МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, Н.Д. Федоренко,
С.В. Білощицька, Ю.П.Буценко, О.О. Диховичний**

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій

Київ - 2014

УДК 517(05)
ББК 22.17
С34

Рецензент: В.М. Міхайленко, доктор техн. наук, професор

Затверджено на засіданні вченої ради факультету автоматизації і інформаційних технологій протокол №6 від 29 січня 2014 року.

Баліна О.І
С 34 Теорія ймовірності, імовірнісні процеси та математична статистика: конспект лекцій / уклад.: Баліна О.І., Безклубенко І.С., Федоренко Н.Д., Білощицька С.В., Буценко Ю.П., Диховичний О.О. – К.: КНУБА, 2014 – 100 с.

У конспекті лекцій викладено основи теорії ймовірносей та математичної статистики відповідно до програми другого курсу.

Навчальний посібник містить необхідний теоретичний матеріал, приклади розв'язання типових задач.

Призначений для студентів комп'ютерних спеціальностей та викладачів вищих начальних закладів.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій «Теорія ймовірностей та математична статистика» має за мету допомогти студентам самостійно оволодівати курсом теорії ймовірностей та математичної статистики. Він складає з лекційного курсу, списку рекомендованої літератури, коротких відомостей із теорії, зразків розв'язку типових задач.

Програма вивчення нормативної дисципліни складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за напрямами «Інформаційні технології проектування», «Інформаційні управляючі системи та технології», «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини і обладнання», «Професійне навчання», «Комп'ютерні технології в управлінні та навчанні» і охоплює всі змістовні модулі за мінімальною кількістю академічних годин/кредитів, передбачених стандаром.

Теорія ймовірностей – це математична наука, яка вивчає кількісні закономірності випадкових масових явищ. Основними поняттями теорії ймовірностей є подія та ймовірність.

Предметом вивчення дисципліни є створення фундаменту для вивчення таких загальнотехніних дисциплін, як чисельні методи, загальна фізика, а також спеціальних дисциплін, необхідних для розуміння проблем математичного моделювання та інших.

Основною метою викладання дисципліни є набуття знань з основ теорії ймовірностей та математичної статистики, формування у майбутніх фахівців знань і навичок застосуванн основних законів, принципів та методів теорії ймовірностей в інженерній практиці, при вирішенні технічних задач.

Основними завданнями, що мають бути вирішені в процесі викладання дисципліни, є теоретична та практична підготовка студентів з питань:

- випадкової події та простору елементарних подій;
- імовірності випадкової події;
- випадкових величин та способів завдання їх розподілів;

- збіжності випадкових величин, статистичного експерименту.

Лекції 1. Випадкові події та їх імовірності

В цій лекції запроваджено базові поняття теорії ймовірностей. Дана їх ілюстрація на прикладах, наводяться найважливіші властивості ймовірності, формулюються аксіоми ймовірності.

Простір елементарних подій

Назвемо сукупність випадкових явищ, які можливі для спостереження за певних умов, *стохастичним експериментом* . Його наслідки є випадковими, тобто не можуть бути передбаченими заздалегідь. Кожному стохастичному експерименту поставимо у відповідність множину, елементи якої є реалізаціями стохастичного експерименту. Цю множину назвемо *простором елементарних подій* і будемо завжди позначати Ω. Це поняття є первинним. Елементи простору елементарних подій називають *елементарними подіями*. Далі елементи простору елементарних подій будемо позначати ω або ω_i. В кожному стохастичному експерименті простір елементарних подій вводиться певним чином. Дамо роз'яснення запроваджених понять на прикладах.

Приклади

1. Стохастичний експеримент полягає в підкиданні монети. Простір елементарних подій складається з двох елементів: "герб" та "решка", які можна позначити літерами "Г" та "Р". Отже $\Omega = \{Г, Р\}$.

2. Нехай монета підкидається двічі, тоді $\Omega = \{ГГ, РР, ГР, РГ\}$ і складається з чотирьох елементів. Зауважимо, що в цих двох прикладах кількість елементів в Ω є скінченною. Наведемо інший приклад.

3. Нехай монета підкидається до першої появи "герба". В цьому випадку елементами Ω є послідовності літер "Р", в кінці яких стоїть літера "Г". Очевидно, що в цьому випадку Ω є нескінченною, але зліченною множиною: $\Omega = \left\{ Г, РГ, РРГ, РРРГ, ..., \underbrace{Р...Р}_{n}Г, ... \right\}$

4. Точка кидається на площину з введеними прямокутними координатами XOY. Кожній елементарній події ставляться у відповідність координати точки площини, тобто

$$\Omega = \{(x, y), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}.$$

Якщо на площині розміщено мішень, наприклад, квадрат зі стороною одиниця, і точка завжди влучає в мішень, то

$$\Omega = \{(x, y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

В цьому випадку кількість елементарних подій є нескінченною множиною, яка за кількістю елементів відповідає множині дійсних чисел.

Випадкові події та операції над ними

Означення. *Випадковою подією* називається будь-яка підмножина простору елементарних подій.

Випадкові події будемо позначати літерами *A*, *B*, *C*. Сама множина Ω називається *вірогідною подією*, порожня множина ϕ - *неможливою подією*, яка, як відомо, вважається підмножиною будь-якої множини. Події можуть знаходитись у певних відношеннях та над ними можна виконувати певні операції. Розглянемо їх.

1. Подія *B* є наслідком події *A*, якщо множина *A* є підмножиною *B*, тобто $A \subset B$.
2. Подія, яка полягає в тому, що відбудеться принаймні одна з подій *A* або *B*, позначається $A \cup B$ і є об'єднанням (сумою) двох множин.
3. Подія, яка полягає в тому, що відбудуться одночасно дві події *A* і *B*, позначається $A \cap B$ і є перетином (добутком) двох множин.
4. Протилежна до події *A* подія $\overline{A}$ - це подія, яка полягає в тому, що *A* не відбудеться $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
5. Події *A* і *B* називають *несумісними*, якщо $A \cap B = \phi$. Несумісні події не можуть відбуватись одночасно.

Операції над подіями мають такі властивості:

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (комутативний закон для об'єднання та перетину множин).

2. $\left(A \cup B\right| \cup C = A \cup \left(B \cup C\right); \left(A \cap B\right| AC = A \cap \left(B \cap C\right)$ (асоціативний закон для об'єднання та перетину множин).

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивний закон для об'єднання та перетину множин).

4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закони де Моргана).

5. $A \cup \overline{A} = \Omega; A \cap \overline{A} = \phi$.

Приклад

1. Нехай гральний кубик підкидається один раз. Нехай A - випадкова подія "випала парна кількість очок"; B - "кількість очок не перевищує 4-ох", Знайдемо $A \cap B; A \cup B; A \setminus B$. Очевидно, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}; A = \{1,2,3,4\};$

$$B = \{2,4,6\};\ A \cup B = \{2,4\}; A \cup B = \{1,2,3,4,6\}; A \setminus B = \{1,3\}.$$

Імовірність

Введемо поняття *ймовірності випадкової події*. Це можна зробити різними способами, але при цьому запроваджені поняття будуть наділені спільними властивостями, які ми вкажемо далі.

Частота як імовірність

Розглянемо подію A, яка спостерігається в результаті проведення деякого стохастичного експерименту. Нехай експеримент повторюється n разів і нехай $k_n(A)$ - число експериментів, в яких відбулась подія А. Відношення $\upsilon_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ назвемо *відносною* або *емпіричною частотою* події A в серії експериментів.

Частота $\upsilon_n(A)$ має такі властивості:

1. $0 \le v_n(A) \le 1$;
2. $v_n(\Omega) = 1$;
3. Якщо А та В – дві несумісні випадкові події, тобто $A \cap B = \phi$, то

$$\upsilon_n(A \cup B) = \upsilon_n(A) + \upsilon_n(B).$$

Перша властивість випливає з того, що $\upsilon_n(A) \leq n$. Друга - з того, що вірогідна подія відбувається при кожному експерименті $(\upsilon_n(\Omega) = n)$. З *формули включень та виключень* (1.8.1) випливає, що

$$k_n(A \cup B) = k_n(A) + k_n(B).$$

Зрозуміло, що введена таким чином частота залежить від кількості експериментів n та випадку і не є сталою величиною. Проте, при певних умовах та достатньо великій кількості експериментів, частота близька до сталої величини, причому чим більше n, тим менше частота відхиляється від сталого значення.

Нехай багато разів підкидають симетричну монету. Тоді, як свідчать численні експерименти, частота мало відрізняється від $\frac{1}{2}$. Наведемо результати трьох експериментів по підкиданню монети:

Випробувач	К-сть підкидань	К-сть гербів	Частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5080
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

Означення. Якщо при великих n частота $\upsilon_n(A)$ події A мало відрізняється від деякого фіксованого значення p, то кажуть, що подія A стохастично стійка, а число p називають стохастичною ймовірністю події A.

Наведене емпіричне означення ймовірності не є строго математичним, а лише пояснює суть цього поняття. Далі ми дамо точне означення ймовірності.

Аксіоми ймовірності

Означення. Поставимо у відповідність кожній випадковій події A число $P(A)$, яке називається *ймовірністю події* і має задовольняти наступним вимогам:

1. $P(A) \geq 0;$
2. $P(\Omega) = 1;$
3. Якщо A та B - несумісні події

$$(A \cap B = \phi), \text{ то } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Наведені твердження називають *аксіомами ймовірності*.

Зауваження. Замість аксіоми 3 часто вводять наступну аксіому.

Якщо $A_i, i \geq 1$- послідовність несумісних подій ($A_i \cup A_j = \phi$, $i \neq j$), то

$$P\left(U_{i=1}^{i=\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=\infty} P(A_i).$$

В рамках цього курсу розбіжність між аксіомами 3 та 3* не має істотного значення, тому ми будемо застосовувати аксіому 3.

Таким чином, формалізація стохастичного експерименту полягає у виборі простору елементарних подій Ω, визначенні випадкових подій та їх ймовірностей так, щоб для них виконувались аксіоми ймовірності. Зауважимо лише, що ймовірність, як і простір елементарних подій, може визначатись різним чином в залежності від конкретного стохастичного експерименту.

Властивості ймовірності

Розглянемо властивості запровадженої ймовірності, які випливають з аксіом імовірності.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Дісно, оскільки $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \phi$, то з аксіоми 3 випливає

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1.$$

Тому з аксіоми 2 отримаємо $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\phi) = 0$

Дійсно, за допомогою властивості (1) для $A = \Omega$, отримаємо

$$P(\phi)=P(\overline{\Omega})=1-P(\Omega)=1-1=0.$$

3. Якщо $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$

Оскільки $B=A\cup(B\setminus A)$, $A\cap(B\setminus A)=\phi$, то за аксіомою 3 отримаємо

$$P(B)=P(A\cup(B\setminus A))=P(A)+P(B\setminus A)\ge P(A).$$

Звідси випливає:

4. Для довільної події A $P(A)\le 1$.

5. Для довільної події A та B

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

За аксіомою 3 $P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)$.

Так як $B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ і $(B\setminus A)\cap(A\cap B)=\phi$, то

$$P(B)=P(B\setminus A)+P(A\cap B).$$

Звідси й випливає потрібне твердження. Послідовно використовуючи попередню властивість, отримаємо наступну властивість:

5*. Для будь-яких випадкових подій $A_1,\dots,A_n$ та $n\ge 2$.

$$P(A_1\cup\dots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{i=n}P(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\dots+(-1)^{k-1}$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})+\dots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\dots\cap A_n)$$

(*формула додавання імовірностей*)

Запитання для самоконтролю

1. Що називають простором елементарних подій? Наведіть свій приклад стохастичного експерименту та побудуйте для нього простір елементарних подій.
2. Гральна кістка підкидається тричі. Нехай A - випадкова подія, що означає: герб випав при першому підкиданні; B - герб випав при другому підкиданні. Записати події: $A\cap B$, $A\cup B$, $\frac{A}{B}$.
3. A,B,C - три випадкові події. Записати наступні події, що означають: а) відбулась тільки подія A; б) відбулась принаймні одна з трьох подій;

в) відбулась тільки одна з трьох подій; г) відбулось не більше двох подій.

Лекції 2. Класичний підхід до поняття імовірності, комбінаторні операції

В цій лекції запроваджено класичне означення ймовірності. Розглянуто найважливіші поняття теорії скінченних множин - комбінаторики. Розглянуто багато прикладів, ілюструючих запроваджені поняття.

Дискретний простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності

Розглянемо стохастичний експеримент, в якому множина *елементарних подій* є скінченною $(\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\})$, тобто можливі тільки n результатів випробувань. Отже, простір елементарних подій є дискретним. Нехай відомі ймовірності елементарних подій

$$p_1 = P\{\omega_1\}, p_2 = P\{\omega_2\},\ldots, p_n = P\{\omega_n\},$$

які задовольняють таким вимогам:

1. $0 \le p_k \le 1, k \ge 1$;
2. $\sum_{k\ge 1} p_k = 1$;
3. $P(A)=\sum_{\omega_k \in A} p_k$.

Числа $p_1, p_2,\ldots,p_n$ називають дискретним розподілом .

Зауваження. Очевидно, що введена таким чином імовірність задовольняє аксіомам імовірності 1-3 та властивостям імовірності 1-5.

Розглянемо тепер стохастичний експерімент, в якому всі результати рівноможливі. Це означає, що немає об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш імовірною, порівняно з іншими. Тоді

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Нехай $N(A)$- кількість елементарних подій, що тягнуть за собою подію A. Тоді, за властивістю 3 дискретного розподілу, ймовірність події А визначається формулою

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Дане означення ймовірності називають *класичним* .

Приклад. Нехай пачка грошових купюр містить 100 справжніх та 20 фальшивих банкнот. Яка ймовірність того, що навмання вибрана банкнота є справжньою?

Оскільки пачка містить 120 купюр, то, очевидно, що $N(\Omega)=120$. Вибору справжньої купюри сприяють 100 випадків. Отже, $N(A)=100$. Таким чином, $P(A)=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$.

Більш складні стохастичні експерименти зі скінченною кількістю наслідків потребують вивчення наступного розділу.

Елементи комбінаторики

У багатьох галузях людської діяльності доводиться зустрічатися з задачами, в яких треба знайти число можливих розміщень заданих предметів, число способів, якими можна здійснити деякий вибір тощо. Такі задачі вивчає розділ математики - комбінаторика, предметом якої є теорія скінченних множин.

Основні правила комбінаторики

Вивчаючи задачі комбінаторики та методи їх розв'язання, ми часто будемо говорити про вибір деякого об'єкта з деякої множини. Наприклад, числа з множини чисел, певних людей з деякої групи людей, певних предметів з певної сукупності предметів тощо. В кожному випадку, коли не обговорюється певний вигляд множини, ми будемо мати на увазі вибір з деякої скінченної множини M, яку будемо називати основною множиною.

Найпростіші теореми і формули комбінаторики грунтуються на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми та добутку.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт а можна вибрати з основної множини m способами, а об'єкт b - n способами, причому ніякий вибір а не збігається з жодним із виборів b, то один з об'єктів а або b можна вибрати $m+n$ способами.

Приклад. В магазині є 8 видів шпалер виробництва Англії та 5 видів шпалер виробництва Італії. Скількома способами можна купити потрібні шпалери?

За правилом суми це число дорівнює 8+15=13.

Правило добутку. Якщо об'єкт а можна вибрати з основної множини m способами і при кожному виборі об'єкта а об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари (a,b) можна здійснити mn способами.

Правило добутку, очевидно, допускає узагальнення:

Узагальнене правило добутку. Нехай треба вибрати k об'єктів. Якщо перший об'єкт можна вибрати n_1 способами, другий - n_2 способами і так далі, k- тий можна вибрати n_k способами, то вибір впорядкованої системи з k об'єктів можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Приклад. В гардеробі жінки є 7 капелюхів, 6 пальт та 8 пар черевиків. Скількома способами вона може бути одягнута при виході на вулицю восени? Очевидно, за правилом добутку, це число дорівнює $7 \cdot 6 \cdot 8 = 336$.

Перестановки

Означення. Нехай основна множина I містить n елементів. Назвемо її впорядкованою, якщо кожному елементу множини поставлено у відповідність деяке число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні номери.

Прикладами впорядкованих множин є послідовні n чисел; множина будинків на вулиці; люди, що сидять в ряду кінотеатру тощо.

Означення. *Перестановкою* називається будь-яка впорядкована множина з n елементів. Інакше кажучи, перестановка - це спосіб нумерації елементів множини.

Різні перестановки однієї множини відрізняються лише порядком елементів.

Приклад. Для множини, що складається з трьох елементів a,b,c можливі такі перестановки

$$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$$

Кількість перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Дійсно, на першому місці може стояти будь-який елемент множини, для цього є n можливостей, на другому - будь-який крім першого, для цього - $(n-1)$ можливість, і так далі. За правилом добутку $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

Приклад. Скількома способами можна роздати 10 білетів 10 студентам так, щоб кожний дістав лише один білет?

Занумеруємо студентів від одного до 10. Тоді шукане число дорівнює кількості перестановок із 10 елементів, тобто 10!.

Розміщення n елементів по k позиціях

Нехай основна множина складається з n елементів.

Означення. *Розміщенням* n елементів по $k(k \le n)$ позиціях називається будь-яка впорядкована k- елементна підмножина основної множини M.

Кількість розміщень n елементів по k позиціях дорівнює

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Дійсно, перший елемент можна вибрати n способами, другий - $(n-1)$ способами і так далі, k-й - $(n-k+1)$ способами. За правилом добутку отримаємо потрібну формулу.

Приклад. Скількома способами можна розсадити п'ятьох членів екзаменаційної комісії на дванадцяти стільцях?
Це число дорівнює $A_{12}^{5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$.

Комбінації з n елементів по k

Нехай основна множина складається з n елементів.

Означення. *<u>Комбінацією</u>* або сполученням з n елементів по $k(k \le n)$ називається будь-яка k- елементна підмножина основної множини M.

Кількість комбінацій з n елементів по k дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)}$$

Дійсно, для того, щоб отримати впорядковану k-елементну підмножину множини з n елементів, потрібно вибрати спочатку k елементів C_n^k способами, далі впорядкувати їх $k!$ способами. За правилом добутку отримаємо рівність $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, звідки і одержуємо потрібну формулу.

Числа C_n^k називають *<u>біноміальними коефіцієнтами</u>*. Це по в'язано з тим, що за допомогою біноміальних коефіцієнтів обчислюють n-й степінь суми двох чисел:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k ,$$

Ця формула носить назву *<u>бінома Ньютона</u>*.

Приклад. Рада директорів компанії складається з трьох бухгалтерів та п'яти менеджерів. Скількома способами можна скласти комітет із п'яти осіб так, щоб до його складу входило двоє бухгалтерів та троє менеджерів?

За правилом добутку це число дорівнює

$$C_3^2 \cdot C_5^3$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Дійсно, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} C_n^{n-k}$.

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Дійсно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$$

3) $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n$.

Ця формула є наслідком формули бінома Ньютона, якщо покласти $a=1, b=1$.

Наслідок. Кількість всіх підмножин множини (із врахуванням порожньої), яка містить n елементів, дорівнює 2^n. Дійсно, кількість всіх підмножин множини з n елементів дорівнює

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n .$$

Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями

Іноді доводиться розглядати ситуації, коли елементи після вибору з основної множини повертаються знову до неї. В таких випадках мова йде про розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями.

Розміщення з повтореннями

Означення. *<u>Розміщенням з повтореннями</u>* з n елементів по k називається будь-який впорядкований набір виду $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де $a_1, \ldots, a_k$ -- елементи основної множини I.

Число всіх розміщень з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{A}_n^k$. Зазначимо, що можливо і $k > n$.

Розміщення з повтореннями з n елементів по k називають також впорядкованими k - вибірками з поверненням. Справді, розміщення з повтореннями з n елементів по k можна дістати так. Спочатку вибрати довільний елемент a_1, записати його на першому місці і повернути до множини, знову вибрати довільний елемент a_2 (можливо той самий), записати його на другому місці і знов повернути до множини і так далі k разів. Таким чином ми дістанемо розміщення з повтореннями з n елементів по k, або k -елементну вибірку даної множини.

