

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

до виконання індивідуальних завдань з **МОДУЛЯ 5 «Ряди»**
для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні,
будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання", 7.010104
"Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт
підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх
і меліоративних машин і обладнання"

Київ 2008

ББК 22.311

В41

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор
О.І. Баліна, канд. техн. наук, доцент
І.С. Безклубенко, канд. техн. наук, доцент
С.В. Білощицька, асистент
О.В. Доля, асистент

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доцент С.А. Теренчук

Відповідальний за випуск В.В. Демченко, канд. техн. наук, доцент,
завідувач кафедри прикладної математики

*Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики,
протокол №8 від 12 лютого 2008 року.*

Вища математика: Методичні вказівки до виконання індивідуальних
В41 завдань / Уклад.: Н.Д. Федоренко, О.І. Баліна, І.С. Безклубенко
та ін. – К.: КНУБА, 2008. –36 с.

Містять необхідні для виконання індивідуальних завдань теоретичні та практичні відомості, зразок виконання індивідуальних завдань та варіанти індивідуальних завдань.

Призначені для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання" та 7.010104 "Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх і меліоративних машин і обладнання" усіх форм навчання.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення загального курсу вищої математики з модуля 5 студентами другого курсу інженерних спеціальностей.

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи з розділу математики «Ряди», а саме: дослідження на збіжність рядів з додатними членами, знакозмінних рядів; знаходження області збіжності ряду; розвинення функції в ряд Тейлора або Маклорена; наближені обчислення за допомогою рядів; знаходження розв'язків диференціальних рівнянь; розвинення функцій в ряди Фур'є.

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконання індивідуального завдання.

У даних методичних вказівках наведені завдання по варіантах для виконання самостійної роботи, а також приклади розв'язання типових задач.

МОДУЛЬ 5

Розділ. РЯДИ

Завдання 1. Довести збіжність ряду і знайти його суму.

Завдання 2. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

Завдання 3. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди.

Завдання 4. Знайти область збіжності ряду.

Завдання 5. Варіанти 1-16: Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

Варіанти 17-30: Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в межах вказаної точки x_0 . Знайти збіжність отриманого ряду до цієї функції.

Завдання 6. Наближено обчислити задану величину з точністю α , використовуючи розвинення в степеневий ряд.

Завдання 7. Знайти розв'язки диференціального рівняння, розвинувши його в степеневий ряд (записати п'ять перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу).

Завдання 8. Методом послідовного диференціювання знайти перші k членів розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння при вказаних початкових умовах.

Завдання 9. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$:

а) задану на відрізку $[-\pi; \pi]$ з періодом $\omega=2\pi$;

б) у вказаному інтервалі з періодом $\omega=2l$;

в) задану на відрізку $[0; \pi]$, продовживши її парним і непарним способом.

Розв'язання типового варіанта

Завдання 1. Довести збіжність ряду і знайти його суму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Розв'язання: Знайдемо суму:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то даний ряд збіжний і сума його

$$S = 1.$$

Відповідь: $S = 1$.

Завдання 2. Дослідити на збіжність знакододатні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{2^{n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ln(n+1)}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$.

Розв'язання:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0$, тому даний ряд розбіжний (достатня умова розбіжності).

б) Оскільки $\frac{1}{n \cdot 3^n} \leq \frac{1}{3^n}, n = 1, 2, \dots$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збіжний, як геометрична прогресія зі знаменником $g = \frac{1}{3} < 1$, то даний ряд теж збіжний (достатня ознака порівняння).

в) Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{3} \neq 0$ і гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то даний ряд також розбіжний (достатня гранична ознака порівняння).

г) Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^3 + 1) \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot (n^3 + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} < 1,$$

отже, даний ряд збіжний.

д) Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\ln(n+1)}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1, \text{ тому даний ряд збіжний.}$$

е) Застосуємо інтегральну ознаку Коші: нехай $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$, $x \in [1; +\infty)$ і

$$\text{розглянемо невластний інтеграл } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3) \Big|_1^b = \infty.$$

Цей інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

Відповідь: а), в), е) – розбіжний; б), г), д) – збіжний.

Завдання 3. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Розв'язання:

а) Оскільки $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ – збіжний, як узагальнений

гармонічний ряд (ряд Діріхле), то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^3} \right|$

збіжний, тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^3} \right|$ абсолютно збіжний.

б) За ознакою Лейбніца даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

утворений з модулів його членів, розбіжний. Тому даний ряд б). є умовно збіжним.

Відповідь: а). абсолютно збіжний; б). умовно збіжний.

Завдання 4. Визначити область збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+1}$.

Розв'язання:

$$\text{Маємо } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1} \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot (2x-3)^n} \right| = |2x-3|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збіжний, якщо

$$|2x-3| < 1, \text{ або } -1 < 2x-3 < 1, \quad 2 < 2x < 4, \quad 1 < x < 2.$$

Отже, радіус збіжності $R = \frac{1}{2}$, інтервал збіжності (1;2). Щоб знайти

область збіжності, дослідимо збіжність ряду в крайніх точках.

При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ - збіжний за ознакою Лейбніца.

При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 2 - 3)^n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$, який є розбіжним.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $x \in [1, 2)$.

Відповідь: $[1; 2)$.

Завдання 5.

а) Розвинути функцію $y = \cos^2 x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Знайти область збіжності ряду до цієї функції.

б) Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x^2 \ln(1 - x^3)$.

Розв'язання:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4};$$

$$f'(x) = -\sin 2x; \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x; \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cos \frac{2\pi}{3} = 1;$$

$$f'''(x) = 4 \sin 2x; \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3};$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Отже, } \cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(-2^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n.$$

$$\text{Залишковий член ряду Тейлора } R_n(x) = \frac{-2^n}{(n+1)!} \sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1},$$

де $\varepsilon \in (x; x_0)$.

Оскільки $\left|\sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$, достатньо знайти область збіжності ряду з

загальним членом $\frac{2^n}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$. За ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|2^{n+1} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+2} (n+1)!\right|}{\left|(n+2)! 2^n \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left|x - \frac{\pi}{3}\right|}{n+2} = 0 < 1.$$

Отриманий ряд збігається для будь-якого x . Отже, область його збіжності до функції $f(x) = \cos^2 x$ буде: $-\infty < x < \infty$.

$$\text{Відповідь: } \cos^2 x = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n; \quad -\infty < x < \infty.$$

б) Скористаємось відомим розкладом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + \dots, \text{ де } x \in (-1; 1];$$

поклавши $-x^3$ замість x . Маємо:

$$\ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \dots - \frac{x^{3n}}{n} \dots, \text{ де } x \in [-1; 1). \text{ Тоді}$$

$$x^2 \ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \dots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \dots, \text{ де } x \in [-1; 1).$$

$$\text{Відповідь: } x^2 \ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{n}, \text{ де } x \in [-1; 1).$$

Завдання 6. Обчислити з заданою точністю α :

а) $\sin 18^\circ$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ $\alpha = 0,001$.

Розв'язання:

а) Скористаємось відомим розкладом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \text{ де } x \in R.$$

Отже, при $x = 18^\circ = \frac{\pi}{10}$, маємо:

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \dots$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} > 0,001; \quad \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0,001, \quad \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0,001, \text{ то з точністю до } 0,001 \text{ маємо:}$$

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0,309.$$

б) Скориставшись відомим рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \text{ де } x \in R, \text{ маємо: } e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Цей ряд рівномірно збіжний для $x \in R$, тому

$$\begin{aligned} \int_0^{1/3} e^{-x^2} dx &= \int_0^{1/3} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right) \Big|_0^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{10 \cdot 3^5} - \frac{1}{42 \cdot 3^7} + \dots \end{aligned}$$

Дістали ряд Лейбніца. Зважаючи на те, що

$$\frac{1}{3} > 0,001; \quad \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > 0,001; \quad \frac{1}{10 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,001, \text{ то з точністю до } 0,001$$

$$\text{маємо } \int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321$$

Відповідь: а). 0,309; б). 0,321.

