

Вступ

До основних задач дослідження систем відносять:

- аналіз – вивчення елементів і властивостей функціонування систем;
- синтез – вибір структури і параметрів за заданими властивостями системи.

Часто зустрічаються системи, які мають елементи стохастичності або функціонують як стохастичні. Стохастичний характер можуть носити елементи і процеси, що протікають у системі, як внутрішні так і зовнішні. Найчастіше вплив зовнішнього середовища можна оцінити лише статистичними методами.

На практиці часто виникають задачі, пов'язані із багаторазовим використанням процесів, які описуються однотипними моделми, коли замовлення у систему надходять у випадкові моменти часу і обробляються за допомогою наявних у системі каналів обслуговування. Замовлення – це об'єкт (сутність), який необхідно обслужити і який є носієм замовлення, наприклад: покупці, що хочуть придбати товар, механізми або прилади, які вимагають ремонту, потяги або літаки, які необхідно прийняти на станції і т. д. Такі процеси отримали назву процесів обслуговування, а системи – систем масового обслуговування (СМО). В теорії СМО під вимогою розуміють сам запит на обслуговування. Наведемо декілька прикладів систем, що розглядаються як СМО.

Приклади.

1. Довідкова телефонна служба. Дзвінки абонентів утворюють потік замовлень, а працівники служби – сервіс або прилад обслуговування.
2. Автозаправочна станція. Автомобілі представляють потік замовлень на заправку паливом, а заправочні колонки – сервіси обслуговування.
3. Робота ЕОМ у режимі розділеного часу. Програми – замовлення на обробку, процесор – обробляючий прилад.

4. Організація роботи ремонтної майстерні. Механізм може знаходитись у двох станах: бути справним або вийти з ладу. Коли механізм знахотиться у певному стані, на нього діє потік з інтенсивністю λ , який переводить його в інший стан (наприклад, виникнення поломки), і потік з інтенсивністю μ , що повертає його у попередній стан (ремонт). Обидва потоки є Пуассонівськими та незалежними. Поломки – замовлення на ремонт, ремонтний цех – сервіси обслуговування.
5. Обробка деталей на конвейері. Деталі – замовлення на обробку, обробляючий пристрій – сервіс.

Необхідно зазначити, що моделі теорії масового обслуговування є основою багатьох галузей досліджень: теорія надійності, планування виробничих потужностей, теорія розвитку популяцій, логістика та менеджмент.

Розробкою методів дослідження СМО займається спеціальний розділ теорії ймовірностей – теорія масового обслуговування. Теорія масового обслуговування часто називається теорією черг (*англ.* Queue Theorie).

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення залежності між факторами, що визначають функціональні можливості системи, і ефективністю її функціонування. В більшості випадків всі параметри СМО є випадковими величинами або функціями, тому такі системи відносяться до стохастичних системам.

Основи теорії масового обслуговування були закладені А. К. Ерлангом на початку 20-го століття, який працював у Копенгагенській телефонній компанії. У 1909 році він опублікував працю «Теорія ймовірностей і телефонні переговори», де вирішив ряд задач для систем масового обслуговування з відмовами. Термін "теорія масового обслуговування" був введений О. Я. Хінчиним, який вважається її засновником. Значний внесок у розвиток цієї теорії внесли такі математики, як Б. В. Гніденко, А. М. Колмогоров, О. С. Вентцель.

1. Основні поняття, класифікація та параметри СМО

1.1. Основні поняття СМО

Система масового обслуговування – математичний (абстрактний) об'єкт, що складається з одного або декількох приладів (каналів) обслуговування (П) замовлень (З), що надходять у систему через накопичувач (Н) і утворюють чергу (Ч) або без накопичувача безпосередньо на обслуговування (рис. 1).

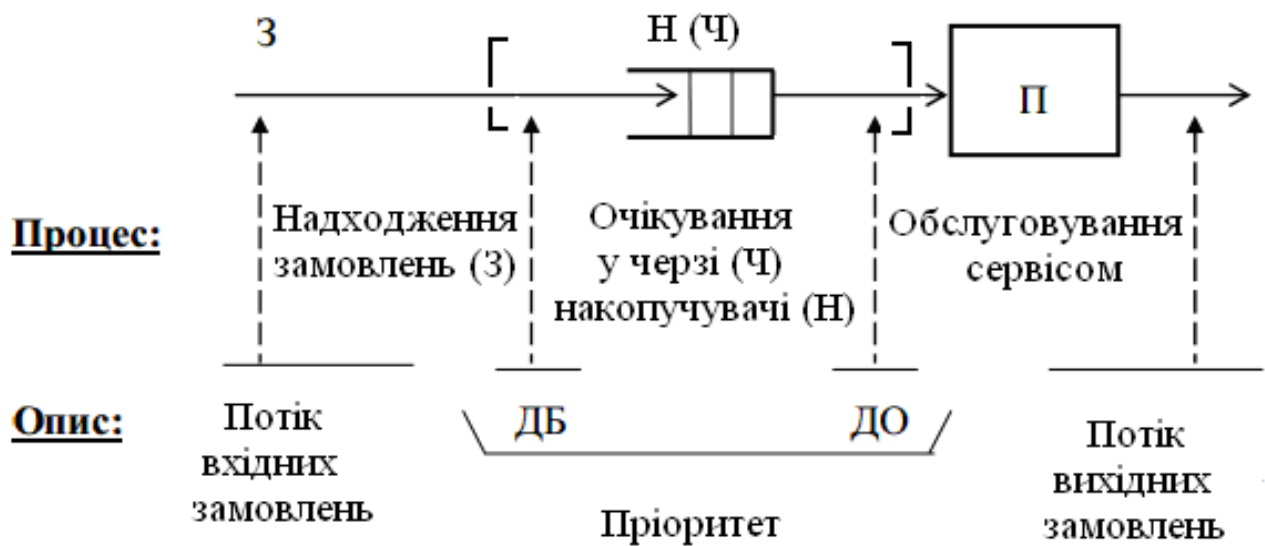


Рис.1. Схема процесів СМО

Замовлення (вимога, запит, виклик, клієнт) – це об'єкт, що надходить у систему і вимагає обслуговування. Сукупність замовлень, розподілених у часі, утворює потік замовлень.

Потоки замовлень поділяють на вхідний та вихідний. Потоки замовлень характеризуються певними властивостями.

Обслуговуючий прилад (пристрій) або сервіс – елемент СМО, призначенням якого є обслуговування замовлень. В кожний момент часу прилад може обслуговувати лише одне замовлення.

Сам процес обслуговування розглядається як затримка замовлення в обслуговуючому приладі.

Час обслуговування – час затримки замовлення у приладі.

Накопичувач (буфер) – сукупність місць для очікування замовлень на обслуговування. Система може мати накопичувач, а може не мати. Якщо накопичувач відсутній і всі сервіси зайняті, то замовлення, що надходить у систему, відхиляється. Якщо накопичувач існує і є вільні місця, то замовлення стає у чергу (перебуває у системі).

Замовлення, що знаходиться у системі, може перебувати у двох станах:

- в стані очікування (у накопичувачі), якщо всі прилади зайняті;
- в стані обслуговування (у приладі).

Кількість місць у накопичувачі визначає його ємність і визначає довжину черги.

Дисципліна буферизації (ДБ) – правило занесення замовлень у накопичувач (буфер).

Дисципліна обслуговування (ДО) – правило вибору замовлень із черги для обслуговування приладом.

1.2. Типи потоків замовлень

Потік являє собою сукупність об'єктів, що сприймаються як єдине ціле, та існує як процес на деякому часовому інтервалі і вимірюється в абсолютних одиницях за певний період. Параметри потоку – це параметри, що характеризують процес. Основними параметрами потоку є: початкова і кінцева точки руху, траєкторія руху, довжина шляху (міра траєкторії), швидкість і час руху, проміжні точки, інтенсивність.

Потоки класифікуються за різними ознаками:

- 1) по відношенню до даної системи:
 - внутрішні потоки – циркулюють усередині системи;
 - зовнішні потоки – знаходяться поза системою;
- 2) за ступенем неперервності:

- неперервні потоки – в кожен момент часу по траєкторії потоку переміщується певна кількість об'єктів;
- дискретні потоки – утворюються об'єктами, що переміщуються з інтервалами;

3) за ступенем стабільності:

- стабільні потоки – характеризуються сталістю значень параметрів протягом певного проміжку часу;
- нестабільні потоки – характеризуються змінами параметрів потоку.

Також розрізняють за характером переміщення, періодичністю, синхроністю і таке інше.

Розглянемо типи потоків, які виділяють в теорії масового обслуговування.

За характером замовлень потоки поділяють на:

- **однорідний потік** – це потік у якому всі замовлення мають однакові властивості.
- **неоднорідний потік** – це потік, коли властивості замовлень відрізняються (наприклад, пріоритетами).

Приклади.

1. Нехай на станцію надходять потяги. Якщо ми їх не розрізняємо, то можна вважати, що маємо справу з однорідним потоком. Якщо ми їх розрізняємо на пасажирські та вантажні, то потік буде неоднорідним, але його можна розділити на два однорідних потоки.
2. Бібліотека університету обслуговує студентів та викладачів, причому, викладачі можуть обслуговуватись в першу чергу. Тоді ми маємо справу з неоднорідним потоком, у якому замовлення відрізняються пріоритетами.

Також потоки розрізняються за ступенем регулярності, а саме розподілом часу між надходженням замовлень. Розглянемо потік однорідних подій. Нехай $t_1, t_2, \dots$ – моменти часу появи подій, причому $t_{i+1} > t_i, i \geq 1$.

Регулярним (детермінованим) потоком називається потік, у якому замовлення надходять послідовно одне за одним через однакові проміжки часу: $\tau = t_{i+1} - t_i = \text{const}$.

Стохастичним (ймовірностним) називають потік, що характеризується випадковим характером параметрів, які в кожен момент часу приймають певне значення з певним ступенем ймовірності. Можна сказати, що це послідовність випадкових величин. Стохастичний потік характеризується середнім інтервалом часу між появою подій (математичним сподіванням) та середнім відхиленням від середньої довжини інтервалу (середньоквадратичним відхиленням).

Рекурентним називають стохастичний потік у якому всі функції розподілу інтервалів часу між замовленнями співпадають (підпорядковані одному закону розподілу $P_i(\tau) = P(\tau_i < \tau)$, $i > 1$). Рекурентний потік представляє таку послідовність подій, у якого всі часові інтервали між подіями підпорядковані однаковому закону розподілу, що дозволяє дослідити один інтервал і розповсюдити його статистичні характеристики на всі інші. Потік називається рекурентним в силу того, що при його моделюванні використовують рекурентні процедури: спочатку інтервал часу τ_1 , потім τ_2 і т.д.

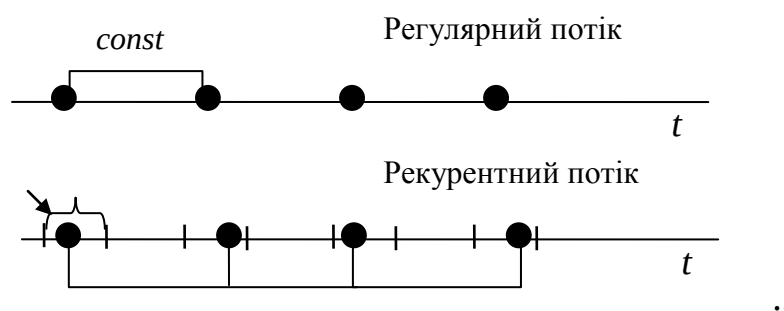


Рис. 2. Приклади графічного представлення регулярного та стохастичного потоків

Стаціонарний ординарний рекурентний потік із запізненням називають потоком **Пальма**.

Приклади.

1. Потяги метрополітену надходять через однакові проміжки часу і утворюють регулярний потік. Прихід тролейбусів або автобусів на зупинку, яка не є кінцевою, вже не буде утворювати регулярний потік. Проміжки часи між їх приходами будуть становити визначений інтервал плюс-мінус похибку, яка обумовлена наявністю світлофорів та іншого транспорту на маршруті.
2. Час між метрологічним оглядом приладу чітко визначений, сукупність оглядів буде утворювати регулярний потік.
3. Нехай деякий пристрій неперервно працює до моменту відмови, після чого миттєво заміщується. Строк безвідмовної роботи є випадковим, але окремі пристрої виходять з ладу незалежно одна від одної. Тоді потік відмов представляє собою потік Пальма.
4. Група літаків летить у бойовому порядку з однаковою швидкістю, дотримуючись «строю», – певної відстані від іншого літака, що летить попереду. Зрозуміло, що ця відстань дотримується з певною похибкою в силу різних причин. Моменти часу перетину заданого рубежу будуть утворювати потік Пальма. Якщо кожний літак буде намагатись дотримуватись певної відстані від ведучого літака, а не від сусіднього, то тоді це вже не буде потік Пальма.

Потоком **без наслідків** називають потік у якому ймовірності появи подій на часових проміжках, що не перетинаються, незалежні (незалежність процесу від передісторії). Потік без наслідків характеризується тим, що кількість подій на кожному проміжку часу не залежить від кількості подій на інших проміжках.

Потоком з **обмеженими наслідками** (потік Пальма) називається потік, для якого інтервали часу між подіями незалежні.

Ординарним називають потік, для якого ймовірність появи двох і більше подій на малому проміжку часу ($\tau \rightarrow 0$) значно менше, ніж поява однієї події на цьому проміжку.

Потік називають **стаціонарним**, якщо всі його ймовірнісні характеристики не змінюються з часом. Для стаціонарного потоку ймовірність появи певної кількості подій на інтервалі часу залежить тільки від довжини цього інтервалу і не залежить від його розташування на часовій осі.

Стаціонарний ординарний потік без наслідків називається **Пуассонівським**, де ймовірність появи n подій на проміжку часу τ з інтенсивністю λ (середньою кількістю подій, що з'являється за одиницю часу):

$$P_n(\tau) = \frac{(\lambda \cdot \tau)^n \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}}{n!}$$

і має наступні характеристики:

- $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ – щільність розподілу;
- $m_x = \lambda \cdot \tau$ – математичне сподівання;
- $D_x = \lambda \cdot \tau$ – дисперсія.

Для розподілу Пуассона математичне сподівання дорівнює дисперсії.

Самі проміжки часу мають експоненціальний закон розподілу:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0,$$

де щільність розподілу: $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$.

Якщо у простому потоці розглядати лише кожну k -ту подію, то отримаємо **потік Ерланга** k -того порядку. Наприклад, якщо розглядати кожну третю подію, то будемо мати потік Ерланга 3-го порядку (рис. 3).

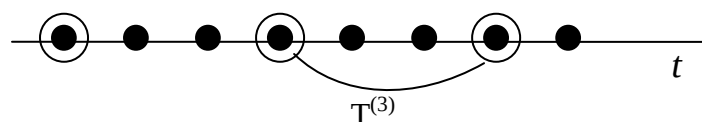


Рис. 3. Перетворення простого потоку у потік Ерланга 3-го порядку

Просіювання подій призводить до того, що між подіями з'являються наслідки, детермінація яких збільшується із зростанням k . При збільшенні значення k , події все рівномірніше розташовуються на часовій вісі, їх розкид зменшується, а регулярність збільшується. Основою цього є той факт, що сума випадкових величин є величиною не випадковою (центральна гранична теорема), причому із збільшенням кількості доданків результат буде більш передбачуваним.

Щільність ймовірності розподілу інтервалів між випадковими величинами в потоці Ерланга k -го порядку становить:

$$f(T) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

$\lambda_k = \lambda/k$ – інтенсивність потоку Ерланга k -го порядку, де λ — інтенсивність простішого потоку Пуасона, а λ_k – інтенсивність просіяного k разів потоку, (в k разів менше). Параметри закону Ерланга обчислюються за формулами:

$$M_k = 1/\lambda_k, \sigma_k = 1/(\lambda_k \sqrt{k}).$$

При $k \rightarrow \infty$ події відбуваються строго розміряно, так як $\sigma \rightarrow 0$. Можна зробити висновок, що порядок потоку Ерланга – є мірою наслідків потоку.

Для стохастичних потоків існує два типи перетворень: їх сума та розріджування.

Сумарним називається потік, що утворюється шляхом додавання випадкових подій вихідних потоків, що сумуються. Необхідно відзначити дві основні властивості сумарних потоків.

1) Для сумарного потоку існує гранична теорема: сума незалежних, ординарних і стаціонарних випадкових потоків збігається до пуассонівського потоку при необмеженому збільшенні числа доданків. Інтенсивності потоків, що додаються, повинні при цьому бути однакової розмірності. Ця теорема аналогічна центральній граничній теоремі для випадкових величин.

2) При додаванні n як стаціонарних, так і нестаціонарних потоків інтенсивність сумарного потоку дорівнює сумі інтенсивностей потоків-доданків і виражається співвідношенням:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t).$$

Розрідженим (рідким) потоком називається потік, що виходить з вихідного потоку шляхом випадкового видалення з нього подій з постійною ймовірністю q . Іншими словами, подія вихідного потоку лишається в розрідженому потоці з ймовірністю $p = 1 - q$.

Слід розрізняти операцію детермінованого "просіювання", за допомогою якої виходять потоки Ерланга, і операцію випадкового розрідження. Розріджені потоки мають наступні основні властивості:

1) Для рідкого потоку існує гранична теорема: якщо послідовно розріджувати вихідний стаціонарний ординарний потік Пальма з ймовірністю $p_1, p_2, \dots, p_n, n \rightarrow \infty$, то багато разів розріджений потік прямує до Пуассонівського.

2) Інтенсивність розрідженого потоку дорівнює інтенсивності вихідного потоку, помноженій на ймовірність збереження події в потоці:
 $\lambda_p = p\lambda$.

Приклади

1. Середній інтервал часу між послідовним надходженням подій становить 0,5 години, тоді інтенсивність потоку становить $\lambda = 2$ (зам/год.)
2. Розглянемо виклики швидкої допомоги, які надходять випадковим чином (всі виклики вважаються однаковими і утворюють однорідні події). За довгий час спостережень можна сказати, що у середньому надходить вісім викликів за добу. Отже інтенсивність потоку буде становити: $\lambda = \frac{8}{24}$ (од./год.) (значення інтенсивності можна вважати сталим, а потік стаціонарним). Середня довжина інтервалу часу між

окремими викликами становить $\mu = 1/\lambda = 3(\text{год.})$ і на кожному інтервалі лише один виклик (ординарність). Виклики надходять незалежно один від одного (події без наслідків). Отже ми маємо справу з Пуасонівським потоком.

Алгоритм моделювання процесу на проміжку часу $T = 100(\text{год.})$ наведений на рис.4.

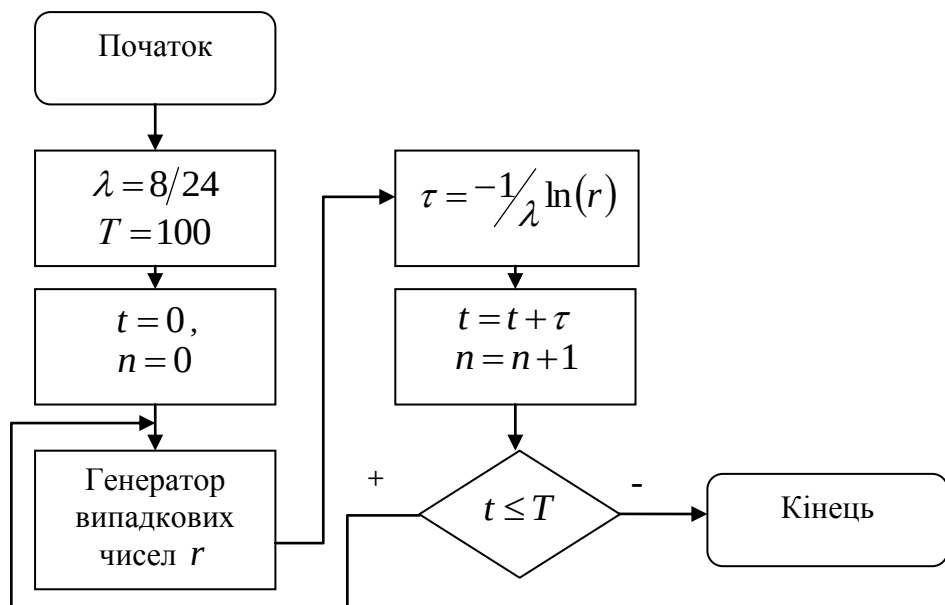


Рис. 4. Алгоритм моделювання надходження викликів швидкої

3. На комп'ютер надходять програми з інтенсивністю $\lambda = 1,5(\text{завд.}/\text{сек.})$

(потік завдань є простим). Знайти ймовірність, що за 2 секунди:

- а) не надійде жодної програми;
- б) надійде рівно одна програма;
- в) надійде хоча б одна програма.

Розв'язок. Випадкова величина X – кількість програм в секунду має закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda \cdot \tau = 1,5 \cdot 2 = 3$.

- а) Ймовірність, що не надійде жодної програми ($m = 0$):
 $P(X = 0) = e^{-3} \approx 0,498$.

б) Ймовірність, що надійде рівно одна програма ($m=1$):

$$P(X=1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} \approx 0,1494.$$

в) Ймовірність, що надійде хоча б одна програма ($m \geq 1$):

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,498 = 0,502.$$

4. В результаті спостережень визначені статистичні оцінки інтервалів часу між подіями:

- $m_t = 2$ хв – середня довжина інтервалу часу між подіями;

- $\sigma_t = 0,9$ хв – середньоквадратичне відхилення інтервалу часу.