Число розміщень з повтореннями з n елементів по k обчислюється за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Доведемо це за допомогою рекурентного співвідношення

$$\overline{A}_n^{k+1} = nA_n^k.$$

Дійсно, для того щоб дістати $(k+1)$ - елементну вибірку множини з n елементів досить до k - елементної вибірки $(a_1, a_2, ..., a_k)$ дописати довільний елемент a_{k+1}. Але k - елементну вибірку можна вибрати $\overline{A}_n^k$ способами, а елемент a_{k+1} - n способами, тому $(k+1)$ - елементну вибірку можна вибрати, за правилом добутку $n\overline{A}_n^k$ способами. А так як $\overline{A}_n^k = 1$, то за індукцією отримаємо потрібну рівність.

Зауваження. $\overline{A}_n^k$ - це число способів, якими можна розкласти k різних предметів по n ящиках. Дійсно, нехай ящики та предмети занумеровані натуральними числами відповідно $1,...,n$ та $1,...,k$. Позначимо через a_i номер ящика, до якого покладено i-й предмет $(i = 1,...,k)$. Тоді кожний спосіб розкладання предметів по ящиках описується впорядкованим набором $(a_1, a_2, ..., a_k)$, де кожне a_i - одне з чисел $1,2,...,n$. Очевидно, число таких наборів дорівнює $\overline{A}_n^k$.

Приклад. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Скільки існує можливих номерів, якщо використовуються 32 літери алфавіту? Оскільки букви та цифри можуть повторюватися, то за правилом добутку шукане число дорівнює $\overline{A}_{32}^3 \cdot \overline{A}_{10}^4 = 32^3 \cdot 10^4 = 327680000.$

Перестановки з повтореннями

Нехай основна множина I складається з елементів різних типів.

Означення. Перестановкою з повтореннями з n елементів називається будь-яке впорядкування основної множини з n елементів, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів даної множини є n_1 елеметів першого типу, n_2 елементів другого типу, n_k елементів k-го типу, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то число таких перестановок позначається $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ і має місце формула

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Дійсно, розглянемо будь-яку з перестановок даної множини і обчислимо, скількома способами можна переставляти її елементи так, щоб перестановка не змінилась. Елементи першого типу можна переставляти $n_1!$ способами, другого типу - $n_2!$ способами, k-го типу - $n_k!$ способами. Тому, за правилом добутку, в кожній перестановці з повтореннями можна, не змінюючи перестановки, переставляти елементи $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ способами. Звідси

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! = n!,$$

що доводить потрібну формулу.

Зауваження. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ - це число способів, якими можна розкласти n різних предметів по k ящиках так, щоб до i-го ящика потрапило n_i предметів $(i = 1, \ldots, k)$. Дійсно, розглянемо перестановки з повтореннями з n елементів k типів і занумеруємо числами $1, 2, \ldots, n$ місця, на яких можуть стояти ці елементи; предмети також занумеруємо числами $1, 2, \ldots, n$. Тоді кожній перестановці з повтореннями можна поставити у відповідність такий спосіб розміщення предметів по ящиках, при якому у i-й ящик потрапляють ті предмети, номери яких збігаються з номерами місць, на яких стоять елементи i-го типу $(i = 1, \ldots, k)$. Ясно, що ця відповідність взаємно однозначна, що доводить твердження.

Приклад. Скільки різних слів (у тому числі і беззмістовних) можна дістати, переставляючи літери у слові "математика" ?

Очевидно, цим числом буде $P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$

Комбінації з повтореннями

Означення. *<u>Комбінацією з повтореннями</u>* з n елементів по k називається будь-який k-елементний набір типу $(a_1, a_2, ..., a_k)$, де кожний з елеметів $a_1, a_2, ..., a_k$ належить до одного з n типів.

Число всіх комбінацій з повтореннями з n елементів по k будемо позначати $\overline{C}_n^k$. Це число дорівнює

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Дійсно, оскільки порядок слідування елементів у комбінаціях з повтореннями не має значення, то кожна комбінація однозначно визначена, якщо вказати, скільки в ній є елементів кожного з n типів. Поставимо у відповідність кожній комбінації з повтореннями послідовність нулів та одиниць таким чином. На перших місцях в цій послідовності розмістимо стільки одиниць, скільки елементів першого типу входить в комбінацію, далі запишемо нуль, далі знову поставимо стільки одиниць, скільки елементів другого типу є в комбінації, потім нуль і так далі. Тоді кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k дорівнює кількості таких послідовностей із k одиниць та n-1 нуля, яка дорівнює

$$P(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Зауваження. $\overline{C}_n^k$ - це число способів, якими можна розкласти k однакових предметів по n однакових ящиках. Встановимо взаємно однозначну відповідність між комбінаціями з повтореннями з n елементів по k і способами розміщення k елементів по n однакових ящиках. Справді, маючи розміщення з k предметів по n ящиках, можна утворити комбінацію з повтореннями з n елементів по k, беручи стільки елементів першого типу, скільки предметів у першому ящику, стільки елементів другого типу , скільки предметів у другому ящику і т.д. Навпаки, якщо маємо комбінацію з повтореннями з n елементів по k, то можемо розмістити k предметів по n ящиках, поклавши в перший ящик стільки предметів, скільки елементів першого типу є в комбінації, в другий стільки, скільки елементів другого типу є в комбінації і т.д. Отже, число способів розміщення k однакових предметів по n ящикам дорівнює $\overline{C}_n^k$.

Приклад. Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де їх є 6 різних сортів?

$$\overline{C}_6^8 = C_{13}^8 = 1287 .$$

Формула включень та виключень

Формула включень та виключень дозволяє обчислювати кількість елементів об'єднання декількох множин, що перетинаються. У випадку, коли множини не перетинаються, кількість елементів об'єднання дорівнює сумі кількостей елементів кожної множини. Якщо хоча б дві множини перетинаються, такий спосіб підрахунку невірний і треба застосовувати метод включень та виключень.

Розглянемо спочатку прості приклади.

Нехай $N(A)$ - кількість елементів скінченної множини A. Тоді для двох скінченних множин A та B

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Аналогічно для трьох множин має місце таке співвідношення:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + \\ + N(A \cap B \cap C).$$

В загальному випадку має місце:

Теорема. Нехай $A_1,...A_n$ - скінченні множини. Тоді

$$N(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \le i_1 \le n} N(A_i) -$$

$$-\sum_{1\le i_1<i_2\le n} N\left(A_i\cap A_{i_2}\right)+\ldots+(-1)^{(k-1)}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} N\left(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}N\left(A_1\cap\ldots\cap A_{i_n}\right).$$

Доведення. Покажемо, що кожен елемент із множини $A_1\cup\ldots\cup A_n$ враховується у правій частині рівно один раз. Дійсно, якщо $a\in A_1\cup\ldots\cup A_n$ і входить в m множин A_i, то в правій частині він враховується стільки разів:

$$C_m^1-C_m^2+C_m^3-\ldots+\left(-1\right)^{(k-1)}C_m^k+\ldots+\left(-1\right)^{(m-1)}C_m^m=1+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k=1-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k 1^{m-k}C_m^k=1-\left(1-1\right)^m=1.$$

Теорему доведено.

Приклад. На курсі навчається 100 студентів, серед яких 85 вивчають англійську мову, 80 німецьку і 75 французьку. Причому англійську та німецьку вивчає одночасно 60 студентів, англійську та французьку - 50, а німецьку та французьку - 40. Скільки студентів вивчає три мови одночасно?

Позначимо через A множину студентів, які вивчають англійську мову, B - французьку, C - німецьку. Тоді кількість студентів, які вивчають три мови одночасно дорівнює:

$$N(A\cap B\cap C)=N(A\cup B\cup C)+N(A\cap B)+N(A\cap C)+N\left(B\cap C\right)-$$

$$-N(A)-N(B)-N(C)=100+60+50+40-85-80-75=10.$$

Повернемось до класичного означення ймовірності. Розглянемо ще декілька прикладів обчислення ймовірностей.

Приклади

1. Десять студентів, серед яких є Василь та Марія сідають на десятимісну лаву. Знайти ймовірність того, що Василь та Марія будуть сидіти поруч.

Загальна кількість способів, якими можуть сісти десять студентів на десяти місцях, дорівнює кількості перестановок із десяти елементів $P_{10}=10!$. Отже, $N(\Omega)=10!$. Вважаючи Василя та Марію за одну особу і враховуючи те, що вони можуть мінятися місцями один з одним, отримаємо, що $N(A)=2\cdot 9!$. Звідси

$$P(A)=\frac{2\cdot 9!}{10!}=\frac{1}{5}.$$

2. Рада директорів компанії складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. У підкомітет мають увійти три особи.

Знайти ймовірність того, що підкомітет буде складатися повністю з бухгалтерів.

Кількість можливих складів підкомітету дорівнює C_8^3, звідки

$$N(\Omega)=C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56.$$

Кількість можливих складів підкомітету з трьох бухгалтерів, або $N(A)$, дорівнює

$$N(A)=C_3^3=\frac{3!}{3!0!}=1.$$

Звідси ймовірність того, що всі члени підкомітету будуть бухгалтерами, дорівнює

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{56}.$$

3. *<u>Гіпергеометричний розподіл</u>*. Відділення банку обслуговує 12 підприємств, 4 з яких - державні. Знайти ймовірність того, що операціоніст, який обслуговує 5 підприємств, має серед них 2 державних.

Кількість *<u>елементарних подій</u>* дорівнює кількості способів вибору п'яти підприємств з дванадцяти: $N(\Omega)=C_{12}^5$. Далі, два державних підприємства можуть бути вибрані C_4^2 способами, а три з восьми недержавних - C_8^3 способами. Отже,

$$N(A)=C_4^2\cdot C_8^3 \text{ і } P(A)=\frac{C_4^2\cdot C_8^3}{C_{12}^5}.$$

Приклад, що було розглянуто, допускає узагальнення.

Нехай в урні є n куль, з яких n_1- білі, решта - чорні. З урни виймають r куль. Знайти ймовірність того, що серед них рівно k білих куль.

Повторюючи попередні міркування, отримаємо, що шукана ймовірність дорівнює: $P_k(n,n_1 r) = \dfrac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r}$,

для $k = 0,1,...,r$.

Набір ймовірностей $P_k(n,n_1 r), k = 0,1,...,r$ називають <u>*гіпергеометричним розподілом.*</u> Гіпергеометричний розподіл має досить широке застосування: за його допомогою можуть бути обчислені ймовірності виграшів у різноманітних лотереях; його використовують у задачах вибіркового контролю.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення дискретного простору елементарних подій та класичне означення ймовірності.
2. Сформулюйте основні правила комбінаторики.
3. Розв'яжить наступні задачі:
1. Менеджеру необхідно перелетіти з Н'ю-Йорка до Лос-Анджелосу з посадкою у Детройті. З Н'ю-Йорка в Детройт є п'ять рейсів літаків, а з Детройту до Лос-Анджелосу - шість. Скількома способами можна менеджеру дістатися до Лос-Анджелосу з зупинкою в Детройті?
2. Припустимо, що торговельна маркировка компакт-дисків визначена так, що перші три характеристики є букви алфавіту, а три другі є числами. Наприклад - АВС127. Скільки різних торговельних маркировок компакт-дисків можна утворити таким чином?
3. Маркетінгові дослідження ринку вимогають від респондентів 8 відповідєй на запитання анкети. Перші 4 запитання передбачають відповіді "да" або "ні", а 4 залишившихся запитання передбачають три можливих варіанти відповіді - "завжди", "інколи", "ніколи". Порядок відповідєй на всі запитання визначено як респондентський "профіль". Скільки всього існує різних "профілів"?
4. В компанії є 6 різних вакансій менеджерів та стажерів. Скількома способами а) 6 стажерів можуть бути розподілені по цих 6 вакансіям? б) 4 стажера можуть бути розподілені по цих 6 вакансіям?

5. Використовуючи дані задачі 4, припустити, що в компанії є 4 різні вакансії та 6 стажерів. Скількома способами можуть бути зайняті ці вакансії?
6. Використовуючи дані задачі 5, припустити, що всі 4 вакансії є ідентичними з точки зору практичної діяльності. Скількома способами компанія може заповнити ці вакансії, якщо є 6 рівноцінних стажерів?
7. У відділі працюють 5 інженерів та 9 техників. В групу, яка займається проект-менеджментом, необхідно відібрати 2-х інженерів та 3-х техників. Скількома способами можна відібрати групу по розробці проекту?
8. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 12 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?
9. Для пересування комісії, яка складається з десяти чоловік, серед яких є Василь та Марія було подано три автомобілі. Два автомобілі можуть взяти по три пасажири, а один - чотири. Скількома способами комісія може розсістися у автомобілі так, щоб Василь та Марія сіли в різні автомобілі?
10. У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити 12 листівок?
11. Яка ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадають на 12 різних місяців року?
12. Чотири жінки та п'ять чоловіків сідають довільним чином в ряд. Яка ймовірність того, що всі жинки будуть сидіти разом?
13. На чотирьох полицях вітрини магазину розставляють чотири пари взуття. Яка ймовірність того, що одна полиця залишиться порожньою?
14. 10 пасажирів чекають на платформі потяг метрополітену, який складається з 5-ти вагонів. Яка ймовірність того, що 3 пасажири сядуть у перший вагон?

Лекція 3. Геометричні імовірності. Умовна імовірність та формула множення імовірностей

Класичне означення ймовірності обмежується лише скінченним простором елементарних подій. Позбавитись цього обмеження дозволяє геометричний підхід до означення ймовірності, запроваджений в цьому модулі. Розглянуто приклади, що ілюструють цей підхід. Запроваджуються також поняття умовної імовірності, нежалежних подій. Виводиться формула множення ймовірностей.

Геометричні ймовірності

Запроваджене у модулі 2 класичне означення ймовірності не підходить до тих випадків, в яких простір *елементарних подій* є нескінченним або не виконується припущення про рівноможливість елементарних подій. У таких випадках вдаються до інших підходів до визначення ймовірності, один з яких буде розглянуто в цьому розділі.

Нехай Ω - деяка область на прямій, площині чи в просторі. Визначимо випадкову подію A як підмножину області $\Omega(A \subset \Omega)$, а ймовірність події A формулою $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$,

де $m(A)$, $m(\Omega)$ - довжина, площа чи об'єм множин A та Ω.

Зауваження 1. Очевидно, що введена таким чином імовірність задовольняє аксіомам імовірності 1-3 та властивостям імовірності 1-5.

Зауваження 2. *Геометричну ймовірність* можна витлумачити так: в області Ω випадковим чином вибирається точка; яка ймовірність того, що ця точка належить А?

Приклад. Задача про зустріч. Дві особи (Василь та Марія) домовились зустрітися у певному місці, причому кожен з них приходить туди незалежно від другого у випадковий момент між 12 і 13 годинами. Той, хто приходить першим, чекає 20 хв. і, якщо другий за цей час не прийде, залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

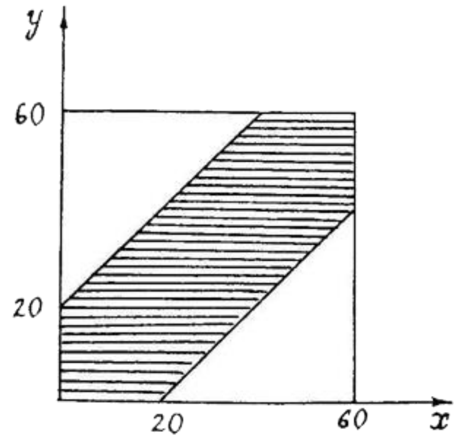

Рис. 1

Позначимо час приходу Василя та Марії відповідно через x та y. Тоді за простір елементарних подій цілком природньо взяти (див. рис.1) квадрат Ω у площині xOy:

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x < 60, \quad 0 < y < 60\}.$$

Згідно з умовою, Василь та Марія зустрінуться тоді і тільки тоді, коли $|x - y| \le 20$ (різниця між моментами приходу не перевищує 20 хв.); це означає, що зустрічі (подія A) відповідають точки квадрату, для яких виконується наступна нерівність:

$$A = \{(x,y) \in \Omega : \quad |x - y| \le 20\}.$$

Події A відповідає заштрихована область. Отже, згідно з означенням геометричної ймовірності, шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої області до площі квадрата:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 5/9.$$

Умовні ймовірності та незалежні події

Почнемо з прикладу. Нехай на екзамені студентові пропонується 30 білетів. Студент встиг вивчити лише білети з 1-го по

3-й та з 28-го по 30-й. На екзамен студент прийшов одинадцятим, і до його приходу залишились лише білети з 1-го по 20-й. Назвемо цю подію A. Знайдемо ймовірність події В, яка полягає в тому, що студент витягне на екзамені "щасливий" білет. Імовірність події В без додаткової інформації про подію А може бути обчислена за класичним означенням імовірності:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{5}.$$

Якщо подія A вже відбулася, то появі події В сприяють три події, при загальній кількості можливих подій рівній двадцяти. Отже, умовну ймовірність події при умові, що подія А відбулася (позначається $P(B/A)$, можна визначити наступним чином:

$$P(B/A)=\frac{3}{20}=\frac{N(A\cap B)}{N(A)}=\frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(A)}{N(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Означення. Умовною ймовірністю події при умові, що відбулася подія А, називається величина

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

при умові, що $P(A)>0$.

Приклад. Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що на одному з кубиків випаде двійка, якщо сума очок, які випали, дорівнює 5 ?

В цьому випадку

$$\Omega=\{(i,j),1<i<6,1<j<6\},$$

$$A=\{(1,4),(3,2),(2,3),(4,1)\},A\cap B=\{(2,3),(3,2)\},$$

тоді, за класичним означенням імовірності,

$$P(A)=\frac{4}{36},P(A\cap B)=\frac{2}{36}$$

і тому $$P(B/A)=\frac{1}{2}.$$

За допомогою поняття умовної ймовірності можна природним чином визначити незалежність випадкових подій.

Незалежними подіями будемо вважати події A та B, для яких

$$P(B/A)=P(B),\quad (P(A)>0).$$

При цьому, згідно з означенням умовної ймовірності, $P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Отже, для незалежних подій $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ і цю формулу приймемо за означення незалежних випадкових подій.

Означення. Події $A_1,\ldots,A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для будь-яких

$$1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n(2\le r\le n)$$

$$P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_r})=P(A_{i_1})\ldots P(A_{i_r}).$$

Далі, для довільних випадкових подій $\left(P(A)\neq 0,\quad P(B)\neq 0\right)$ виконується наступна рівність

$$P(A\cap B)=P(B)P(A/B)=P(A)P(B/A).$$

Ця рівність називається формулою множення ймовірностей. Для n подій формула множення має наступний вигляд

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=$$

$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2\cap A_1)\ldots P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}).$$

Зокрема, для незалежних у сукупності подій формула множення набуває вигляду $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$.

Приклад. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 20 з 25 питань програми; екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.

Нехай $A_i, i=1,2,3$ - події "студент знає відповідь на i-те питання"; A - подія "студент знає відповідь на всі три питання". Тоді $A=A_1\cap A_2\cap A_3$ і за формулою множення маємо

$$P(A)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення геометричної ймовірності.

2. Сформулюйте основні властивості геометричної ймовірності.

3. Два стрілки, ймовірність влучення у мішень для яких дорівнюють відповідно 0,6 та 0,7 роблять по одному пострілу. Знайти імовірності того, що: а) обидва влучать у мішень;

б) лише один влучить у мішень.

3. Сформулюйте означення умовної імовірності та незалежних подій.

4. Наведіть формулу множення ймовірностей. Якого вигляду вона набуває для незалежних подій?

5. Розв'яжить наступні задачі:

1) На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Визначити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує $\frac{1}{8}$.

2) Моменти початку двох подій навмання розподілені на відрізку часу від 12 до 13 годин. Одна подія триває 10 хв., друга - 15 хв. Знайти ймовірність того, що події перетинаються у часі.

Лекція 4. Формули повної імовірності та Байєса. Схема незалежних випробувань

В цій лекції виводяться формули повної імовірності та Байєса. Запроваджується поняття схеми Бернуллі або схеми незалежних випробувань. Виводиться формула обчислення біноміальних ймовірностей, знаходиться мода біноміального розподілу. Розглянуто ряд прикладів, що ілюструють поняття та формули.

Формули повної ймовірності та Байєса

Означення. Випадкові події $H_i, 1 \le i \le n$ утворюють повну групу подій, якщо:

1. $U_{i=1}^{i=n} H_i = \Omega$;
2. $H_i \cap H_j = \phi,\ i \ne j$;
3. $P(H_i) > 0,\quad 1 \le i \le n$.

Формула повної ймовірності

Якщо $H_i,\quad 1 \le i \le n$ - повна група подій, то для довільної події A.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Дійсно, згідно з означенням повної групи подій, подію A можна представити наступним чином

$$A = U_{i=1}^{i=n} (A \cap H_i).$$

Тому, за форулою множення ймовірностей і третьою аксіомою ймовірності,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{i=n} P(H_i) P(A/H_i),$$

що й доводить формулу.