Завдання 7. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в ряд розв'язків рівняння:

$$y' = xy + y^2 + e^y, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання: Шукаємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Маємо:

$$y'(0) = e^0 = 1; \quad y'' = y + xy' + 2yy' + e^y y'; \quad y''(0) = 1;$$

$$y''' = y' + y' + xy'' + 2(y'y' + yy'') + e^y y'' + e^y y'y'; \quad y'''(0) = 6.$$

Отже, $y(x) \approx x + \frac{x^2}{2} + x^3$.

Відповідь: $x + \frac{x^2}{2} + x^3$.

Завдання 8. Методом послідовного диференціювання знайти перші п'ять членів розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$4x^2 y'' + y = 0 \text{ при початкових умовах: } y(1) = 1, y'(1) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання: Шукаємо розв'язок у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!} \cdot (x-1)^4 + \dots;$$

де $f(1) = 1; \quad f'(1) = \frac{1}{2};$

$$f''(x) = -\frac{y}{4x^2}; \quad f''(1) = -\frac{1}{4}; \quad f'''(x) = -\frac{y'x^2 - 2xy}{4x^4}; \quad f'''(1) = \frac{3}{8};$$

$$f^{IV}(x) = -\left((y''x^2 + 2xy' - 2y - 2xy')x^4 - 4x^3(y'x^2 - 2xy)\right) \div (4x^8); \quad f^{IV}(1) = -\frac{15}{16}$$

Отже, $y = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!} \cdot (x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!} \cdot (x-1)^4 + \dots,$

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5 \cdot (x-1)^4}{128} + \dots.$$

Відповідь: $y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5 \cdot (x-1)^4}{128} + \dots$

Завдання 9. Розвинути в ряд Фур'є функції:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ з періодом 2π ;

б) $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1;$ з періодом 2 ;

в) $f(x) = 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$ продовжуючи її парним і непарним способом періодично на всю числову вісь.

Розв'язання:

а) Задана функція є кусково-монотонна на проміжку $(-\pi; \pi]$, тому її можна зобразити рядом Фур'є. Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right) = \frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = -\frac{x \cos nx}{\pi n} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } f(x) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \end{aligned}$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi, n \in \mathbb{N}$.

У точках $x = \pm(2n-1)\pi$ сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

б) Задана функція неперервна на всій числовій осі, парна і має період 2, тому її можна подати через ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; & a_n &= 2 \int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dV = \cos \pi n x dx \\ V = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(\frac{x^2 \sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx \right) = -\frac{4}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \quad dV = \sin \pi n x dx \\ du = dx \quad V = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x dx \right) = \frac{4x}{\pi^2 n^2} \cdot \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2}; \quad b_n = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right),$$

де $-\infty < x < \infty$.

в) Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на відрізок $[-1; 0]$, а потім періодично на всю числову вісь.

Маємо:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 (2-x) \sin \pi n x dx = \left. \begin{array}{l} u = 2-x \quad dv = \sin \pi n x dx \\ du = -dx \quad v = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(-\frac{2-x}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi n} \cos \pi n x dx \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{\pi n} \cos \pi n + \frac{2}{\pi n} \cos 0 - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x dx \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{\pi n} (-1)^n + \frac{2}{\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin \pi n x \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{\pi n} (2 - (-1)^n). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{n} \sin \pi n x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2}{n} \sin \pi n x$$

Аналогічно, продовжимо функцію $f(x)$ парним способом на відрізок $[-1; 0]$. Маємо:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 (2-x) dx = 2 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 3; \\ a_n &= 2 \int_0^1 (2-x) \cos \pi n x dx = \left. \begin{array}{l} u = 2-x \quad dV = \cos \pi n x dx \\ du = -dx \quad V = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(\frac{2-x}{\pi n} \cdot \sin \pi n x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x dx \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{\pi n} \sin \pi n - \frac{2}{\pi n} \sin 0 - \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \\ &= -\frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + (-1)^{n+1}) \end{aligned}$$

Отже, $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + (-1)^{n+1}) \cos \pi n x = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2} \cos \pi n x$.

