірно збіжний для $x \in R$, тому

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/3} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{10 \cdot 3^5} - \frac{1}{42 \cdot 3^7} + \ldots$$

Дістали ряд Лейбніца. Зважаючи на те, що

$\frac{1}{3} > 0{,}001;$ $\quad \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > 0{,}001;$ $\quad \frac{1}{10 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0{,}001,$ то з точністю до 0,001 маємо

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321$$

Відповідь: а) 0,309; б) 0,321.

Завдання 5. Знайти розв'язки диференціального рівняння, розвинувши його в степеневий ряд (записати три перших, відмінних від нуля членів цього розкладу):

$$y' = xy + y^2 + e^y, \; y(0) = 0.$$

Розв'язання: Шукаємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots.$$

Маємо:

$y'(0) = e^0 = 1;$ $\quad y'' = y + xy' + 2yy' + e^y y';$ $\quad y''(0) = 1;$

$y''' = y' + y' + xy'' + 2(y'y' + yy'') + e^y y'' + e^y y'y';$ $\quad y'''(0) = 6.$

Отже, $y(x) \approx x + \frac{x^2}{2} + x^3$.

Відповідь: $x + \frac{x^2}{2} + x^3$.

Методом послідовного диференціювання знайти перші п’ять членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $4x^2 y'' + y = 0$ при початкових умовах: $y(1)=1,\ y'(1)=\frac{1}{2}.$

Розв’язання: Шукаємо розв’язок у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}\cdot(x-1)^4 + \ldots;$$ де

$$f(1)=1; \quad f'(1)=\frac{1}{2};$$

$$f''(x) = -\frac{y}{4x^2}; \quad f''(1) = -\frac{1}{4}; \quad f'''(x) = -\frac{y'x^2 - 2xy}{4x^4}; \quad f'''(1) = \frac{3}{8};$$

$$f^{IV}(x) = -\left(\left(y''x^2 + 2xy' - 2y - 2xy'\right)x^4 - 4x^3\left(y'x^2 - 2xy\right)\right) \div \left(4x^8\right); \quad f^{IV}(1) = -\frac{15}{16}$$

Отже, $y = 1 + \frac{1}{2}\cdot(x-1) - \frac{1}{4\cdot 2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}\cdot(x-1)^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}\cdot(x-1)^4 + \ldots,$

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5\cdot(x-1)^4}{128} + \cdots.$$

Відповідь: $y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5\cdot(x-1)^4}{128} + \ldots.$

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є функцію $f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \quad \textit{з періодом } 2\pi \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$;

б) $f(x) = x^2, \quad -1 \le x \le 1;$ *з періодом* 2;

в) $f(x) = 2 - x, \quad 0 \le x \le 1,$ продовжуючи її парним і непарним способом періодично на всю числову вісь.

Розв’язання:

а) Задана функція є кусково-монотонна на проміжку $(-\pi;\ \pi]$, тому її можна зобразити рядом Фур’є. Знайдемо коефіцієнти Фур’є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right) = \frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx dx\right) = -\frac{x\cos nx}{\pi n}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right) =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi, n \in N.$

У точках $x = \pm(2n-1)\pi$ сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{2}.$

б) Задана функція неперервна на всій числовій осі, парна і має період 2, тому її можна подати через ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \quad a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos\pi nx dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dV = \cos\pi nx dx \\ V = \frac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{array}\right| =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi nx\Bigg|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nx dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nx dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & dV = \sin\pi nx dx \\ du = dx & V = -\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx\Bigg|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos\pi nx dx\right) = \frac{4x}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\pi nx\Bigg|_0^1 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2\cdot n^2}; \quad b_n = 0.$$

Отже, $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos\pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \ldots\right),$

де $-\infty < x < \infty.$

Варіант 1

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^n$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x) = e^{2x}$ в околі точки $x = -2$;

б) $f(x) = sin5x$ в околі точки $x = 0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{120}$; б) $\int_0^{0,5} arctgx^2 dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = 2y^2 + ye^x$, що задовольняє початковій умові $y(0) = \frac{1}{3}$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, 0 \le x \le \pi, f(-x) = f(x), T = 2\pi$

б) $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } -2 < x < 0, \\ x+1 \text{ при } 0 \le x < 2, \end{cases} \quad T = 4$

Варіант 2

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{3^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена задані функції

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ в околі точки $x=-1$;

б) $f(x)=shx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $ln3$; б) $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=2e^y+xy$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=x+2, -1<x\le 1, , T=2$

б) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & при\ -\pi<x<0,\\ 0 & при\ \ 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$.