Необхідно підібрати потік Ерлангу, з приблизно подібними характеристиками, визначити його інтенсивність та порядок.

Розв'язок. Інтенсивність потоку Ерланга – це величина, обернена до середньої довжини інтервалу часу між подіями:

$$\lambda_k = 1/M_k = 1/2 = 0,5 \text{ подій/год.}$$

Знайдемо порядок потоку Ерланга: $k = 1/(\sigma \cdot \lambda_k)^2 = 1/(0,9 \cdot 0,5)^2 \approx 4,9$.

В якості значення порядку вибираємо найближче ціле значення: $k=5$.

Отже потік можна наблизити потоком Ерланга 5-го порядку із

щільністю розподілу: $f_5(t) = \frac{(5 \cdot 0,5)^5}{4!} t^4 e^{-5 \cdot 0,5 t} = 4,1 t^4 e^{-2,5 t}$, $t > 0$

5. Нехай проводились спостереження за роботою ламп освітлення вуличних ліхтарів на протязі довгого періоду часу $T=100$ років. Відомо, що середній час безвідмовної роботи лампи становить $M_k=1,5$ року із середньоквадратичним відхиленням $\sigma_k=0,5$ року.

Розв'язок. Так як $M_k \neq \sigma_k$, то $k \neq 1$ і ми маємо справу з потоком

Ерланга з інтенсивністю $\lambda_k = 1/M_k = 1/1,5 = 0,67$. Отже за рік перегоряє

0,67 лампочки або 67 ламп за 100 років. Обчислимо порядок потоку:

$$k = \frac{1}{(\sigma \cdot \lambda_k)^2} \approx 9.$$

Обчислимо інтенсивність відповідного Пуассонівського потоку:

$$\lambda = \lambda_k \cdot k = 0,67 \cdot 9 \approx 6.$$

Вважається, що потік подій є заданим, якщо:

- а) задано скінченновимірний розподіл послідовності проміжків часу між подіями $\{\tau_i, i \geq 1\}$ або для $\forall n \in N, \dots n \geq 1$ задано розподіл випадкового вектору $(\tau_1, \dots, \tau_n)$;
- б) задано скінченновимірний розподіл процесу $\nu(t)$ або $\forall n \in N, \dots n \geq 1$ та набору не від'ємних чисел $\tau_1, \dots, \tau_n$ задано розподіл випадкового вектору $(\nu_1, \dots, \nu_n)$.

1.3. Структура СМО

Структура СМО визначається заданим потоком замовлень, кількістю обслуговуючих приладів, тривалістю обслуговування, кількістю місць очікування на обслуговування. Структура СМО та її основні елементи прийнято представляти схемою, наведеною на рис. 5.

Генератор (джерело замовлень) – об'єкт, що породжує замовлення. Генератор характеризується множиною можливих замовлень та визначає характеристики вхідного потоку. Генератор може мати скінченну або нескінченну потужність.

В залежності від характеру замовлень розрізняють замкнені та розімкнуті СМО. У розімкнених системах множина замовлень, що виробляється генератором, вважається нескінченною і поведінка генератора не залежить від стану системи. Для замкнених систем характерним є

скінченна кількість замовлень, яка циркулює у системі. Оброблені замовлення можуть знову повернутись у систему. Поведінка джерела у замкнених СМО є функцією від її стану.

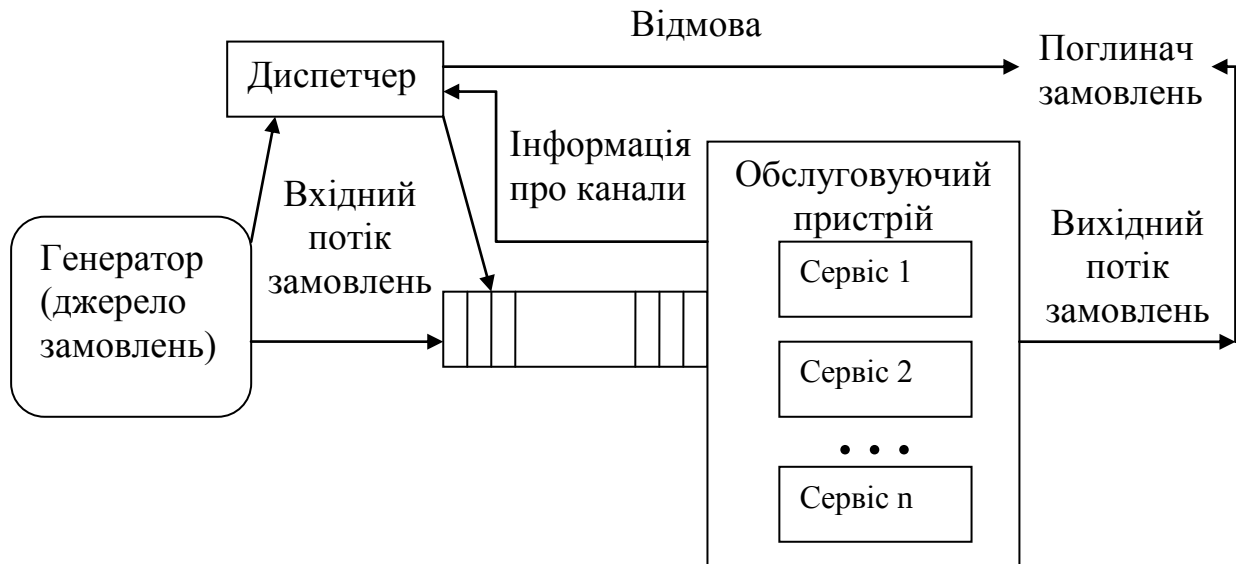


Рис. 5. Структурна схема СМО

Процес генерації замовлень в загальному випадку є випадковим і розглядається як потік однорідних подій, що виникають через випадкові проміжки часу, які можуть бути підпорядковані різним законам розподілу. В теорії масового обслуговування найбільше поширення має простий потік замовлень, у якому часові інтервали між сусідніми подіями описуються експоненціальним законом розподілу:

$$f(\tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda\tau}, \text{ де } \tau = t_{i+1} - t_i.$$

Припущення про простий потік дозволяє отримати аналітичні залежності характеристик СМО від параметрів вхідного потоку, що значно складніше для інших видів потоку замовлень. Появу замовлень можна оцінювати за допомогою розподілу Пуассона:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!},$$

де:

$p(x)$ – ймовірність надходження x замовлень за одиницю часу;

x – число замовлень за одиницю часу;

λ – середня кількість замовлень за одиницю часу *(інтенсивність).

Диспетчер – це елемент системи, який розподіляє замовлення по каналах обслуговування. Його основне призначення:

- приймати чи відхиляти замовлення;
- формувати чергу, якщо канали зайняті;
- направляти замовлення на обслуговування, коли є вільний канал;
- приймати інформацію від пристроїв обслуговування про стан каналів;
- слідкувати за часом роботи системи.

Черга – накопичувач замовлень. Основні характеристики черги:

- довжина (кількість місць);
- дисципліна обслуговування.

Виділяють наступні принципи побудови черги:

- FIFO (first in-first out) – першим прийшов-першим вийшов (черга);
- LIFO (last in-first out) – останнім прийшов-першим вийшов (стек);
- випадковий відбір замовлень;
- з пріоритетами, де пріоритет – це переважаюче право на занесення замовлення у накопичувач або його вибір з черги на обслуговування;
- з обмеженим часом очікування (цей випадок можна звести до випадку обмеженої черги)

Обслуговуючий пристрій – пристрій обробки замовлень. Основними характеристиками обслуговуючого пристрою є:

- конфігурація системи обслуговування;
- режим обслуговування.

Система обслуговування може складатись з одного або декількох пристроїв в залежності від чого розрізняють одноканальні та багатоканальні СМО. Кількість каналів визначає кількість замовлень, які можуть одночасно почати оброблятись. Інша характеристика конфігурації – це кількість фаз

обслуговування або кількість послідовних етапів обробки одного замовлення (рис. 6).

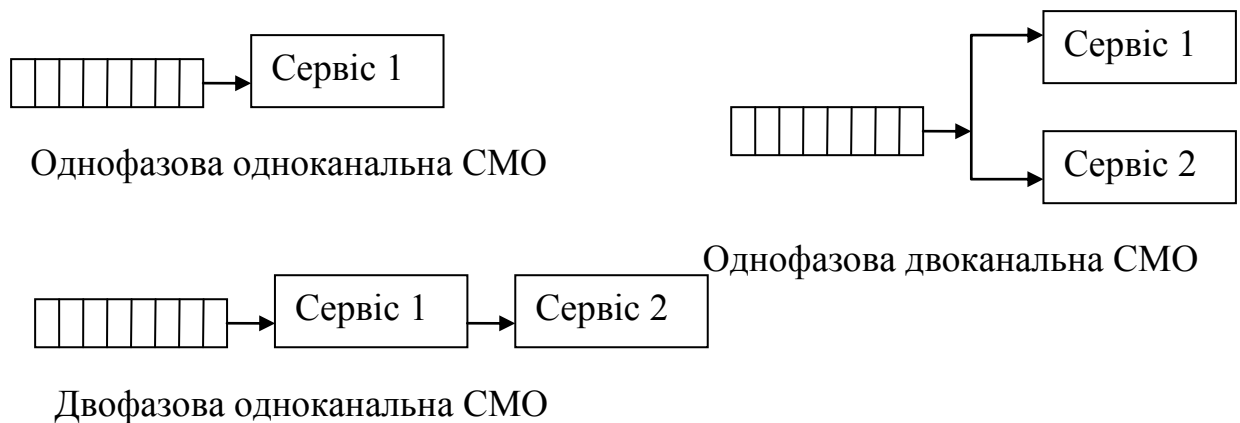


Рис. 6. Приклади конфігурацій СМО

Процес функціонування СМО можна представляти у вигляді послідовності фаз обслуговування, які можуть мати свою структуру та характеристики. Тоді таку багатофазову систему представляють як стохастичну мережу.

Стохастичною мережею (СМО) називається сукупність взаємозв'язаних систем масового обслуговування, для якої визначені ймовірності переходів замовлень між кожною окремою підсистемою СМО (рис. 7).

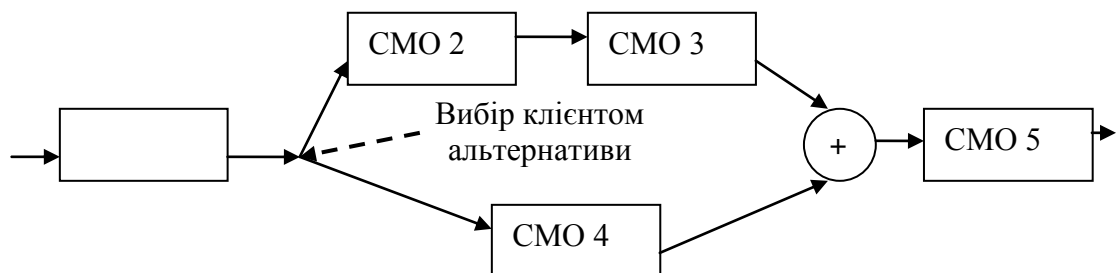


Рис. 7. Приклад мережі масового обслуговування

Режим обслуговування може характеризуватись або постійним або випадковим часом обслуговування. При постійному часі, на обслуговування кожного замовлення витрачається однаковий час, наприклад, на миття

автомобіля. У випадку випадкового часу (наприклад, заправка автомобіля) найчастіше застосовується експоненціальний розподіл:

$$F(t) = P(t < T) = 1 - e^{-\lambda t},$$

де $P(t < T)$ – ймовірність того, що фактичний час обслуговування замовлення не буде перевищувати заданої величини T при середній інтенсивності λ

Кожний канал обслуговування може знаходитись в одному з трьох можливих станів:

- канал вільний;
- канал зайнятий;
- канал не працює.

Відмова обслуговування відбувається, якщо всі канали зайняті (при цьому деякі з них можуть бути непрацездатними).

Крім наведених основних елементів в СМО також часто виділяють наступні складові:

- термінатор – поглинач замовлень;
- склад – накопичувач ресурсів та готових замовлень;
- бухгалтерський рахунок – для виконання фінансових операцій;
- менеджер – розпорядник ресурсів.

Приклад. Існує міська мережа ремонту та обслуговування побутових пристроїв, яка складається з центрального call-центру, куди надходять замовлення. Всі замовлення розподіляються між районними відділеннями. Кожне відділення має свій штат персоналу, між яким розподіляються пакети замовлень. Кожний ремонтник має свою кваліфікацію, яка визначає середній час на виконання замовлення, а отже і виробничу потужність відділення.

1.4. Класифікація СМО

Існує велика кількість різноманітних систем масового обслуговування, які розрізняються як структурою, так і організацією процесу функціонування. Класифікація СМО за структурними елементами наведена на рис. 8.



Рис. 8. Класифікація СМО

В залежності від характеру процесів надходження та обслуговування замовлень в систему класифікація СМО та їх мереж наведена на рис. 7. Якщо часові проміжки між замовленнями та час обслуговування є випадковими величинами, то такі системи є стохастичними, якщо вони визначені – то детермінованими. За виглядом залежності, що пов'язує інтенсивності потоків в різних вузлах системи, їх поділяють на лінійні та нелінійні, за типом вхідних та вихідних потоків – на однорідні та неоднорідні.

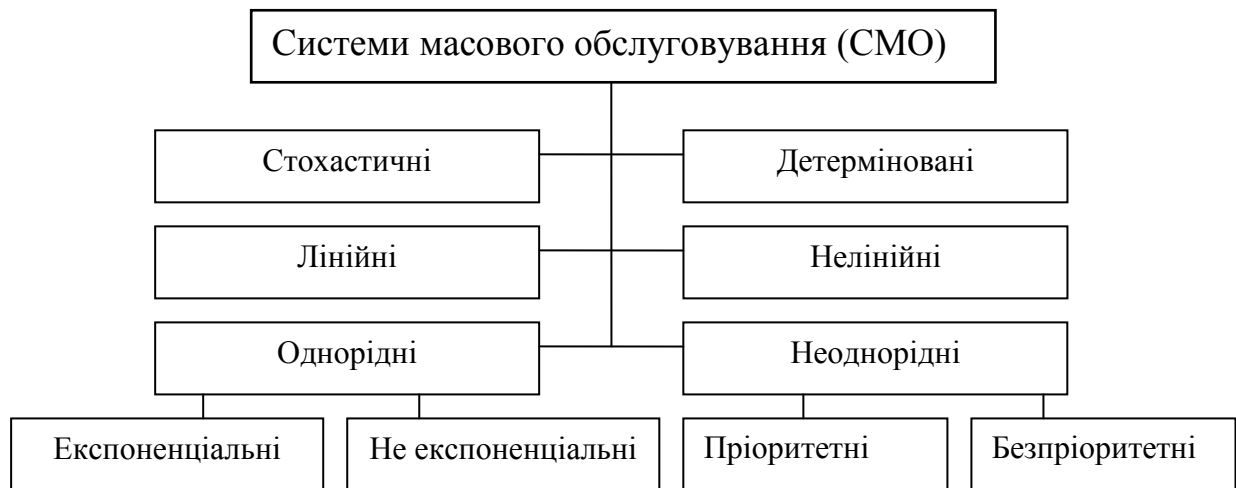


Рис. 9. Класифікація мереж СМО

В лінійних мережах інтенсивність потоків замовлень між i -м та j -м вузлами описується лінійною залежністю:

$$\lambda_i = k_{ji} \lambda_j,$$

де k_{ji} — коефіцієнт пропорційності (передачі), який показує у скільки разів відрізняються потоки у вузлі i та вузлі j .

Якщо така залежність справедлива для всіх пар вузлів, то її можна записати як:

$$\lambda_i = k_i \lambda_0,$$

де λ_0 — інтенсивність вхідного потоку мережі СМО.

Коефіцієнт передачі можна трактувати як середню кількість попадання замовлення в даний вузол за час його перебування у мережі.

Розглянувши структуру СМО, можна зазначити, що її функціонування визначається наступними основними факторами:

- a — ймовірностним розподілом моментів надходження замовлень (вхідний потік);
- b — ймовірностним розподілом часу обслуговування (вихідний потік);
- c — кількістю та продуктивністю каналів обслуговування та їх конфігурацією (паралельне, послідовне, комбіноване);
- e — максимальною ємністю системи;

- d – дисципліною черги, довжина черги визначається як різниця $e - c$;
- f – потужністю генератора замовлень.

Для скороченого позначення типу СМО застосовується символіка введена Кендаллом-Лі:

$$(a/ b/ c)(d/ e/ f),$$

де використовуються наступні стандартні позначення:

- для вхідного та вихідного потоку (a, b) :
 - M – марківський процес (експоненціальний розподіл);
 - D – детермінований потік;
 - E_k – потік Ерланга або гама розподіл (суми незалежних випадкових величин мають експоненціальний розподіл);
 - GI – довільний тип розподілу моментів надходження замовлень;
 - G – довільний тип розподілу часу обслуговування;
- для дисципліни черги:
 - FCFS – першим прийшов – першим вийшов (FIFO);
 - LCFS – останнім прийшов – першим вийшов (LIFO);
 - SIRO – випадковий відбір замовлень;
 - GD – довільний тип дисципліни.

Значення параметрів c , e , f – натуральні числа, включаючи нескінченність.

1.5. Режими та параметри СМО

Для розробки аналітичних методів розрахунку СМО в багатьох випадках висувається ряд припущень:

- замовлення, що надходить у систему миттєво попадає на обслуговування, якщо є вільні канали;
- замовлення вибирається з черги миттєво (сервіси не простоюють);
- сервіс може в кожний момент часу обслуговувати лише одне замовлення;

- надходження замовлень в систему та час їх обслуговування не залежить від кількості замовлень в системі;
- час обслуговування не залежить від швидкості (інтенсивності) надходження замовлень.

Система масового обслуговування може працювати у двох режимах:

- стаціонарному, коли характеристики СМО не змінюються;
- нестаціонарному, коли характеристики системи змінюються з часом, що може бути обумовлено наступними чинниками:

- перехідним процесом (наприклад, початком роботи), коли характеристики функціонування змінюються і прямують до граничних значень, що визначають стаціонарний режим;
- нестаціонарним вхідним або вихідним потоком замовлень.

Також, у деяких системах з необмеженою чергою може виникнути ситуація перевантаження системи, коли інтенсивність вхідного потоку перевищує інтенсивність процесу обслуговування і довжина черги прямує до нескінченності.

Як правило, розглядається робота СМО у стаціонарному режимі, а для систем з необмеженою чергою висувається умова, що надходження замовлень не перевищує інтенсивності обслуговування (відсутня ситуація перевантаження системи).

Для опису СМО використовують три групи параметрів:

- структурні;
- навантаження;
- функціональні.

До структурних параметрів відносяться:

- кількість обслуговуючих пристроїв c ($c=1$ для одноканальної системи обслуговування і $c > 1$ для багатоканальної);
- довжина черги k ;
- спосіб взаємозв'язку черги та обслуговуючих пристроїв (для багатоканальних СМО), наприклад у вигляді матриці зв'язків.

Параметри навантаження включають:

- кількість класів замовлень, що надходять у систему ($H=1$ для систем з однорідним потоком і $H > 1$ для випадку неоднорідних потоків);
- закон розподілу інтервалів часу між надходженням замовлень, який характеризується інтенсивністю $\lambda = 1/n$, де n – середня кількість замовлень, що надходить за одиницю часу;
- закон розподілу часу обслуговування або вихідного потоку, який характеризується інтенсивністю $\mu = 1/\tau$, де τ – середній час обслуговування одиничним пристроєм. Для багатоканальної системи $N\mu$ – швидкість обслуговування, коли зайняті всі сервіси.

Функціональні параметри представляють собою конкретні стратегії управління потоками замовлень, які визначають правила управління чергою.

1.6. Випадкові процеси. Граф станів. Марківські процеси

Процес роботи СМО представляє собою випадковий процес, який полягає в тому, що у випадкові моменти часу система переходить з одного стану в інший, а саме змінюється кількість зайнятих каналів, кількість замовлень в черзі і таке інше.

Процес називається *процесом із дискретними станами*, якщо всі можливі стани можна перерахувати і перехід з одного стану в інший виконується миттєво (стрибок).

Процес називається *процесом із неперервними станами*, якщо моменти переходу системи з одного стану в інший є випадковими (не фіксовані заздалегідь).

Процес роботи СМО представляє собою випадковий процес з дискретними станами та дискретним або неперервним часом. Системи з дискретними станами та дискретним часом називаються ланцюгами Маркова. Такі системи зручно графічно представляти у вигляді графу станів:

орієнтованого графу, де вершини (відображаються прямокутниками) – це множина станів системи $\{S_i\}_{i=\overline{1,n}}$, а дуги – можливі переходи між станами. Кожній дузі відповідає ймовірність переходу системи p_{ij} із стану i в стан j , $i, j = \overline{1, n}$ або для найпростішого потоку – інтенсивність λ_{ij} . Формально система може бути описана за допомогою матриці переходів:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так як система в кожний момент часу може знаходитись лише в одному стані, то для кожного рядка ймовірності становлять повну групу подій:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Приклад. Розглянемо технічну систему для якої визначені наступні стани:

- S_1 – система справна і виконує певні операції;
- S_2 – система справна і знаходиться у стані очікування;
- S_3 – система несправна, але факт несправності не встановлений;
- S_4 – система несправна, факт несправності встановлений;
- S_5 – виконуються ремонтні роботи після яких система знову стає до ладу.