Відповідь:

$$2 - x = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2} \cos \pi n x; \quad 2 - x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2}{n} \sin \pi n x.$$

ВАРІАНТ 1

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

Завдання 5. $f(x) = \cos 5x$.

Завдання 6. а) $e, \alpha = 0,0001$; б) $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx, \alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = xy + e^y, y(0) = 0$.

Завдання 8. $y' = \arcsin y + x, y(0) = \frac{1}{2}, k = 4$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = |x|, -1 < x < 1, l = 1$;

в) $f(x) = e^x$.

ВАРІАНТ 2

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-11}{5n} \right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln(3n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2} x^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$.

Завдання 5. $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Завдання 6. а) $\sqrt[5]{250}$, $\alpha = 0,01$; б) $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 y^2 + 1$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = xy + \ln(y+x)$, $y(1) = 0$, $k = 5$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = 2x$, $-1 < x < 1$, $l = 1$; в) $f(x) = x^2$.

ВАРІАНТ 3

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^n \left(\frac{1}{n} \right)^7$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^3(2n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \sin x^2$.

Завдання 6. а) $\sin 1, \alpha = 0,00001$;

б) $\int_0^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} dx, \alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}$.

Завдання 8. $y' = x + y^2, y(0) = 1, k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x+2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = e^x, -2 < x < 2, l = 2$; в) $f(x) = 2^x$.

ВАРІАНТ 4

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

Завдання 6. а) $\sqrt{1,3}, \alpha = 0,001$;

б) $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Завдання 8. $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$, $k = 5$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} -x + 1/2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = |x| - 5$, $-2 < x < 2$, $l = 2$;

в) $f(x) = ch \ x$.

ВАРІАНТ 5

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n^n} \right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(3n+4)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$.

Завдання 5. $f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$.

Завдання 6. а) $\arctg \frac{\pi}{10}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cos x dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$.

Завдання 8. $y^{IV} = xy + y'x^2$, $y''(0) = y'(0) = y(0) = 1$, $y'''(0) = 1$, $k = 7$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/2 + 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ $l = 1$;

в) $f(x) = e^{-x}$.

ВАРІАНТ 6

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^7 n}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n^4}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$.

Завдання 6. а) $\ln 3$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = 2x - 0,1y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = x$, $1 < x < 3$, $l = 1$;

в) $f(x) = (x-1)^2$.

ВАРІАНТ 7

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n n^7$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n}{49+n^2} \right)^2$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

Завдання 5. $f(x) = e^{3x}$.

Завдання 6. а) $\operatorname{ch} 2$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^1 x^2 \sin x dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y''' = y'' + y\Gamma^2 + y^3 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0,5$, $k = 6$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$, $l = 2$;

в) $f(x) = 3^{-x/2}$.

ВАРІАНТ 8

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \dots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{n^3}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Завдання 6. а) $\lg e$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = x^2 - xy$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} x-2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б)

$f(x) = 10 - x, \quad 5 < x < 15, \quad l = 5;$

в) $f(x) = sh2x.$

ВАРІАНТ 9

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}.$

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}};$ в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{3^n};$ д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^2}.$

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}.$

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^{n^2}.$

Завдання 5. $f(x) = ch(2x^3).$

Завдання 6. а) $\pi, \alpha = 0,00001;$ б) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx, \alpha = 0,001.$

Завдання 7. $y' = x + y + y^2, y(0) = 1.$

Завдання 8. $y'' = 2yy', y(0) = 0, y'(0) = 1, k = 3.$

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x-3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases};$ б) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \end{cases} l = 1;$

в) $f(x) = e^{2x}.$

ВАРІАНТ 10

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}.$

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(tg \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \ln(5n-2)};$ д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}.$

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n+1))^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

Завдання 6. а) e^2 , $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $k = 5$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = 5x-1$, $-5 < x < 5$, $l = 5$;

в) $f(x) = (x-2)^2$.