Варіант 3

Завдання 1. Дослідити збіжність заданих числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{ln\,n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$.

Завдання 2. Знайти області збіжності вказаних функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена задані функції

а) $f(x)=3^{x-1}$ в околі точки $x=2$;

б) $f(x)=arctg\frac{x}{2}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{70}$; б) $\int_0^{0,5}x\,ln(1-x^2)dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=sin\,x+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=2x+1, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -2<x<0,\\ x \text{ при } 0\le x<2,\end{cases}\ T=4$

Варіант 4

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3^n(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^{\frac{n}{3}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{ln}{n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=chx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sin 10^0$; б) $\int_0^{0,5}\frac{ln(1+x^2)}{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x^2y^2+y\sin x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0{,}5$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=2x, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases} x \ \text{при} \ -1<x\le 0, \\ 2 \ \text{при} \ \ 0<x<1, \end{cases}$ $T=2$

Варіант 5

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 5^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{x}{2^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\sqrt{x}$ в околі точки $x=4$;

б) $f(x)=sin^2 x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{129}$; б) $\int_0^{0,5} xarctgxdx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=e^{3x}+2xy^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=1-|x|, -1<x\le 1,\ T=2$

б) $f(x)=\begin{cases}\pi - x \ \ при\ -\pi<x<0,\\ \pi \ \ при \ \ 0\le x<\pi,\end{cases}\ T=2\pi$

Варіант 6

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2\cdot 3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена задані функції

а) $f(x)=\cos^2 x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=x^2e^x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt{e}$; б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x^2+xy+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0.5$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=x, -5<x<5,\ T=10$

б) $f(x)=\begin{cases}2 \ \text{при} \ -\pi<x<0,\\ x-1 \ \text{при} \ \ 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 7

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ в околі точки $x=-2$;

б) $f(x)=tgx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $cos15^0$; б) $\int_0^{0,5}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=\cos x+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}3 \text{ при } -3<x<0,\\ x+1 \text{ при } 0\le x<3,\end{cases}\quad T=6$

Варіант 8

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{n^2}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\ln(x-2)$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=\sin 2x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$; б) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=e^x+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=1+|x|, -1<x\le 1,\ T=2$

б) $f(x)=\begin{cases}2-x & при\ -\pi<x<0,\\ 1 & при\ \ 0\le x<\pi,\end{cases}\quad T=2\pi$

Варіант 9

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{x}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=5^{x-2}$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=\cos 3x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[5]{250}$; б) $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=\sin x+0.5y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}0 & при\ -4<x<0,\\ x & при\ \ 0\le x<4,\end{cases}\ T=8$

Варіант 10

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{(n)}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\ln x$ в околі точки $x=1$;

б) $f(x)=\cos^2 x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\ln 5$; б) $\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}\sin x dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x+x^2+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=|x|, -2<x<2,\ T=4$

б) $f(x)=\begin{cases}2 \ \text{при} \ -\pi<x<0,\\ x \ \text{при} \ 0\le x<\pi,\end{cases}\ T=2\pi$

Варіант 11

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{3n\cdot n!}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n tg\dfrac{x}{3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=ln(x-3)$ в околі точки $x=4$;

б) $f(x)=\dfrac{1-cos2x}{2}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[4]{252}$; б) $\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x+e^{cos y}$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=3-x, 0\le x\le 3, f(-x)=f(x), T=6$

б) $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } -\pi\le x<0,\\ 2 \text{ при } 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 12

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\cos^2 x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=\frac{1}{10+x}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sin 15^0$; б) $\int\limits_0^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=y^2+x^3$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\frac{1}{2}$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=2-|x|, -2<x<2,\ T=4$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi\le x<0,\\ x+1 \text{ при } 0\le x\le\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 13

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n \sin\frac{x}{3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\ln(x+2)$ в околі точки $x=1$;