Граф станів системи наведений на рис. 10.

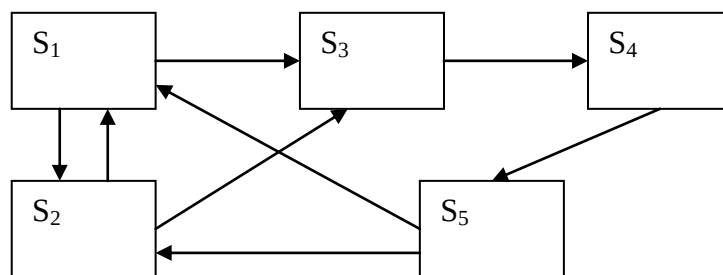


Рис. 10. Граф станів системи

Відповідна матриця перехідних ймовірностей буде мати вигляд:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Випадковий процес називається марківським або процесом без наслідків, якщо в будь-який момент часу його характеристики залежать лише від поточного стану і не залежать від того як система у цей стан потрапила (не залежать від передісторії). Аналіз СМО значно спрощується, якщо процес її роботи – марківський.

У випадку систем з дискретними станами та дискретним часом для визначення граничних ймовірностей роботи системи у стаціонарному режимі складається система рівнянь за наступними правилами:

в кожному рівнянні ліворуч стоїть гранична ймовірність i -го стану p_i помножена на сумарну інтенсивність вихідних потоків, а праворуч – сума добутків інтенсивностей вхідних потоків на ймовірності тих станів, з яких ці потоки виходять.

Так для прикладу, наведеного на рис. 10, система рівнянь буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \\ p_1(\lambda_{12} + \lambda_{13}) = p_2\lambda_{21} + p_5\lambda_{51} \\ p_2(\lambda_{21} + \lambda_{23}) = p_1\lambda_{12} + p_5\lambda_{52} \\ p_3\lambda_{34} = p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23} \\ p_4\lambda_{45} = p_3\lambda_{34} \\ p_5(\lambda_{52} + \lambda_{51}) = p_4\lambda_{45} \end{cases}$$

Маємо систему з шести рівнянь з п'ятьма невідомими. Залишивши перше рівняння, одне з наступних рівнянь можна виключити.

Гранична ймовірність показує середній відносний час перебування системи у відповідному стані.

У випадку систем з дискретними станами та неперервним часом для визначення граничних ймовірностей роботи системи у стаціонарному режимі складається система диференціальних рівнянь, які називаються рівняннями Колмогорова:

у кожному рівнянні ліворуч стоїть похідна ймовірності відповідного стану, а праворуч – сума вхідних потоків мінус сума вихідних потоків, які описуються подібно правилу для випадку систем з дискретним часом.

Для випадку неперервного часу система рівнянь Колмогорова для графу, представленого на рис. 5, буде мати вигляд:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -p_1(\lambda_{12} + \lambda_{13}) + (p_2\lambda_{21} + p_5\lambda_{51}) \\ \frac{dp_2}{dt} = -p_2(\lambda_{21} + \lambda_{23}) + (p_1\lambda_{12} + p_5\lambda_{52}) \\ \frac{dp_3}{dt} = -p_3\lambda_{34} + (p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23}) \\ \frac{dp_4}{dt} = -p_4\lambda_{45} + p_3\lambda_{34} \end{cases}$$

Так як граничні ймовірності є постійними, то їх похідні в рівняннях Колмогорова можна замінити нульовими значеннями в результаті чого будемо мати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що описують роботу системи у стаціонарному режимі.

Приклади.

1. Розглянемо роботу багатозадачної програмної системи, яка в будь-який момент часу може знаходитись в одному з трьох можливих станів: S_1 – виконувати пріоритетну програму, S_2 – виконувати фонову програму,

S_3 – знаходитись у стані очікування. Тривалість знаходження системи у кожному із станів є величиною фіксованою і становить Δt . В результаті довгострокового спостереження були визначені перехідні ймовірності перебування системи в кожному із можливих станів:

$$\|p\| = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,05 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Побудувати граф станів системи, скласти систему рівнянь для визначення граничних ймовірностей та визначити коефіцієнт використання процесора.

Розв’язок. За заданою матрицею перехідних ймовірностей побудуємо граф станів (рис. 11).

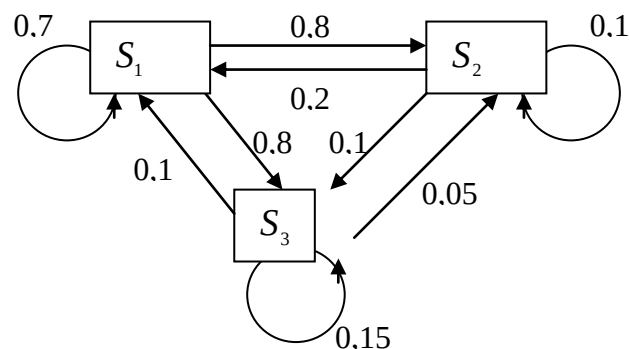


Рис. 11. Граф станів багатозадачної програмної системи

Так як наша система відноситься до систем з дискретним часом та дискретними станами для встановленого режиму роботи рівняння балансу будуть мати вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$S_1 = 0,7S_1 + 0,8S_2 + 0,8S_3$$

$$S_2 = 0,2S_1 + 0,1S_2 + 0,05S_3$$

$$S_3 = 0,1S_1 + 0,1S_2 + 0,15S_3$$

Замінімо будь-яке з цих рівнянь умовами нормування: $S_1 + S_2 + S_3 = 1$, наприклад останнє. Тоді отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0,7S_1 + 0,8S_2 + 0,8S_3 \\ S_2 &= 0,2S_1 + 0,1S_2 + 0,05S_3 \\ S_1 + S_2 + S_3 &= 1 \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо значення граничних ймовірностей:

$$S_1 = 0,73, \quad S_2 = 0,17, \quad S_3 = 0,1.$$

Отже ймовірність простою становить $p_3 = 0,1$, тоді коефіцієнт використання процесору буде становити: $K_{ef} = 1 - p_3 = 0,9$.

2. Розглянемо деяку технічну систему, яка може знаходитись у трьох можливих станах:

- S_1 – система справна і працює;
- S_2 – система має незначні несправності і працює;
- S_3 – система несправна і не працює.

В результаті довгострокових спостережень визначені інтенсивності переходів системи з одного стану в інший (рис. 12).

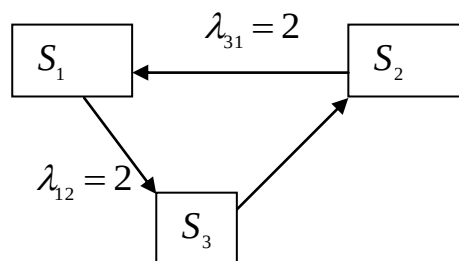


Рис. 12. Граф станів технічної системи

Скласти систему рівнянь роботи системи та знайти граничні ймовірності.

Розв'язок. Переходи системи з одного стану в інший виконуються неперервно у часі, тому ми маємо справу із системою з дискретними станами

та неперервним часом. Робота такої системи буде описуватися рівняннями

$$\text{Колмогорова:} \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3 \\ \frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{12}p_1 \\ \frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 + \lambda_{23}p_2 \end{cases}$$

Для знаходження граничних ймовірностей прирівняємо значення похідних до нуля і отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2p_1 + 2p_3 = 0 \\ -p_2 + 2p_1 = 0 \\ -2p_3 + p_2 = 0 \end{cases} .$$

Замінімо останнє рівняння рівнянням балансу і отримаємо:

$$\begin{cases} -2p_1 + 2p_3 = 0 \\ -p_2 + 2p_1 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} .$$

Розв'язавши систему, отримаємо наступні значення для граничних ймовірностей: $p_1 = 0,25$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,25$. Отже повністю справною система буде лише чверть часу своєї роботи і чверть часу – знаходитись у ремонті. Половину часу роботи система буде працювати, маючи незначні несправності.

1.7 Наближення немарківських процесів марківським методом «псевдостанів»

У реальних практичних задачах пуасонівські потоки зустрічаються не так часто, частіше ми маємо справу з процесами з «наслідками», наприклад, час виходу приладу з ладу залежить від того, скільки він вже пропрацював. Тому важливим є питання про можливість наближення потоків

пуасонівськими та оцінки похибки в обчисленні граничних ймовірностей станів системи.

Якщо кількість станів системи не є значною, а потоки представляють (точно або наближено) потік Ерланга, то введенням фіктивних «псевдостанів» вдається звести немарківський процес до марківського і записати для нього систему рівнянь балансу для визначення граничних ймовірностей.

Розглянемо застосування методу «псевдостанів» на прикладі.

Приклади.

1. Нехай система S – деякий технічний прилад, який виходить з ладу під впливом простішого потоку несправностей з інтенсивністю λ . Після виходу з ладу прилад зразу починають відновлювати. Час ремонту T має не пуасонівський закон розподілу, а закон Ерланга 3-го порядку:

$$f_3(t) = \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^2}{2} e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

Необхідно процес наблизити до марківського і знайти для нього граничні ймовірності.

Розв'язок. Випадкова величина T розподілена за законом Ерланга 3-го порядку, а отже, її можна представити як суму трьох випадкових величин T_1, T_2, T_3 , розподілених за показниковим законом з параметром μ : $f(t) = \mu e^{-\mu t}$.

Система має лише два істинних стани:

- S_1 – прилад справний;
- S_2 – прилад ремонтується.

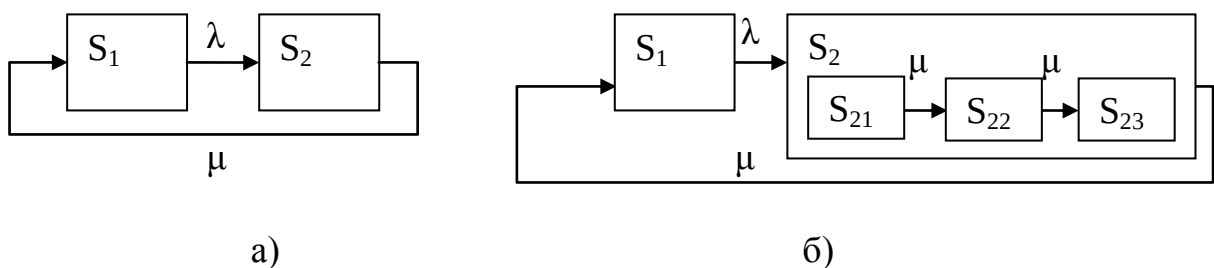


Рис. 13. Граф станів системи: а) істинні стани; б) із введенням псевдо станів

Щоб звести процес до марківського розіб'ємо стан S_2 на три фази (введемо псевдостани):

- S_{21} – початок ремонту;
- S_{22} – продовження ремонту;
- S_{23} – завершення ремонту.

Будемо вважати, що кожний псевдостан має показниковий закон розподілу, тоді процес в системі можна вважати марківським. Для кожного псевдостану введемо відповідні ймовірності: $p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23}$ та введемо позначення для середнього часу перебування у кожному стані: $\bar{t}_1 = 1/\lambda$, $\bar{t}_{21} = 1/\mu$.

Тоді можна одразу записати систему рівнянь для граничних ймовірностей (як для циклічної системи):

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2} \\ p_{21} = p_{22} = p_{23} = \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2} \\ p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} = \frac{3\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2} \end{cases}.$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: $p_1 = \mu/(\mu + 3\lambda)$, $p_2 = 3\lambda/(\mu + 3\lambda)$.

2. Зробимо деяке ускладнення системи. Нехай система S – деякий технічний прилад, що складається з двох однакових вузлів, де кожен з них може виходити з ладу під впливом простішого потоку несправностей з інтенсивністю λ . Після виходу з ладу прилад зразу починають відновлювати. Час ремонту T має не пуасонівський закон розподілу, а закон Ерланга 2-го порядку: $f_3(t) = \mu^2 \cdot t \cdot e^{-\mu t}$, $t > 0$. Знайти граничні ймовірності.

Розв'язок. Визначимо істинні стани системи:

- S_0 – працюють обидва вузли;

- S_1 – один вузол працює, другий – ремонтується;
- S_2 – обидва вузли ремонтуються.

Розіб'ємо ремонт на дві фази: ремонт починається і ремонт завершується.

Визначимо псевдостани:

- S_{11} – один вузол працює, другий – починає ремонтуватися;
 - S_{12} – один вузол працює, другий – завершує ремонтуватися;
- обидва вузли ремонтуються
- $S_{2,11}$ – обидва вузли починають ремонтуватися;
 - $S_{2,12}$ – один вузол починає ремонтуватись, а другий – завершує;
 - $S_{2,22}$ – обидва вузли завершують ремонт.

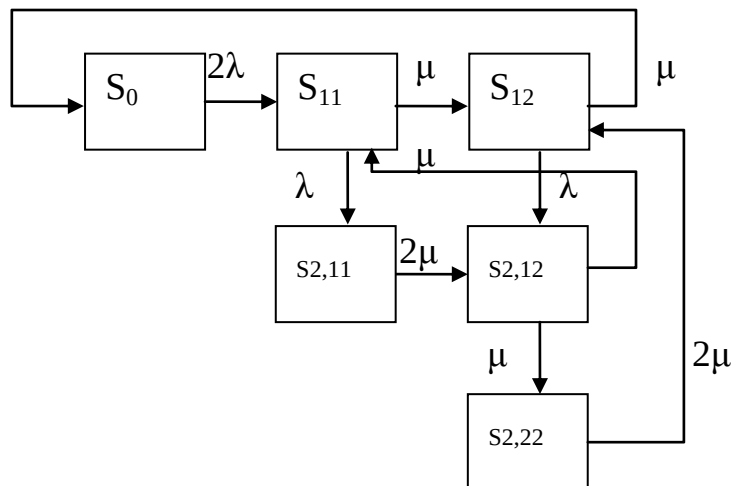


Рис. 14. Граф станів системи з врахуванням псевдостанів

Переходи між станами $S_{2,11}$ - $S_{2,12}$ та $S_{2,22}$ - S_{12} мають інтенсивність 2μ , так як перейти в наступну фазу (завершення ремонту) може будь-який з двох вузлів.

Система рівнянь для граничних ймовірностей буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 2\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_{2,12} = (\lambda + \mu) \cdot p_{11} \\ \mu \cdot p_{11} + 2\mu \cdot p_{2,22} = (\lambda + \mu) \cdot p_{12} \\ \lambda \cdot p_{11} = 2\mu \cdot p_{2,11} \\ 2\mu \cdot p_{2,11} + \lambda \cdot p_{12} = 2\mu \cdot p_{2,12} \\ \mu \cdot p_{2,12} = 2\mu \cdot p_{2,22} \\ \mu \cdot p_{12} = 2\lambda \cdot p_0 \end{cases}$$

Додамо рівняння того, що ймовірності утворюють повну групу подій:

$$p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{2,11} + p_{2,12} + p_{2,22} = 1$$

і виключимо будь-яке рівняння із системи, отримаємо розв'язок спочатку для псевдостанів:

$$p_{11} = \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \quad p_{12} = \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \quad p_{2,12} = \frac{2\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2};$$

$$p_{2,11} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \quad p_{2,22} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2},$$

а потім і для істинних станів:

$$p_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \quad p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{4\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2};$$

$$p_2 = p_{2,11} + p_{2,12} + p_{2,22} = \frac{4\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}.$$

Необхідно зауважити, що метод «псевдостанів» доцільно застосовувати лише тільки для простих випадків, коли кількість станів є незначною. Можливість методу розширюється, коли розглядаються узагальнені потоки Еланга.

1.8. Основні характеристики СМО

Визначимо основні цілі для компонентів СМО. Мета клієнта–замовлення, на яке витратити мінімум часу на перебування у черзі. Мета обслуговування – мінімізувати час простою сервісів. Мета аналізу СМО – досягти розумного компромісу між вимогами клієнтів та потужністю

системи. Остання характеристика називається показником ефективності системи.

Нехай:

- λ – інтенсивність вхідного потоку;
- μ – інтенсивність вихідного потоку.

До основних характеристик, що визначають процес функціонування системи масового обслуговування відносять:

- *завантаженість* або *коефіцієнт використання системи* ρ – це відношення інтенсивності вхідного потоку до інтенсивності обслуговування $\rho = \lambda / N\mu$, де N – кількість каналів, (для одноканальної системи $\rho = \lambda / \mu$). Якщо система з відмовами (не всі замовлення можуть потрапити до системи) то $\rho = \lambda_{\text{еф}} / \mu$, де $\lambda_{\text{еф}}$ – ефективна інтенсивність надходження клієнтів у систему ($\lambda_{\text{еф}} < \lambda$). Це відношення показує наскільки задіяні її ресурси. Значення коефіцієнта завантаження визначає необхідну і достатню умови існування стаціонарного режиму, а саме $\rho \leq 1$ або $\lambda \leq \mu$. В протилежному випадку система буде працювати у режимі перевантаження. Завантаженість ρ характеризує:

- середня кількість замовлень m , що надходять до системи, за середній час обслуговування одного замовлення τ ($\rho = m \cdot \tau$);
- частку від інтервалу часу, протягом якого сервіс зайнятий;
- ймовірність зайнятості сервісу (ймовірність простою сервісу буде складати: $1 - \rho$);
- середню кількість замовлень, що знаходиться в обслуговуючому пристрої (так як сервіс може обслуговувати лише одне замовлення з ймовірністю ρ і простоювати з ймовірністю $1 - \rho$, то середня кількість замовлень в обслуговуючому пристрої: $1 \cdot \rho + 0 \cdot (1 - \rho) = \rho$).

- *відносна пропускна здатність системи* Q – відносне середнє число замовлень (таблиця 1).

Таблиця 1.

Тип СМО	З відмовами	З чергою	З необмеженою чергою
Одноканальна	$Q = \mu / (\mu + \lambda)$	$Q = 1 - \rho^{m+1} \cdot p_0$	$Q = 1$
Багатоканальна	$Q = 1 - p_{\text{відмови}}$	$Q = 1 - p_{\text{відмови}}$	$Q = 1$

p_0 – ймовірність того, що канал вільний, $p_{\text{відмови}}$ – ймовірність відмови.

- *абсолютна пропускна здатність системи* A – середнє число замовлень, яке може бути оброблене за одиницю часу (таблиця 2).

Таблиця 2.

Тип СМО	З відмовами	З чергою	З необмеженою чергою
Одноканальна	$A = Q \cdot \lambda = p_0 \cdot \lambda$	$A = Q \cdot \lambda$	$A = \lambda$
Багатоканальна	$A = Q \cdot \lambda$	$A = Q \cdot \lambda$	$A = \lambda$

p_0 – ймовірність того, що канал вільний, Q – відносна пропускна здатність.

- *ймовірність відмови* p_0 – ймовірність, що замовлення не потрапить у систему (гранична ймовірність того, що всі канали зайняті):

- $p_{\text{відмови}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ – для одноканальної СМО;
- $p_{\text{відмови}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ – для багатоканальної СМО.

- *середня кількість зайнятих сервісів* k (для багатоканальних СМО):

$$k = \sum_{i=0}^n i p_i = A / \mu = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right),$$

n – кількість сервісів, p_i – граничні ймовірності станів.

- *ймовірності станів системи* – найбільш важлива характеристика в тому сенсі, що знаючи ймовірності, можна визначити всі інші характеристики. При цьому під станом системи розуміють кількість замовлень, що

знаходиться у системі. Ймовірність стану системи, коли в ній знаходиться k замовлень позначається як p_k (розрахункові формули наведені нижче)

- *час очікування* W_q – середня величина випадкового часу, який замовлення перебуває у черзі в стані очікування W_q ;

- *час перебування у системі* W_s – середній час перебування замовлення у системі з моменту надходження до завершення обслуговування:

$$W_s = W_q + 1/\mu$$

(сума середнього часу перебування у черзі та середнього часу обслуговування);

- *середня кількість замовлень у черзі* L_q – середня довжина черги

$$L_q = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m)p_n = \lambda_{ef} \cdot W_q$$

- *середня кількість замовлень m , що знаходяться у системі* L_s :

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \lambda_{ef} \cdot W_s$$

Залежності між середньою кількістю замовлень в системі L_s і черзі L_q та середнім часом перебування відповідно у системі W_s та черзі W_q називаються *формулами Літтла*.

Середню кількість зайнятих сервісів можна визначити як:

$$m = \lambda_{ef} / \mu = L_s - L_q.$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняттю «система масового обслуговування».
2. Які основні складові СМО?
3. Що таке потік замовлень і чим він характеризується?
4. Перерахуйте основні класифікаційні ознаки потоку?

5. Які типи потоків розглядають в теорії систем масового обслуговування? Наведіть приклади потоків різних типів.
6. Який потік називають простішим?
7. Який потік називають потоком Пальма? Наведіть приклади.
8. Що таке Пуасонівський потік? Наведіть приклади.
9. Який потік називають потоком Ерланга? Що означає порядок потоку Ерланга? Наведіть приклади.
10. Коли можна вважати, що потік є заданим?
11. Що таке генератор замовлень і чим він характеризується?
12. Яке призначення диспетчера замовлень?
13. Що таке черга і які типи черг виділяють в СМО?
14. Що таке сервіс, які його характеристики? Які типи обслуговуючих пристроїв розглядають в теорії СМО?
15. Що таке мережа СМО? Наведіть приклад.
16. За якими основними класифікаційними ознаками поділяють СМО?
17. Як класифікують СМО за характером черги?
18. Як класифікують СМО кількістю каналів та способів їх підключення?
19. Наведіть класифікацію мереж СМО.
20. Якими основними факторами визначається функціонування СМО?
21. Що таке символіка Кендалла-Лі?
22. За яких припущень розробляються аналітичні методи розрахунку СМО?
23. Коли режим роботи СМО є стаціонарним?
24. Які характеристики СМО відносяться до структурних параметрів?
25. Які характеристики СМО відносяться до параметрів навантаження?
26. Які основні типи випадкових процесів розглядають в теорії СМО?
27. Які існують способи представлення випадкового процесу?
28. Який процес називається харківським?