Приклад. В магазин надходять телевізори з Західної Європи, Північно-Східної Азії та Східної Європи. Перші мають в середньому 0.2% браку, другі -0.3%, треті -0.5%. Знайти ймовірність придбання у магазині бракованого телевізора, якщо з перших країн надійшло 300, з других - 600, з третіх - 100 телевізорів.

Нехай подія A полягає в тому, що навмання куплений телевізор є бракованим; H_i, $i=1,2,3$ полягають в тому, що телевізор надійшов з першої, другої або третьої групи країн. Очевидно, що події H_1, H_2, H_3 попарно несумісні та $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$,

$$P(H_1)=0.3, P(H_2)=0.6, P(H_3)=0.1.$$

Далі, $P(A/H_1)=0.002, P(A/H_2)=0.003, P(A/H_3)=0.005$. Тому за формулою повної ймовірності (2.5.1)

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$0.3\cdot 0.002+0.6\cdot 0.003+0.1\cdot 0.005=0.0029.$$

Формула Байєса

Якщо $H_i, 1\le i\le n$ - повна група подій і $P(A)>0$, то

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{k=n}P(H_k)P(A/H_k)}, \quad 1\le i\le n.$$

Формула Байєса випливає з формули повної ймовірності та означення умовної ймовірності

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{k=n}P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Зауваження. Формулам Байєса можна надати таке тлумачення. Події $H_i, 1\le i\le n$ називають гіпотезами і вони позначають умови, за яких може відбутися подія A. Імовірності цих гіпотез $P(H_i)$ вважають відомими і називають *апріорними* (від латинського a priori - до випробування). Відомі також умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A при різних гіпотезах. Далі здійснюється експеримент, в результаті якого може відбутися або не відбутися подія A. Якщо при цьому подія A настала, то ми можемо переоцінити ймовірність кожної гіпотези, знайшовши їх за формулми Байєса. Нові ймовірності $P(H_i / A)$ називають *апостеріорними* ймовірностями гіпотез (від латинського a posteriori - після випробування).

Приклад. Повернемось до попереднього прикладу. Нехай куплений у магазині телевізор виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він випущений у Західній Європі?

Подія A - "куплений телевізор є бракованим"; H_1, H_2, H_3 - ті ж самі, що у попередньому прикладі. Тоді, за формулою Байєса,

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.002}{0.3 \cdot 0.002 + 0.6 \cdot 0.003 + 0.1 \cdot 0.005} = 0.207$$

Схема Бернуллі. Біноміальний розподіл

Нехай відбуваються послідовні випробування, при кожному з яких може відбутися або не відбутися певна подія А; настання події А назвемо "успіхом", а протилежну подію назвемо "невдачею". Імовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює $p(0 < p < 1)$, імовірність невдачі - $q = 1 - p$. Такі випробування називають *послідовними незалежними випробуваннями* або *випробуваннями Бернуллі*. Прикладами послідовних випробувань можуть бути послідовні кидання монети (успіх - випадіння герба; $p = q = 1/2$); перевірка певної партії товарів на відповідність стандартам (успіх - відповідає, невдача - ні); вихід з ладу елементів електронних приладів (успіх - працює, невдача - ні); повернення або неповернення позики тощо. Позначимо через μ_n кількість успіхів в серії з n випробувань. Знайдемо ймовірність того, що $\mu_n = k$, позначивши цю ймовірність $p_n(k)$.

Позначимо $A_k,\ 1 \le k \le n$ подію " при k-тому випробуванні сталася подія A". Зрозуміло, що $P(A_k) = p,\ P(\overline{A}_k) = q$. Для обчислення ймовірності $p_n(k)$ знайдемо спочатку ймовірність того, що подія А настане при певних k випробуваннях, наприклад, при першому, другому, ..., k- му, а при інших не настане. За *формулою множення ймовірностей*, враховуючи незалежність випробувань, отримаємо

$$P(A_1 \cap ... A_k \overline{A_{k+1}} \cap ... \cap \overline{A_n}) = P(A_1)...P(A_k)P(\overline{A_{k+1}})...P(\overline{A_n}) = p^k q^{n-k}$$

Але k випробувань, при яких може статися подія А, можна вибрати C_n^k способами. Тому

$$p_n(k) = C_p^k p^k q^{n-k}.$$

Означення. Набір чисел $p_n(k),\ 0 \le k \le n$ називають *біноміальним розподілом* з параметрами p та n. Звернемо увагу на те, що

$$\sum_{k=0}^{k=n} p_n(k) = 1.$$

Дійсно, за формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\sum_{k=0}^{k=n} p_n(k) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Приклад. Імовірність того, що один з п'яти учасників аукціону відмовиться від участі у торгах дорівнює 0.2. Аукціон не відбудеться, якшо відмовиться більше двох учасників. Знайти ймовірність того, що аукціон не відбудеться.

Очевидно, що в данному випадку присутні умови схеми Бернуллі. Будемо вважати "успіхом" участь, "невдачею" - відмову кожного з учасників брати участь у аукціоні ($p = 0.2, q = 0.8$). Нехай А - це відміна аукціона, $A_k,\ 1 \le k \le 5$- це відмова k учасників $A = A_3 \cup A_4 \cup A_5$. Так як події A_3, A_4, A_5 несумісні, то

$$P(A) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) =$$
$$= C_5^3 (0.2)^3 (0.8)^2 + C_5^4 (0.2)^4 (0.8)^1 + C_5^5 (0.2)^5 (0.8)^0 \approx$$
$$\approx 0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.0579$$

Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі

Знайдемо значення k, при яких $p_n(k)$ набуває максимального значення. Для вивчення поведінки ймовірностей $p_n(k)$ знайдемо відношення двох послідовних значень цих двох імовірностей.

$$p_n(k+1)=\frac{n(n-1)...(n-k-1)(n-k)}{(k+1)!}p^{k+1}q^{n-k-1},$$

$$p_n(k)=\frac{n(n-1)...(n-k-1)}{k!}p^k q^{n-k}.$$

Звідси $$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}=\frac{(n-k)p}{(k+1)q}, k=0,1,2,...,n-1.$$

Знайдемо, при яких k це відношення більше одиниці , рівне одиниці і менше одиниці. Помічаємо, що $\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}>1$ при $(n-k)p>(k+1)q$ або $np-q>k$.

Отже, $$p_n(k+1)>p_n(k), \quad k<np-q$$
$$p_n(k+1)<p_n(k), \quad k>np-q$$

Як ми бачимо, величина $p_n(k)$ при зростанні k спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при яких k досягається максимум.

1) Нехай $np-q$ - неціле число. Тоді число $np-q+1=np+p$ - також неціле, і існує єдине ціле число k^*, що задовольняє умові $np-q<k^*<np+p$ і є найімовірнішим числом успіхів.

2) Нехай $np-q$ - ціле. В цьому випадку $p_n(np-q)=p_n(np+p)$ і існують два найімовірніші значення: $k_1^*=np-q, k_2^*=k_1^*+1$.

Зауваження. Число k^* називається _модою розподілу_, тобто мода - це значення, яке випадкова величина приймає з максимальною ймовірністю.

Приклад. Гральний кубик підкидають 35 разів. Знайти найімовірнішу кількість появ шістки.

В цьому випадку $n=35, p=1/6, q=5/6$, тому $np-q=5$ і найімовірніших значень два - 5 і 6.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення повної групи подій. Наведіть формули повної ймовірності та Байєса.

2. Сформулюйте поняття схеми незалежних випробувань (схеми Бернуллі).

3. Як знаходиться найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі?

4. Розв'яжіть наступні задачі:

1. СМС-повідомлення складається з 10 знаків, ймовірність спотворення кожного з них дорівнює 0,2. Знайти: а) найімовірнішу кількість створених знаків; б) імовірність того, що буде спотворено три знаки; в) імовірність того, що буде спотворено не менше чотирьох знаків.

2.У трьох урнах лежать білі та чорні кулі. У першій урні - 3 білих і 1 чорна, у другій - 6 білих і 7 чорних, у третій - 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

3. В умовах попередньої задачі з навмання взятої урни дістали білу кулю. Знайти ймовірність того, що це третя урна.

Лекція 5. Граничні теореми у схемі Бернуллі. Випадкові величини та функції розподілу

Розглянуто граничні теореми для біноміального розподілу, за допомогою яких досліджується поведінка біноміальних імовірностей при зростанні кількості випробувань. Розібрано ряд прикладів, илюструючих запроваджені поняття та формули. Запроваджується одне з центральних понять теорії ймовірностей – поняття випадкової величини та її функції розподілу. Розглянуті її властивості.

Граничні теореми для біноміального розподілу

У випадку, коли кількість випробувань n стає достатньо великою (більше 100), обчислення ймовірностей $p_n(k)$ у *біноміальному розподілі* стає практично неможливим. *Граничні теореми для біноміального розподілу* дають наближені формули, за якими можна обчислювати біноміальні ймовірності $p_n(k)$ при великих n.

Теорема Пуассона

В цьому розділі розглядається наближена формула для обчислення *біноміальних імовірностей* $p_n(k)$, якою користуються при досить малих значеннях імовірності успіху в *схемі Бернуллі*, тобто для подій, що рідко трапляються.

Розглянемо послідовність серій *випробувань Бернуллі.* Нехай в n-й серії відбуваються $n \geq 1$ послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p_n = \lambda / n(\lambda = const > 0, n > \lambda)$. Тоді має місце така теорема.

Теорема Пуассона. Якщо $p_n(k)$- імовірність k успіхів у серії з n *<u>випробувань Бернуллі</u>*, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює λ / n, то для $k = 0,1,2,...$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доведення. Для ймовірності $p_n(k)$ *<u>біноміального розподілу</u>* виконано:

$$p_n(k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Звідси $$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \times \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорему доведено.

Зауваження.

1. На практиці *<u>теоремою Пуассона</u>* користуються у формі наближеної рівності $$p_n(k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n},$$

де $\lambda_n = np, k = 0,1,2,....$

2. Застосування *<u>теореми Пуассона</u>* є доцільним для $p \le 0.01$ та $n \ge 1000$ і при умові $pn \le 10$. Похибка наближення біноміальних імовірностей не перевищує np^2. А саме, має місце нерівність

$$\left| p_n(k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \right| \le np^2 .$$

3. Набір ймовірностей $\frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2,...$ називають *розподіл Пуассона*. Значення цих імовірностей приводяться у спеціальних таблицях.

Приклад. З умов випуску лотереї відомо, що виграє 1/20 всіх білетів. Скільки треба купити білетів, щоб імовірність виграшу була не менше 0,99?

Придбання лотерейних білетів можна розглядати як незалежгі випробування, в кожному з яких імовірність успіху (виграшу) дорівнює $p = 1/20$. Оскільки ймовірність успіху мала, то можна застосувати наближення Пуассона до біноміальної формули: ймовірність того, що з n придбаних білетів виграє k, дорівнює: $p_n(k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = np.$ При $k = 0$ ця формула дає ймовірність того, що жоден білет не виграє: $p_n(0) \approx e^{-\lambda}$, тому ймовірність того, що принаймні один білет виграє, дорівнює $1 - e^{-\lambda}$. Отже, треба знайти таке λ, щоб виконувалась нерівність

$1 - e^{-\lambda} \ge 0.99$

Звідси знаходимо: $\lambda \ge 4{,}6$. Таким чином, $np \ge 4{,}6$, звідки $n \ge 4{,}6 / p = 92$.

Локальна теорема Муавра - Лапласа

Розглянемо ще одну граничну теорему для *біноміального розподілу*. Теорема Пуассона має місце для випадку малих значень np. У випадку, коли np велике, мають місце *теореми Муавра-Лапласа*.

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Нехай в кожному з n незалежних випробувань імовірність "успіху" однакова і дорівнює $p(0 < p < 1)$. Тоді для $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, |x_k| < C$, де C - деяка стала, $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{npq}\, p_n(k) = \phi_{0,1}(x_k)$,

де $\phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - <u>*щільність стандартного нормального розподілу*</u>.

Зауваження. 1. <u>*Щільність стандартного нормального розподілу*</u> - це функція, значення якої обчислено і зібрано у відповідну таблицю. Для достатньо великих n для обчислення $p_n(k)$ можна користуватись таблицями <u>*щільності стандартного нормального розподілу*</u> в такому вигляді $p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi_{0,1}\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$.

2. Похибка апроксимації в теоремі спадає як $C/\sqrt{n}$, де C -деяка стала. Найкраще наближення становить при $p = q = 1/2$. Використання теореми є доцільним при $n > 100$ та $npq > 20$.

Приклад. Банк обслуговує кредитні картки 6000 клієнтів, для кожного з яких імовірність перевищити кредит на протязі тижня дорівнює $1/6$. Знайти ймовірність того, що на протязі тижня перевищать кредит 900 клієнтів.

В цьому прикладі $n = 6000, k = 900, p = 1/6, q = 5/6$, тому $\sqrt{npq} = 28{,}87$, $x_k = -3.46$.

Звідси $p_n(k) \approx 0.00034$.

Інтегральна теорема Муавра - Лапласа

При розв'язанні практичних задач часто виникає необхідність обчислювати суми вигляду $\sum_{k=k_1}^{k=k_2} p_n(k)$. Безпосереднє обчислення таких сум, навіть при застосуванні <u>*локальної теореми Муавра - Лапласа*</u>, є дуже громіздким, а іноді практично неможливим. Крім того, при додаванні великої кількості наближених значень $p_n(k)$

можуть утворюватись значні похибки. Такі суми доцільно обчислювати за допомогою інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай μ_n - кількість успіхів в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p(0<p<1)$. Тоді для довільних чисел a і $b(a \le b)$ має місце співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Зауваження.

1. Права частина твердження теореми є різницею значень функції Лапласа в точках a та b: $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(b) - \Phi(a),$

де $\Phi(x)$ - *функція Лапласа*. Значення функції Лапласа приведено у таб.

2. *Інтегральна теорема Муавра-Лапласа* застосовується в тих самих випадках, що і локальна теорема в вигляді наближеної рівності.

$$P\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Приклад. Нехай деяка партія товарів містить 0,8% браку. Знайти ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів з цієї партії число бракованих менше від 60 .

Вибір окремих виробів можна розглядати як послідовні випробування. Імовірність вибору бракованого виробу дорівнює $p = 0.008$; число випробувань $n = 5000; q = 0.992$. Нехай μ_n - число бракованих виробів серед 5000 вибраних. Тоді за попередньою рівністю маємо

$$P\{0 \le \mu_n < 60\} \approx \Phi\left(\frac{60 - 5000\cdot 0.008}{\sqrt{5000\cdot 0.008\cdot 0.992}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 5000\cdot 0.008}{\sqrt{5000\cdot 0.008\cdot 0.992}}\right) =$$

$$= \Phi(3.16) - \Phi(-6.32) = \Phi(3.16) + \Phi(6.32) = 0.9992.$$

3. Нехай задано довільне число $\alpha > 0$. Знайдемо за допомогою <u>*інтегральної теореми Муавра-Лапласа*</u> ймовірність нерівності $\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \alpha$.

Очевидно,

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \alpha\right\} = P\left\{-\alpha < \frac{\mu_n - np}{n} < \alpha\right\} = P\left\{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

З <u>*інтегральної теореми Муавра-Лапласа*</u> отримаємо

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \alpha\right\} \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

A. Ця формула дає можливість обчислити ймовірність того, що частота події (успіху) відхилитися від її ймовірності не більше ніж α, при заданих n і α.

B. Побудуємо за допомогою отриманої рівності інтервал, в якому знаходиться ймовірність події (успіху). Знайдемо таке $\alpha > 0$, щоб для $0 < \beta < 1$ виконувалась нерівність $P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \alpha\right\} = \beta$.

Користуючись таблицею значень функції Лапласа, знайдемо таке t, щоб $2\Phi_L(t) = \beta$. Тоді маємо $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} = t$.

Звідки $$\alpha = t\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Отже, $$P\left\{\mu_n / n - t\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \mu_n / n + t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} = \beta.$$

Далі, так як $0 < p < 1$ та $q = 1 - p$, легко переконатися, що $pq \le 1/4$. Тоді $$P\left\{\mu_n / n - \frac{t}{2\sqrt{n}} < p < \mu_n / n + \frac{t}{2\sqrt{n}}\right\} \ge \beta.$$

Отриману нерівність називають <u>*довірчим інтервалом*</u> для ймовірності успіху. Ця нерівність означає, що з імовірністю не меншою β ймовірність успіху лежить у межах від $\mu_n / n - \frac{t}{2\sqrt{n}}$ до $\mu_n / n + \frac{t}{2\sqrt{n}}$.

С. Нехай тепер задані числа $\alpha > 0$ і $0 < \beta < 1$. Треба знайти найменше число випробувань n, для якого $P\{|\mu_n / n - p| < \alpha\} = \beta$.

Аналогічно попередньому, знайдемо таке t, щоб $2\Phi(t) = \beta$. Тоді

$$n = \frac{t^2 pq}{\alpha^2}.$$

Випадкові величини та функція розподілу

В цьому модулі вивчається одне з основних понять теорії ймовірності - поняття *випадкової величини*. Випадкову величину будемо розглядати як змінну, значення якої залежать від випадку. Отже, мова йтиме про функцію, значення якої визначаються результатами *стохастичного експерименту*, тобто залежать від *елементарних подій* ω з простору Ω.

Означення. Випадковою величиною називають функцію $\xi = \xi(\omega)$, визначену на *просторі елементарних подій* Ω.

Почнемо з прикладів.

Приклади.

1. Нехай Василь та Петро грають в "орлянку", тобто підкидають монету. Якщо випадає "герб", то Петро платить Василю одну гривню, якщо "решка", тоді Василь платить Петру гривню. Нехай випадкова величина -- виграш Петра. Простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Р\}$. Тоді $\xi(\omega) = -1$, якщо випала "решка" ($\omega = Р$), та $\xi(\omega) = 1$, якщо випав "герб" ($\omega = Г$).

2. Нехай підкидається гральний кубик. Назвемо *випадковою величиною* число очок, що випало при киданні. Тут *простір елементарних подій* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$, ($\omega_i$ - випадання грані в i очок), а $\xi(\omega_i) = i$, тобто кожному киданню кубика поставимо у відповідність число очок.

3. Розглянемо послідовні *випробування в схемі Бернуллі*. *Простір елементарних подій* - послідовність невдач та успіхів в n випробуваннях. Тут *випадкова величина* $\xi(\omega) = \mu_n$ - є кількістю успіхів в n випробуваннях; μ_n може набути будь-якого значення від 0 до n.

В наведених прикладах випадкові величини приймали цілі значення. Розглянемо інші приклади.

4. Стрілець робить один постріл по мішені. *Простір елементарних подій* Ω - множина всіх точок площині мішені. Для кожної точки $\omega \in \Omega$ введемо *випадкову величину* $\xi(\omega)$ як відстань від ω до певної точки мішені, наприклад, до центру. В цьому випадку ξ може набувати будь-якого невід'ємного значення, обмеженого розміром мішені.

Відповідно до множини значень (вона може бути скінченною, зліченною або незліченною) *випадкові величини* бувають різних типів - дискретні, абсолютно неперервні та змішаного типу.

Найповнішою характеристикою *випадкової величини* є її *функція розподілу*.

Означення. *Функцією розподілу випадкової величини* $\xi(\omega)$ назвемо функцію $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}, x \in (-\infty, +\infty)$

Приклад. Знайдемо *функцію розподілу* для виграша у грі в "орлянку" з рівними ймовірностями виграшу та програшу. Якщо $x \le -1$, то $F_\xi(x) = 0$; якщо $-1 < x \le 1$, то $F_\xi(x) = 1/2$; якщо $x > 1$; то $F_\xi(x) = 1$.

Властивості функції розподілу

1. Для будь-яких $x_1, x_2, x_1 < x_2$

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_1) - F_\xi(x_2)$$

Ця рівність є очевидним наслідком третьої *аксіоми ймовірності* та рівності $\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \le \xi < x_2\}$.

2. *Функція розподілу* є неспадною, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$. Ця властивість випливає з попередньої властивості і того, що ймовірність є невід'ємним числом.

3. *Функція розподілу* неперервна зліва: $F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$,

де $F_\xi(x-0) = lim_{u \uparrow x} F_\xi(u)$.

4. $lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$. Дійсно, $lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < -\infty\} = 0$, оскільки подія $\{\omega : \xi(\omega) < -\infty\}$ є неможливою.