б) $f(x)=e^{\sin x}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[5]{e}$; б) $\int_0^{0,5}\sqrt{x}\cos x dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=2\cos x-xy^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=|x|+1, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ при } -2<x<0, \\ 3 \text{ при } 0\le x<2, \end{cases}\quad T=4$

Варіант 14

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} ntg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n!}{n^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3^n}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} ln^n\, x$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\sqrt{x}$ в околі точки $x=4$;

б) $f(x)=sin\,2x\,cos\,2x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) e^{-1}; б) $\int_0^{\frac{1}{3}} x\cos\sqrt{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=e^{sin\,x}+x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=2-x, 0\le x\le 2, f(-x)=f(x), T=4$

б) $f(x)=\begin{cases} 2 \;\; при \; -\pi\le x<0, \\ x-1 \;\; при \;\; 0\le x\le\pi, \end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 15

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=e^{2x}$ в околі точки $x=-2$;

б) $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\cos 36^0$; б) $\int_0^{0,2}\ln\left(1+x^3\right)dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'-4y+2xy^2-e^{3x}=0$, що задовольняє початковій умові $y(0)=2$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=2x-1, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ -3\le x<0,\\ x+2 \ \ при \ \ 0\le x\le 3,\end{cases}$ $T=6$

Варіант 16

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена заданы функції

а) $f(x)=cos\frac{x}{2}$ в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$;

б) $f(x)=e^{x^2}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{130}$; б) $\int_0^1 x^2 cos\sqrt[4]{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'-2y^2-ye^x-x^3=0$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=x-1,\quad 0\le x\le 2, f(-x)=f(x), T=4$;

б) $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi<x<0\\ 1 \text{ при } 0\le x<\pi\end{cases}\quad T=$

Варіант 17

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{3}n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{(3n!)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n\cdot 5^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}tg\,\frac{x}{3^{n}}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в околі точки $x=8$;

б) $f(x)=shx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $arctg\frac{1}{5}$; б) $\int_{0}^{1}e^{-\frac{x^{2}}{2}}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'+y\cos x-3e^{x}y^{2}-\sin x=0$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=x+1, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}1\ \text{при}\ -3<x<0,\\ 2x\ \text{при}\ \ 0\le x\le 3,\end{cases}\ T=6$

Варіант 18

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2+1}\right)$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=2^x$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=\ln\cos x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\cos 18^0$; б) $\int_0^{0,8}\frac{\sin x}{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x^2y^2+2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=3x, -2\le x\le 2,\ T=4$

б) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\pi\le x<0,\\ x+1 \text{ при } 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 19

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{x}{3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=cos^2 x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=e^{arctgx}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\int_0^{0,5}\frac{ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=xy^2-sin\,2x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -4<x<0,\\ x-1 \text{ при } 0\le x<4,\end{cases}$ $T=8$

Варіант 20

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{3^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n}}x^n$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в околі точки $x=1$;

б) $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sin 10^0$; б) $\int_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=2e^y+xy$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=2x-1, -3<x<3,\ T=6$

б) $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi<x<0,\\ x+2 \text{ при } 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 21

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+1)}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=sin^2 x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=\frac{1}{10+x}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[4]{83}$; б) $\int_0^1 x^3 sin\, x dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=xy+x^2+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=4x, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -3<x<0, \\ x+1 \text{ при } 0\le x\le 3,\end{cases}\quad T=6$

Варіант 22

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 tg\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} arcsin^n\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{3^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=e^{\frac{1-2x}{3}}$ в околі точки $x=-1$;

б) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $cos\,36^0$; б) $\int_0^{0,25} ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=y\cos x+2\cos y$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=2+|x|, -4\le x\le 4,\ T=8$

б) $f(x)=\begin{cases}0 \ \ при\ -\pi<x<0,\\ x+2\ \ при\ \ 0\le x\le\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

Варіант 23

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9+n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x) = 2^{x-3}$ в околі точки $x = 4$;

б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ в околі точки $x = 0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[10]{1027}$; б) $\int\limits_0^{0,5} \frac{shx}{x} dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = 2e^y + xy$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом Т:

а) $f(x) = x + 3, 0 \le x \le \pi, f(-x) = -f(x), T = 2\pi$

б) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } -1 < x < 0, \\ 3x \text{ при } 0 \le x < 1, \end{cases} T = 2$

Варіант 24

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{x}{3^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=5^{x-2}$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=tgx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sin 36^0$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{chx-1}{x} dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x+y+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0.1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=3x-1, \quad -2<x<2, \; T=4$

б) $f(x)=\begin{cases} 0 \; при \; -\pi<x<0, \\ 2x \; при \; 0 \le x<\pi, \end{cases} \quad T=2\pi$

Варіант 25

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^n}{n!}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\cos^2 x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[4]{19}$; б) $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{e^{-x}}{x}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x+x^2+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=4-|x|, -\pi\le x\le\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \ \text{при} \ -1<x<0,\\ x-2 \ \text{при} \ 0\le x<3,\end{cases}$ $T=6$

Варіант 26

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5+n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n\cdot n!}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=3^{x-1}$ в околі точки $x=2$;

б) $f(x)=\ln\cos x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[7]{126}$; б) $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x^2-y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур’є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=x+2, -2\le x\le 2,\ T=4$

б) $f(x)=\begin{cases}2-x & при\ -\pi<x<0,\\ 1\ при & 0\le x<\pi,\end{cases}\quad T=2\pi$

Варіант 27

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{n^{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{3}}{3^{n}}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}tg\,\frac{x}{5^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n^{2}}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=ln(x-2)$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=e^{cosx}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $cos\,9^{0}$; б) $\int_{0}^{0,5}e^{-x^{2}}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x^{2}+y^{2}$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=x^{2}, -\pi<x<\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -3<x<0,\\ x+2 \text{ при } 0\le x<3,\end{cases}\quad T=6$

Варіант 28

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$;

б) $f(x)=chx$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=y^2+xy$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом Т:

а) $f(x)=3x, -1<x<1,\ T=2$

б) $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi<x<0,\\ x+2 \text{ при } 0\le x<\pi,\end{cases}\ T=2\pi$

Варіант 29

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin^n \frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ в околі точки $x=3$;

б) $f(x)=e^{\sin x}$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $cos 15^0$; б) $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,sin\frac{x}{2}dx$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=x+y+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0{,}1$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=x+2, -\pi<x\le\pi,\ T=2\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ -4<x<0,\\ x-1 \ \ при \ \ 0\le x<4,\end{cases}$ $T=8$

Варіант 30

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Завдання 2. Знайти області збіжності функціональних рядів.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$.

Завдання 3. Розвинути в ряди Тейлора і Маклорена

а) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$;

б) $f(x)=\mathrm{arctg}x$ в околі точки $x=0$.

Завдання 4. Наближено обчислити задану величину з точністю 0,001 заданий вираз та вказаний інтеграл

а) $\sqrt[5]{246}$; б) $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=e^x+y^2$, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є задані функції з періодом T:

а) $f(x)=|x|-3, -6<x<6,\ T=12$

б) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi<x<0,\\ x+4 \text{ при } 0\le x<\pi,\end{cases}$ $T=2\pi$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Міхайленко В.М., Овчинников П.П., Лісицін Б.М. Вища математика. – ч.ІІ. – К.: Техніка. – 2002. – 791 с.

2. Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С. та ін. Вища математика. Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 246с.

3. Шестопал А.Ф. Конспект лекцій з криволінійних, поверхневих, кратних інтегралів та теорії рядів. – К.: КІБІ, 1993. – 128 с.

4. Журавель О.О. Вища математика. Збірник завдань для курсових та самостійних робіт. – К.: КТУБА, 1998. – 111с.

5. Федоренко Н.Д., Баліна О.І. Методичні вказівки з вищої математики. Ч.IV. – К.: 2000р.

6. Ізварін В.О. Застосування операційного числення до інженерних задач. – К.: ІЗМІН, 1997. – 176с.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Ряди)

Всі цитати, цифровий
та фактичний матеріал,
бібліографічні відомості
перевірені. Написання
одиниць вимірювання
відповідає стандартам

Підписи авторів_________________________
«______» _______________________2017 р.

Підпис голови методичної комісії
зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
____
«______» _______________________2017 р.

Київ - 2017