29. Як визначаються граничні ймовірності для систем з дискретними станами та дискретним часом?
30. Яку систему рівнянь називають рівняннями Колмогорова?
31. В чому полягає метод наближення не-марківських процесів марківськими методом «псевдостанів».
32. За якими основними характеристиками оцінюється робота СМО?

<http://narfu.ru/university/library/books/1163.pdf>

2. Основні моделі СМО

2.1. СМО з відмовами

Випадок СМО з відмовами відповідає таким системам, коли при надходженні замовлення всі місця в системі зайняті (немає вільних місць в черзі і зайняті всі сервіси) замовлення виходить із системи (відхиляється).

2.1.1. Одноканальна система з відмовами

Розглянемо випадок, коли в системі існує лише один сервіс, на який надходять замовлення з інтенсивністю λ і черга не передбачена (якщо сервіс зайнятий, то замовлення відхиляється). Замовлення обслуговуються з інтенсивністю μ . Середній час обслуговування є оберненою величиною інтенсивності: $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$.

Знайдемо граничні ймовірності станів системи та показники ефективності.

Система може мати два стани (рис. 15):

- S_0 – сервіс вільний; - S_1 – сервіс зайнятий.

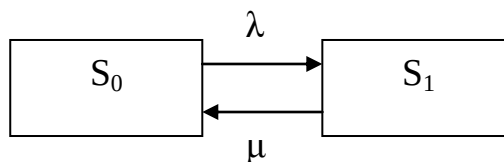


Рис. 15. Граф станів одноканальної СМО з відмовами

У граничному стаціонарному режимі система рівнянь для ймовірностей буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \\ p_1 + p_0 = 1 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему знайдемо ймовірності:

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda},$$

які визначають середній відносний час перебування системи у відповідних станах. Відносна пропускна здатність, ймовірність відмови та абсолютна пропускна здатність становлять:

$$Q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = 1 - p_1, \quad p_{\text{відмови}} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \quad A = \frac{\mu \cdot \lambda}{\mu + \lambda} = \lambda Q.$$

Приклад 1. В приймальній офісу встановлений телефон на який дзвонять замовники. Якщо телефон зайнятий, то дзвінок не приймається (відбувається відмова замовлення). Дзвінки утворюють простий потік з інтенсивністю $\lambda = 30$ дзвінків/год. Час однієї розмови є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу із середньою тривалістю $t_{\text{об}} = 3$ хв. необхідно визначити показники ефективності системи.

Розв'язок. Перед розв'язуванням задачі необхідно всі значення привести до однакових розмірностей. Визначимо середню тривалість розмови (час обслуговування) у годинах $t_{\text{об}} = 3/60 = 0.05$ год. Тоді можна визначити інтенсивність обслуговування:

$$\mu = 1/t_{\text{об}} = 1/0.05 = 20 \text{ дзвінків/год.}$$

Представимо нашу систему обслуговування у вигляді графа (рис. 12). Вона має два стани: S_0 – система вільна з ймовірністю p_0 ; S_1 – система зайнята з ймовірністю p_1 .

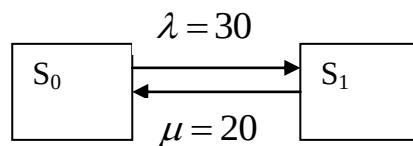


Рис. 12 Граф станів системи (приклад 1)

Визначимо ймовірності перебування системи у відповідному стані:

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{20}{20 + 30} = 0.4, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{30}{20 + 30} = 0.6,$$

Визначимо показники ефективності системи:

- відносна пропускна спроможність $Q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = 0.4$

- абсолютна пропускна спроможність

$$A = \frac{\mu \cdot \lambda}{\mu + \lambda} = \lambda Q = 30 \cdot 0.4 = 12 \text{ дзвінків/год.}$$

- ймовірність відмови $p_{\text{відмови}} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = 0.6$.

З розв'язку видно, що номінальна пропускна спроможність $\mu = 20$ відрізняється від абсолютної $A = 12$ в силу того, що потік дзвінків має випадковий характер і випадковий час обслуговування.

1.2. Багатоканальна система з відмовами

Розглянемо задачу Ерланга. Існує n каналів (сервісів) на які надходять замовлення з інтенсивністю λ і обслуговуються з інтенсивністю μ (черга не передбачена). Система може мати множину станів $\{S_i\}_{i=1,n}$, де S_i – стан, коли зайнято i каналів (в системі знаходиться I замовлень) (рис. 13).

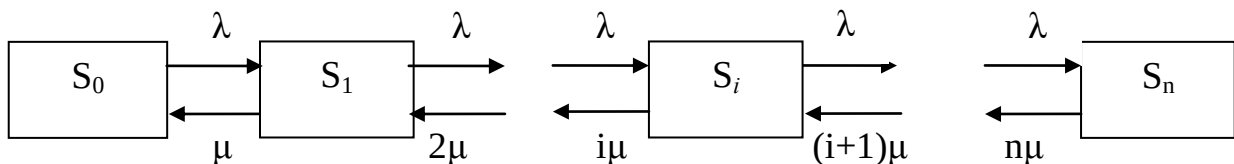


Рис. 13 Граф станів багатоканальної СМО (процес розмноження та загибелі)

Інтенсивність вхідного потоку є постійною, інтенсивність вихідного потоку змінюється в залежності від стану системи (кількості зайнятих каналів).

Граничні ймовірності станів системи будуть обчислюватись за наступними формулами, які називаються формулами Ерланга:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^i}{i!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \dots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0;$$

Ймовірність відмови буде відповідати ситуації, коли всі n каналів системи зайняті:

$$p_{\text{відмови}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Відносна та абсолютна пропускні здатності відповідно становлять:

$$Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

Середнє число зайнятих (вільних) каналів $k_{\text{зайнятих}}$ ($k_{\text{вільних}}$) – це математичне сподівання числа зайнятих (вільних) каналів:

$$k_{\text{зайнятих}} = \sum_{i=0}^n (i \cdot p_i) = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right), \quad k_{\text{вільних}} = \sum_{i=0}^n (n-i) \cdot p_i$$

Коефіцієнт зайнятості (простою) каналів:

$$K_{\text{зайнятих}} = \frac{k_{\text{зайнятих}}}{n}, \quad K_{\text{простою}} = \frac{k_{\text{простою}}}{n}.$$

Приклад 2. Служба ремонту має три телефонні лінії для виклику майстра. Якщо всі телефони зайняті, клієнт не може дозвонитись, отже отримує відмову. Дзвінки надходять з інтенсивністю $\lambda = 60 \frac{\text{дзвінків}}{\text{год}}$. Час на прийом замовлення (обслуговування) є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу, середня тривалість розмови $t_{\text{обсл.}} = 3 \text{ хв}$. Визначити показники ефективності роботи системи.

Розв'язок. Система відноситься до типу багатоканальних СМО з відмовами, граф станів якої наведений на рис. 14.

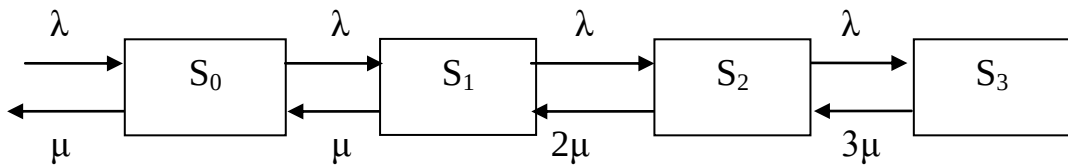


Рис. 14. Приклад трьохканальної СМО з відмовами

Приведемо всі параметри до одних одиниць вимірювання часу (годин):

$$t_{\text{обсл.}} = 3\text{хв.} = 3/60 = 0,05 \text{ год.}$$

Тоді інтенсивність обслуговування: $\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл.}}} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ дзвінків,}$

приведена інтенсивність потоку:

$$\rho = \lambda / \mu = 60 / 20 = 3.$$

Обчислимо граничні ймовірності станів:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} \right)^{-1} = \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} \right)^{-1} = \frac{1}{13} = 0.077$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.231, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0 = 0.346, \quad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0 = 0.346$$

Ймовірність відмови буде становити: $p_{\text{відмови}} = 0.346.$

Обчислимо відносну та абсолютну пропускні здатності:

$$Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - 0.346 = 0.654, \quad A = \lambda \cdot Q = 60 \cdot 0.654 = 39,24.$$

Середнє число зайнятих (вільних) каналів $k_{\text{зайнятих}}$ ($k_{\text{вільних}}$):

$$k_{\text{зайнятих}} = \frac{A}{\mu} = \frac{39,24}{20} = 1,962, \quad k_{\text{вільних}} = 1,038.$$

Відповідні коефіцієнти зайнятості будуть становити:

$$K_{\text{зайнятих}} = \frac{k_{\text{зайнятих}}}{n} = \frac{1,962}{3} = 0.654 \quad K_{\text{простою}} = \frac{k_{\text{простою}}}{n} = \frac{1,038}{3} = 0,094.$$

Приклад 3. Розглядається робота автозаправної станції (АЗС) з трьома колонками. Якщо зайняті всі три колонки, то машина не стає в чергу, а залишає АЗС. Середній час заправки автомобіля 3 хв. Інтенсивність потоку

автомобілів - 0,25 од/хв. Знайти граничні ймовірності і показники ефективності роботи АЗС.

Розв'язок. Визначимо показники системи:

- $\lambda = 0,25$ – інтенсивність вхідного потоку;
- $t_{обсл} = 3$ – час обслуговування, тоді $\mu = 1/t_{обсл}$;
- $\rho = \lambda/\mu = \lambda \cdot t_{обсл} = 0,75$.

Знайдемо граничні ймовірності:

$$p_0 = \left(1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3}{3!} \right)^{-1} = 0,478, \quad p_1 = 0,75 \cdot 0,478 = 0,357$$

$$p_2 = \frac{0,75^2}{2!} \cdot 0,478 = 0,134, \quad p_3 = \frac{0,75^3}{3!} \cdot 0,478 = 0,033$$

Отже в стаціонарному режимі 47,6% часу АЗС не працює і тільки 3,3% працюють всі три колонки.

Ймовірність відмови: $p_{відмови} = p_3 = 0,033$

Відносна пропускна спроможність: $Q = 1 - p_{відмови} = 1 - 0,033 = 0,967$, отже 96,7% автомобілів буде підлягати обслуговуванню.

Абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot Q = 0,25 \cdot 0,967 = 0,242$ /

Середня кількість зайнятих сервісів: $k = \frac{A}{\mu} = \frac{0,242}{1/3} = 0,725 < 1$.

Якщо середня кількість зайняти каналів менше 1, то роботу системи не можна вважати ефективною.

Приклад 3. На вхід багатоканальної системи з відмовами надходить потік замовлень з інтенсивністю $\lambda = 7$ замовлень за годину. Середній час обслуговування замовлення $t_{обсл} = 0,25$ години. Обслуговування замовлення приносить дохід у розмірі 150 грошових одиниць, а утримання каналу обслуговування коштує 120 грошових одиниць за годину. Визначити оптимальну кількість каналів СМО.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- середній час обслуговування $t_{обсл} = 0,25$;

- кількість мість в черзі $m = 1$;
- інтенсивність замовлень $\lambda = 7$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = 1/t_{обсл} = 1/0.25 = 4$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 7 / 4 = 1.75$.

Необхідно визначити кількість каналів.

Якщо система має n каналів, то дохід можна визначити за наступною формулою:

$$D = 150 * A - 120 * n,$$

де A – абсолютна пропускна спроможність СМО.

Для визначення оптимальної кількості каналів складемо розрахункову таблицю.

Таблиця 1. визначення оптимального числа каналів

n	Ймовірність вільного стану СМО P_0	Ймовірність відмови $P_{відмови} = \frac{\rho^n}{n!} P_0$	Абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda(1 - P_{відмови})$	Дохід D
1	$P_0 = (1 + \rho)^{-1} = 0.364$	0.636	2.545	261.75
2	$P_0 = (1 + \rho + \rho^2/2!)^{-1} = 0.234$	0.204	5.569	595.35
3	$P_0 = (1 + \rho + \rho^2/2! + \rho^3/3!)^{-1} = 0.193$	0.056	6.61	631.5
4	$P_0 = (1 + \rho + \rho^2/2! + \rho^3/3! + \rho^4/4!)^{-1} = 0.18$	0.013	6.91	556.5

З таблиці видно, що із зростанням кількості каналів дохід збільшується і оптимальним є три канали.

2.2. СМО з очікуванням (з чергою)

2.2.1. Одноканальна СМО з необмеженою чергою (без відмов)

Розглянемо систему з одним сервісом, коли на чергу не накладаються будь-які обмеження. Потік замовлень має інтенсивність λ , а потік обслуговування – інтенсивність μ . Система може знаходитись у наступних станах (рис. 15):

- S_0 – сервіс вільний;
- S_1 – сервіс зайнятий;
- $S_i, i = 2, 3, \dots$ – канал зайнятий і у черзі стоїть i замовлень.

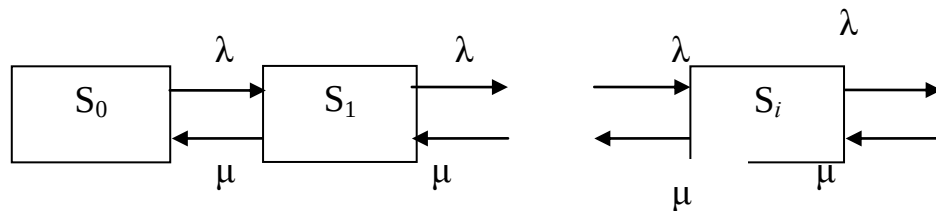


Рис. 15 Граф станів СМО з необмеженою чергою

Така система представляє процес "загибелі та розмноження" з нескінченною множиною станів. Граничні ймовірності визначаються наступними формулами ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$):

$$p_0 = 1 - \rho, \quad p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \dots, \quad p_i = \rho^i \cdot p_0$$

Середня кількість замовлень в системі та в черзі визначаються як математичне сподівання:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad L_{\text{черги}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{обсл}},$$

де середня кількість замовлень, що обслуговується:

$$L_{\text{обсл}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = P_{\text{зайнято}} = \rho$$

і дорівнює ймовірності зайнятості сервісу.

Середня кількість замовлень, що знаходяться в стані очікування:

$$L_{\text{очікування}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Середній час перебування замовлень в системі та в стані очікування:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}, \quad W_{\text{очік}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{очік}}.$$

Відповідний середній час для одного замовлення:

$$W_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}, \quad W_{\text{очік}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Приклад. У закладі встановлено один термінал для проведення платежів. Інтенсивність потоку клієнтів становить 10 осіб протягом робочої доби, яка складає 6 год., що становить чверть доби. Середній час обслуговування одного клієнта становить 30 хв.=0,5 год. Вважається, що черга може бути необмеженої довжини. Знайти показники ефективності роботи терміналу, та ймовірність того, що в черзі не більше 2 осіб.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- середній час обслуговування $t_{\text{обсл.}} = 0,5$;
- кількість мість в черзі $m = \infty$;
- інтенсивність замовлень $\lambda = 10/6 \approx 1,7$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = 1/t_{\text{обсл.}} = 1/0,5 = 2$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 1,7/2 \approx 0,83$.

Так як $\rho = 0,83 < 1$ то черга не може нескінченно зростати і граничні ймовірності існують.

Ймовірність того, що термінал вільний:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,83 = 0,17,$$

а ймовірність що він зайнятий $p_{\text{зайнятий}} = 0,83$.

Знайдемо ймовірності, що біля терміналу знаходиться 1, 2, 3 особи:

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = 0,141, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = 0,117, \quad p_3 = \rho^3 \cdot p_0 = 0,097.$$

Ймовірність того, що в черзі не більше 2 осіб становить:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0,355.$$

$$\text{Середня кількість осіб у черзі: } L_{\text{очікування}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 4,05.$$

$$\text{Середній час перебування у черзі: } W_{\text{очік}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{очік}} = 2,382.$$

$$\text{Середня кількість осіб у системі: } L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = 4,882$$

Середній час перебування у системі: $W_{\text{сис}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = 2,872$.

Очевидно, що ефективність обслуговування необхідно підвищити. Для цього необхідно спростити процедуру оплати, що зменшить час на її проведення або поставити ще один термінал.

1.2 Багатоканальна СМО з необмеженою чергою (без відмов)

Нехай система складається з n каналів і має необмежену чергу. Вона може знаходитись у наступних станах (рис. 16):

- S_0 – всі канали вільні;
- $S_i, i = \overline{1, n}$ – зайнято i каналів;
- S_{n+k} – всі канали зайняті і в черзі знаходиться k замовлень.

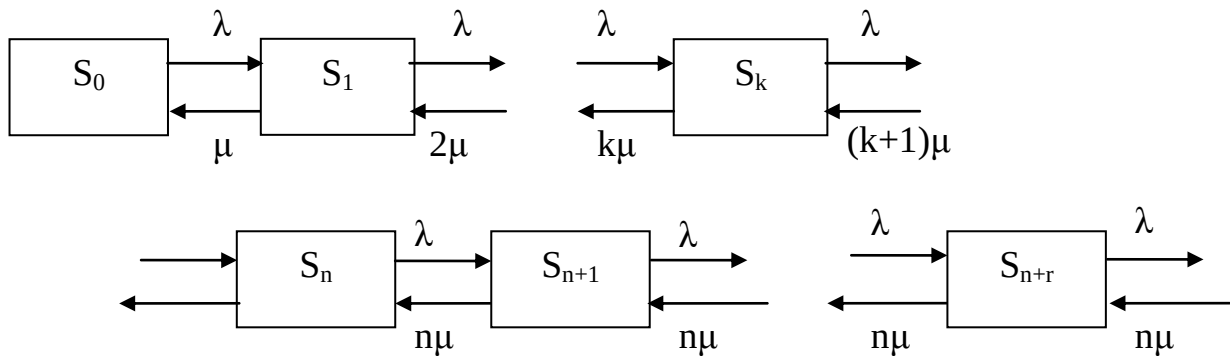


Рис. 16 Граф станів багатоканальної СМО з необмеженою чергою

Якщо $\rho < 1$, то граничні ймовірності існують і обчислюються за наступними формулами:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \dots$$

Ймовірність того, що замовлення буде у черзі:

$$P_{\text{черга}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0.$$

Середня кількість зайнятих каналів:

$$k = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Середня кількість замовлень в черзі та системі:

$$L_{\text{черга}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0, \quad L_{\text{сист}} = L_{\text{черга}} + \rho.$$

Середній час перебування замовлення в черзі та системі обчислюється за формулами Літтла.

Для системи з необмеженою чергою ймовірність відмови $p_{\text{відмови}} = 0$, відносна пропускна здатність $Q = 1$, а абсолютна – $A = \lambda$.

Приклад. До касового відділення банку надходить потік людей з інтенсивністю $\lambda = 81 \text{ осіб/год}$. Середній час обслуговування однієї особи становить 2 хв. Необхідно визначити:

- 1) мінімальну кількість касирів $n_{\min}$ при якому черга не буде рости до нескінченності та відповідні характеристики системи для цього значення;
- 2) оптимальну кількість касирів $n_{\text{оп}}$ при якій відносна величина витрат на обслуговування, яка визначається за формулою $C_{\text{оп}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{очікування}}$ буде найменшою і порівняти характеристики системи при $n_{\min}$ та $n_{\text{оп}}$;
- 3) ймовірність того, що в черзі буде не більше трьох осіб.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 81/60 = 1,35$;

- інтенсивність обслуговування $\mu = 1/t_{обсл} = 1/2 = 0,5$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 2,7$.

1) Черга не буде зростати до нескінченності за умови $\rho/n < 1$, отже для наших значень $n_{\min} = 3$.

Знайдемо характеристики системи для $n_{\min} = 3$.

Ймовірність відсутності клієнтів у системі буде становити:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^4}{4!} \right)^{-1} = 0,025,$$

що означає що в середньому 2, 5% часу касовий вузол буде простоювати.

Обчислимо ймовірність наявності черги:

$$P_{\text{чер}} = \frac{2,7^4}{3!(3-2,7)} \cdot 0,025 = 0,735.$$

Середня довжина черги буде становити:

$$L_{\text{черга}} = \frac{2,7^4}{3 \cdot 3!(1-2,7/3)} \cdot 0,025 = 7,35.$$

Середній час очікування в черзі:

$$W_{\text{чер}} = \frac{7,35}{1,35} = 5,44 \text{ хв}.$$

Середня кількість касирів: $k = \rho = 2,7$.

Коефіцієнт зайнятих касирів: $k_{\text{від}} = \rho/n = 0,9$

Абсолютна пропускна спроможність відділення:

$$A = 1,35 \left(\frac{1}{\text{хв}} \right) = 81 \left(\frac{1}{\text{год}} \right) - 81 \text{ клієнт за годину}.$$

Проаналізувавши отримані результати розрахунків можна зробити висновок, що за наявності трьох касирів $n_{\min} = 3$ розрахунковий цент перевантажений.