5. $lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$. Дійсно, $lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < +\infty\} = 1$ оскільки подія $\{\omega : \xi(\omega) < +\infty\}$ є вірогідною.

Запитання для самоконтролю

1. Серед студентів факультету 60% хлопців. Знайти імовірність того, що серед 100 студенів буде від 55 до 65 хлопців?
2. Поясніть поняття випадкової величини.
3. На які типи діляться випадкові величини за множиною значень?
4. Сформулюйте означення та властивості функції розподілу.
5. Розв'яжіть наступні задачі:

1) Пейджингове повідомлення складається з десяти знаків. Імовірність спотворення одного знака дорівнює 0,6. Знайти ймовірності того, що: а)повідомлення буде передано без спотворень; б) буде рівно три сптворення; в) буде не більше трьох спотворень.

2) На факультеті навчається 1095 студентів. Імовірність народження кожного студента в даний день 1/365. Знайти найімовірніше число студентів, що народились 1 січня.

3) Комп'ютерна мережа складається з 1000 комп'ютерів. Вірус вражає комп'ютер з імовірністю 0,008. Знайти ймовірність того, що: а)буде вражено рівно 10 комп'ютерів; б) буде вражено від 3 до 20 комп'ютерів. Знайти ймовірність того, що це третя урна.

Лекція 6. Дискретні та абсолютно неперервні випадкові величини. Основні спціальні розподіли

Розглянуто дискретні та абсолютно неперервні випадкові величин, вводиться поняття щільності випадкової величини, розглянуто властивості функції розподілу та щільності. Наведено ряд прикладів найбільш типових розподілів.

Дискретні випадкові величини

Означення. *Випадкова величина* називається *дискретною*, якщо значення, яких вона набуває, утворюють скінченну або зліченну множину.

Основною характеристикою *дискретної випадкової величини* є її *розподіл*.

Означення. Нехай *дискретна випадкова величина* ξ набуває значень $x_k, k = 1,2,...$, причому ймовірності набуття цих значень $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1,2,...$. Тоді значення випадкової величини x_k та відповідні ймовірності $p_k, k = 1,2,...$ назвемо розподілом дискретної випадкової величини.

Розподіл дискретної випадкової величини зручно задавати у вигляді таблиці: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

Зрозуміло, що ймовірності p_k мають задовольняти умові:

$$\sum_{k \ge 1} p_k = 1 .$$

Функція розподілу дискретної випадкової величини визначається наступним чином: $F_\xi(x) \sum_{k \ge 1} p_k$.

З означення *функції розподілу* випливає, що її графік має вигляд "сходів" (див. рис. 2).

Розглянемо приклади найважливіших *дискретних розподілів*.

1. **Біноміальний розподіл**. Нехай $\xi(\omega) = \mu_n$ -кількість успіхів в n випробуваннях у *схемі Бернуллі* з імовірністю успіху p; ξ приймає значення $x_k, k = 0,1,...n$; $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. Набір імовірностей $p_n(k)$ може бути розподілом випадкової величини: $\sum_{x=0}^{n} p_n(k) = 1$.

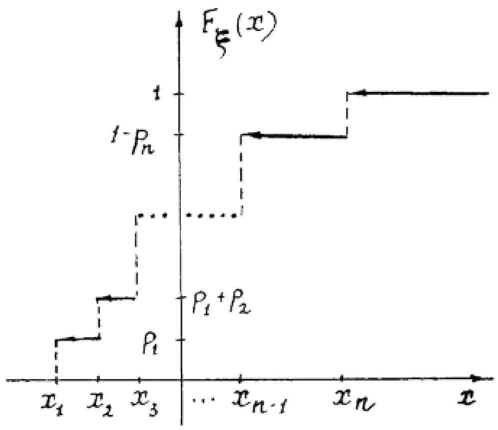

Рис. 2

2. **Геометричний розподіл**. Нехай $\xi(\omega)$ - кількість випробувань до появи першого успіху в *схемі Бернуллі*. У цьому випадку кількість випробувань не обмежена і *простір елементарних подій*

$$\Omega = \{Y, HY, HH, ...\}.$$

Оскільки випробування незалежні, то $P(H...n...HY) = q^n p$.

Отже, $p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = q^k p, k = 0,1,2...$

Розподіл такої *випадкової величини* називають *геометричним розподілом*. Оскільки з формули суми нескінченноспадної геометричної прогресії випливає, що $\sum_{k=0}^{\infty} q^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1$, то геометричний розподіл є дійсно ймовірнісним розподілом.

Геометричний розподіл зустрічається, наприклад, в такій ситуації. Нехай деякий підприємець послідовно звертається до різних банків для одержання кредиту. Кожен банк або дає кредит з імовірністю p, або не дає з імовірністю q. Тоді кількість звернень підприємця до банків до першого отримання кредиту є *випадкова величина* з *геометричним розподілом* .

Відсутність післядії для геометричного розподілу

Нехай *випадкова величина* ξ має *геометричний розподіл*. Тоді, для довільних $n, m \in N$

$$P\{\xi = n + m / \xi \geq n\} = \frac{P\{\xi = n + m, \xi \geq n\}}{P\{\xi \geq n\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi = n + m\}}{\sum_{k \geq n} P\{\xi = k\}} = \frac{q^{n+m}}{\sum_{k \geq n} q^k p} q^m p = P\{\xi = m\}.$$

Ця рівність означає, що *умовна ймовірність* того, що до появи першого успіху буде зроблено $n + m$ випробувань, при умові, що їх вже зроблено n, дорівнює ймовірності того, що до появи успіху буде зроблено m випробувань.

В розглянутій вище інтерпретації з отриманням кредиту отримана рівність означає, що *умовна ймовірність* того, що кількість звернень дорівнюватиме $n + m$, якщо відомо, що була вже $n - 1$ відмова, співпадає з безумовною ймовірністю того, що кількість звернень дорівнюватиме рівно m.

Зауважимо, що серед *дискретних розподілів* цю властивість має лише *геометричний розподіл.*

3. **Розподіл Пуассона**. *Випадкова величина* $\xi(\omega)$ має *розподіл Пуассона* з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень 0, 1, 2… з

імовірностями $$p(k,\lambda)=P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,...$$

Легко переконатись, що це ймовірнісний розподіл. Дійсно, для довільного $k\geq 0, p(k,\lambda)>0$ і

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

Абсолютно неперервні випадкові величини

Означення. Випадкова величина називається абсолютно неперервною, якщо існує така невід'ємна інтегровна функція $p_\xi(u)$, $u\in(-\infty,+\infty)$ що функцію розподілу можна представити у вигляді

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du, x\in(-\infty,+\infty).$$

Функцію $p_\xi(u)$ називають щільністю розподілу.

Властивості щільності розподілу

1. За означенням $p_\xi(u)\geq 0, u\in(-\infty,+\infty)$.

2. Оскільки $F_\xi(+\infty)=1$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)du=1$.

3. Якщо x - точка неперервності щільності, то $p_\xi(x)=F'_\xi(x)$.

4. З означення функції розподілу випливає, що $P\{a\leq\xi<b\}=\int_a^b p_\xi(u)du$.

5. Імовірність того, що абсолютно неперервна величина приймає якесь одне фіксоване значення, дорівнює 0. Дійсно,

$$P\{\xi=C\}=\lim_{c\to+0} P\{C\leq\xi<C+\in\}=\lim_{c\to+0}\int_C^{C+\in} p_\xi(u)du=0.$$

Розглянемо приклади розподілів найбільш важливих абсолютно неперервних випадкових величин.

1. **Рівномірний розподіл**. Рівномірним розподілом на відрізку $[a,b]$ називають розподіл зі щільністю $p_\xi(u)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, u\in[a,b]\\ 0, \quad u=\notin[a,b]\end{cases}$.

Оскільки $p_\xi(u)\geq 0$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)du=\int_a^b\frac{1}{b-a}du=1$, то $p_{\xi}(u)$ - дійсно є щільністю.

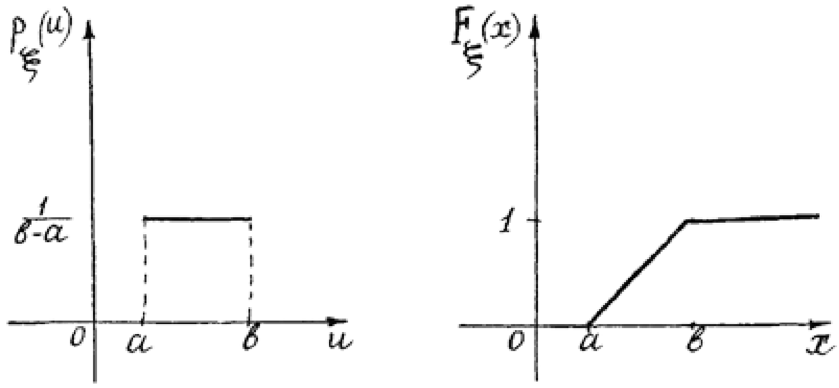

Рис. 3

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини дорівнює: $F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b]. \\ 1, & x > b \end{cases}$

Графіки щільності та функції розподілу зображені на рис.3 Прикладом рівномірно розподіленої випадкової величини може бути випадкова похибка, яка виникає при округленні результатів різноманітних розрахунків.

2. **Показниковий розподіл**. *Показниковим розподілом* з параметром $\lambda > 0$ називають розподіл зі щільністю

$$p_{\xi}(u)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}, u \ge 0 \\ 0, \quad u < 0 \end{cases}.$$

Оскільки

$$p_{\xi}(u) \ge 0 \text{ і } \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(u)du = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = 1 ,$$

то $p_{\xi}(u)$ - дійсно є щільністю.

Функція розподілу показникової випадкової величини дорівнює:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1-e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}.$$

Графіки щільності та функції розподілу зображені на рис.4

Прикладом випадкової величини, яка має показниковий розподіл можна вважати час існування невеликих приватних підприємств.

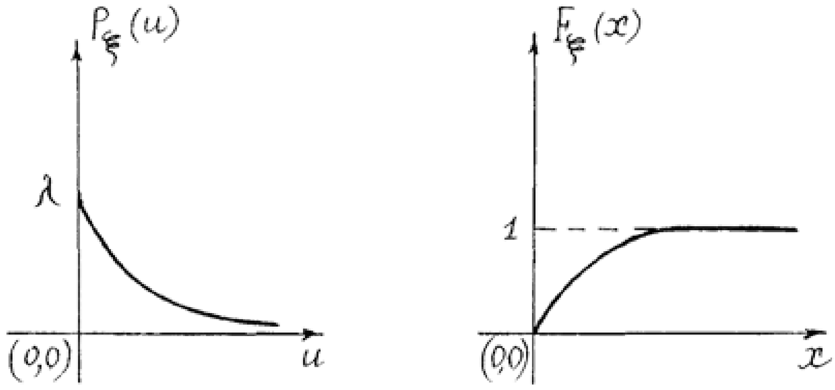

Рис. 4

3. **Нормальний (гауссів) розподіл.** Нормальним розподілом з параметрами a та σ^2 (позначається $\xi \sim N\left(a,\sigma^2\right)$) називають розподіл зі щільністю:

$$p_\xi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}},u\in(-\infty,+\infty)$$

Детальніший розгляд нормального розподілу можна знайти у лекції 13.

Зауваження. Окрім дискретних та абсолютно неперервних випадкових величин зустрічаються випадкові величини, які приймають одночасно дискретні значення та значення з деякої неперервної множини. Пояснимо це поняття на прикладі.

Приклад. Нехай ξ - це час роботи в роках до заміни касового апарату, щільність якої задається формулою

$$p_\xi(u)=\begin{cases}\frac{2}{u^3},u\geq 1\\ 0,\quad u<1\end{cases}.$$

Відомо, що через 4 роки касовий апарат замінюють, навіть якщо він не зламався. Очевидно, що для всіх $u<4$ щільність ξ дорівнює $p_\xi(u)$ і задає розподіл абсолютно неперервної компоненти. Після того, як апарат відпрацював 4 роки, ξ приймає значення 4 з певною ймовірністю і стає по суті дискретною величиною. Знайдемо ймовірність, з якою випадкова величина приймає значення 4.

$$P\{\xi = 4\} = \int_{4}^{+\infty} \frac{2}{u^3} du = \frac{1}{16}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть поняття розподілу дискретної випадкової величини.
2. Поясніть поняття абсолютно неперервної випадкової величини.
3. Дайте означення щільності розподілу випадкової величини. Наведіть її властивості.
4. Розв'яжіть наступні задачі:
1) Розподіл кількості ξ цегли на складі є наступним: $P\{\xi = 0\} = 0.1$; $P\{\xi = 5000\} = 0.1$; $P\{\xi = 1000\} = 0.2$; $P\{\xi = 20000\} = 0.4$; $P\{\xi = 30000\} = 0.2$.

Знайти функцію розподілу, побудувати її графік та знайти ймовірність $P(6000 \le \xi \le 25000)$.
2. Випадкова величина ξ має таку щільність розподілу:

$$p_\xi(u) = \begin{cases} 0, u < 0; \\ Au, u \in [0,3]; \\ 0, u > 3 \end{cases}$$

Знайти сталу *A*, функцію розподілу $F_\xi(x)$, побудувати її графік та знайти ймовірність $P(2 \le \xi \le 4)$.
3. Випадкова величина ξ має таку щільність розподілу:

$$p_\xi(u) = \begin{cases} A(1/2u + 1), 0 < u < 2; \\ 0, u \notin (0,2) \end{cases}$$

Знайти сталу А, функцію розподілу $F_\xi(x)$, побудувати її графік та знайти ймовірність $P(-1 \le \xi \le 1)$.

Лекція 7. Випадкові вектори, їх розподіли та зв'язки між випадковими величинами

В цій лекції запроваджено поняття коваріації та коефіцієнта кореляції, як основних числові характеристики, що характеризують залежність між випадковими величинами. Наводяться їх найважливіші властивості. Запроваджено основні числові характеристики випадкових векторів

Функція розподілу випадкового вектора

Нехай ξ та η - дві *випадкові величини*, задані на одному *просторі елементарних подій*. Тоді кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ можна поставити у відповідність двовимірний *випадковий вектор* $(\xi(\omega),\eta(\omega))$. Для довільних x та y розглянемо *випадкову подію*

$$\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}.$$

Означення. *Функцією розподілу випадкового вектора*, або *сумісною функцією розподілу* двох випадкових величин (ξ,η) (позначається $F_{\xi\eta}(x,y)$) називається така ймовірність

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}$$

для $x \in (-\infty,+\infty), y \in (-\infty,+\infty)$.

Функції розподілу випадкового вектора притаманні наступні властивості:

1) Функція $F_{\xi\eta}(x,y)$ - неспадна функція кожного зі своїх аргументів.

2) Функція $F_{\xi\eta}(x,y)$ - неперервна зліва по кожному зі своїх аргументів.

3) $lim_{x \to -\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = lim_{y \to -\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = 0$. Властивості 1-3 цілком аналогічні властивостям 2-4 одновимірної функції розподілу.

4) $lim_{x \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_{\eta}(y);\ lim_{y \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_{\xi}(x)$. Дійсно,

$$lim_{x \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = lim_{y \to +\infty} P\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\} =$$
$$= P\{\omega : \xi(\omega) < +\infty, \eta(\omega) < y\}$$

5) $lim_{x \to +\infty y \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = 1$. Ця властивість також цілком аналогічна властивості 5 функції розподілу випадкової величини.

6) Імовірність попадання випадкової точки площини з координатами (ξ,η) в прямокутник зі сторонами, що паралельні осям координат, може бути обчислена за допомогою функції розподілу за формулою

$$P\{\omega : a \le \xi(\omega) < b, c \le \eta(\omega) < d\} = F_{\xi,\eta}(a,c) + F_{\xi,\eta}(b,d) - F_{\xi,\eta}(a,d) - F_{\xi,\eta}(b,c)$$

Ця властивість є очевидним узагальненням властивості 1 *функції розподілу випадкової величини* .

Дискретні випадкові вектори

Нехай ξ та η - дві дискретні випадкові величини, які мають розподіли $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots \end{pmatrix}$.

Тоді можна розглянути події $\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}, i \ge 1, j \ge 1$, імовірність яких будемо позначати так:

$$p_{ij} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i\}, i \ge 1, j \ge 1.$$

Означення. Набір значень випадкових величин x_i, y_i разом із імовірностями $p_{ij}, i \ge 1, j \ge 1$ називають *розподілом дискретного* *випадкового вектора*, або сумісним розподілом двох дискретних випадкових величин.

Розподілу випадкового вектора, очевидно, притаманні наступні властивості:

1) $p_{ij} \geq 0, i \geq 1, j \geq 1$;

2) $\sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} p_{ij} = 1$;

3) Для кожного фіксованого i маємо:

$$\sum_{i \geq 1} p_{ij} = \sum_{j \geq 1} P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = p_i, i \geq 1$$

Аналогічно для фіксованого j: $\sum_{i \geq 1} p_{ij} = q_j, j \geq 1$.

Приклад. Нехай у деякому невеликому місті живе 1000 дорослих мешканців та існує дві банківські установи, з яких першою користується 300 дорослих мешканців, другою - 400 і 100 користується обома. Нехай деяка родина складається з чоловіка та жінки. Нехай ξ - кількість рахунків, відкритих чоловіком, η - дружиною. Тоді ми маємо двовимірний випадковий вектор (ξ, η), кожна компонента якого може приймати значення 0,1,2. Знайдемо розподіл цього вектора, вважаючи відкриття рахунків чоловіком та дружиною *незалежними подіями*. Оскільки 400 осіб не користуються банками, то $P\{\xi = 0, \eta = 0\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{400}{1000} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

Так як 500 осіб користуються одним банком, то

$$P\{\xi = 0, \eta = 1\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{500}{1000} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Так як 100 осіб користуються двома банками, то

$$P\{\xi = 0, \eta = 2\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{100}{1000} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{25}.$$

Аналогічно обчислюються інші ймовірності. Занесемо ці результати у таблицю. Перший рядок та стовпець - це значення випадкових величин, решта, крім останнього стовпця та останнього рядка - p_{ij}, останній стовпець - q_j дорівнює сумі по рядках, останній рядок - p_i дорівнює сумі по стовпцях

$\eta \setminus \xi$	0	1	1	q_i
0	0.16	0.2	0.04	0.4
1	0.2	0.25	0.05	0.5
2	0.04	0.05	0.01	0.1
p_j	0.4	0.5	0.1	

Абсолютно неперервні випадкові вектори

Нехай ξ та η - дві абсолютно неперервні випадкові величини, які мають щільності $p_{\xi}(x)$ та $p_{\eta}(x)$ відповідно.

Означення. Назвемо щільністю випадкового вектора, або сумісною щільністю двох випадкових величин інтегровну невід'ємну функцію $p_{\xi\eta}(x,y), x \in (-\infty,+\infty), y \in (-\infty,+\infty)$ таку, що

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \iint_{(u,v):u<x,v\leq y} p_{\xi\eta}(u,v)dudv .$$

З означення зрозуміло, що щільність у точках її неперервності можна обчислити так: $$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

З означень функції розподілу випадкового вектора та щільності випадкового вектора випливають наступні властивості щільності:

1) $p_{\xi\eta}(x,y) \geq 0, x \in (-\infty,+\infty), y \in (-\infty,+\infty)$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u,v)dudv = 1$;

3) $P\{\omega : \xi(\omega) \in [a,b), \eta(\omega) \in [c,d)\} = \int_a^b\int_c^d p_{\xi\eta}(u,v)dudv$;

4) Для довільної області $D \in R^2 : P\{\omega : (\xi(\omega),\eta(\omega)) \in D\} = \iint_D p_{\xi\eta}(u,v)dudv$;

5) Щільності розподілу випадкових величин ξ та η дорівнюють:

$$p_{\xi}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u,v)dv, u \in (-\infty,+\infty);$$

$$p_{\eta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u,v)du, v \in (-\infty,+\infty).$$

Приклад. Для виплат банк може використовувати власні ресурси. Якщо не вистачає власних, то використовуються кредитні ресурси. Власні та кредитні ресурси - випадкові величини ξ та η відповідно. *Сумісна щільність* ξ та η задається наступним чином:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} C(x+y), x,y\in[0,T] \\ 0, \quad\quad x,y\notin[0,T] \end{cases}.$$

Знайти сталу C та ймовірність того, що банк може виплатити суму T.

Оскільки $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi\eta}(u,v)dudv=\int_0^T\int_0^T C(u+v)dudv=$

$$=C\int_0^T\left(\frac{T^2}{2}+uT\right)du=C\left(\frac{T^3}{2}+\frac{T^3}{2}\right)=CT^3,$$

то $C=\frac{1}{T^3}$. Далі, шукана ймовірність є

$$P\{\xi+\eta<T\}=\iint_{u+v<T,u,v\in[0,T]}C(u+v)=dudv=\frac{1}{T^3}\int_0^T\int_0^{T-u}(u+v)dudv=$$

$$=\frac{1}{T^3}\int_0^T\left(Tu-u^2\frac{(T-u)^2}{2}\right)du=\frac{1}{3}.$$

Приклад. *Випадковий вектор* (ξ,η) називається *рівномірно розподіленим в області* $D\subset R^2$, якщо щільність розподілу для нього дорівнює
$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} C, \ (x,y)\in D \\ 0, \ (x,y)\notin D \end{cases}.$$

Знайдемо величину сталої С. Позначимо через $S(D)$ площу області D і, згідно з властивістю щільності 2, дістанемо

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int\int_D Cdxdy=CS(D).$$

Звідси
$$C=\frac{1}{S(D)}.$$

Далі, якщо $G\subset D$, то за властивістю (4) щільності

$$P\{(\xi,\eta)\in G\}=\iint_G Cdxdy=CS(G)=\frac{S(G)}{S(D)}.$$

Тобто ймовірність влучення точки в область $G\subset D$ дорівнює відношенню площ областей G та D.

Розподіли вищої розмірності

Розглянуті вище сумісні розподіли пар дискретних або неперервних випадкових величин цілком природньо узагальнюються у випадках багатьох випадкових величин.

Означення. *Розподілом дискретного - вимірного вектора* $\bar{\xi} = (\xi_1,...,\xi_n)$ називається набір імовірностей $P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_{i_1},...,\xi_n(\omega) = x_{i_n}\}$,
та значень $x_{i_1},...,x_{i_n}$ для $i_1 \ge 1,...,i_n \ge 1$.

Аналогічно вводяться – *n* вимірна функція розподілу:

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = P\{\xi_1 < x_1,...,\xi_n < x_n\}$$

та, у випадку абсолютно неперервних випадкових величин, *n* - вимірна щільність $\int_{\xi_1,...,\xi_n}(u_1,...,u_n)$:

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,...,\xi_n}(u_1,...,u_n) du_1,...,du_n .$$

Для вищої розмірності функція розподілу та щільність мають властивості аналогічні властивостям розподілу пари випадкових величин. Тому приводити їх окремо недоцільно.

Незалежні випадкові величини

Означення. Дискретні випадкові величини $\xi_1,...,\xi_n$ називаються незалежними випадковими величнами, якщо для будь-яких $x_1,...,x_n \in R$

$$P\{\xi_1 = x_1,...,\xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot ... \cdot P\{\xi_n = x_n\}.$$

Означення. Абсолютно неперервні випадкові величини $\xi_1,...,\xi_n$ називаються незалежними випадковими величинами, якщо для будь-яких $u_1,...,u_n \in R$

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(u_1,...,u_n) = f_{\xi_1}(u_1) \cdot ... \cdot f_{\xi_n}(u_n).$$

Зрозуміло, що і сумісна функція розподілу незалежних випадкових величин дорівнює добутку функцій розподілу компонент

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(u_1,...,u_n) = f_{\xi_1}(u_1) \cdot ... \cdot f_{\xi_n}(u_n).$$

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть поняття випадкового вектора.

2. На які типи можна поділити випадкові вектори за множиною значень?

3. Сформулюйте означення функції розподілу випадкового вектора.

4. Поясніть поняття розподілу дискретного випадкового вектора.
5. Поясніть поняття абсолютно неперервної випадкової вектора.
6. Дайте означення незалежних випадкових величин. Деталізуйте його для дискретних та абсолютно неперервних величин.
7. Розв'яжіть наступні задачі:
1. Високооктановий бензин роділяється на чотири групи за відхиленням октанового числа від стандарту на 0,1; 0,2; 0,3; 0,5 відсотки (випадкова величина ξ) та за відхиленням густини від стандарту при температурі 20^0С теж на чотири групи зі значеннями 0,5; 1,0; 2,0; 2,5 (випадкова величина η). Сумісний розподіл величин ξ та η задається таблицею:

$\xi \backslash \eta$	0,5	1,0	2,0	2,5
0,1	0,01	0,03	0,04	0,02
0,2	0,02	0,24	0,1	0,04
0,3	0,04	0,15	0,08	0,03
0,5	0,04	0,06	0,08	0,02

а) Знайти закони розподілу кожної компоненти; б) Знайти закон розподілу компоненти η, при умові, що $\xi = 0.1$; в) Встановити, чи залежні величини ξ та η.
2. Торгівельний маклер зв'язаний з шістьма фірмами, з яких в даний момент часу три можуть бути постачальниками, а три споживачами певного продукту. Ні одна з фірм не має якоїсь переваги над іншими. Маклер телефонує послідовно у фірми і шукає першого можливого постачальника, а потім шукає першого можливого споживача товару.

Нехай ξ - кількість дзвінків до у пошуках постачальника, η- у пошуках споживача. Знайти розподіл випадкового вектора (ξ,η).
3. Менеджер по прийому на роботу провів співбесіду з десятьма кандидатами на посаду менеджера по рекламі, в результаті якої четверо отримали вище п'ятидесяти балів; троє від тридцяти до п'ятидесяти; решта меньше тридцяти. Директор фірми навмання вибрав три результати тестування.

Нехай ξ - кількість результатів більших ніж п'ятдесят балів, η - кількість результатів від тридцяти до п'ятидесяти. Знайти: а) закон розподілу випадкового вектору (ξ,η); б) закони розподілу кожної компоненти; в) імовірність події $\{\xi \geq 2,\eta \leq 2\}$;

4. Випадковий вектор (ξ,η) має рівномірний розподіл на прямокутнику

$$D = \{(x,y): -1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}.$$

Знайти: а) вираз для щільності розподілу вектора (ξ,η); б) вираз для функції розподілу вектора (ξ,η); в) імовірність події $\{(\xi,\eta) \in G\}$, де

$$G = \{(x,y): 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5, 1{,}5 \leq y \leq 2{,}5\}.$$

Лекція 8. Математичне сподівання випадкової велисини

В цій лекції запроваджуються основні числові характеристики випадкових величин, такі як математичне сподівання та дисперсія. Наводяться їх найважливіші властивості, розібрано багато прикладів обчислення математичного сподівання та дисперсії. Розглянуто нерівність Чебишова, її застосування та закони великих чисел.

Математичне сподівання

Почнемо з прикладу, який пояснює суть математичного сподівання.

Приклад. Для розиграшу лотереї було випущено N білетів, з яких m_1 білетів з виграшем x_1 грн., m_2 білетів з виграшем x_2 грн., ..., m_n білетів з виграшем x_n грн. Яка ціна білета, якщо сума грошей, виручених від продажу білетів, дорівнює сумі виграшів ?

Якщо позначити шукану ціну білета через a, то за умовою

$$Na = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n,$$

звідси $$a = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{N},$$

тобто ціна одного білета дорівнює "середньому виграшу". Останню формулу можна записати інакше. Покладемо $p_i = \frac{m_i}{N}$ очевидно, що p_i - це ймовірність того, що на вибранний навмання білет припаде виграш в x_i грн. Тоді цю формулу можна записати таким чином: $a = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$.

Для цього виразу введено спеціальне позначення $M\xi$ і назву - <u>*математичне сподівання.*</u>

Означення. <u>*Математичним сподіванням*</u> дискретної випадкової величини з розподілом $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

називається число: $$M\xi = \sum_{k>1} |x_k| p_k < \infty,$$

якщо $\sum_{k>1} |x_k| p_k < \infty$.

Означення. <u>*Математичним сподіванням*</u> абсолютно неперервної величини ξ називають число: $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx$,

де $p_\xi(x)$ - щільність випадкової величини ξ, якщо інтеграл в правій частині абсолютно збіжний.

<u>Математичне сподівання</u> називають ще <u>*"середнім значенням"*</u> випадкової величини.

Розглянемо приклади обчислення <u>*математичного сподівання*</u> .

Приклади 1. Гра в "орлянку". Розглянемо гру в "орлянку" за умови, що $P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_1 = -1\} = 1/2$. Тоді математичне сподівання виграшу дорівнює $M\xi = 1 \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 = 0$.

2. **Біноміальний розподіл.** Нехай ξ має біноміальний розподіл з параметрами n і p: $$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Тоді математичне сподівання дорівнює:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

$$np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k-1} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

Отже, $M\xi = np$.

3**. Геометричний розподіл**. Нехай ξ має геометричний розподіл з параметром p: $P\{\xi = k\} = q^k p, k = 0,1,2...$

Тоді математичне сподівання дорівнює:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = qp\sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} = qp\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)' = qp\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{qp}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}.$$

Отже, $M\xi = q/p$.

4. **Розподіл Пуассона**. Нехай ξ має розподіл Пуассона з параметром λ: $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2...$

Тоді математичне сподівання дорівнює:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Отже, $M\xi = \lambda$. Розглянемо абсолютно неперервні розподіли.

5. Рівномірний розподіл Нехай ξ - випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$. Тоді

$$M\xi = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Отже, $M\xi = \frac{b+a}{2}$.

6. **Показниковий розподіл**. Нехай ξ - випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Тоді

$$M\xi = \int_0^{\infty} u\lambda e^{-\lambda u} du = -ue^{-\lambda u}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du = -\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, $M\xi = \frac{1}{\lambda}$.

7. **Нормальний розподіл.** Нехай ξ - випадкова величина, яка має нормальний розподіл з параметрами a та σ^2. Тоді $M\xi = a$.

Детальніше див. лекцію 13.

Зауваження. Розглянемо обчислення математичного сподівання випадкової величини, розподіл якої являє собою суміш дискретного та неперервного розподілів. Звернемось до прикладу 4 з лекцію 6. Математичне сподівання часу роботи касового апарату може бути обчислено наступним чином:

$$M\xi = \int_1^4 u \frac{2}{u^2} du + 4 \cdot P\{\xi = 4\} = 2\int_1^4 \frac{1}{u} du + \frac{4}{16} = 1\frac{3}{4}.$$

Властивості математичного сподівання

Нехай для випадкових величин ξ та η існують *математичні сподівання* $M\xi$ та $M\eta$.

1. Якщо $P\{\xi = C\} = 1$, то $M\xi = C$. Дійсно, $M\xi = C \cdot P\{\xi = C\} = C \cdot 1 = C$.
2. Якщо $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$. Дійсно, якщо всі значення дискретної випадкової величини $x_k, k \geq 1$ - невід'ємні, то $M\xi = \sum_{k \geq 0} x_k p_k \geq 0$.
3. $M(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha M\xi + \beta M\eta$, де α та β - деякі сталі.
4. Якщо $\xi \geq \eta$, то $M\xi \geq M\eta$. Дійсно, оскільки $\xi - \eta \geq 0$, то, за властивістю 2, $M(\xi - \eta) \geq 0$, а, за властивістю 3, $M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$.
5. $|M\xi| \leq M|\xi|$. Дійсно, за властивістю модуля:

$$|M\xi| = \left|\sum_{k \geq 0} x_k p_k\right| \leq \sum_{k \geq 0} |x_k p_k| \leq \sum_{k \geq 0} |x_k| p_k = M|\xi|.$$

Приклад. Обчислимо за допомогою третьої властивості математичне сподівання у біноміальному розподілі. Нехай μ_n - число успіхів у схемі Бернуллі. Нехай η_k - випадкова величина, яка набуває значення 1, якщо у k- му випробуванні випав успіх з імовірністю p, та - 0, якщо випала невдача з імовірністю q. Тоді

$$\mu_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n.$$

Очевидно, що $M\eta_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. Отже, $M\mu_n = M\eta_1 + M\eta_n = np$.

Математичне сподівання функції від випадкової величини

В багатьох задачах виникає потреба розглядати не саму випадкову величину ξ, а іншу величину η, значення якої залежать від значень величини ξ, тобто величина η є функцією від $\xi(\eta = f(\xi))$.

Така задача виникає, наприклад, в такій ситуації. Нехай ξ - річний прибуток громадянина, а $f(\xi)$ розмір податків, які він сплачує.

Якщо ξ є дискретною випадковою величиною з розподілом

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

то випадкова величина $\eta = f(\xi)$ має розподіл

$$\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Математичне сподівання η дорівнює в цьому випадку $M\eta = \sum\limits_{k \ge 1} f(x_k)p_k$ і $M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)dx,$ у випадку абсолютно неперервної величини.

Приклад. Нехай ξ рівномірно розподілена на відрізку [0,1] випадкова величина, нехай $\eta = \xi^2$. Тоді $M\eta = \int\limits_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$.

Нехай (ξ,η) дискретний випадковий вектор з розподілом $p_{ij} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i\}, i \ge 1, j \ge 1,$ а $g(\cdot;\cdot)$ деяка функція двох змінних. Тоді можна розглянути випадкову величину $\theta = g(\xi,\eta)$, а її математичне сподівання обчислити так: $M\theta = \sum\limits_{i \ge 1}\sum\limits_{j \ge 1} g(x_i, x_j)p_{ij}$.

Для абсолютно непервного вектора відповідна формула має вигляд:

$$M\theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)p_{\xi\eta}(u,v)dudv,$$

де $p_{\xi\eta}(u,v)$ - відповідна сумісна щільність.

Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин

Нехай ξ,η далі - незалежні випадкові величини. Тоді математичне сподівання їх добутку дорівнює: $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Дійсно, розглянемо випадок абсолютно неперервних величин. В цьому випадку $p_{\xi\eta}(u,v) = p_{\xi}(u) \cdot p_{\eta}(v)$. Отже,

$$M\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot v p_{\xi\eta}(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot v p_{\xi\eta}(u) \cdot p_{\eta}(v)dudv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u p_{\xi}(u)du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u p_{\eta}(v)dv = M\xi M\eta .$$

Аналогічно ця рівність доводиться для дискретних випадкових величин.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке математичне сподівання випадкової величини? Як воно обчислюється у випадках дискретно та абсолютно неперервно розподілених випадкових величин?
2. Назвіть основні властивості математичного сподівання.
3. Знайдіть математичне сподівання випадкових величин, заданих у задачах 4.1, 4.2, 4.3 запитань для самоконтролю до лекції 8.

Лекція 9. Дисперсія та моменти вищих порядків випадкової величини. Нерівність Чебишова та закони великих чисел

Запроваджуються дисперсія та моменти вищих порядків випадкових величин наводяться основні властивості та приклади обчислення дисперсії. Розглянуто нерівність Чебишева, її застосування та закони великих чисел.

Дисперсія

Означення. _Дисперсія_ $D\xi$ характеризує відхилення випадкової величини ξ від її середнього значення і дорівнює $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Якщо розкрити квадрат під знаком математичного сподівання, то отримаємо $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) =$

$$M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

З іншого боку, безпосередньо за означенням, отримуємо для дискретної випадкової величини $D\xi = \sum_{k\geq 1}(x_k - M\xi)^2 p_k$

І
$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 p_\xi(x)dx,$$

для абсолютно непервної величини. Розглянемо приклади обчислення <u>*дисперсії*</u>.

1. **Біноміальний розподіл.** Нехай ξ має біноміальний розподіл з параметрами n та p. Тоді

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np - (np)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2}(1-p)^{n-k} + np - (np)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k p^k (1-p)^{n-k-2} + np - (np)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - (np)^2 = npq.$$

Отже, $D\xi = npq$.

2. **Геометричний розподіл.** Нехай ξ має геометричний розподіл з параметром p. Тоді $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k\geq 0} k^2 q^2 p - (q/p)^2 =$

$$= q^2 p \sum_{k\geq 0} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k\geq 0} kq^k p + (q/p)^2 =$$

$$= q^2 p \left(\frac{1}{1-q}\right)'' + q/p - (q/p)^2 = 2\frac{q^2 p}{(1-q)^3} + q/p - (q/p)^2 =$$

$$= q^2 p^2 + q/p = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Отже, $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

3. **Розподіл Пуассона**. Нехай ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$. Тоді $$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k \ge 0} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k \ge 2} \frac{\lambda^{k-2}}{k-2!} + \sum_{k \ge 0} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k \ge 0} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 .$$

Отже, $D\xi = \lambda.$

4. **Рівномірний розподіл**. Нехай ξ має рівномірний на [a,b] розподіл.

Тоді $$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b \frac{u^2}{b-a} du - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Отже, $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$

5. **Показниковий розподіл**. Нехай ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Тоді $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_0^\infty u^2 \lambda e^{-\lambda u} du - 1/\lambda^2 =$

$$= -u^2 e^{-\lambda u}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty u e^{-\lambda u} du - 1/\lambda^2 = 2/\lambda \int_0^\infty \lambda u e^{-\lambda u} du - 1/\lambda^2 =$$

$$= 2/\lambda M\xi - 1/\lambda^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2.$$

Отже, $D\xi = 1/\lambda^2$.

6. **Нормальний розподіл**. Нехай ξ має нормальний розподіл з параметрами a, σ^2. Тоді $D\xi = \sigma^2$.

Детальніше про знаходження дисперсії нормального розподілу див. лекцію.

Властивості дисперсії

1. Очевидно, що $D\xi \ge 0$.
2. Якщо $\xi = C$ (C - деяка стала), то $D\xi = 0$. Дійсно,

$$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = 0 .$$

3. $D(C \cdot \xi) = C^2 D\xi$. Дійсно,

$$D(C \cdot \xi) = M[C \cdot \xi - M(C \cdot \xi)]^2 = M[C \cdot (\xi - M\xi)]^2 = C^2 D\xi .$$

4. Якщо ξ та η - незалежні <u>*випадкові величини*</u>, то $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

Дійсно, скористаємось правилом обчислення математичних сподівань <u>*незалежних випадкових величин*</u>

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta-M(\xi+\eta))^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=$$

$$=M(\xi-M\xi)^2+2\cdot M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]+M(\eta-M\eta)^2=D\xi+D\eta,$$

так як $$M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)=0.$$

Ця властивість очевидним чином узагальнюється на випадок багатьох випадкових величин:

Нехай $\xi_1,\dots,\xi_n$ - незалежні випадкові величини. Тоді

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k).$$

Приклад. Обчислимо за допомогою четвертої властивості <u>*дисперсію*</u> випадкової величини, яка має біноміальний розподіл. Аналогічно міркуванням прикладу з обчисленням математичного сподівання з розділу 8.2 представимо кількість успіхів в схемі Бернуллі μ_n у вигляді суми величин $\eta_k, k\ge 1$, які набувають значеннь 1, якщо випав "успіх" з імовірністю *p*, та - 0, якщо випала "невдача" з імовірністю q. Тоді $$\mu_n=\eta_1+..\eta_n.$$

Було показано, що $M\eta_k=p$. Тому

$$D\eta_k=M\eta_k^2-(M\eta_k)^2=p-p^2=pq.$$

Отже, $$D\mu_n=D\eta_1+\dots+D\eta_n=npq.$$

Означення. Величину $\sqrt{D\xi}$ називають середнім квадратичним відхиленням.

Означення. Випадкова величина називається <u>*центрованою випадковою величиною*</u>, якщо її математичне сподівання дорівнює 0.

Отже, випадкова величина $\xi-M\xi$ є центрованою.

Означення. Випадкова величина називається <u>*нормованою випадковою величиною*</u>, якщо її дисперсіядорівнює одиниці.

Для того щоб пронормувати випадкову величину треба її поділити на середнє квадратичне відхилення. Отже, випадкова величина $\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}$ є нормованою. В свою чергу випадкова величина $\xi_0 = \frac{\xi - a}{\sqrt{D\xi}}$ є центрованою та нормованою.

Нерівність Чебишова

Нерівність Чебишова встановлює залежність між дисперсією випадкової величини та відхиленням випадкової величини від її середнього значення.

Нехай існує $D\xi$. Тоді для будь-якого $\epsilon > 0$

$$P\{ |\xi - M\xi| > \epsilon \} \le \frac{D\xi}{\epsilon^2}.$$

Доведемо нерівність для випадку абсолютно неперервної величини. $M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - M\xi)^2 p_\xi(u)du \ge \int_{-\infty}^{-\epsilon + M\xi} (u - M\xi)^2 p_\xi(u)du +$

$$+ \int_{\epsilon + M\xi}^{+\infty} (u - M\xi)^2 p_\xi(u)du = \int_{u:(u - M\xi)^2 > \epsilon^2} (u - M\xi)^2 p_\xi(u)du \ge$$

$$\ge \epsilon^2 \int_{u:(u - M\xi)^2 > \epsilon^2} p_\xi(u)du = \epsilon^2 P\{(\xi - M\xi)^2 > \epsilon^2\} = \epsilon^2 P\{|\xi - M\xi| > \epsilon\}$$

Звідси і отримуємо *нерівність Чебишова* .