2) Обчислимо відносну величину витрат при $n_{\min} = 3$:

$$C_{\text{ор}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{очікування}} = \frac{3}{1,35} + 3 \cdot 5,44 = 5,44.$$

Розрахуємо відносну величину витрат при інших значеннях n , та занесемо результати у таблицю (табл.).

Таблиця Значення витрат

Характеристика обслуговування	Кількість касирів				
	3	4	5	6	7
Ймовірність простою p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Середня довжина черги $L_{\text{черга}}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Відносна величина витрат $C_{\text{ор}}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

З таблиці видно, що мінімальні витрати отримані при наявності п'яти касирів $n = 5$. Знайдемо характеристики системи для цього випадку:

$$P_{\text{чер}} = 0,091, L_{\text{черга}} = 0,198, W_{\text{чер}} = 0,146, L_{\text{сист}} = 2,9, W_{\text{сист}} = 2,15, k_{\text{відн}} = 0,54.$$

Очевидно, що при $n = 5$ значно зменшилась ймовірність виникнення черги та довжина черги, а також середній час перебування клієнтів у черзі.

- 3) Визначимо ймовірність того, що в черзі буде не більше 3 клієнтів при $n = 5$:

$$P(r \leq 3) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3} = 1 - P_{\text{черги}} + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3} =$$

$$= 1 + \frac{2,7^6}{5!(5-2,3)} \cdot 0,065 + \frac{1,7^6}{5 \cdot 5!} \cdot 0,065 + \frac{1,7^7}{5^2 \cdot 5!} \cdot 0,065 + \frac{1,7^8}{5^3 \cdot 5!} \cdot 0,065 = 0,986$$

(Можна зазначити, що при $n = 3$ ця ймовірність менша $P(r \leq 3) = 0,464$).

2.3 СМО з обмеженою чергою (з відмовами). Задача Ерланга

СМО з обмеженою чергою відрізняється від попередніх випадків тим, що якщо черга заповнена, то нове замовлення, що надійшло, отримує відмову.

Різниця у визначенні граничних ймовірностей та інших показників системи для СМО з обмеженою чергою полягає в тому, що суми визначаються скінченною прогресією. Нехай m – довжина черги, r – кількість замовлень у черзі. Відповідні формули наведені у таблиці.

Таблиця Показники СМО

Одноканальна СМО	Багатоканальна СМО
Граничні ймовірності	
$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},$ $p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \dots,$ $p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0$	$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \dots + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}$ $p_1 = \rho \cdot p_0, \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$ $p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \dots, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \quad r = \overline{1, m}$
Ймовірність відмови	
$p_{\text{відмови}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$p_{\text{відмови}} = p_{m+n} = \frac{\rho^{m+n}}{n^m \cdot n!} p_0$
Абсолютна пропускна здатність	
$A = \lambda Q = \lambda (1 - \rho^{m+1} p_0)$	$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{m+n}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$
Відносна пропускна здатність	
$Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - \frac{\rho^{m+n}}{n^m \cdot n!} p_0$
Середня кількість замовлень у черзі	
$L_{\text{черги}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m+1 - m\rho)}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}$	$L_{\text{черги}} = \rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m+1 - m \frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)$
Середня кількість зайнятих сервісів	
$L_{\text{обсл}} = 1 - p_0$	$k = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right)$
Середня кількість замовлень у системі	
$L_{\text{сист}} = L_{\text{очікування}} + L_{\text{обсл}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{очікування}} + k$

Середній час перебування у системі	
$W_{сист} = \frac{L_{систми}}{\lambda}$	$W_{сист} = \frac{L_{систми}}{\lambda}$
Середній час перебування у черзі	
$W_{очікування} = \frac{L_{очікування}}{\lambda}$	$W_{очікування} = \frac{L_{очікування}}{\lambda}$

Середній час перебування замовлення в черзі та системі обчислюється за формулами Літтла.

Приклад.

Приклад 1. Одноканальна СМО з обмеженою чергою.

1) У розрахунковому центр $W_{сист} = \frac{3}{2} = 1,5(хв)$ і є лише одна каса.

Приміщення допускає перебування не більше шести осіб (один клієнт обслуговується, а інші стоять у черзі, отже черга обмежена довжиною $m = 5$). Якщо приміщення повністю зайняте то клієнти не стають у чергу і відходять. Потік клієнтів має інтенсивність $\lambda = 2 \left(\frac{особи}{хв} \right)$.

Інтенсивність потоку обслуговування становить $\mu = 2$. Визначити характеристики СМО і зробити висновки стосовно ефективності його роботи.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 2$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = 2$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 1$.

Ймовірність відсутності клієнтів у системі буде становити:

$$p_0 = \frac{1}{m+2} = \frac{1}{7}.$$

Ймовірність, що в системі є відповідна кількість клієнтів: $p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$.

Так як $\rho = 1 \Rightarrow p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{7}$.

Ймовірність відмови: $p_{\text{відмови}} = p_6 = \frac{1}{7}$.

Відносна пропускна здатність: $Q = 1 - p_{\text{відмови}} = \frac{6}{7}$.

Абсолютна пропускна здатність: $A = \lambda Q = \frac{12}{7} \approx 1,7 \left(\frac{\text{клієнтів}}{\text{хв}} \right)$.

Середня кількість клієнтів у системі:

$$L_{\text{сист}} = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7} = 3.$$

Середній час перебування клієнта у системі: $W_{\text{сист}} = \frac{3}{2} = 1,5 (\text{хв})$.

Середня довжина черги: $L_{\text{черги}} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 7} = 2,1 (\text{клієнта})$.

Середній час перебування клієнта у черзі: $W_{\text{очікування}} = \frac{2,1}{2} = 1,05 (\text{хв})$.

З розрахованих характеристик видно, що кожному сьомому клієнту відмовляється в обслуговуванні, отже ефективність системи не є високою.

2) У невеликому магазині самообслуговування встановлено, що потік покупців є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 1$ покупець в хвилину. В цьому магазині встановлений один касовий апарат, що дозволяє домогтися такої продуктивності праці, при якій середній час обслуговування одного клієнта становить приблизно 1,25 хв. покупця в хвилину.

Визначте характеристики СМО за умови, що чергу обмежена контролером при вході в зал самообслуговування: $m = 3$ покупців.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 1$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1,25} = 0,8$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 1,25$.

Знайдемо граничні ймовірності:

$$p_0 = \frac{1-1,25}{1-1,25^{3+2}} \approx 0,122, \quad p_1 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,152, \quad p_2 = 1,25^2 \cdot 0,122 \approx 0,191,$$

$$p_3 = 1,25^3 \cdot 0,122 \approx 0,238, \quad p_4 = 1,25^4 \cdot 0,122 \approx 0,297.$$

$$\text{Ймовірність відмови: } p_{\text{відмови}} = p_4 = 0,297.$$

$$\text{Відносна пропускна здатність: } Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - 0,297 = 0,703.$$

$$\text{Абсолютна пропускна здатність: } A = \lambda Q = 1 \cdot 0,703 = 0,703 \left(\frac{\text{клієнтів}}{\text{хв}} \right).$$

Середня кількість клієнтів у системі:

$$L_{\text{сист}} = 0 \cdot 0,122 + 1 \cdot 0,152 + 2 \cdot 0,191 + 3 \cdot 0,238 + 4 \cdot 0,297 = 2,436$$

$$\text{Середній час перебування клієнта у системі: } W_{\text{сист}} = \frac{2,436}{1} = 2,436 (\text{хв}).$$

Середня довжина черги:

$$L_{\text{черги}} = 1,25^2 \frac{1-1,25^3 \cdot (3-3 \cdot 1,25+1)}{(1-1,25)^2} \cdot 0,122 \approx 1,56 (\text{клієнта}).$$

$$\text{Середній час перебування клієнта у черзі: } W_{\text{очікування}} = \frac{1,56}{1} = 1,56 (\text{хв}).$$

З отриманих результатів видно, що ймовірність простою касира і середній час очікування клієнта є малими, ймовірність відмови теж незначна і становить приблизно 0,297. Отже, можна вважати, що система працює ефективно.

Приклад 2. Багатоканальна СМО з обмеженою чргою.

1) На деяку базу в середньому через 30 хв прибувають автомашини з продукцією. Середній час розвантаження однієї машини становить 1,5 години. Розвантаження виконує дві бригади вантажників. На території бази можуть знаходитися в черзі та очікувати розвантаження не більше 4 автомашин. Визначити показники роботи СМО.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 2$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{2}{3}$;
- кількість сервісів $n = 2$;

- довжина черги $m = 3$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 3$;
- приведена інтенсивність потоку $\rho / n = 1,5$

Знайдемо ймовірність відсутності клієнтів у системі:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^4 \right)}{\left(1 - \frac{3}{2} \right)} \right)^{-1} = 0,0158$$

$$\text{Ймовірність відмови: } p_{\text{відм}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0 = \frac{3^6}{2^4 \cdot 2!} \cdot 0,0158 = 0,36$$

$$\text{Відносна пропускна здатність: } Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - 0,36 = 0,64.$$

$$\text{Абсолютна пропускна здатність: } A = \lambda Q = 2 \cdot 0,64 = 1,28 (\text{авто} / \text{год}).$$

$$\text{Середня кількість зайнятих бригад: } k_{\text{зайн}} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = 3 \cdot 0,64 = 1,92$$

Середня довжина черги:

$$L_{\text{черги}} = \frac{3^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1 - (1,5)^4 \left(4 + 1 - \frac{4}{2} \cdot 3 \right)}{(1 - 1,5)^2} \cdot 0,0158 \approx 2,6 (\text{авто}).$$

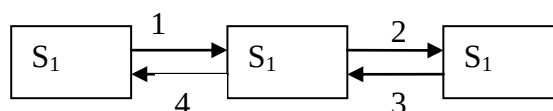
$$\text{Середній час перебування клієнта у черзі: } W_{\text{очікування}} = \frac{2,6}{2} = 1,3 (\text{год}).$$

$$\text{Середня кількість клієнтів у системі: } L_{\text{сист}} = 2,6 + 1,92 = 4,52$$

$$\text{Середній час перебування клієнта у системі: } W_{\text{сист}} = \frac{4,52}{2} = 2,26 (\text{год}).$$

Задачі для самоконтролю

1. Знайти граничні ймовірності для системи, заданої графом, представленим на рис. . Відповідь: $p_1 \approx 0,706$; $p_2 \approx 0,176$; $p_3 \approx 0,118$



Рис

2. Розглянемо телефону лінію на вхід якої надходить простіший потік дзвінків з інтенсивністю $\lambda = 0,4$ дзвінки/хв. Середня продовженість розмови становить 3 хв. Час розмови має показників закон розподілу. Знайти граничні ймовірності станів системи та характеристики обслуговування. *Відповідь:* $p_0 \approx 0,455$; $p_{\text{відмови}} =$; $Q = 0,455$; $A = 0,182$.

3. Є двухканальна найпростіша СМО з відмовами. На її вхід надходить потік заявок з інтенсивністю 4 заявки / год. Середній час обслуговування однієї заявки 0,8 години. Кожна обслужена заявка приносить дохід 4 грошові одиниці. Зміст кожного каналу обходиться 2 грош. од./год. З'ясуйте, вигідно чи не вигідно в економічному відношенні збільшити число каналів до трьох. *Відповідь:* При $n=2$: $p_0=0,107$; $p_2=0,550$; $Q=0,450$; $A=1,8$; дохід $D=7,2$. При $n=3$: $p_0=0,068$; $p_3=0,371$; $Q=0,627$; $A=2,52$; дохід $D=10,08$. Збільшення числа каналів є вигідним.

4. Магазин відвідує в середньому 90 осіб на годину, які обслуговуються одним касиром. Час на обслуговування однієї особи в середньому становить 1 хв. Черга в зал обслуговування обмежена 5 покупцями. Оцінити ефективність роботи СМО. *Відповідь:* $p_0=0,031$; $p_{\text{відмови}}=0,354$; $L_{\text{очік.}} \approx 3,457$; $W_{\text{черги}}=2,3$. Якщо збільшити чергу до 10, то $p_0=0,0039$, а $p_{\text{відмови}}=0,036$, але для підвищення ефективності краще посадити ще одного касира.

5. На склад в середньому прибуває 3 машини на годину. Розвантаження здійснюють 3 бригади вантажників. Середній час розвантаження машини - 1 год. В черзі на розвантаження може перебувати не більше 4-х машин. Дати оцінку роботи СМО. *Відповідь:* $p_0 \approx 0,032$; $p_{\text{відмови}}=0,145$; $Q=0,855$; $L_{\text{очік.}} \approx 1,45$; $W_{\text{системи}}=1,34$. Можна сказати, що робота системи ефективна.

6. Один оператор, обслуговує в середньому двох клієнтів за одну хвилину. Щогодини в середньому приходять 90 відвідувачів. Провести аналіз роботи СМО. *Відповідь:* $p_0 \approx 0,25$; $L_{\text{очік.}} \approx 2,25$; ; $L_{\text{системи.}} \approx 3$; $W_{\text{системи}}=2$.

7. Інтенсивність потоку відвідувачів становить 150 осіб в годину. Є 3 касири, кожен з яких обслуговує в середньому 1 відвідувача за хвилину.

Знайти характеристики СМО. Відповідь: $p_0 \approx 0,0555$; $L_{\text{очік.}} \approx 4,35$; ; $L_{\text{системи.}} \approx 6,35$; $W_{\text{системи}} = 2,16$.

Інші типи СМО

3. СМО з обмеженим часом очікування

На практиці зустрічаються задачі з так званими "нетерплячими" замовленнями, які можуть вийти із системи, якщо час очікування перевищує деяке граничне значення. В простих математичних моделях покладають, що замовлення може перебувати у черзі випадковий час, розподілений за показниковим законом з деяким параметром $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{очікування}}}$ (замовлення, що перебуває у черзі може вийти із системи з інтенсивністю ν), де $\bar{t}_{\text{очікування}}$ – середній час очікування у черзі, який є обмеженим. Якщо в черзі знаходиться m замовлень, то інтенсивність потоку замовлень, що виходять з черги буде становити $k\nu$. З урахуванням замовлень, що проходять обслуговування, інтенсивність вихідного потоку буде дорівнювати сумі інтенсивності виходу з черги та інтенсивності обслуговування:

$$\mu_{\text{заг}} = n\mu + m\nu,$$

де n – кількість каналів обслуговування.

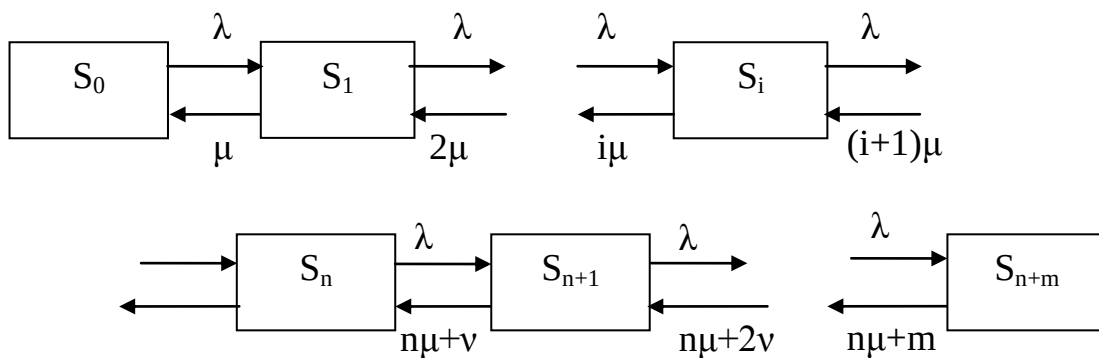


Рис. 16 Граф станів n -канальної СМО з обмеженим часом очікування у черзі

Показники ефективності таких систем визначаються за формулами, отриманими для процесу "загибелі та розмноження".

Граничні ймовірності такої системи визначаються за формулами:

$$p_i = \frac{p_0}{i!} \cdot \rho^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Якщо враховувати чергу, то для $i > m$ середнє навантаження визначається як: $\rho = \frac{\lambda}{\mu_{\text{заг}}} = \frac{\lambda}{n\mu + m\nu}$. Тоді:

$$p_{m+k} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\lambda^m}{\prod_{j=1}^m (n\mu + j\nu)}.$$

З врахуванням, що всі ймовірності становлять повну групу подій $\left(\sum_{i=0}^n p_i = 1\right)$:

$$p_0 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\prod_{j=1}^m (n\mu + j\nu)} \right)^{-1},$$

де в практичних розрахунках використовують лише декілька членів нескінченного ряду, так як він швидко спадає.

Для СМО з "нетерплячими" замовленнями поняття ймовірності відмови не має сенсу бо замовлення може вийти з черги не діждавшись обслуговування.

Середня кількість замовлень в черзі: $L_{\text{черги}} = \frac{\rho}{\beta}$, де $\beta = \frac{\nu}{\mu}$.

Абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda - \nu \cdot L_{\text{черги}}$.

Відносна пропускна спроможність: $Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \cdot L_{\text{черги}}$.

Середня кількість зайнятих каналів: $k = \frac{A}{\mu} = \rho - \beta \cdot L_{\text{черги}}$.

Середня кількість вільних каналів: $k_{\text{вільні}} = n - k$.

Ефективність обслуговування: $E = k/n$.

Приклад. Пункт обслуговування має три пристрої обслуговування. Інтенсивність потоку замовлень становить 6 осіб за годину. Інтенсивність обслуговування – 3 замовлення за годину. Середня кількість замовлень, що

виходять з черги не дочекавшись обслуговування – 1 замовлення за годину.
Визначити абсолютну пропускну спроможність пункту.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 6$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = 3$;
- кількість сервісів $n = 3$;
- довжина черги $m = 3$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 2$;
- приведена інтенсивність потоку $\rho / n = 2/3$.

Знайдемо ймовірність того, що система вільна:

$$p_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \left(\frac{6}{3 \cdot 3 + 1} + \frac{6^2}{(3 \cdot 3 + 2 \cdot 1)} \right) \right)^{-1} \approx 0,13$$

Ймовірність зайнятості всіх сервісів: $p_{\text{зайнятості}} = 1 - p_0 = 0,87$

Абсолютна пропускну спроможність: $A = n \cdot p_{\text{зайнятості}} = 3 \cdot 0,87 = 2,61$.

Отже, система обслуговує 2,61 замовлення за годину, що можна вважати непоганим показником.

4 Замкнені системи масового обслуговування

В замкнених СМО інтенсивність потоку замовлень залежить від самої системи і джерела замовлень розглядаються не як зовнішні елементи, а як компоненти самої СМО. Для таких систем характерним є те, що джерело замовлень є обмеженим.:

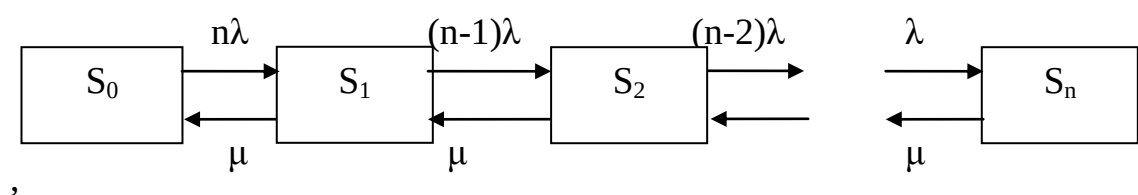


Рис. 14. Граф станів замкненої СМО

Для замкнених систем щільності ймовірностей дорівнюють:

$$\lambda_{01} = n\lambda, \lambda_{12} = (n-1)\lambda, \dots, \lambda_{n-1,n} = \lambda,$$

$$\lambda_{10} = \lambda_{21} = \dots = \lambda_{n,n-1} = \mu.$$

Тоді з рівнянь Колмогорова формули граничних ймовірностей будуть мати вигляд:

$$p_0 = (1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \dots + n(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \rho^n)^{-1},$$

$$p_i = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1) \rho^i p_0, \quad i = \overline{1, n}$$

В якості абсолютної пропускної спроможності виступає ймовірність зайнятості системи (середня кількість несправностей за одиницю часу):

$$P_{\text{зайнятості}} = 1 - p_0$$

Якщо виконується обробка замовлення, то абсолютна пропускна спроможність буде становити: $A = (1 - p_0) \cdot \mu$.

Відносна пропускна спроможність не обчислюється, тому що кодне замовлення врезультаті буде виконане: $Q = 1$.

Ймовірність того, що обслуговуючий пристрій буде не зайнятий:

$$P_{\text{вільний}} = 1 - P_{\text{зайнята}} = p_0.$$

Середня кількість замовлень буде становити: $L_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^n i p_i = n - \frac{1 - p_0}{\rho}$

Так як кількість замовлень, що обслуговується дорівнює 1, то середня ймовірність зайнятості сервісу буде становити: $P_{\text{зайнятості}} = 1 - p_0$ якщо цю величину відняти від середньої кількості замовлень, то отримаємо середню кількість замовлень, що очікують обслуговування у черзі:

$$L_{\text{черги}} = n - \frac{1 - p_0}{\rho} = n - (1 - p_0)(1 + \rho^{-1}).$$

Якщо замовлення представляє собою виробничу одиницю з продуктивністю w і, знаючи середню кількість несправних виробничих одиниць, можна оцінити середні втрати групи пристроїв за одиницю часу за рахунок несправностей: $B = w \cdot L_{\text{системи}}$

Приклад. Працівник обслуговує групу з трьох верстатів. Кожний верстат виходить з ладу в середньому 2 рази за годину. Процес відновлення становить 10 хвилин. Визначити: ймовірність зайнятості працівника, абсолютну пропускну спроможність, середню кількість несправних верстатів, середню відносну втрату продуктивності за рахунок несправностей.