Зауваження. *Нерівність Чебишова* виконується і для дискретних випадкових величин.

Приклад. Нехай у великій партії товару 40 % підробок. Яку кількість одиниць товару треба взяти, щоб з імовірністю, не меншою 0,95, частина підробок становила від 38 % до 42 %?

Якщо відібрано *n* одиниць товару,то ми можемо вважати, що маємо *n* повторних *випробувань Бернуллі* з $p=0,4$. Нехай ξ_n - кількість одиниць бракованої продукції. Тоді $M\xi_n = np = 0.4n$; $D\xi_n = npq = 0.24n$. Отже, нам треба знайти таке *n*, щоб виконувалась нерівність:

$$P\left\{ \left| \frac{\xi_n}{n} - 0.4 \right| > 0.02 \right\} \le 0.05.$$

Перепишемо цю нерівність в такому вигляді:

$$P\{|\xi_n - M\xi_n| > 0.02n\} \le 0.05.$$

Далі, за нерівністю Чебишова,

$$P\{|\xi_n - M\xi_n| > 0.02n\} \le \frac{D\xi_n}{(0.02n)^2} = \frac{0.24n}{0.0004n^2} = \frac{600}{n}.$$

Отже, n слід вибрати так, щоб $\frac{600}{n} \le 0.05$.

Отримуємо $n \ge 12000$. Тому обсяг партії товару повинен складати 12000 одиниць.

Моменти випадкових величин

Означення. *Моментом* к-го порядку $(k \in N)$ випадкової величини ξ називається математичне сподівання к-го ступеня випадкової величини: $v_k = M\xi^k, k \in N$.

Наприклад, математичне сподівання - це перший *момент*: $v_1 = M\xi$.

При достатньо загальних припущеннях відносно випадкової величини її функція розподілу однозначно визначається за допомогою всіх її *моментів*. Наприклад, для нормальної випадкової величини математичне сподівання та дисперсія дорівнюють:

$$a = v_1,\ \sigma^2 = v_2 - v_1^2.$$

Отже, оскільки щільність та функція розподілу однозначно визначаються через a та σ^2, то вони однозначно визначаються через два перших моменти.

Далі до кінця розділу будемо вважати, що інтеграли та ряди збігаються абсолютно.

Для дискретної випадкової величини k-й момент дорівнює:

$$v_k = \sum_{i \ge 1} x_i^k p_i.$$

Для *абсолютно неперервної випадкової величини* k-й момент дорівнює:

$$v_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x)dx.$$

Означення. *Центральним моментом* k-го порядку $(k \in N)$ випадкової величини ξ називається математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини від її математичного сподівання: $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k, k \in N$.

Наприклад, дисперсія - це другий *центральний момент*:

$$\mu_1 = D\xi.$$

Зауважимо, що будь-який центральний момент μ_n виражається через *моменти* $m_k, k \le n$. Наприклад,

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = M(\xi - v_1)^3 = M(\xi^3 - 3v_1\xi^2 + 3v_1^2\xi - v_1^3) =$$
$$= v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3.$$

Для дискретної випадкової величини центральний к-й момент дорівнює: $\mu_k = \sum\limits_{i \ge 1} (x_i - M\xi)^k p_i$.

Для абсолютно неперервної випадкової величини центральний k-й момент дорівнює: $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k p_\xi(x)dx$.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення дисперсії випадкової величини. Як дисперсія обчислюється у випадках дискретних та абсолютно неперервних випадкових величин?
2. Сформулюйте основні властивості дисперсії.
3. Сформулюйте нерівність Чебишова.
4. Дайте означення моментів випадкових величин. Деталізуйте його для дискретних та абсолютно неперервних величин.
5. Розв'яжіть наступні задачі:
1) Знайдіть дисперсію випадкових величин у задачах 4.1, 4.2, 4.3 (лекція 6).
2) Випадкова величина ξ розподілена рівномірно в інтервалі $[0, 2\pi]$. Знайти щільність, функцію розподілу та математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\eta = \cos\xi$.
3) Добова потреба в електроенергії в деякому населеному пункті е випадкова величина, математичне сподівання та дисперсія якої дорівнюють відповідно 2000 квт-год. та 20000. Знайти за допомогою

нерівності Чебишова ймовірність того, що найближчої доби потреба в електроенергії складатиме 1500-2000 квт-год.

4) Локальна комп'ютерна мережа складається з десяти незалежно працюючих комп'ютерів. Імовірність "зависання" кожного коп'ютера на протязі 12 год. роботи дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що відхилення кількості непрацюючих комп'ютерів від середнього значення кількості за модулем: а) не перевищує двох; б) не меньше двох.

5) Дискретна випадкова величина задана розподілом:

$$\begin{pmatrix} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_i & 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Знайти моменти та центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків.

Лекція 10. Числові характеристики систем випадкових величин. Коваріація та коефіцієнт кореляції

В цій лекції запроваджено поняття коваріації та коефіцієнта кореляції, як основних числові характеристики, що характеризують залежність між випадковими величинами. Наводяться їх найважливіші властивості. Запроваджено основні числові характеристики випадкових векторів.

Коваріація двох випадкових величин

Нехай ξ та η - дві випадкові величини, задані на одному просторі елементарних подій О, для яких існують $M\xi, M\eta, D\xi, D\eta$.

Означення. *Коваріацією* двох випадкових величин ξ та η називається число: $Cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]$.

Якщо розкрити дужки та обчислити математичне сподівання функції від випадкового вектора, то бачимо, що

$$Cov(\xi,\eta) = M(\xi\eta - \eta M\xi - \xi M\eta + M\xi M\eta) =$$
$$= M(\xi\eta) - 2M\xi M\eta + M\xi M\eta = M(\xi\eta) - M\xi M\eta .$$

Властивості коваріації двох випадкових величин

Безпосередньо з властивостей математичного сподівання, отримуємо

1) $Cov(\xi,\eta) = Cov(\eta,\xi)$.

2) $Cov(\xi,\eta) = D\xi$.

3) $Cov(\xi + C_1, \eta + C_2) = Cov(\xi,\eta), C_1, C_2 \in R$.

4) $Cov(\alpha_1\xi, \alpha_2\eta) = \alpha_1\alpha_2 Cov(\xi,\eta), \alpha_1, \alpha_2 \in R$.

5) Нехай ξ та η - незалежні величини. Тоді $Cov(\xi,\eta) = 0$. Це дійсно так, оскільки для *незалежних випадкових величин* $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M_\eta$.

Коефіцієнт кореляції та його властивості

Оскільки коваріація двох випадкових величин може приймати значення від $-\infty$ до $+\infty$, то використання її як міри залежності не є завжди зручним, що викликає запровадження коефіцієнту кореляції.

Означення. *Коефіцієнт кореляції* двох випадкових величин ξ та η дорівнює $\rho(\xi,\eta) = \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$.

Коефіцієнту кореляції притаманні такі властивості:

1) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $\rho(\xi,\eta) = 0$. Це випливає безпосередньо з означення коефіцієнту кореляції.

2) $-1 \le \rho(\xi,\eta) \le 1$. Дійсно, оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини завжди невід'ємне, то при будь-якому дійсному t виконується нерівність $M[t(\xi - M\xi) - (\eta - M\eta)]^2 \ge 0$, звідки, розкриваючи дужки, дістанемо:

$$M[t(\xi - M\xi) - (\eta - M\eta)]^2 \ge 0; \qquad t^2 D\xi - 2t\,cov(\xi,\eta) + D\eta > 0.(*)$$

У лівій частині цієї нерівності стоїть квадратний тричлен відносно t, він може бути невід'ємним при всіх дійсних t тоді і тільки тоді, коли його дискримінант не є додатнім, тобто

$$[cov(\xi,\eta)]^2 - D\xi D\eta < 0.$$

Звідси $[cov(\xi,\eta)]^2 \le D\xi D\eta, (**)$ що доводить потрібне твердження.

3) Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами ξ та η дорівнює +1 або -1 тоді і тільки тоді, коли ξ та η зв'язані лінійною залежністю: $\eta = a\xi + c$; при цьому $\rho(\xi,\eta) = sign(a) = \begin{cases} 1, a > 0, \\ -1, a < 0 \end{cases}$.

Доведемо це. Нехай $\rho(\xi,\eta)| = 1$; це означає, що в нерівності (*) стоїть знак рівності, тобто дискримінант квадратного тричлена в лівій частині (**) є нуль. Тоді цей тричлен має двократний дійсний корень:

$$t = a = \frac{cov(\xi,\eta)}{D\xi},$$

тобто $$M\left[a(\xi - M\xi) - (\eta - M\eta)\right]^2 = 0.$$

Цю рівність можна записати так: $M\left[a\xi - \eta - M(a\xi - \eta)\right]^2 = 0$ або

$$D(a\xi - \eta) = 0.$$

Але *дисперсія* може дорівнювати нулю тільки для випадкової величини, яка з імовірністю одиниця набуває певного сталого значення *c*. Звідси: $a\xi - \eta = c$, отже, $\eta = a\xi - c$ з імовірністю одиниця. При цьому з відповідної рівності випливає, що числа a і $cov(\xi,\eta)$ мають однакові знаки, тому $\rho(\xi,\eta) = sign(a)$.

Навпаки, нехай ξ і η зв'язані лінійною залежністю $\eta = a\xi + c$. Покажемо, що $|\rho(\xi,\eta)| = 1$, тобто в нерівності (**) стоїть знак рівності. Це можна перевірити безпосереднім обчисленням: оскільки $\eta = a\xi + c$, то $M\eta = aM\xi + c$, звідки $\eta - M\eta = a(\xi - M\xi)$ і

$$cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M\left[a(\xi - M\xi)\right]^2 = a^2 D\xi.$$

Крім того, за властивостями дисперсії,

$$D\eta = D(a\xi + c) = D(a\xi) = a^2 D\xi,$$

звідки дістаємо $$[cov(\xi,\eta)]^2 = D\xi \cdot D\eta.$$

Отже, $|\rho(\xi,\eta)| = 1$.

Зауваження. Якщо коефіцієнт кореляції $\rho(\xi,\eta) \neq 0$, то кажуть, що між випадковими величинами є кореляційний зв'язок; при цьому чим ближче коефіцієнт кореляції до одиниці, тим "щільнішим" є лінійний зв'язок між ξ та η. У випадку, коли $\rho(\xi,\eta) = 0$, випадкові величини називають *некорельованими*.

Проте слід мати на увазі, що коли $\rho(\xi,\eta)$ близький до нуля, то з цього не випливає, що зв'язок між ξ і η дуже "слабкий". Крім того, коефіцієнт кореляції може дорівнювати нулю навіть для випадкових величин зв'язаних функціональною залежністю. Наведемо приклад таких величин.

Приклад. Нехай ξ рівномірно розподілена на відрізку [-1,1], $\eta = \xi^2$, тоді $M\xi = 1/2 \int_{-1}^{1} x dx = 0$ і тому

$$cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M[\xi(\eta - M\eta)] = M(\xi\eta) =$$

$$= 1/2 \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0,$$

отже, $\rho(\xi,\xi^2) = 0$, хоча ξ та ξ^2 зв'язані функціональною залежністю.

Таким чином, з незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість, але з некорельованості, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність.

Приклад. Державний банк відправляє грошові банкноти на заміну внаслідок дефектів двох типів: 1) механічне пошкодження банкнот в тому числі: розриви, порізи, зношеність тощо; 2) невідповідність зовнішнього вигляду: колір, плями, позначки тощо. Щомісяця банк відбраковує внаслідок дефектів першого типу 3% банкнот, другого - 4,5%. Загалом відбраковується 5% банкнот. Знайти коефіцієнт кореляції між дефектами першого та другого типів.

Введемо дві випадкові величини: ξ набуває значення 1, якщо банкнота вибракована внаслідок дефекту першого типу і 0, якщо дефекту немає, і аналогічно визначається η для дефекту другого типу.

Отже,
$$\xi=\begin{cases}1, & з\ імовірністю\ 0.03,\\ 0, & з\ імовірністю\ 0.97.\end{cases}$$

$$\eta=\begin{cases}1, & з\ імовірністю\ 0.045,\\ 0, & з\ імовірністю\ 0.955.\end{cases}$$

Тому $M\xi=0.03; D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=0.03-(0.03)^2=0.03\cdot 0.97$;
$$M\eta=0.045; D\eta=0.045\cdot 0.955.$$

Оскільки зіпсовані банкноти складають всього 5%, то
$$P\{\xi\cdot\eta=1\}=P\{\xi=1;\eta=1\}=P\{\xi=1\}+P\{\eta=1\}-$$
$$-P\{\xi=1;\eta=1\}=0.03+0.045-0.05=0.025.$$

Тому $M(\xi\eta)=0.025$ і $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{0.025-0.03\cdot 0.045}{\sqrt{0.03\cdot 0.97}\sqrt{0.045\cdot 0.0955}}\approx 0.669.$

Числові характеристики випадкових векторів

Означення. <u>*Математичним сподіванням випадкового вектора*</u> $\overline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_n)$ називають вектор із математичних сподівань його координат
$M\overline{\xi}=(M\xi_1,...,M\xi_n)$.

Означення. Коваріаційною <u>*матрицею випадкового вектора*</u> $\overline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_n)$ називають матрицю B, елементами якої є коваріації:
$$b_{ij}=cov(\xi_i,\xi_j), i=1,...,n; j=1,...,n: \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}\end{pmatrix}.$$

Візначимо властивості коваріаційної матриці:

1) Коваріаційна матриця симетрична: $b_{ij}=b_{ji}, i=1,...,n; j=1,...,n$.

2) На її діагоналі стоять дисперсії координат випадкового вектора $\overline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_n): b_{ii}=D\xi_i, i=1,...,n$. Визначник коваріаційної матриці $det B$ називають <u>*узагальненою дисперсією*</u>.

Означення. <u>*Кореляційною матрицею випадкового вектора*</u> $\bar{\xi}=(\xi_1,...,\xi_n)$ називають матрицю R, елементами якої є коеффіцієнти кореляції $r_{ij}=\rho(\xi_i,\xi_j), i=1,...,n; j=1,...,n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Діагональні елементи дорівнюють 1, оскільки $\rho_{\xi_i,\xi_i=1}$. Так само, як і коваріаційна, кореляційна матриця є симетричною, а якщо координати вектора незалежні, то R - одинична матриця:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення ковріації двох випадкових величин.
2. Сформулюйте основні властивості коваріації.
3. Сформулюйте означення коефіцієнта кореляції. Чому коефіцієнт кореляції є зручнішим для вимірювання залежності між випадковими величинами?
4. Сформулюйте основні властивості коефіцтєнта кореляції.
5. Розв'яжіть наступні задачі:

1) Для випадкових величин ξ та η з задачі 1 з лекції 9 знайдіть коефіцієнт кореляції.

2) Знайти коефіцієнт кореляції між випадковими величинами ξ та η, сумісна щільність яких визначається формулою

$$\rho_{\xi,\eta}(u,v)=\begin{cases} 2(u+v), 0\le u\le v\le 1 \\ 0, \end{cases}.$$

Лекція 11. Нормальний розподіл: одно- та двовимірний випадки

Цю лекцію присвячено розгляду найважливіших властивостей нормального розподілу, як одновимірного так і двовимірного. Дано тлумачення основних параметрів нормального розподілу. Дано поняття про граничні теореми теорії ймовірностей та, зокрема, про центральну граничну теорему.

Одновимірний нормальний розподіл

Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a та σ^2 (позначається $\xi \sim N(a,\sigma^2)$, якщо її щільність дорівнює:

$$\phi_{a,\sigma^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}, u \in (-\infty,+\infty),$$

Графік щільності нормального розподілу зображений на рис. 5

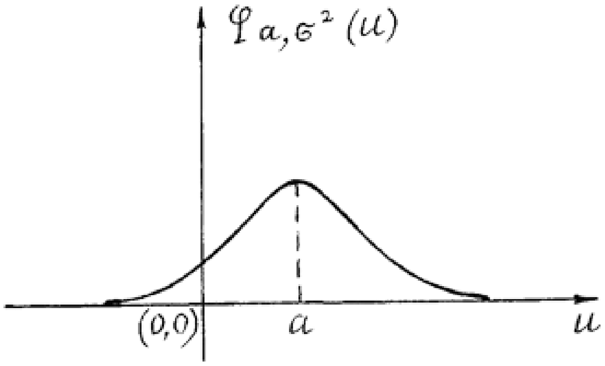

Рис. 5

Параметр *a* показує, на скільки зсунутий вздовж осі OX (рис. 6), а параметр σ^2 - на скільки стиснутий вздовж осі OY графік щільності нормального розподілу (рис. 7).

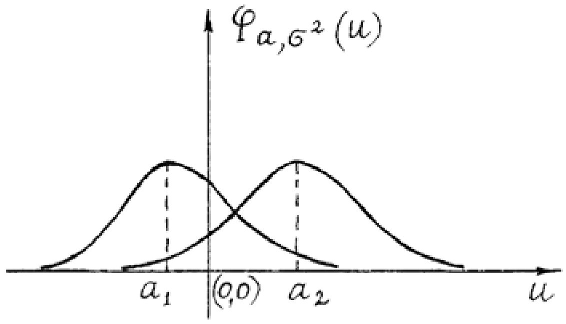

Рис. 6

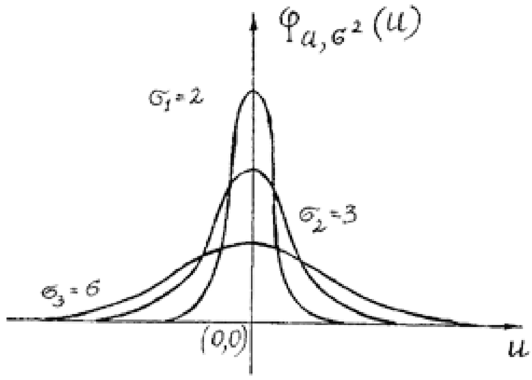

Рис. 7

З'ясуємо теоретико-ймовірнісне тлумачення параметрів *a* та σ^2. Знайдемо математичне сподівання ξ. Маємо

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(u-a)e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du + \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}}du=a$$

тому що перший інтеграл в останній рівності дорівнює 0, як інтеграл від непарної функції, другий дорівнює 1, як інтеграл від щільності нормального розподілу. Отже, a - це *математичне сподівання.*

Знайдемо *дисперсію* ξ.

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=M(\xi-a)^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(u-a)^2e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du=$$

$$\left.\begin{matrix}u-a=t\\du=dt\end{matrix}\right|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=-\left.\frac{te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right|_{-\infty}^{+\infty}+\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=$$

$$=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\sigma^2,$$

оскільки останній інтеграл, як інтеграл від щільності, дорівнює 1. Отже, σ^2 - це *дисперсія,* а σ - *середнє квадратичне відхилення*.

Оскільки щільність нормального розподілу повністю визначається через параметри a та σ^2, то нормальний розподіл повністю визначається своїм математичним сподіванням та дисперсією.

Запровадимо ще деякі поняття, пов'язані з нормальним розподілом.

Легко переконатись, що множення нормальної випадкової величини на сталу та додавання до неї сталої залишає випадкову величину нормальною.

Означення. Центрована та нормована нормальна випадкова величина називається стандартною. Отже, якщо ξ має розподіл $N(a,\sigma^2)$, то випадкова величина $\frac{\xi-M\xi}{\sigma}=\frac{\xi-a}{\sigma}$ є стандартною.

Зрозуміло, що вона має розподіл $N(0,1)$ та її щільність дорівнює

$$\phi_{0,1}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}},u\in(-\infty,+\infty)$$

Функція розподілу стандартної нормальної випадкової величини дорівнює:

$$\Phi_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du, x\in(-\infty,+\infty).$$

Цей інтеграл не виражається через елементарні функції. Його значення можна знайти у спеціальних таблицях.

Функція розподілу $\xi \sim N(a,\sigma^2)$ зв'язана з функцією розподілу стандартної величини таким співвідношенням

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x)=P\{\xi<x\}=P\{(\xi-a)/\sigma<(x-a)/\sigma\}=\Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Іноді для знаходження інтегралу від нормальної щільності користуються таблицями значень *<u>функції Лапласа</u>*:

$$\Phi_L(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du, x\geq 0,$$

$$\Phi_L(x)=-\Phi_L(-x), x<0,$$

яка так пов'язана з функцією розподілу стандартної величини:

$$\Phi_{0,1}(x)=\Phi_L(x)+1/2.$$

В багатьох задачах, зв'язаних з використанням нормального розподілу, шукається ймовірність набуття значення з певного відрізку. Знайдемо ймовірність влучення нормальної випадкової величини ξ з параметрами a та σ^2 у відрізок [b,c]:

$$P\{b\leq\xi\leq c\}=P\{\frac{b-a}{\sigma}\leq\frac{\xi-a}{\sigma}\leq\frac{c-a}{\sigma}\}=\Phi_{0,1}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)-\Phi_{0,1}\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi_L\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)-\Phi_L\left(\frac{b-a}{\sigma}\right).$$

Теоретично нормальна щільність відмінна від нуля на всій числовій осі, але практично за межами інтервалу $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ дуже близька до нуля. Справді:

$$P\{a-3\sigma\leq\xi\leq a+3\sigma\}=2\Phi_L(3)=0.9973.$$

Отже, ймовірність влучити за межі цього відрізку дорівнює всього 0,0027.

Наведену рівність іноді називають *Правилом трьох сигм*. Згідно з цим правилом практично вірогідно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятися від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.

Двовимірний нормальний розподіл

Двовимірний випадковий вектор (ξ,η) з параметрами $a_1,a_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ має нормальний розподіл, якщо його щільність задається формулою: $$p_{\xi,\eta}(u,v)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\times$$

$$\times exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{u-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{u-a_1}{\sigma_1}\frac{v-a_2}{\sigma_2}++\left(\frac{v-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

$$u,v\in(-\infty,+\infty).$$

При цьому будемо вважати, що $\sigma_1^2>0,\sigma_2^2>0,|\rho|<1.$ З геометричної точки зору графік функції щільності представляє собою "гору" з досить крутими схилами, вершина якої знаходиться в точці (a_1,a_2). Лініями рівня цієї функції будуть еліпси

$$\left(\frac{u-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{u-a_1}{\sigma_1}\frac{v-a_2}{\sigma_1}+\left(\frac{v-a_2}{\sigma_2}\right)^2=Const,$$

які у випадку $\rho=0$ та $\sigma_1=\sigma_2$ переходять в кола.

З'ясуємо теоретико-ймовірнісний зміст параметрів, які входять у вираз для щільності.

Перевіримо, що $p_{\xi,\eta}(u,v),u,v\in(-\infty,+\infty)$ дійсно є щільністю, тобто $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi,\eta}(u,v)dudv=1.$$

Для цього розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi,\eta}(u,v)du=\left|u_1=\frac{u-a_1}{\sigma_1};v_1=\frac{v-a_2}{\sigma_2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u_1^2-2pu_1v_1+v_1^2\right]\}\sigma_1du_1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}exp^{-\frac{v_1^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-p^2\right)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u_1^2-pv_1\right]^2\}du_1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}exp^{-\frac{v_1^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}exp^{-\frac{(v-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Так як $\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u_1-pv_1\right]^2\}du_1=1,$

як інтеграл від щільності одновимірної нормальної випадкової величини $N(\rho v_1,1-\rho^2)$. Отже, інтеграл по обох змінних дорівнює одиниці.

Оскільки, згідно з властивістю 5 щільності випадкового вектора, інтеграл від двовимірної щільності по одній змінній дає щільність другої, то нами було доведено, що друга компонента нормального вектора η має розподіл $N(a_2,\sigma^2)$, отже, $M\eta=a_2, D\eta=\sigma_2^2$, звідки випливає, що $M\xi=a_1, D\xi=\sigma_1^2$.

Отже, a_1,a_2 - математичні сподівання, а σ_1^2,σ_2^2 - *дисперсії* нормально розподілених компонент.

З'ясуємо зміст параметру ρ. Стандартизуємо величини ξ та η:

$$\xi_0=\frac{\xi-a_1}{\sigma_1},\eta_0=\frac{\eta-a_2}{\sigma_2}.$$

Тоді їх сумісна щільність має такий вигляд:

$$p_{\xi_0,\eta_0}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2puv+v^2\right]\right\}.$$

Згідно з означенням коефіцієнту кореляції , маємо

$$p(\xi,\eta)=p\left(\xi_0,\eta_0\right)=M\left(\xi_0\cdot\eta_0\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}uv\,exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2puv+v^2\right]\right\}dudv=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u-\rho v+\rho v\right)\right)\cdot exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u-pv\right]^2\right\}du)dv=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ve^{-\frac{v^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u-\rho v)\cdot exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u-\rho v]^2\right\}d(u-\rho v)\right]dv+$$

$$+\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2e^{-\frac{v^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u-\rho v)\cdot exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u-\rho v]^2\right\}d(u-\rho v)\right]dv=\rho$$

Отже, ρ - це коефіцієнт кореляції між випадковими величинами ξ та η.

Розглянемо випадок, коли $\rho=0$ (тобто компоненти нормального вектора є некорельованими). Тоді їх сумісна щільність має вигляд:

$$p_{\xi,\eta}(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-a_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{v-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-a_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=\phi_{a_1,\sigma_1^2}(u)\cdot\phi_{a_2,\sigma_2^2}(v)=p_\xi(u)\cdot p_\eta(v).$$

Отже, компоненти незалежні. Відмітимо, що в загальному випадку з *некорельованості випадкових величин* не випливає їх незалежність. Але *некорельовані компоненти нормального вектора є незалежними випадковими величинами*.

Поняття про центральну граничну теорему

В теорії ймовірностей та її застосуваннях часто доводиться мати справу із випадковими величинами, які є сумою великої кількості інших випадкових величин. Це пов'язано з тим, що випадкові явища навколо нас часто по суті є наслідками впливу багатьох маловпливових незалежних факторів. Обчислення точних розподілів таких величин справа складна і не завжди може бути доведеною до кінця. Але за певних умов, у випадку, коли кількість доданків прямує до нескінченності, а самі доданки прямують до нуля, закон розподілу суми може стабілізуватися і приймати деяке граничне значення. При цьому на практиці вважають, що сума наближено має саме цей граничний розподіл, який часто має досить простий вигляд і є зручним для використання. Теореми, в яких досліджується гранична поведінка сум багатьох випадкових величин при необмеженному зростанні їх кількості, носять назву граничних теорем теорії ймовірностей. Нами вже було розглянуто у Модулі 5 деякі *граничні теореми* для схеми Бернуллі.

Повернемось до інтегральної теореми Муавра-Лапласа, згідно з якою для кількості успіхів в n незалежних *випробуваннях Бернуллі* μ_n з імовірністю успіху $p(0<p<1)$ виконується:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Іншими словами, функції розподілу випадкових величин $\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$ прямують при зростанні n до функцій розподілу стандартного нормального закону. Цьому співвідношенню можна надати іншої форми. Введемо випадкові величини η_k, які приймають значення 1, якщо у k-му випробуванні випав успіх та 0, якщо - невдача. Тоді $\mu_n = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n$.

При цьому $M\eta_k = p, D\eta_k = pq$, $M\mu_n = \sum_{k=1}^{k=n} M\eta_k = np$

та
$$D\mu_n = \sum_{k=1}^{k=n} D\eta_k = npq.$$

Тоді інтегральну теорему Муавра-Лапласа можна сформулювати так:

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо кожна з незалежних випадкових величин $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ може набувати лише двох значень 1 і 0 з імовірностями p та $q(p+q=1, 0<p<1)$ то при нескінченному зростанні n функція розподілу випадкової величини

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n}\eta_k - M\sum_{k=1}^{k=n}\eta_k}{\sqrt{D\sum_{k=1}^{k=n}\eta_k}}$$

прямує до функції розподілу стандартного нормального закону.

Це твердження носить назву центральної граничної теореми для *послідовності незалежних випробувань*. Ця теорема має місце і за більш широких умов. Наведемо один з її варіантів.

Теорема Ліндеберга – Леві. Якщо взаємно незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ... \xi_n, ...$ однаково розподілені і мають математичне сподівання a і *дисперсію* σ^2, то при нескінченному зростанні n функція розподілу випадкової величини

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n}\xi_k - M\sum_{k=1}^{k=n}\xi_k}{\sqrt{D\sum_{k=1}^{k=n}\eta_k\xi_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n}\xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

прямує до функції розподілу стандартного нормального закону.

Якщо доданки не мають однакового закону розподілу, то до них можна застосовувати *теорему Ляпунова*.

Теорема Ляпунова. Нехай взаємно незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ... \xi_n, ...$ мають скінчений третій абсолютний *момент*. Покладемо $a_n = M\xi_n, b_n^2 = D\xi_n, c_n^3 = M|\xi_n - a_n|^2$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k^3 .$$

Якщо при $n \to \infty$ $C_n / B_n \to 0$, то при нескінченному зростанні n функція розподілу випадкової величини $\frac{\sum_{k=1}^{k=n}\xi_k - A_n}{B_n}$ прямує до функції розподілу стандартного нормального закону.

Центральна гранична теорема пояснює ще раз велике поширення нормального закону розподілу: якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини мало відрізняється від нормального.

Запитання для самоконтролю

1. Чому нормальний розподіл посідає центральне місце у питаннях теорії ймовірностей?
2. Наведіть вигляд щільності нормального розподілу.

3. Сформулюйте теоретико-ймовірнісне тлумачення параметрів a та σ^2.
4. Наведіть вигляд щільності двовимірного нормального розподілу.
5. Розв'яжіть наступні задачі:
1) Тривалість телефонної розмови у деякій брокерській фірмі має нормальний розподіл з параметрами $a = 12$ хвилин та $\sigma^2 = 4{,}5$ хвилин. Знайти ймовірність того, що розмова потребує більше 10 хвилин.
2. Коробки з шоколадом на кондитерській фабриці мають середню вагу 1.06 кг. Знайдіть який відсоток коробок має вагу меньшу ніж 1 кг, якщо вага має нормальний розподіл з параметром $\sigma^2 = 0{,}01$.

Лекція 12. Ймовірносні методи у задачах оптимізації

В цій лекції дано застосування ймовірнісних методів до розв’язаня задач прийняття оптимальних рішень, таких як: побудова прямої лінійної регресії, як теоретичної, так і вибіркової; задача про оптимальну стратегію у лотереї; задачу про прибуток продавця.

Лінійна регресія

Нехай ξ та η - дві випадкові величини, між якими існує фукціональна залежність. Будемо вважати, що коефіцієнт кореляції між цими величинами $\rho \neq 0$, тобто можно говорити при певний лінійний зв'язок між цими величинами. Знайдемо цю залежність. Така задача є дуже поширеною і виникає, наприклад, при розгляді випадкової величини ξ як певного ресурсу підприємства, а величини η як його прибутку.

Розглянемо лінійну функцію $\hat{\eta} = a\xi + b$.

Означення. Випадкова величина $\eta^* = a^*\xi + b^*$ називається *найкращою в середньому квадратичному лінійною оцінкою випадкової величини* η *за значеннями випадкової величини* ξ, якщо

$$\min_{a,b} M[\eta - \hat{\eta}]^2 = \min_{a,b} M[\eta - a\xi - b]^2 = M[\eta - a^*\xi - b^*]^2.$$

При цьому пряма $y = a^* x + b^*$ називається прямою регресії η на ξ. Знайдемо відповідні коефіцієнти a^* та b^*. Будемо вважати, що визначено $M\xi, M\eta, D\xi = \sigma_\xi^2, D\eta = \sigma_\eta^2$. Маємо

$$M[\eta - a\xi - b^2] = M[\eta - M\eta - a(\xi - M\xi) + M\eta - aM\xi - b]^2 =$$

$$= M(\eta - M\eta)^2 - 2aM[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]^2 + a^2 M(\xi - M\xi)^2 + (M\eta - aM\xi - b^2) =$$

$$= \sigma_\eta^2 - 2a\,cov(\xi, \eta) + a^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - aM\xi - b)^2 =$$

$$= \sigma_\eta^2 - 2a\rho\sigma_\xi\sigma_\eta + a^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - aM\xi - b)^2 =$$

$$= (\rho\sigma_\eta^2 - a\sigma_\xi)^2 + (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2 + (M\eta - aM\xi - b)^2.$$

Звідси випливає, що умову мінімальності останнього виразу буде виконано, якщо

$$\begin{cases} \rho\sigma_\eta - a\sigma_\xi = 0, \\ M\eta - aM\xi - b = 0, \end{cases}$$

звідки

$$a^* = \rho\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, b^* = M\eta - aM\xi.$$

Величину $M[\eta - \hat{\eta}]^2$ називають похибкою оцінки . Очевидно, що її мінімальне значення, тобто дисперсія похибки, дорівнює

$$\Delta^2 = (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2.$$

Коефіцієнт a^* називають коефіцієнтом регресії η на ξ.
Рівняння прямої регресії часто записують у такому вигляді:

$$y - M\eta = \rho \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M\xi).$$

Вибіркова лінійна регресія

Розглянемо застосування результатів попереднього розділу до такої задачі. Нехай на площині розташовано *n* точок, заданих своїми координатами $(x_i, y_i), i = 1,...,n$. Знайдемо коефіцієнти рівняння прямої

$$y = ax + b,$$

яка розташована на площині так, що сума квадратів відстанєй від неї до заданих точок є мінімальною. Таку пряму називають прямою вибіркової регресії. З геометричних міркувань зрозуміло, що шукана сума є мінімальною, якщо буде мінімальною така сума

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - ax_k - b)^2 .$$

Розглянемо дискретний випадковий вектор (ξ, η), який має розподіл $p_k = P\{(\xi,\eta) = (x_k, y_k)\} = 1/n, k = 1,...,n$.

Тоді, очевидно, що $M(\eta - a\xi - b)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - ax_k - b)^2$.

Задачу знаходження величин a та b, що мінімізують цей вираз розглянуто в попередньому розділі Але легко переконатись, що

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, M\eta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k,$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M\xi)^2, \sigma_\eta^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - M\eta)^2,$$

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k x_k - M\xi M_\eta}{n\sigma_\xi\sigma_\eta}.$$

Задача про лотерею. Нехай деяка особа вирішила купувати лотерейні білети до придбання першого виграшного білета. Нехай купівля кожного білета не залежить від купівлі інших і придбання виграшного білету має ймовірність *p*, однакову для всіх білетів, а придбання невиграшного - $q = 1 - p$.

Очевидно, що кількість білетів v до придбання виграшного є випадковою величиною, яка має <u>*геометричний розподіл*</u> (див. модуль

7). Ціна кожного білета дорівнює c_-, а в результаті придбання виграшного білета особа отримує виграш c_+.

Складемо співвідношення, яке пов'язує величини c_-, c_+, p і при якому участь в лотереї може принести прибуток, тобто витрати на придбання білетів менші ніж виграш c_+. Якщо придбано $v+1$ білет, то витрати складають $(v+1)c_-$. Тоді, за умов придбання виграшного білета, особа отримує прибуток $g(v)=c_+-(v+1)c_-$, який має бути додатним. $g(v)$ - це прибуток, який можна отримати за одну лотерею. Очевидно, що його можна розглядати, як випадкову величину, значення якої є досить мінливими. Тому доцільно розглянути середній прибуток за достатню кількість лотерей, який за *законом великих чисел* наближається до математичного сподівання прибутку. Отже, умова отримання додатнього середнього прибутку має вигляд

$$Mg(v)>0.$$

Згідно з формулою для математичного сподівання геометричного розподілу маємо

$$Mg(v)=M[c_+-(v+1)c_-]=c_+-c_-(q/p+1)=c_+-c_-/p=\frac{c_+p-c_-}{p}.$$

Оскільки $p>0$, то умова отримання додатнього середнього прибутку може бути замінена на таку $c_+p-c_->0$.

Задача про продавця газет. Продавец щоденно одержує N газет і бажає вибрати їх кількість так, щоб максимізувати очікуваний щоденний прибуток. Нехай а - прибуток від продажу однієї газети, b - збиток від непроданої газети, а с - збиток в тому випадку, коли покупець хоче придбати газету, але запас газет вже вичерпано.

Якщо продавец має N газет і до нього в цей день приходить К покупців, то його прибуток задається такою таблицею:

Стаття	Прибуток $K \le N$	Прибуток $K > N$
Продані газети	aK	aN
Непродані газети	$-b(N-K)$	0
Незадоволений попит	0	$-c(K-N)$

Отже, чистий прибуток продавця складає

$$g_N(K)=\begin{cases}(a+b)K-bN,(K\le N)\\(a+c)N-cK,(K>N)\end{cases}$$

Якщо значення *K* було відомо, то прибуток можна було б максимізувати, поклавши $N=K$. Але попит *K* є мінливим і його треба розглядати, як випадкову величину, максимізуючи по N очікуваний (середній) прибуток, тобто математичне сподівання величини $g_N(K)$. Покладемо $G_N=Mg_N(K)$.

Тоді зміна очікуваного прибутку при додаванні ще однієї газети дорівнює
$$G_{N+1}-G_N=M[g_{N+1}(K)-g_N(K)]=$$
$$=M[-b+(a+b+c)I(K-N)],$$

де
$$I(K-N)=\begin{cases}0,(K\le N),\\1,(K>N)\end{cases}.$$

Таким чином, приріст очікуваного прибутку дорівнює
$$G_{N+1}-G_N=-b+(a+b+c)MI(R-N)=-b+(a+b+c)P\{K>N\},$$
в силу визначення $I(K-N)$.

Для маленьких значень N ця величина додатня, але, починаючи з деякого значення N, вона стає від'ємною і перше значення N, для якого це має місце, і є оптимальним. Отже N^* - це корінь рівняння
$$G_{N^*}\approx G_{N^*+1},$$

або рівняння
$$P\{K>N^*\}\approx\frac{b}{a+b+c}.$$

Зрозуміло, що N^* можна визначити так
$$N^*=min\{N:P\{K>N\}<\frac{b}{a+b+c}\}.$$

Для остаточного розв'язку задачи треба знати $P\{K>N\}$, як функцію N. Цю ймовірність можна оцінити безпосередньо, спостерігаючи на протязі певного часу за випадками, в яких можливий попит перевищував N.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке лінійна регресія?

2. Як визначаються коефіцієнти лінійної регресії?
3. Як пов'язані лінійна регресія та метод найменших квадратів?
4. Розв'яжіть наступні задачі:

1) Побудувати пряму вибіркової регресії для точок $M_1(1,2,6)$, $M_2(2,3,9)$, $M_3(3,5,7)$, $M_4(3,5,7)$, $M_5(5,8,3)$.

2) Визначити мінімальне відношення величини до ціни лотерейного білета, при якому має сенс послідовне придбання білетів такої лотереї.

3) Знайти оптимальну кількість троянд, яку повинен мати продавець квітів, якщо прибуток його від однієї троянди складає 10 гривень, збиток від непроданої – 8 гривень, збиток від незадоволеного попиту – по 5 гривень за троянду, вважаючи, що функція розподілу випадкового попиту на троянди є $1-e^{-0,005}$.

Лекція 13. Основи математичної статистики, точкові та інтервальні оцінки параметрів

Розглянуто базаві питання математичної статистики: генеральна та вибіркова сукупність, розподіл вибірки, вибіркові характеристики. Також, запроваджені поняття точкових та інтервальних оцінок параметрів розподілів випадкових величин.

Генеральна та вибіркова сукупності. Математична статистика розробляє методи реєстрації, опису та аналізу статистичнихз даних. Завдання статистики – при об'єктивних даних встановити закони їх розподілу, оцінювати характеристики, перевіряти статистичні гіпотези.

Генеральною сукупністю називають множину об'єктів однакової природи, яка повинна бути перевірина на кількісну чи якісну ознаку.

Вибірковою сукупністю, або вибіркою, називають підмножину генеральної сукупності.

Елемент вибірки називають варіантою і позначають x_i. Кількість елементів вибірки називають її об'ємом. Зростаюча послідовність варіант утворює варіаційний ряд.

Розподіл вибірки. Вибіркові характеристики

Нехай одержано вибірку з генеральної сукупності $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єм *n*, з невідомою функцією розподілу $F(x)$ (теоретична функція розподілу). Позначимо $M(x)a, D(x) = \sigma^2$.

Задача полягає в тому, щоб визначити з певною мірою надійності $F(x),\ M(x),\ D(x)$.

Вибірковою (статистичною або емпіричною) функцією розподілу називається відношення: $F_n(x) = \dfrac{\mu_n(x)}{n}$.