Розв'язок. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 2$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1/6} = 6$;
- довжина черги $m = 3$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 1/3$;

Обчислимо характеристики системи.

Ймовірність, що всі станки справні:

$$p_0 = \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3^3} \right)^{-1} \approx 0,346.$$

Ймовірність зайнятості працівника: $p_{\text{зайн}} = 1 - p_0 = 0,654$.

Абсолютна пропускну спроможність: $A = 0,654 \cdot 6 = 3,94$.

Середня кількість несправних верстатів: $L_{\text{черги}} = 3 - \frac{0,654}{1/3} = 1,04$.

Середня відносна втрата продуктивності за рахунок несправностей:
 $B = 0,347$ або 35%.

5. Системи з різними дисциплінами підключення каналів обслуговування

Під дисципліною підключення каналів до обслуговування розуміють правила, за якими сервіси підключаються до обслуговування замовлень, при цьому всі замовлення вважаються рівноцінними. Розрізняють два різновиди

таких СМО: системи з "взаємодопомогою" між каналами обслуговування і системи " без взаємодопомоги".

Раніше були розглянуті тільки системи, в яких кожне замовлення обслуговувалось одним каналом; одночасне обслуговування одного замовлення кількома каналами не допускалось. Однак зустрічаються СМО, в яких для прискорення процесу обслуговування допускається підключення декількох каналів до роботи над одним замовленням. Наприклад, два або кілька робочих можуть одночасно ремонтувати один верстат або автомашину, по одному літаку може стріляти кілька зенітних знарядь, робота багатопроцесорної ЕОМ із системою розподіленої пам'яті. В цих випадках При цьому виникає задача найкращого розподілу каналів обслуговування.

Зрозуміло, що при "взаємодопомозі" декількох каналів, час обслуговування одного замовлення зменшується. Це означає, що інтенсивність потоку обслуговування є неспадною функцією числа каналів, що підключаються до обслуговування. При цьому, починаючи з деякого критичного числа $K_{кр}$ інтенсивність потоку обслуговування не буде зростати, тобто не можна підключати нескінченно велике число сервісів до виконання однієї роботи. Тому будемо вважати, що інтенсивність потоку обслуговувань зростає лінійно зі збільшенням числа каналів обслуговування до певного рівня, вище якого вона піднятися не може ні при якому збільшенні k . Обмежимося розглядом СМО тільки для лінійної ділянки цієї залежності: тобто будемо вважати, що в кожному конкретному випадку можна знайти число $K_{кр}$, яке буде максимально можливим числом каналів, які об'єднуються для "взаємодопомоги". Можливі дві дисципліни "взаємодопомоги": зосереджена і рівномірна.

У першому випадку при появі одного замовлення його починають обслуговувати всі n каналів одночасно до закінчення процесу обслуговування. Якщо під час обслуговування приходить ще одне замовлення, то воно або отримує відмову, або стає в чергу. Після закінчення

обслуговування всі канали перемикаються на інше замовлення (якщо є черга) або чекають його появи (якщо черги немає).

У другому випадку, якщо замовлення приходить в момент часу, коли все n каналів вільні, то всі вони починають його обслуговування. Якщо в цей час приходить нове замовлення, то частина каналів перемикається на його обслуговування. Якщо за той час, поки обслуговуються ці два замовлення, приходить третє, то на його обслуговування виділяється частина каналів з числа обслуговуючих перших два і т.д. до тих пір, поки не прийде n замовлень, і тоді кожен канал буде обслуговувати тільки одне замовлення. При цьому нове замовлення або отримує відмову, або стає в чергу.

Така дисципліна обслуговування передбачає, що $n < K_{кр}$. Якщо $n > K_{кр}$, то рівномірна взаємодопомога полягає в тому, що якщо всі канали вільні і надходить замовлення, то його починають обслуговувати не n , а m каналів ($m < n < K_{кр}$). Наступне замовлення буде обслуговуватись наступними m вільними каналами. Якщо в системі знаходиться i замовлень, так що $n - i \cdot m < m$, то замовлення що надходить приймається на обслуговування, а канали перерозподіляються так, що кожне замовлення обслуговується кількістю каналів $< m$. Якщо замовлення надходить в момент, коли в СМО перебувають n замовлень, то вона або залишає систему, або стає в чергу.

Таким чином, при рівномірній взаємодопомозі можливі два режими: повної взаємодопомоги (перше замовлення обслуговується всіма n каналами) і часткової взаємодопомоги (перше замовлення обслуговується m каналами, причому $m < n$).

Граф станів СМО з повною рівномірною допомогою наведено на рис., де видно, що він такий самий як і граф для одноканальнох СМО з чергою.

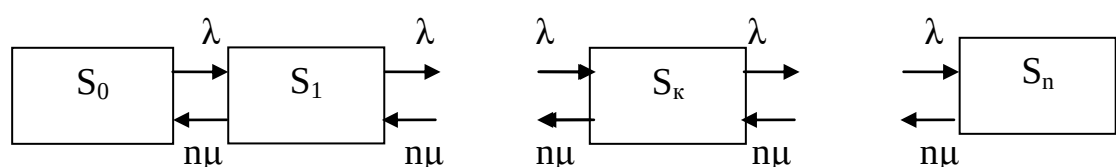


Рис. 14. Граф станів СМО з рівномірною допомогою

Отже система з рівномірною допомогою подібна до одно канальної СМО. Якщо розглядати випадок, що всі канали обслуговують одне замовлення і лише після завершення обробки приймають на виконання інше, – то така система працює як одно канальна з більшою інтенсивністю, але при цьому зменшується її пропусна спроможність. Основні характеристики такої системи будуть визначатись за тими ж формулами, як і для одно канальної СМО при інтенсивності обслуговування:

$$\mu^* = n \cdot \mu,$$

де n – загальна кількість каналів, μ – інтенсивність кожного каналу.

При наявності черги, для системи, коли всі канали працюють як один, середня довжина черги і час перебування у черзі будуть більшими ніж для простої одно канальної системи, але час перебування у системі буде меншим.

Приклад. Розглянемо трьохканальну систему ($n = 3$) з необмеженою чергою та інтенсивністю вхідного потоку $\lambda = 4 \left(\frac{\text{зам.}}{\text{хв.}} \right)$ і середнім часом обслуговування $t_{об.} = 0,5 \left(\text{хв.} \right)$. Необхідно встановити, зважаючи на:

- середню довжину черги;
- середній час очікування у черзі;
- середній час обслуговування замовлення системою;

встановлювати взаємодопомогу?

Розв'язок. Розглянемо окремо випадок без взаємодопомоги і з взаємною допомогою.

а) Без взаємодопомоги. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 4$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0,5} = 2$;
- кількість каналів $n = 3$;
- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 2$.

Обчислимо характеристики:

- ймовірність, що система вільна: $p_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\right)^{-1} = \frac{1}{9}$;

- середня довжина черги: $m = \frac{2^4 \cdot 1/9}{3 \cdot 3! \cdot (1/3)^2} = 0,889$;

- середній час очікування у черзі: $W_{\text{черги}} = m/\lambda = 2/9 = 0,222$

- середній час обслуговування замовлення системою:

- $W_{\text{системи}} = W_{\text{черги}} + t_{\text{об}} = 2/9 + 1/2 = 0,722$

б) Із взаємодопомогою. Визначимо основні показники СМО:

- інтенсивність замовлень $\lambda = 4$;

- інтенсивність обслуговування $\mu = 3 \cdot \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = 3/0,5 = 6$;

- кількість каналів $n = 1$;

- відносне навантаження на систему $\rho = \lambda / \mu = 2/3$.

Обчислимо характеристики:

- середня довжина черги: $m = \frac{(2/3)^2}{1/3} = 1,333$;

- середній час очікування у черзі: $W_{\text{черги}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2/3}{1/3} = 0,333$

- середній час обслуговування замовлення системою:

- $W_{\text{системи}} = W_{\text{черги}} + t_{\text{об}} = 1/3 + 1/6 = 0,500$

З отриманих результатів видно, що при введенні взаємодопомоги хоч час обслуговування і збільшується, але інші показники погіршуються, що не сприяє покращенню ефективності роботи системи.

Розглянемо системи з рівномірною взаємодопомогою з відмовами. Система може перебувати у станах, коли всі канали обслуговують одне замовлення S_1 , всі канали обслуговують два замовлення S_2 , всі канали обслуговують k замовлень S_k , канали обслуговують n замовлень S_n . Граф станів системи буде мати такий самий вигляд, як і для СМО з рівномірною допомогою. Отже основні характеристики системи для цього випадку будуть

обчислюватись за формулами одно каналної СМО з інтенсивністю обслуговування $\mu^* = n \cdot \mu$ та чергою довжиною $m = n - 1$.

Приклад. Розглянемо систему із попереднього прикладу і порівняємо відносну та абсолютну пропускні спроможності для випадків без взаємодопомоги та із розподіленою взаємною допомогою.

Розв'язок.

а) Без взаємодопомоги. Визначимо основні показники СМО:

- відносна пропускна спроможність: $Q = \frac{1 - \rho^3}{1 - \rho^4} = 0,79$;

- абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot Q = 3,16$;

- середня кількість зайнятих каналів: $c = A / \mu = 1,58$.

б) Із розподіленою взаємною допомогою: $\rho^* = \lambda / (\mu \cdot n) = 2/3$;

- відносна пропускна спроможність: $Q = \frac{1 - \rho^3}{1 - \rho^4} = 0,887$;

- абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot Q = 3,51$;

- середня кількість зайнятих каналів: $c = 1,76$.

З отриманих результатів видно, що при правильно організованій взаємній допомозі пропускна спроможність системи підвищилась і збільшилась зайнятість каналів.

Розглянемо випадок, коли є рівномірно розподілена взаємна допомога і є черга довжиною m . Інтенсивність обслуговування буде становити $\mu(k) = k \cdot \mu$, де k – кількість замовлень, що обслуговується всіма n каналами. Граф станів системи наведений на рис. , де S_i , $i \leq n$ – кількість замовлень, що обслуговуються всіма n каналами, S_{n+j} , $j \leq m$ – загальна кількість замовлень в системі.

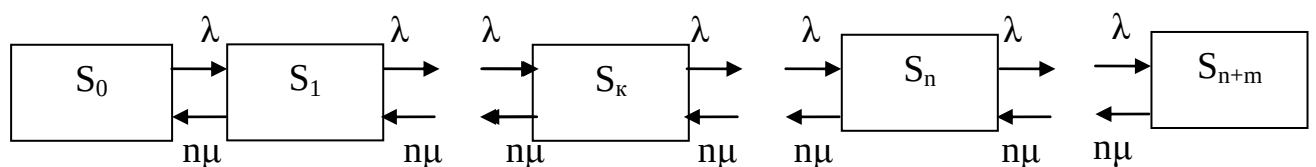


Рис. 14. Граф станів СМО з рівномірною допомогою і чергою

З графу станів видно, що система подібна до одноканальної СМО з навантаженням на систему $\rho^* = \lambda / n \cdot \mu$, та чергою. Отже основні характеристики будуть визначатись за наступними формулами:

- $p_{\text{відмови}} = \frac{(\rho^*)^{n+m}(1-\rho^*)}{1-(\rho^*)^{n+m+1}}$ – ймовірність відмови;
- $Q = \frac{1-(\rho^*)^{n+m}}{1-(\rho^*)^{n+m+1}}$ – відносна пропускна спроможність;
- $A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \frac{1-(\rho^*)^{n+m}}{1-(\rho^*)^{n+m+1}}$ – абсолютна пропускна спроможність.

Приклад. Розглянемо трьохканальну систему ($n=3$) з чергою $m=2$ та інтенсивністю вхідного потоку $\lambda = 4 \left(\frac{\text{зам.}}{\text{хв}} \right)$ і середнім часом обслуговування $t_{\text{об.}} = 0,5(\text{хв.})$. Порівняти характеристики системи для випадку наявності взаємодопомоги та при її відсутності.

Розв'язок. Визначимо основні показники системи:

- $\lambda = 4$ – інтенсивність вхідного потоку;
- $\mu = 2$ – інтенсивність вихідного потоку;
- навантаження на систему:
 - $\rho = 2$ – без взаємодопомоги;
 - $\rho^* = 2/3$ – із взаємодопомогою.

а) Без взаємодопомоги:

- відносна пропускна спроможність: $Q = \frac{1-\rho^5}{1-\rho^6} = 0,49$;
- абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot Q = 1,96$.

б) З рівномірною взаємодопомогою:

- відносна пропускна спроможність: $Q = \frac{1-(\rho^*)^5}{1-(\rho^*)^6} = 1,42$;

- абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot Q = 5,68$.

Очевидно, що при введені взаємодопомогт показники системи покращуються.

6. СМО з помилками обслуговування

На практиці зустрічаються випадки, коли замовлення обслуговується не повністю, а з деякою ймовірністю $p \neq 1$, що обумовлена «браком» в роботі системи.

Приклади. Неправильне з'єднання телефонної станції з абонентом.

Помилка, пропущена коректором в тексті.

Помилка у платіжній квитанції.

Невірне повідомлення в розкладі руху транспорту.

У розімкнених системах поява помилки практично не впливає на потік замовлень: якщо число джерел замовлень є значним, то з появою помилки інтенсивність потоку практично не змінюється. Для розімкнених систем врахування помилки виражається лише в тому, що відносна та абсолютна пропускна спроможність системи зменшується за рахунок того, що вона домножується на $p < 1$, де p – ймовірність помилки. Інші характеристики системи (час очікування, довжина черги і т.д.) не змінюються.

Для замкнених систем замовлення оброблене з помилкою знову стає у чергу, а отже збільшується навантаження на СМО.

В якості прикладу СМО з помилкою розглянемо одного працівника, який обслуговує n верстатів. Нехай інтенсивність потоку несправностей для нього становить λ , середній час налагодження $t_{обсл.} = 1/\mu$, з ймовірністю p ремонт верстату завершується успішно і верстат знову починає працювати, з

ймовірністю $1-p$ ремонт невдалий і верстат повертається у чергу на обслуговування. Необхідно визначити граничні ймовірності.

Визначимо стани системи:

- S_0 – всі верстати справні;
- S_1 – один верстат насправний, він ремонтується, черги немає;
- S_k – k верстатів несправні, один ремонтується, а $k-1$ очікують у черзі;
- S_n – всі n верстатів несправні, один ремонтується, $n-1$ утворюють чергу.

Граф станів системи наведений на рис.

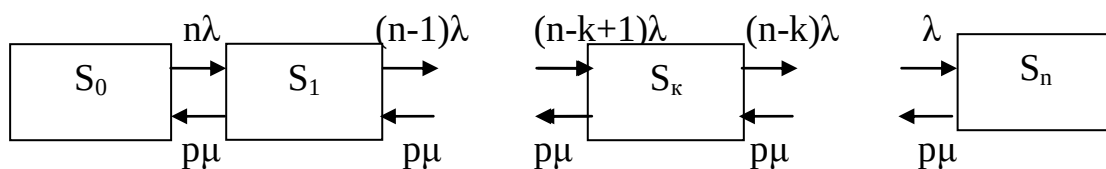


Рис. 14. Граф станів СМО з помилкою

Граф станів даної системи подібний до графу замкненої системи (рис.) з тією відмінністю, що інтенсивність вихідного потоку буде становити $\mu^* = p \cdot \mu$. Отже характеристики СМО з помилками можуть бути обчислені за формулами замкненої системи **0** для μ^* .

Приклад. Робітник обслуговує три верстати. Верстат виходить з ладу у середньому 2 рази за годину. Ремонт займає 10 хв., причому ймовірність виправлення поломки $2/3$. Визначити характеристики системи: ймовірність зайнятості, абсолютну пропускну спроможність, середню кількість несправних верстатів.

Розв'язок. Система, що розглядається є замкненою. Визначимо основні показники системи за одну:

- $\lambda = 2$ – інтенсивність вхідного потоку;

- $\mu = 6$ – інтенсивність вихідного потоку без помилки;
- $\mu^* = p \cdot \mu = 4$ – інтенсивність вихідного потоку з врахуванням помилки;

$$\rho^* = \lambda / \mu^* = 1/2 - \text{навантаження на систему.}$$

Обчислимо основні характеристики системи:

- $p_0 = \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^3}\right)^{-1} \approx 0,211$ – ймовірність, що всі верстати працюють;
- $p_{\text{зайн}} = 1 - p_0 = 0,789$ – ймовірність відмов;
- $A = 0,789 \cdot 4 = 3,16$ – абсолютна пропускна спроможність;
- $Q = 3 - \frac{0,789}{1/2} = 1,42$ – відносна пропускна спроможність.

Існують системи (наприклад, при наявності людського фактору) де характер обслуговування залежить від довжини черги: коли черга збільшується, то сервіс починає поспішати, що збільшує ймовірність помилки.

В якості прикладу розглянемо одно каналну СМО з n каналами (робітник обслуговує n верстатів). Нехай у спокійному режимі роботи час ремонту становить $t_{\text{обсл.}}$. Якщо в черзі з'являються пошкоджені верстати робітник починає поспішати і інтенсивність потоку обслуговування зростає. Ця інтенсивність залежить від ймовірності помилки, яка є функцією від довжини черги: $\mu^*(k) = \mu(k) \cdot p(k)$, $k = \overline{0, n-1}$ (рис.).

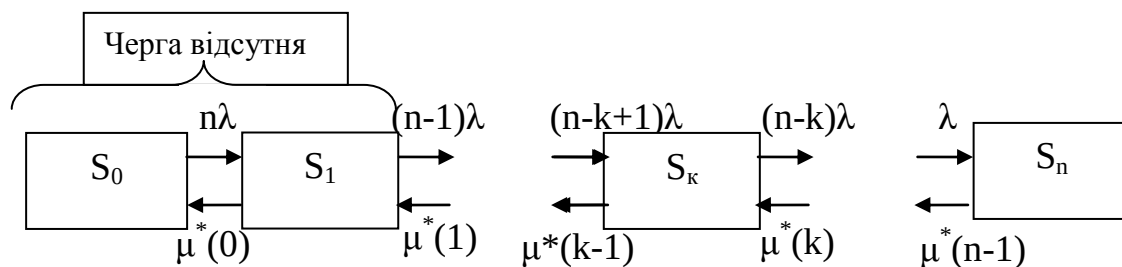


Рис. 14. Граф станів СМО з помилкою, що «поспішає»

Взявши формули граничних ймовірностей схеми «загибелі-розмноження» за основу, отримаємо:

$$p_1 = \frac{n \cdot \lambda}{\mu^*(0)} p_0, \quad p_2 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \lambda^2}{\mu^*(0) \cdot \mu^*(1)} p_0, \quad , \quad p_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \lambda^k}{\mu^*(0) \cdot \mu^*(1) \cdot \dots \cdot \mu^*(k-1)} p_0, \dots$$

$$p_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \lambda^n}{\mu^*(0) \cdot \mu^*(1) \cdot \dots \cdot \mu^*(n-1)} p_0,$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{n \cdot \lambda}{\mu^*(0)} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \lambda^2}{\mu^*(0) \cdot \mu^*(1)} + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \lambda^n}{\mu^*(0) \cdot \mu^*(1) \cdot \dots \cdot \mu^*(n-1)} \right)^{-1}$$

Контрольні питання та задачі для самоконтролю

1. Дайте характеристику СМО з обмеженим часом очікування.
2. Представте граф станів системи з обмеженим часом очікування. Як визначаються граничні ймовірності для цього випадку?
3. Які СМО називають замкненими. Як визначаються граничні ймовірності для замкнених систем?
4. Як визначається абсолютна пропускна спроможність замкненої СМО?
5. Що розуміють під дисципліною підключення каналів?
6. Дайте характеристику СМО із "взаємодопомогою" між каналами обслуговування і "без взаємодопомоги".
7. Які особливості обчислення характеристик системи із "взаємодопомогою"?
8. Наведіть приклади СМО «з помилкою в обслуговуванні».
9. Як обчислюються характеристики СМО з помилками?

Перенести в кінець розділа і дописати

7. Моделі систем з непуассонівськими потоками замовлень

В попередніх роздвлах розглядалися випадки коли процес, що протікає в СМО є марківським. При отриманні характеристик також вважалось, що потік має постійну інтенсивність (є простішим), коли інтервали часу між замовленнями мають показниковий закон розподілу (рис.):

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, t > 0.$$

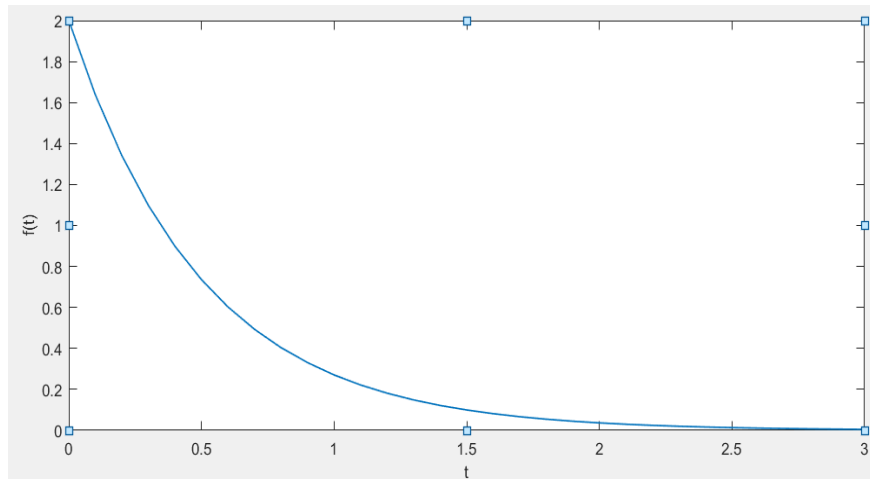


Рис. Графік пуассонівського потоку

У практичних задачах часто зустрічаються випадки, коли проміжки часу між надходженням замовлень мають інші закони розподілу. Зрозуміло, що для таких випадків розглянуті раніше випадки СМО не підходять, для їх опису необхідно застосовувати більш складний математичний апарат, а отже і результати будуть представлятись складними математичними виразами. Тому формули для характеристик таких СМО отримані тільки для простіших випадків, які представлені нижче.