де μ_n - число $x_i,\ x_i < x : \mu_n$ - випадкова величина, тобто $F_n(x)$ - теж випадкова величина – наближення теоретичної функції розподілу:

$$F_n(x) \approx F(x); x \in R.$$

Математичне сподівання і дисперсію вибірки називають відповідно вибірковим середнім $\bar{x}$ і вибірковою дисперсією S^2; $\bar{x}$ - середнє арифметичне вибіркових значень $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i n_i$.

Вибіркова дисперсія дорівнює

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - x^{-2}.$$

Теорема. При $n \to \infty$ і будь-якому $x \in R$ мають місце співвідношення $F_n(x) \to F(x); \bar{x} \to a;\ S^2 \to \sigma^2$

за умови, що a і S^2 - скінченні.

Способи обчислень вибіркових характеристик

Розглянемо варіаційний ряд, приписують однаковим варіантам той самий номер, пр якому x_i повторюється n_i разів.

Таблиця вигляд

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k

називається статистичним рядом, $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$.

Ламана з вершинами (x_i, n_i) називається полігоном частот вибірки.

При невеликому n

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i; \; S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2.$$

Якщо число варіант дуже велике, то для спрощення обчислень застосовують групування емпіричних даних у такий спосіб. Нехай всі варіанти $x_1, x_2, ..., x_n$ належать інтервалу (a, b). Розіб'ємо інтервал на k однакових частин.

Покладемо n_i число всіх вибіркових значень, що входять в i-й інтервал, y_i - середина i-го інтервал, тоді $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i n_i$;

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(y_i - \bar{y})^2.$$

Наближення щільності розподілу $f(x)$ на i-ому інтервалі визначається співвідношенням $f(x) = \frac{n_i}{nh} = W_i, h = \frac{b-a}{k}$.

Побудуємо для кожного інтервалу i прямокутник висотою W_i. Одержана фігура з таких прямокутників називається гістограмою частот (рис. 1).

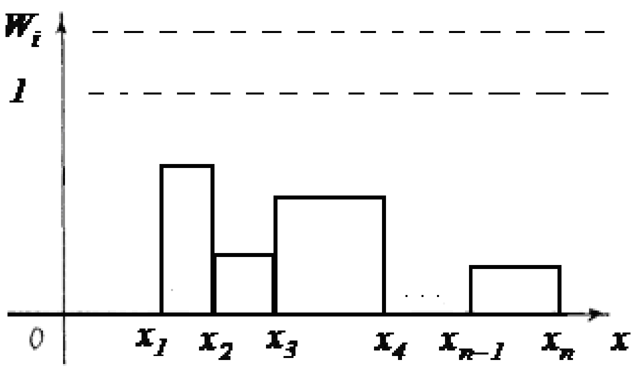

Рис. 1

Сума площ прямокутників дорівнює 1. верхня межа є наближенням кривої теоретичного розподілу.

Приклад 1. записати вибірку 55 спостережень у вигляді статисного ряду. Скласти груповану вибірку з довжиною інтервалу 2. побудувати графік емпіричних функцій розподілу та гістограму частот.

Вибірка:
19,18.10,13,15,16,19,18.11,13,16,19,18,19,18,18,14,16,19,18,14,15, 19,19,12,18,12,13,15,16,18,14,14,16,17,17,17,16,17,20,20,21,21,17, 20,20,21,17,22,17,22,20,23,24.

Розв'язання. Розмах вибірки $W = 24 - 10 = 14, h = 2, 14/2 = 7$ - інтервалів групування.

Статистичний ряд:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	1	2	3	4	3	6	7	8	7	6	3	2	1	1

$$\sum n_i = 55 .$$

Групована вибірка:

Границя інтервалу	(10;12)	(12;14)	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)	(22;24)
Середина інтервалу y_i	11	13	15	17	19	21	23
Частота n_i	3	6	8	14	14	7	3

Побудуємо графік $F_n(x)$ статистичного ряду.

Якщо $x_1 = 10; x_{55} = 24$, то $F_n(x) = 0$ при $x < 10$ та $F_n(x) = 1$ при $x > 24$.

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 10 \\ 0{,}054 \; при \; 10 < x \le 12 \\ 0{,}163 \; при \; 12 < x \le 14 \\ 0{,}308 \; при \; 14 < x \le 16 \\ 0{,}562 \; при \; 16 < x \le 18 \\ 0{,}816 \; при \; 18 < x \le 20 \\ 0{,}963 \; при \; 20 < x \le 22 \\ 0{,}997 \; при \; 22 < x \le 24 \\ 1 \; при \; 24 < x \end{cases}$$

На півінтегралі $(10;24]$ емпіричну функцію будуємо з використанням статистичного ряду.

Приклад 2. Для вибірки обчислити вибіркове середнє значення та вибіркову дисперсію.

Розв'язання. Статистичний ряд вибірки:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	1	1	3	4	3	6	7	7	9	6	4	1	1	1

Вибіркова дисперсія $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{55}(10\cdot 1 + 11\cdot 1 + 12\cdot 1 + 13\cdot 3 + 14\cdot 4 + 15\cdot 3 + 16\cdot 6 + 17\cdot 7 + 18\cdot 7 + 19\cdot 9 + 20\cdot 6 +$$

$$21\cdot 4 + 22\cdot 1 + 23\cdot 1 + 24\cdot 1) = \frac{1}{55}(10 + 11 + 12 + 39 + 56 + 45 + 96 + 119 + 126 +$$

$$+ 171 + 20 + 84 + 22 + 23 + 24) = \frac{958}{55} \approx 17{,}42$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i = \frac{1}{55}(100\cdot 1 + 11^2\cdot 1 + 12^2\cdot 1 + 13^2\cdot 3 + 14^2 + 15^2 + 16^2\cdot 6 + 17^2\cdot 7 + 18^2\cdot 7 +$$

$$+ 19^2\cdot 9 + 20^2\cdot 6 + 21^2\cdot 4 + 22^2\cdot 1 + 23^2\cdot 1 + 24^2\cdot 1) = \frac{1}{55}(100\cdot 1 + 121\cdot 1 + 144\cdot 1 +$$

$$169\cdot 3 + 196\cdot 4 + 225\cdot 3 + 256\cdot 6 + 289\cdot 7 + 324\cdot 7 + 361\cdot 9 + 400\cdot 6 + 441\cdot 4 + 484\cdot 1 +$$

$$+ 529\cdot 1 + 576\cdot 1) = 312.$$

$$S^2 = 312 - 17{,}42^2 = 8{,}544.$$

Оцінка невідомих параметрів розподілу

Нехай C – деякий параметр теоретичного розподілу.

Оцінкою цього параметра називають деяку функцію $\theta = \theta(x_1,\ldots,x_n)$ від значень, що спостерігаються, яка мало відмінна в певному розумінні від C.

Означення: оцінку $\theta = \theta(x_1,\ldots,x_n)$ називають незсуненою оцінкою параметра С, якщо при довільному $n \in N$ $M(\theta) = C$.

Тобто похибка від зміни C на θ не має систематичного характеру.

Оцінкою математичного сподівання a є вибіркова середня $\bar{x}$ - оцінка незсунена $a = \bar{x}$.

$M(\bar{x}) = M(x)$ - на основі теореми Чебишова.

Оцінкою для дисперсії $D(x) = \sigma^2$ є вибіркова дисперсія

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - x^2,$$

S^2 є зсуненою оцінкою для σ^2, бо $M(S^2) \neq \sigma^2$.

$S^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2$ є незсуненою оцінкою σ^2, бо

$$M(S_1^2) = \frac{n}{n-1} M(S^2).$$

Надійні інтервали

Розглянуті в п.2.4 оцінки характеризуються одним числом, їх називають точковими оцінками. Вони можуть мати великі похибки при малих n. Об'єктивнішою і надійнішою є інтервальна оцінка параметрів, яка характеризується трьома числами: початком і кінцем інтервалу, що покриває оцінку θ, та ймовірністю з якою це виконується.

Ймовірність називається надійністю γ. Застосовують γ на одному з рівнів 0,95; 0,99; 0,999.

Означення: *надійністю оцінки* параметра θ за його статистичною оцінкою $\overline{\theta}$ називається

$$\gamma = P\left(\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta\right) = P\left(\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta\right) = \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} f(x)dx.$$

Інтервал $\left(\overline{\theta} - \delta; \overline{\theta} + \delta\right)$ називається *надійним інтервалом*.

Надійні інтервали для математичного сподівання

Будемо вважати, що $P\left(\left|\overline{x} - a\right| < \delta\right) = \gamma$.

У випадку нормального закону $P\left(\left|\overline{x} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$,

причому $$M(x) = a; \sigma(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тоді $$P\left(\left|\overline{x} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi(t); t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}; \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

З таблиці функції Лапласа знаходимо t.

Надійний інтервал для математичного сподівання a є такий

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}; \overline{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right).$$

Якщо теоретична дисперсія σ^2 невідома, її хамінюють відповідною оцінкою S_1^2. Тоді надійний інтервал для математичного сподівання при рівні γ $\left(\bar{x}-\frac{S_1 t}{\sqrt{n}-1};x+\frac{S_1 t}{\sqrt{n-1}}\right)$.

Якщо $n<30$, а генеральну сукупність розподілено нормально з параметрами a та σ, то при надійному рівні γ гарантійний інтервал

$$\left(\bar{x}-\frac{S_1 t_\gamma}{\sqrt{n}-1};x+\frac{S_1 t_\gamma}{\sqrt{n-1}}\right),$$

де $t(\gamma,n)$ визначаємо з таблиці розподілу Стьюдента.

Оцінка σ та S для нормального закону

Знайдемо надійний інтервал, який покриває σ з надійністю γ за умови, що випадкова величина розподілена нормально

$$P(S-\delta<\sigma<S+\delta)=\gamma,$$

$$P(S(1-q)<\sigma<S(1+q))=\gamma.$$

Введемо безрозмірну величину $\lambda=\frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1}$, що має розподіл «$\chi_i$». За таблицею $q(\gamma,n)$, знаходимо q і будуємо надійний інтервал

$$(S(1-q)<\sigma<S(1+q)).$$

Приклад 3. Знайти надійні інтервали для середнього та дисперсії, вважаючи, що вибірка розподілена нормально з надійністю $\gamma=0{,}95$, якщо $\bar{x}=12{,}57;S^2=0.91;S_1=0.95,n=16$.

<u>*Розв'язання*</u>. З таблиць $t_{0.975}(15)=2.131;\chi^2_{0.025}(15)=27.48$;

$$12.57-\frac{0.95}{\sqrt{16}}\cdot 2.131\le a\le 12.57+\frac{0.95}{\sqrt{16}}\cdot 2.131,$$

тобто $$12.06<a<13.08$$

$$\frac{15\cdot 0.91}{27.40}<\sigma^2<\frac{15\cdot 0.91}{6.26}.$$

Звідки $0.498<\sigma^2<2.186$.

Запитання для самоконтролю

1. Які завдання математичної статистики?

2. Що таке генеральна та вибіркова сукупність?
3. Як знаходяться вибіркова функція розподілу, математичне сподівання та дисперсія вибірки?
4. Що таке статистична оцінка параметру, коли вона називається незсуненою?
5. Що таке надійний інтервал, надійність оцінки?
6. Запишіть формули для надійних інтервалів при оцінюванні математичного сподівання (у випадках відомої та невідомої дисперсії) та дисперсії нормального розподіленої випадкової величини.

Лекція 14. Статистичні гіпотези та їх перевірка

Розглянуті поняття статистичної гіпотези, помилок першого та другого роду при її
прийнятті або відкладанні. На прикладі критерію χ^2 показано процедуру перевірки статистичної гіпотези. Розглянуто також вибіркову лінійну регресію у найпростішому випадку.

Нехай проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина набуває одне з k значень $x_1, x_2, ..., x_k$.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд емпіричного закону та його параметри. Гіпотезу, яку перевіряють, називають нульовою H_0, а протилежну до неї – альтернативною H_i.

Приймаючи або відкидаючи H_0, можна зробити помилку першого роду (відкинути правильну гіпотезу) або другого роду (прийняти неправильну). Ймовірність зробити помилку першого роду називається рівнем значущості. Його задають заздалегідь ($\alpha = 0{,}05; 0{,}01; 0{,}001$) залежно від життєвої необхідності.

Для перевірки гіпотези H_0, де випадкова величина x розподілена за деяким законом, найчастіше використовують критерії згоди χ^2 Пірсона.

На основі випробувань складемо статистичний ряд розподілу випадкової величини x:

x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_1	n_2	$\cdots$	n_k

$\sum n_k = n$.

Приймемо гіпотезу $H_0 = \left\{ x - \textit{має ряд розподілу}\ \frac{x_1}{p_1} \Big| \frac{x_2}{p_2} \Big| \ldots \frac{x_k}{p_k} \right\}$.

Мірою розходження R між гіпотетичним розподілом H_0 і статичним розподілом беремо величину $R = \chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.

Розподіл χ^2 залежить від параметра r - числа степенів вільності $r = k - m - 1$, де k - число під інтервалів, на які розбито інтервал зміни випадкової величини або число значень x_i, m - число параметрів теоретичного розподілу, визначених за цією вибіркою.

Одиницю віднімаємо, оскільки на статичний ряд впливає зв'язок

$$\sum n_k = n.$$

Входом до таблиці розподілу χ^2 є рівень значущості α та r. З таблиці розподілу знаходимо χ^2_{kp} і порівнюємо з $R = \chi^2$.

Якщо $R = \chi^2 \le \chi^2_{kp}$, то H_0 не відкидаємо.

Приклад 4. Проведемо $n = 100$ випробувань. Результати появи випадкової величини x задано статичним рядом

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	3	6	10	20	20	14	10	8	3	3

$H_0 = \{x\ розподілена\ за\ законом\ Пуассона\}$

при рівні значущості $\alpha = 0{,}15$.

<u>*Розв'язання.*</u> Закон Пуассона $P_i = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

Параметр λ закону Пуассона візьмемо таким, що дорівнює вибірковому середньому $\bar{x}$ (рівень значущості $\alpha = 0.15$).

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 3 +$$
$$+ 10 \cdot 3) = 5$$

Тоді $P_i = \dfrac{5^i}{i!} e^{-5}$.

Обчислимо ймовірність появи x_i за законом Пуассона.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	0,0067	0,337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,018

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(3-0.67)^2}{0.67} + \frac{(3-0.373)^2}{3.373} + \frac{(6-8.42)^2}{8.42} + \frac{(10-14.04)^2}{14.04} +$$

$$+ \frac{(20-17.55)^2}{17.55} + \frac{(14-14.62)^2}{14.62} + \frac{(10-10.44)^2}{10.44} + \frac{(8-6.53)^2}{6.53} + \frac{(3-3.63)^2}{3.63} +$$

$$+ \frac{(3-1.81)^2}{1.81} = 10.7904;$$

$$r = 11 - 1 - 1 = 9 \quad (k = 11; \bar{x} = \lambda).$$

За таблицею для $r = 9; \alpha = 0.15; \chi^2 = 10.7904$.

Умова $\chi^2 \le \chi^2_{kp}$ виконується.

Отже, гіпотеза про розподіл випадкових величин за законом Пуассона не суперечить вибірковим даним.

Приклад 5. Проведено $n = 55$ спостережень над випадковою величиною x.

Результати випробувань зведені в групований статистичний ряд.

Інтервали	(10;12)	(12;14)	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)	(22;24)
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл X за критерієм Пірсона χ^2 зі значущістю $\alpha = 0{,}10$.

<u>*Розв'язання*</u>. Ширина інтервалу групування $h = 2$; об'єм вибірки 55. Складемо статистичний ряд

y_i	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Оцінки середнього і середньоквадратичного відхилення

$$\bar{x} = \frac{1}{55}(11 \cdot 2 + 13 \cdot 4 + 15 \cdot 8 + 17 \cdot 12 + 19 \cdot 16 + 21 \cdot 10 + 23 \cdot 3) = 17{,}84;$$

$$S^2 = \frac{1}{55}\left(11^2 \cdot 2 + 13^2 \cdot 4 + 15^2 \cdot 8 + 17^2 \cdot 12 + 19^2 \cdot 16 + 21^2 \cdot 10 + 23^2 \cdot 3\right) -$$

$$- 17.84^2 = 8.526;$$

$$S = 2.92.$$

Складемо таблицю, де $f(z_1)$ - ординати щільності нормального розподілу $N(0;1)$.

y_i	n_i	$z_i = \frac{\lvert y_i - \bar{x}\rvert}{S}$	$f(z_c)$	$np_i = \frac{nh}{S} f(z_c)$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np}$
11	2	2,34	0,0258	0,972 1	0,0016
13	4	1,66	0,1006	3,790 1	
15	8	0,97	0,2492	9,388 1	
17	12	0,29	0,3825	14,409 2	0,403
19	16	0,40	0,3625	13,874 3	0,326
21	10	1,08	0,2227	8,389 4	0,138
23	3	1,77	0,0833	3,198 4	

$$\chi^2 = 0.919$$

Оскільки при виборі визначаються оцінки двох параметрів, то

$$r = 4 - 2 - 1 = 1.$$

За таблицею $\chi^2_{kp}(1) = 2{,}71; \chi^2 = 0{,}919 < \chi^2_{kp}$.

Тобто гіпотеза про нормальний розподіл не суперечить результатам випробувань.

Основні поняття елементів теорії кореляціїю пряма регресія

Дві випадкові величини можуть бути зв’язані або не зв’язані одна з одною деякою залежністю.

Статистичну залежність, при якій зміна однієї випадкової величини впливає на розподіл другої, якщо при цьому змінюється середнє значення другої, називають *кореляцією*.

Якщо X та Y незалежні випадкові величини, то коефіцієнт кореляції $\rho(x;y) = 0$; якщо $|\rho(x;y)| = 1$, то *x, y* зв’язані лінійно; якщо $0 < |\rho(x;y)| < 1$, то *x, y* залежні. Причому чим ближче $|\rho(x;y)|$ до одиниці, тим функціональна залежність ближче до вигляду $Y = ax + b$. Тому цілком природним є питання про наближене зображення зв’язку між Y та X лінійною функцією.

Означення. Пряма $y = ax + b$ називається прямою регресії *y* на *x*, якщо a та b вибрані так, щоб середнє квадратичне відхилення $ax + b$ від Y було мінімальним $M(y - ax - b)^2 = min$.

Аналогічно визначається пряма регресії *x* на *y*.

Рівняння прямої регресії Y на X має вигляд

$$y - M(y) = \rho \frac{\sigma y}{\sigma x}(x - M(x)).$$

Аналогічно X на Y $\quad x - M(y) = \rho \frac{\sigma x}{\sigma y}(x - M(y)).$

Обидві прямі збігаються, якщо $|\rho(x;y)| = 1$.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке статистична гіпотеза, чим відрізняються нульова та альтернативна гіпотеза?
2. У чому полягають помилки першого та другого рядів?
3. Опишіть алгоритм перевірки статистичних гіпотез за допомогою критерія згоди χ^2.
4. Яким чином за двовимірною вибіркою оцінити параметри лінійної регресії?

Література

1. Н.Я. Виленкин, Комбінаторика, «Наука», Москва, 1969. – 323 с.
2. И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко, Теория вероятностей и математическая статистика, «Вища школа», Киев, 1988. – 408 с.
3. Б.В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, «Наука», Москва, 1977. – 449 с.
4. В.П. Чистяков, Курс теории вероятностей, «Наука», Москва, 1987. – 224 с.
5. Е.С. Вентцель, Теория вероятностей, «Высшая школа», Москва, 1998. – 576 с.
6. В.Е. Гмурман, Теория вероятностей и математическая статистика, «Высшая школа», Москва, 1999. – 479 с.
7. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, в 2-ч томах, «Мир», Москва, 1984. – т.1 – 512 с. – т. 2 – 752 с.
8. П. Уиттл, Вероятность, «Наука», Москва, 1982. – 290 с.
9. З.Г. Шефтель, Теорія ймовірностей, «Вища школа», Киев, 1994. - 192 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНОСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій

Укладачі: Баліна О.І., канд. техн. наук, доцент
Безклубенко І.С., канд. техн. наук, доцент
Федоренко Н.Д., канд. техн. наук, професор
Білощицька С.В., канд. техн. наук, доцент
Буценко Ю.П., канд. фіз.-мат. наук, доцент
Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Комп’ютерна верстка

Підписано до друку Формат
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. Обл. –вид. арк.
Ум. фарбовідб. Тираж прим. Вид. № Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red_istad@ua.fm

Віддруковано в редакційному відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи
ДК №