7.1 СМО з відмовами.

Б. А. Севастьяновим була розглянута система Ерланга з пуассонівським потоком замовлень з інтенсивністю λ та потоком обслуговування у якому ракон розподілу часу обслуговування одного замовлення є довільним. Якщо позначити цей закон як $f(t_{обсл.})$, то середній

час обслуговування (математичне сподівання) буде визначатись за наступною формулою:

$$\bar{t}_{обсл.} = 1/\mu = \int_0^{\infty} t_{обсл.} \cdot f(t_{обсл.}) dt_{обсл.}.$$

Б. А. Севастьянов довів, що формули Ерланга для визначення граничних ймовірностей станів справедливі і для цього випадку:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = \overline{0, n}, \quad p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}, \quad \text{де } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обсл.}.$$

7.2 Одноканальна СМО з очікуванням

Розглянемо одноканальну СМО ($n=1$) з необмеженою чергою ($m=\infty$). На вхід системи надходить пуассонівський потік замовлень з інтенсивністю λ , закон розподілу часу обслуговування є довільним $f(t)$ з математичним сподіванням $t_{обсл.} = 1/\mu$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma_{тообс.} = 1$.

Введемо величину: $v = \frac{\sigma_{тообс.}}{t_{обсл.}}$, яка називається коефіцієнтом варіації часу обслуговування і характеризує величину розсіювання часу обслуговування відносно середнього значення. Для показникового закону розподілу $v=1$

Для одно канальної СМО з простішим вхідним потоком і довільно розподіленим часом обслуговування доведено, що середня довжина черги визначається за формулою:

$$L_{черги} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}, \quad \text{де } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (1)$$

а середній час очікування у черзі:

$$W_{черги} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} = \frac{L_{черги}}{\lambda}. \quad (2)$$

Формули (1)-(2) називаються формулами Поллачека-Хінчина.

Якщо час обслуговування не випадковий і дорівнює математичному сподіванню: $t_{обсл.} = 1/\mu$, то $\sigma_{обсл.} = 0$ і $v = 0$ (випадок регулярного побою), тоді формули (1)-(2) спрощуються:

$$L_{черги} = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}, \quad W_{черги} = \frac{\rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}.$$

Видно, що середня довжина черги і середній час очікування у черзі в два рази менші ніж у випадку показникового закону розподілу.

Приклади.

1. Нехай потік клієнтів до сервісного центру має інтенсивність $\lambda = 2 \text{ год}^{-1}$. Середній час обслуговування $t_{обсл} = 20 \text{ хв}$ із середньоквадратичним відхиленням $\sigma_{тообс} = 8 \text{ хв}$. Визначити середню кількість клієнтів та середній час очікування у черзі.

Розв'язок. Визначимо основні показники системи у год.

- $\lambda = 2$ – інтенсивність вхідного потоку;
- $\mu = 3$ – інтенсивність вихідного потоку;
- $\rho = \lambda / \mu = 2/3$ - навантаження на систему;
- $v = \sigma_{тообс.} / t_{обсл.} = 8/20 = 0,4$ $v =$

Обчислимо основні характеристики системи:

- середня довжина черги: $L_{черги} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{(2/3)^2 \cdot (1 + 0,4^2)}{2 \cdot (1 - 2/3)} \approx 0,77$;
- середній час очікування у черзі: $W_{черги} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} \approx 0,385$;
- середня кількість клієнтів в системі: $L_{системи} = L_{черги} + \rho = 0,77 + 2/3 \approx 1,437$.

2. Нехай є шість типів повідомлень з часом обслуговування 15, 20, 25, 30, 35, 40 і 300. Число повідомлень кожного типу однакове. Стандартне відхилення для часу трохи вище свого середнього. Значення останнього часу обслуговування набагато більше інших. Це призведе до того, що повідомлення будуть перебувати в черзі значно довше, ніж, якби час

обслуговування був однаковий. У такому випадку при проектуванні доцільно вжити заходів для зменшення довжини черги. Наприклад, якщо зазначені цифри пов'язані з довжинами повідомлень, то, можливо, дуже довгі повідомлення варто розділити на частини.

Розв'язок. Визначемо кількісні оцінки системних показників для початкового варіанта організації інформаційного обміну і для двох варіантів, в яких довжини повідомлень вирівняні.

Обчислимо основні характеристики та величини, що входять в формулу для середньої довжини черги:

- математичне спідівання: $\bar{t}_{обсл} = \frac{15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 300}{7} = 66,43;$

- середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{M(t_{обсл}^2) - M(t_{обсл})^2} = \sqrt{\frac{15^2 + 20^2 + 25^2 + 30^2 + 35^2 + 40^2 + 300^2}{7} - 66,43^2} = 95,68$$

;

- коефіцієнт варіації часу обслуговування: $v = \frac{\sigma_{тообсл.}}{t_{обсл.}} = \frac{95,68}{66,43} = 1,44$

Будемо вважати, що середня тривалість для всієї групи повідомлень становить 600 одиниць часу, тоді: $\rho = \frac{15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 300}{600} = 0,775.$

- середня довжина черги: $L_{черги} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,775^2 \cdot (1 + 1,44^2)}{2 \cdot (1 - 0,775)} \approx 4,10;$

Обчислимо цуй показник, якщо останнє повідомлення розбивається на дві однакові частини:

- математичне спідівання: $\bar{t}_{обсл} = \frac{15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 150 + 150}{8} = 58,13;$

- середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{15^2 + 20^2 + 25^2 + 30^2 + 35^2 + 40^2 + 150^2 + 150^2}{8} - 58,13^2} = 53,56;$$

- коефіцієнт варіації часу обслуговування: $v = \frac{53,56}{58,13} = 0,92$

- середня довжина черги:
$$L_{\text{черги}} = \frac{0,775^2 \cdot (1 + 0,92^2)}{2 \cdot (1 - 0,92)} \approx 2,47;$$

Якщо останнє довге повідомлення розбити на три частини, то $L_{\text{черги}} \approx 1,94$.

З отриманих результатів видно ефект від розбиття довгого повідомлення на частини.

Для більш складних випадків не пуассонівських потоків (наприклад, багатоканальних систем, систем з особливостями обслуговування) аналітичні формули досить складні або взагалі їх не вдається отримати.

Розглянемо приклад одноканальної СМО з необмеженою чергою.

Приклад. На вхід одноканальної СМО ($n=1$) без відмов ($m=\infty$) надходить потік замовлень з інтенсивністю λ . Час обслуговування $t_{\text{обсл.}}$ має закон розподілу Ерланга 2-го порядку з математичним сподіванням $1/\mu$ і представляє собою суму двох незалежних випадкових величин з однаковим показниковим законом розподілу параметри яких позначимо μ' . Згідно до теореми суми математичних сподівань отримаємо: $1/\mu = 2/\mu'$ або $\mu' = 2 \cdot \mu$.

Час обслуговування такого потоку можна представити як суму двох незалежних випадкових величин $t_{\text{обсл.}}^{(1)}$ і $t_{\text{обсл.}}^{(2)}$ з показниковим законом розподілу і параметром 2μ . Величини $t_{\text{обсл.}}^{(1)}$ і $t_{\text{обсл.}}^{(2)}$ можна представити як дві послідовні «фази» процесу обслуговування.

Визначимо стани системи:

- S_0 – система вільна, замовлень немає;
- $S_{1,1}$ – в системі одне замовлення і знаходиться в першій фазі обслуговування, черги немає;
- $S_{1,2}$ – в системі одне замовлення і знаходиться в другій фазі обслуговування, черги немає;

- $S_{2,1}$ – в системі два замовлення, перше обробляється (перша фаза), а друге стоїть у черзі;

- $S_{2,2}$ – в системі два замовлення, перше обробляється (друга фаза), а друге стоїть у черзі;

.....

- $S_{k,1}$ – в системі k замовлень, перше обробляється (перша фаза), інші стоять у черзі;

- - $S_{k,2}$ – в системі k замовлень, перше обробляється (друга фаза), інші стоять у черзі;

.....

Із стану S_0 в стан $S_{1,1}$ систему переводить потік замовлень з інтенсивністю λ , з $S_{1,1}$ в $S_{1,2}$ – потік замовлень з інтенсивністю 2μ і. т. д.

Граф станів такої системи наведений на рис.

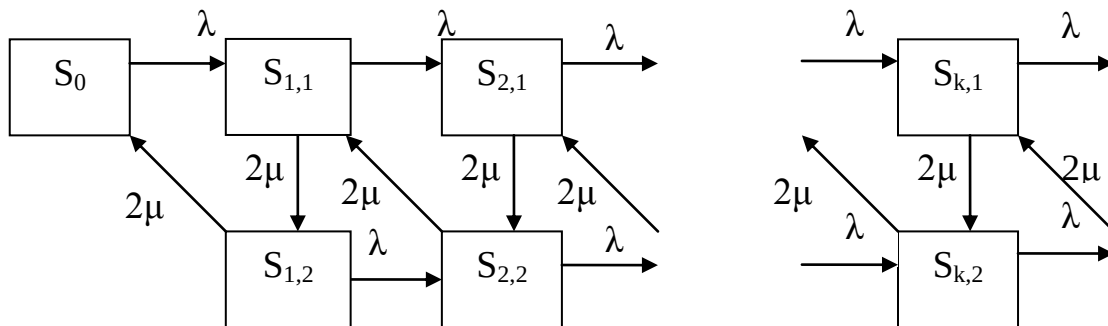


Рис. 13 Граф станів одноканальної СМО із законом Ерланга 2-го порядку

Спираючись на граф станів, запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для ймовірностей станів:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot p_0 = 2\mu \cdot p_{1,2} \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{1,1} = \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_{2,2} \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{1,2} = 2\mu \cdot p_{1,1} \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{2,1} = \lambda \cdot p_{1,1} + 2\mu \cdot p_{3,2} \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{2,2} = \lambda \cdot p_{1,2} + 2\mu \cdot p_{2,1} \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{k,1} = \lambda \cdot p_{k-1,1} + 2\mu \cdot p_{k+1,2} \\ (\lambda + 2\mu) \cdot p_{k,2} = \lambda \cdot p_{k-1,2} + 2\mu \cdot p_{k,1} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Ввівши позначення $\rho = \lambda/\mu$, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot p_0 = 2 \cdot p_{1,2} \\ (\rho + 2) \cdot p_{1,1} = \rho \cdot p_0 + 2 \cdot p_{2,2} \\ (\rho + 2) \cdot p_{1,2} = 2 \cdot p_{1,1} \\ (\rho + 2) \cdot p_{2,1} = \rho \cdot p_{1,1} + 2 \cdot p_{3,2} \\ (\rho + 2) \cdot p_{2,2} = \rho \cdot p_{1,2} + 2 \cdot p_{2,1} \\ \dots\dots\dots \\ (\rho + 2) \cdot p_{k,1} = \rho \cdot p_{k-1,1} + 2 \cdot p_{k+1,2} \\ (\rho + 2) \cdot p_{k,2} = \rho \cdot p_{k-1,2} + 2 \cdot p_{k,1} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Отже, система з потоком Ерланга методом вкладених ланцюгів зведена до вкладених харківських ланцюгів. При збільшенні порядку потоку Ерланга збільшується і кількість псевдо станів системи і її розв'язок стає досить складним. Існують певні вказівки на те, як можна розв'язати таку систему при конкретних значеннях λ і μ .

Перш за все оцінюється максимально можлива довжина черги, для цього закон розподілу часу обслуговування можна прийняти як показників. Це дає змогу обмежити розмірність системи, зробивши її скінченною. Для отримання розв'язку скінченної системи застосовують чисельні методи, найчастіше ітераційні, де за початкові значення приймаються значення

ймовірностей, отримані для показникового закону розділені на порядок потоку Ерланга..

У випадках, коли розв'язання системи є складним, для моделювання не-марківських процесів застосовують метод статистичних іспитів (метод Монте-Карло)

8. Багатофазні системи та мережі СМО

Моделі багатофазних систем

Багатофазними називаються СМО, які складаються з декількох послідовно з'єднаних окремих підсистем масового обслуговування, причому вхідний потік кожної наступної підсистеми є вихідним потоком попередньої.

Будемо вважати, що виконуються умови стабілізації черги, тобто $m = \infty$. Багатофазні СМО призначені для виконання деякого поного циклу обслуговування одного замовлення, коли з різних причин цей цикл доцільніше розділити на кілька фаз (наприклад, обслуговування в магазині, де покупці спочатку стоять в черзі до кас, а потім обслуговуються у продавців). Випадок введення додаткових фаз описаний в розділі **Метод псевдостанів**. Типовим прикладом багатофазної системи може бути послідовний процес обробки деталі. Точний розрахунок характеристик таких СМО можливий тільки в разі, якщо всі потоки замовлень є пуассонівськими, а час обслуговування має експоненціальний закон розподілу. В інших випадках можливий лише наближений розрахунок характеристик СМО.

В якості підсистем СМО на кожній фазі обслуговування будемо розглядати одно- і багатоканальні системи без черги або з чергами, в яких число місць не обмежене ($\rho = \lambda/\mu < 1$, $\rho^* = \rho/n < 1$, де n – кількість каналів).

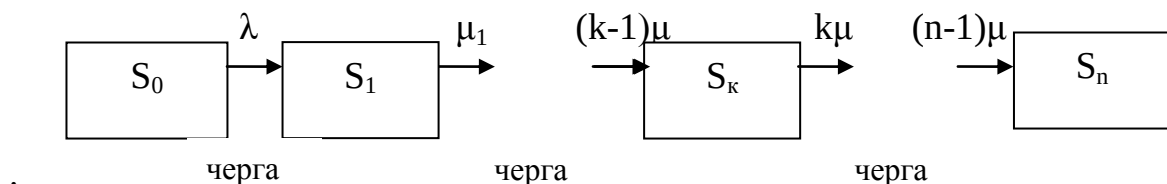


Рис. 14. Граф багатоканальної СМО

Можливі стани багатофазної одноканальної СМО можуть бути описані вектором $\bar{S} = (k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \dots, k_n\alpha_n)$, де k_i – довжина черги на вході i -го сервісу.

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i\text{-й прилад вільний} \\ 1, & i\text{-й прилад зайнятий} \end{cases}.$$

Якщо черга перед кожною фазою не допускаються, то система буде називатися системою з нульовою місткістю блоків очікування. Кожна фаза може бути зайнята обслуговуванням або вільна. Оскільки перед фазою черга не допускається, то приймається, що перша фаза обслуговування заблокована, якщо друга фаза не готова до прийому замовлення з тієї причини, що в ній не закінчено обслуговування. Приймається також, що якщо перша фаза зайнята, то чергове замовлення отримує відмову. В системі можуть бути наступні стани: "фаза вільна" – 0, "фаза зайнята" – 1, "фаза заблокована" – b .

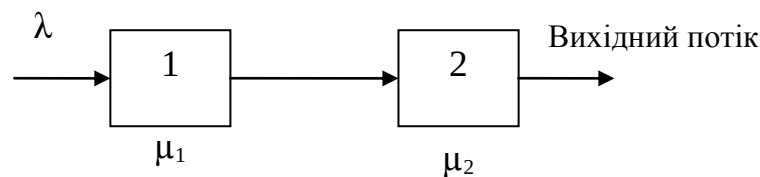


Рис. Двофазна одноканальна СМО без черги

Позначимо стан першої фази через i , другої – j . Тоді множину всіх можливих станів це всі можливі перестановки пар з нулів і одиниць та врахування стану з блокуванням:

$$\{(i, j)\} = \{(0,0); (1,0); (0,1); (1,1); (b,1)\}.$$

Враховуючи, що на вході системи пуассонівський потік, а час обслуговування має експоненціальний розподіл, для системи можна записати рівняння Колмогорова відносно ймовірностей станів $p_{ij}(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dp_{00}(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_{00}(t) + \mu \cdot p_{01}(t) \\ \frac{dp_{01}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_{01}(t) + \mu \cdot p_{10}(t) + \mu \cdot p_{b1}(t) \\ \frac{dp_{10}(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{00}(t) - \mu \cdot p_{10}(t) + \mu \cdot p_{11} \\ \frac{dp_{11}(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_{01}(t) - 2\mu \cdot p_{11}(t) \\ \frac{dp_{b1}(t)}{dt} = \mu \cdot p_{11}(t) - \mu \cdot p_{b1}(t) \end{cases},$$

де початкові умови визначаються як: $p_{00} = 1, p_{10} = p_{01} = p_{11} = p_{b1} = 0$.

В матричній формі цю систему можна записати як: $\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = A \cdot \bar{p}(t)$, де

$\bar{p}(t)$ – вектор з п'яти елементів, що відповідають ймовірностям станів i, j ;

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + \lambda) & \mu & 0 & \mu \\ \lambda & 0 & -\mu & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів.}$$

Для визначення граничних ймовірностей ліва частина приймається рівною нулю.

Якщо у трифазній системі без черг стани пешої фази позначити i , другої – j , а третьої – k , то множина всіх можливих станів буде мати вигляд:

$$\{i, j, k\} = \left\{ (0,0,0); (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,0,1); (0,1,1); (1,1,1); \right. \\ \left. (1,1,0); (b,1,0); (1,b,1); (b,b,1); (b,1,1); (0,b,1) \right\},$$

Система рівнянь Колмогорова буде представляти собою систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь розмірності 13×13 .

Розглянемо більш складний випадок, коли між фазами може існувати черга (рис.). Вважається, що коли на вході i -го сервісу є черга, то якщо сервіс звільняється, до нього миттєво надхотить замовлення з черги.

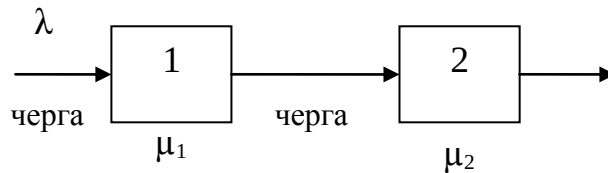


Рис. Двофазна одноканальна СМО з чергою

Стани системи будуть описуватись чотирьохмісними векторами, де парні місця представляють сервіси, а непарні – відповідні черги до них.

Визначимо стани системи:

- $S_0(0,0,0,0)$ – система вільна;
- $S_1(0,1,0,0)$ – в системі одне замовлення, що обслуговується першим сервісом;
- $S_2(1,1,0,0)$ – в системі два замовлення, перше обслуговується першим сервісом, а друге у черзі до нього і т. д..

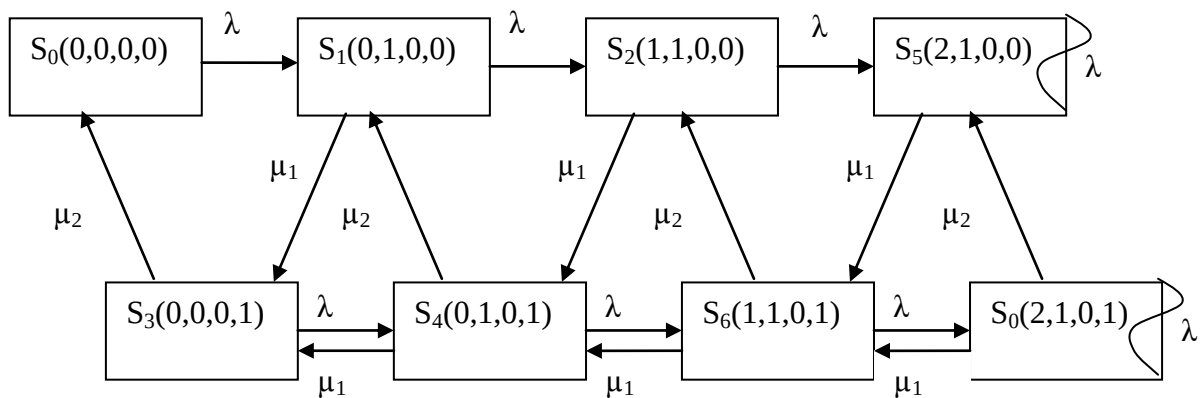


Рис. Граф станів двофазної одноканальної моделі

За графом станів складемо систему рівнянь Колмогорова для граничних ймовірностей:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu_2 \cdot p_3 = 0 \\ \lambda \cdot p_0 - \mu_1 \cdot p_1 - \lambda \cdot p_1 + \mu_2 \cdot p_4 = 0 \\ \lambda \cdot p_1 - \mu_1 \cdot p_2 - \lambda \cdot p_2 + \mu_2 \cdot p_6 = 0 \\ \mu_2 \cdot p_1 - \mu_2 \cdot p_3 - \lambda \cdot p_3 + \mu_1 \cdot p_4 = 0 \\ \mu_1 \cdot p_2 + \lambda \cdot p_3 - \lambda \cdot p_4 - \mu_1 \cdot p_4 - \mu_2 \cdot p_4 + \mu_1 \cdot p_6 = 0 \\ \lambda \cdot p_2 - \mu_1 \cdot p_3 + \mu_2 \cdot p_7 = 0 \\ \mu_1 \cdot p_5 + \lambda \cdot p_4 - \mu_1 \cdot p_6 - \mu_1 \cdot p_6 - \mu_2 \cdot p_6 + \mu_1 \cdot p_7 = 0 \\ \lambda \cdot p_6 - \mu_1 \cdot p_7 - \mu_2 \cdot p_7 = 0 \end{cases}$$

В цій системі будь-яке рівняння можна замінити умовою, що ймовірності утворюють повну групу подій:
 $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$.

Розв'язавши систему рівнянь знайдемо граничні ймовірності станів і на їх основі можна визначити показники ефективності системи:

- ймовірність простою системи: p_0 ;
- ймовірність простою першого приладу: $p_0 + p_3$ (друга координата = 0);
- ймовірність простою другого приладу: $p_0 + p_1 + p_2 + p_5$ (четверта координата = 0);
- ймовірність повної відмови: $p_5 + p_7$ (сума ймовірностей станів з петлями);
- ймовірність відмови з частковою обробкою дорівнює сумі зважених за інтенсивністю всіх можливих виходів з тих станів, для яких відмова обумовлена зайнятістю одного приладу (але не першого):

$$P_{\text{відмови част}} = \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2} p_6 + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} p_7.$$

Різні підсистеми в багатофазної СМО можна розглядати незалежно один від одного як системи, що знаходяться під впливом одного і того ж потоку заявок інтенсивності i ($i = 1, \dots, k$). Стан СМО характеризується ймовірністю деякого розподілу завдяки по кожній з підсистем:

$$p(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^k (1 - \rho) \rho_i^{n_i}.$$

За умови нормування:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}.$$

Застосовуючи формулу для середнього числа замовлень в окремій СМО, отримаємо вираз для математичного сподівання числа замовлень багатозафазової системи:

$$c = \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}.$$

Окремі підсистеми (фази) СМО можна розраховувати за формулами для систем відповідного типу, які розглянуті раніше.

Моделі мереж масового обслуговування

Мережею масового обслуговування називаються складні послідовно-паралельні з'єднання окремих СМО. Розрізняють замкнені і розімкнені мережі. Для замкненої ймовірнісної мережі не існує зовнішніх джерел замовлень, тобто в ній завжди знаходиться одна і та ж кількість замовлень. Для розімкненої мережі є джерела замовлень і стоки замовлень.

Кожний окремий вузол мережі є розімкненою СМО і відображає функціонально самостійну частину реальної системи. Необхідно зазначити, що чим більше окремих СМО утворює мережу і складнішою є структура, тим більш точними є результати, отримані на заміні реальних потоків простішими в силу граничної теореми для сумарних потоків.

Приклад 1. Розглянемо організацію обчислювального процесу сучасною ЕОМ. Схема окремих блоків системи представлена на рис, де:

- C_1 – процесор ОЗП та чергою до нього O_1 (СМО-1);
- C_2 – селекторний канал із зовнішнім накопичувачем O_2 (СМО-2);
- C_3 – мультиплексний канал з пристроями вводу-виводу та чергою O_3 (СМО-3).

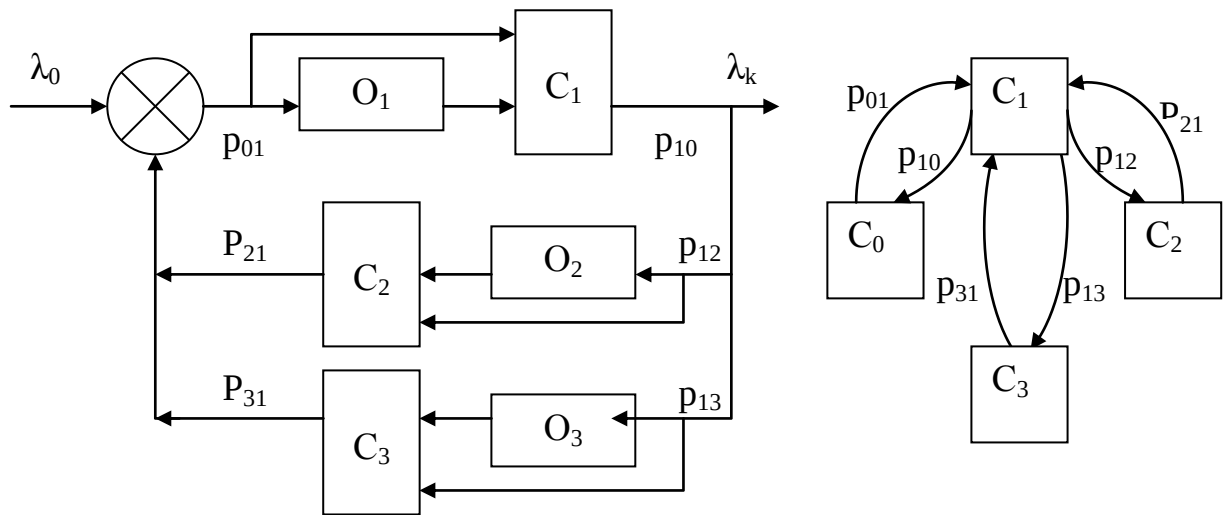


Рис. Схема окремих блоків ЕОМ та її граф станів

На вхід системи подається потік завдань з інтенсивністю λ , які починають обслуговуватись СМО O_1 - C_1 після чого з відповідною ймовірністю подаються на інші СМО, які можуть бути як одноканальними, так і багатоканальними.

Мережі масового обслуговування є зручною моделлю для вивчення інформаційних процесів в структурно складних системах. Порядок проходження вузлів може бути різним для різних замовлень. Для частини замовлень необхідне обслуговування у всіх вузлах, а для інших – тільки в деяких з вузлів.

Точний розрахунок характеристик таких СМО можливий тільки в разі, якщо всі потоки замовлень є пуассонівськими, а час обслуговування – експонентними випадковими величинами. В інших випадках можливий лише наближений розрахунок характеристик СМО.

Мережу СМО можна представити як систему, де кожний вузол є окремою СМО із своїми характеристиками. Вихідний потік деякого вузла мережі буде вхідним потоком наступного вузла.

Потік замовлень на вході окремого вузла складається з вхідного потоку мережі (можливо, нульової інтенсивності) і з потоків, що надходять з виходів інших вузлів. Вхідний потік вузла в експоненційній мережі в загальному

випадку пуассоновским не є, тому вузли мережі в загальному випадку не експоненціальні. Проте, вузли все ж часто вважають експоненціальними. Це дозволяє знайти з рівнянь балансу значення інтенсивностей $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ вхідних потоків замовлень і скористатися для розрахунку показників мережі відповідними аналітичними моделями теорії СМО.

При розрахунку показників мереж СМО, як і для багатофазних СМО, необхідно враховувати наступне:

- якщо на вхід СМО надходить кілька потоків замовлень, то інтенсивність повного потоку дорівнює сумі інтенсивностей окремих потоків;
- якщо на вхід СМО надходить частина замовлень з деякого потоку з інтенсивністю λ , то інтенсивність вхідного потоку замовлень в СМО можна визначити за формулою: $\lambda_{\text{вх}} = p \cdot \lambda$, де p – ймовірність попадання замовлення у вхідний потік;
- інтенсивність вихідного потоку в СМО (тобто потоку оброблених замовлень) дорівнює інтенсивності вхідного потоку.

Щоб задати різимкнену експоненціальну мережу СМО необхідно задати значення наступного набору параметрів:

- N – число вузлів;
- n_i – число каналів i -ого вузла;
- $P = \|p_{ij}\|, i = \overline{1, N}, j = \overline{0, N}$ матрицю ймовірностей передач;
- $\Lambda_i, i = \overline{1, N}$ інтенсивності вхідних потоків замовлень;
- μ_i – інтенсивності вихідних потоків або середній час обслуговування замовлень у вузлах $\bar{t}_{si}, i = \overline{1, N}$.

Інтенсивності вхідних потоків у вузлах $\lambda_i, i = \overline{1, N}$ знаходять з рівнянь балансу мержі з врахуванням властивостей злиття та розгалуження потоків.

Середній час перебування замовлення в мережі.

Час перебування замовлення в мережі визначається як час, що минув з моменту приходу замовлення в мережу до моменту її виходу з мережі. Середній час перебування розраховується за формулою:

Час перебування замовлення в мережі визначається як час, що минув з моменту приходу замовлення в мережу до моменту її виходу з мережі. Ефективний час перебування розраховується за формулою:

де $\Lambda = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_N$; $\bar{t}_{s_i}$ - середній час перебування заявки в j -му вузлі.

Під передаточним коефіцієнтом розуміється середнє значення числа надходжень α_{ij} заявки i -го вхідного потоку в j -ий вузол за час перебування цієї заявки в мережі. У стаціонарному режимі при будь-яких $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ для $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ справедливо:

Інтенсивності надходження замовлень в j -ий вузол $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ виражені через інтенсивності вхідних потоків мережі $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$.

В матричній формі систему рівнянь можна представити як $\bar{\lambda} = A \cdot \bar{\Lambda}$, де матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$.

Поклавши $\Lambda_1 = 1$ и $\Lambda_2 = \dots = \Lambda_N = 0$, рівняння балансу для α_{ij} :

Інші коефіцієнти α_{kj} , $i \neq k$ знаходять як розв'язок рівнянь балансу для $\Lambda_i = 0$,

Тоді абсолютна пропускна спроможність визначається як мінімум значень, що стоять в правих частинах нерівностей:

$$A_i = \min_j \frac{n_j}{t_{sj} \cdot \alpha_{ij}}.$$

Умовні пропускні спроможності.

Умовної пропускною спроможністю по i -му входу B_i називають максимальне значення інтенсивності Λ_i , при якому мережа залишається стаціонарною. При заданих Λ_k ($k \neq i$) мережа стаціонарна для будь-яких значень $\Lambda_i \leq \beta_i$. Для відшукування значень β_i необхідно розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \Lambda_1 \leq \beta_1 \\ \Lambda_2 \leq \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Lambda_N \leq \beta_N \end{cases}.$$

B_i визначається як найменше значення серед усіх β_i .

Запаси за пропускною здатністю.

Запас за пропускною здатністю $D_i = B_i - \Lambda_i$, $i = \overline{1, N}$ покаже, наскільки може бути збільшена інтенсивність приходу замовлень на i -му вході при фіксованих інших інтенсивностях без порушення умови стаціонарності.

Приклад.

На виробничу ділянку УЗ надходять для обробки деталі з двох інших ділянок (У1 і У2). Схема ділянки УЗ приведена на рис.

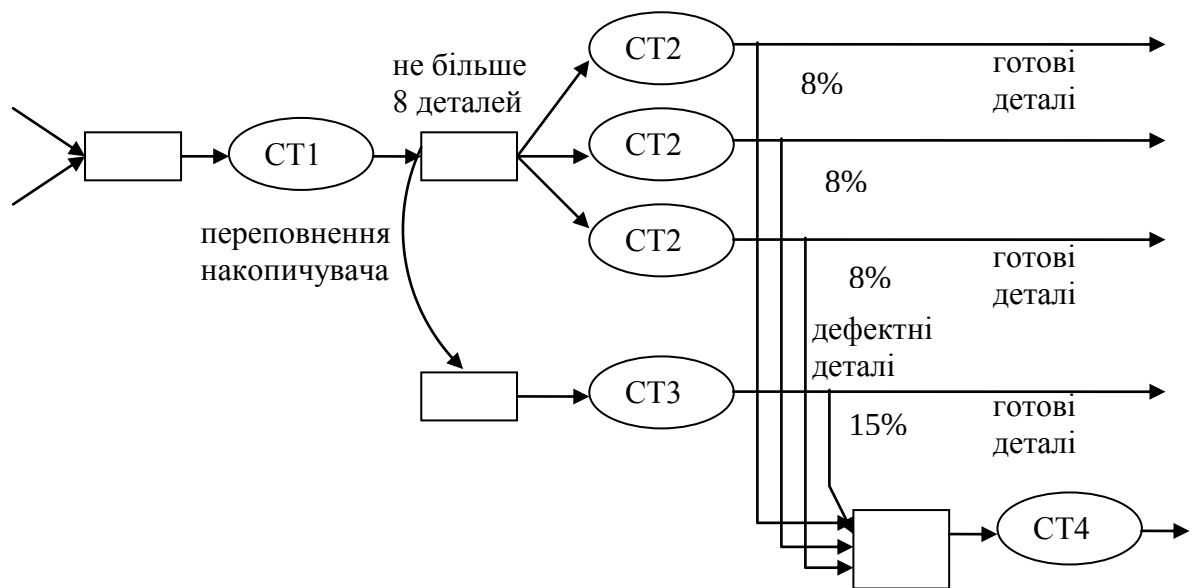


Рис. Схема виробничої ділянки УЗ

Деталі з ділянки У1 надходять в середньому через кожні 10 хв, з ділянки У2 – через кожні 15 хв. Всі деталі проходять обробку на верстаті СТ1. Обробка деталі на цьому верстаті займає від 3 до 7 хв. З верстата СТ1 деталі направляються на групу з трьох однакових верстатів СТ2. Перед цими верстатами знаходиться накопичувач для деталей, які очікують обробки (загальний для всіх трьох верстатів). Деталь направляється на будь-який вільний верстат СТ2. Обробка деталі на верстаті СТ2 займає в середньому 20 хв. Накопичувач, перед верстатами СТ2, вміщує 8 деталей. При його заповненні деталі направляються для обробки на верстат СТ3. Обробка на цьому верстаті займає в середньому 25 хв.

При обробці деталей можливі дефекти. На верстатах СТ2 дефект допускається приблизно в 8% випадків, на верстаті СТ3 – в 15% випадків. Всі дефектні деталі направляються на верстат СТ4 для усунення дефекту; це займає в середньому 10 хв.

Потрібно знайти характеристики роботи всіх верстатів, а також визначити середній час перебування деталі на ділянці УЗ.

Розв'язок.

Розрахунок характеристик верстата СТ1. Щоб виконати цей розрахунок, будемо вважати потоки деталей з цехів У1 і У2 пуасонівськими.

Тоді верстат СТ1 можна розглядати як одноканальну СМО, де потік замовлень є пуасонівським, а час обслуговування розподілено по рівномірному закону, тобто СМО типу (М / G / 1). Інтенсивності потоків з ділянок У1 і У2 відповідно дорівнюють $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,07$ деталей за хв. Інтенсивність вхідного потоку для верстата СТ1 дорівнює сумі інтенсивностей ділянок $\lambda_{CT1} = 0,17$. Середній час обробки деталі $t_{обр} = (3 + 7)/2$ хв., отже, інтенсивність обробки $\mu_{CT1} = 1/5 = 0,2$.

Навантаження на систему $\rho = \lambda/\mu = 0,85$. Тоді $p_0 = 1 - \rho = 0,15$.

Для рівномірного закону розподілу коефіцієнт варіації становить $\varepsilon = \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)} = \frac{7-3}{\sqrt{3}(7+3)} \approx 0,23$. Тоді середня довжина черги $L_{черги} = \rho^2 \frac{(1+\varepsilon^2)}{2(1-\rho)} = 2,54$. Всі інші характеристики будуть визначатись як для одно канальної СМО з необмеженою чергою.

Розрахунок характеристик верстатів СТ2. Будемо вважати потік деталей, що виходять з верстата СТ1, пуасонівським (хоча це не зовсім точно, так як час обробки на верстаті СТ1 – не експоненціальна, а рівномірна випадкова величина). Будемо також вважати, що час обробки деталей на верстатах СТ2 є експоненціальна випадкова величина. Тоді групу верстатів СТ2 можна розглядати як трьохканальну марківську СМО (М / М / 3) з обмеженням на довжину черги (так як накопичувач вміщує лише 8 деталей, і при його заповненні деталі направляються на інший верстат). Інтенсивність вхідного потоку $\lambda_{CT2} = 0,17$, так як на цей блок надходять всі деталі з першої ділянки. Середній час обробки деталі $t_{обр} = 20$ хв., отже, інтенсивність обробки $\mu_{CT2} = 0,05$, довжина черги $m = 8$. Розрахунки виконуються як для багатоканальної системи з обмеженою чергою.

Розрахунок характеристик верстата СТ3. На цей верстат надходять деталі, що не потрапили на верстати СТ2 із-за заповнення накопичувача (тобто деталі, які отримали відмову в обслуговуванні). Тому інтенсивність

вхідного потоку для верстата СТ3 можна знайти наступним чином:
 $\lambda_{СТ3} = p_{відмови} \cdot \lambda_{СТ2} = 0,16 \cdot 0,17 = 0,027$, де $p_{відмови}$ – це ймовірність відмови в обслуговування для групи верстатів СТ2.

Будемо вважати потік деталей на верстат СТ3 пуасонівським, а час обробки на цьому верстаті – експоненціальним. Тоді верстат СТ3 можна розглядати як одноканальний марківську СМО (М / М / 1) без обмежень на чергу, де $\lambda_{СТ3} = 0,027$, середній час обробки деталі $t_{обр} = 25$ хв., отже, інтенсивність обробки $\mu_{СТ3} = 0,04$, $\lambda_{СТ3} = 0,027$ деталі / хв, $t_{обр} = 25$ хв, $\mu_{СТ3} = 0,04$ деталі / хв. Розрахунок характеристик верстата СТ3 виконується згідно порядку розрахунку одно канальної СМО.

Розрахунок характеристик верстата СТ4. На цей верстат надходить 8% деталей, оброблених на верстатах СТ2, і 15% деталей, оброблених на СТ3. Тому інтенсивність вхідного потоку для верстата СТ3 можна знайти наступним чином:

$\lambda_{СТ4} = 0,08 \mu_{СТ2} \bar{c}_{СТ2} + 0,15 \mu_{СТ3} \bar{c}_{СТ3} = 0,08 \cdot 0,14 + 0,15 \cdot 0,027 = 0,015$, ($\mu \bar{c}$ – пропускна спроможність системи). Будемо вважати потік деталей на верстат СТ4 пуасонівським, а час обробки на цьому верстаті - експоненціальним. Тоді верстат СТ4 можна розглядати як одноканальний марківську СМО (М / М / 1) без обмежень на чергу, де $\lambda_{СТ4} = 0,015$ деталі/хв, $t_{обр} = 10$ хв, $\mu_{СТ4} = 0,1$ деталі/хв. Характеристики верстатів приведені в табл.

Таблиця Характеристики ділянок виробничого процесу

Характеристики	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4
ρ – навантаження	0,85	1,13	0,68	0,15
p_0 – ймовірність простою	0,15	0,009	0,32	0,85
$L_{чер}$ – к-ть замовлень у черзі	2,54	4,38	1,4	0,027
$p_{відм}$ – ймовірність відмови	0	0,16	0	0
$p_{обсл}$ – ймовірність обслуговування	1	0,84	1	1
k – к-ть замовлень на обслуговуванні	0,85	2,86	0,68	0,15

$L_{сист}$ – к-ть замовлень у системі	3,39	7,24	2,08	0,177
Пропускна спроможність	0,17	0,14	0,027	0,015
$W_{чер}$ – середній час перебування у черзі	14,9	31,29	51,9	1,76
$W_{сист}$ – середній час перебування у системі	19,9	51,29	76,9	11,8

Розрахунок середнього часу перебування деталі на ділянці УЗ. Всі деталі проходять обробку на верстаті СТ1. Середній час перебування деталі на цьому верстаті (включаючи час очікування обробки і саме час обробки) становить 19,9 хв. Потім 84% деталей проходять обробку на одному з верстатів СТ2; середній час перебування деталі на цих верстатах становить 51,29 хв. Решта 16% деталей обробляються на верстаті СТ3; середній час перебування деталі на цьому верстаті – 76,9 хв. Крім того, для 8% деталей, оброблюваних на верстатах СТ2, і 15% деталей, оброблюваних на верстаті СТ3, необхідно усунення дефекту на верстаті СТ4. Це займає в середньому 11,8 хв. Таким чином, середній час перебування деталі на ділянці можна знайти так:

$$t_{уз} = 19,9 + 0,84 \cdot 51,29 + 0,16 \cdot 76,9 + (0,84 \cdot 0,08 + 0,16 \cdot 0,15) \cdot 11,8 = 76,36 \text{ хв.}$$

За результатами аналізу показників верстатів можна відзначити такі недоліки в роботі ділянок і запропонувати способи їх усунення:

- перевантаження групи верстатів СТ2 і недостатнє завантаження верстата СТ3. Для усунення цього недоліку можна запропонувати зменшити розмір накопичувача перед верстатами СТ2. В такому випадку більшу кількість деталей буде направлятися на верстат СТ3. В результаті завантаження верстатів СТ2 знизиться, а верстата СТ3 – підвищиться;
- явне недовантаження верстата СТ4: верстат простоює 85% робочого часу. Для усунення цього недоліку можна запропонувати використовувати верстат СТ4 не тільки для усунення дефектів, але і для інших робіт.

Контрольні питання.

1. Які системи масового обслуговування відносяться до багатофазних?
2. Наведіть приклади багатофазних СМО?
3. які особливості розрахунку характеристик багатофазних СМО?
4. Що називають мережами СМО?
5. Яка різниця між мережами та багатофазними СМО?
6. Як виконується розрахунок показників мережі СМО?
7. наведіть приклади мереж СМО.