ВАРІАНТ 11

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^2}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1))x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Завдання 6. а) $\cos 2^\circ$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^2/4} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 y^2 + y \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Завдання 8. $y''' = ye^x - xy'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 1$, $k = 6$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 3, \end{cases}$ $l = 3$;

в) $f(x) = 4^{x/3}$.

ВАРІАНТ 12

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$.

Завдання 5. $f(x) = e^{-x^4}$.

Завдання 6. а) $\sqrt[3]{80}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = 2y^2 + ye^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Завдання 8. $y' = 3x - y^2$, $y(0) = 2$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = 3 - x$, $-2 < x < 2$, $l = 2$;

в) $f(x) = ch \frac{x}{2}$.

ВАРІАНТ 13

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n)^2}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n$.

Завдання 5. $f(x) = 2^{-x^2}$.

Завдання 6. а) $\ln 5$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y'' = xyu'$, $y(0) = 1$, $k = 6$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 2, \end{cases} l = 2$;
 в) $f(x) = e^{4x}$.

ВАРІАНТ 14

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \dots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

Завдання 5. $f(x) = 5^x$.

Завдання 6. а) $\arctg \frac{1}{2}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x + e^y$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y' = x^2 - 2y$, $y(0) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 5x+1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б)

$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 2, \end{cases}$ $l = 2$;

в) $f(x) = (x+1)^2$.

ВАРІАНТ 15

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5) \ln(10n+5)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{12n^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$.

Завдання 5. $f(x) = x \cos \sqrt{x}$.

Завдання 6. а) $\sqrt[6]{738}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = y \cos x + 2 \cos y$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y''' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $k = 4$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$ $l = 3$;

в) $f(x) = 5^{-x}$.

ВАРІАНТ 16

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$.

Завдання 6. а) $\sqrt[3]{e^\alpha}$, $\alpha = 0,00001$; б) $\int_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/4} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 + 2y^2$, $y(0) = 0,2$.

Завдання 8. $y' = x^2 - 0,2y^2$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = 2x - 3$, $-3 < x < 3$, $l = 3$;

в) $f(x) = \operatorname{sh} 3x$.

ВАРІАНТ 17

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{9n-1}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$.

Завдання 6. а) $\sin 1^\circ$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 + xy + y^2$, $y(0) = 0,5$.

Завдання 8. $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$, $k = 5$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4-2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 3/2, \\ -1, & 3/2 < x < 3, \end{cases}$ $l = 3$;

в) $f(x) = e^{-x/4}$.

ВАРІАНТ 18

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3) \ln(\ln(n+3))}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $x_0 = -2$.

Завдання 6. $\sqrt[3]{8,36}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = e^{\sin x} + x$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y' = xy + y^2$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} x + \pi/2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = 3 - |x|$, $-5 < x < 5$, $l = 5$; в) $f(x) = (2x - 1)^2$.

ВАРІАНТ 19

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n) \ln^5(3+2n)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(5n+1)^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.

Завдання 5. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.

Завдання 6. $\ln 10$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = xy - y^2$, $y(0) = 0,2$.

Завдання 8. $y'' = e^y \sin y$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2, & 0 < x < 4, \end{cases} \quad l = 4;$

в) $f(x) = 6^{x/4}$.

ВАРІАНТ 20

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n(n+1)}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{2x+5}$, $x_0 = 3$.

Завдання 6. а) $\arcsin \frac{1}{3}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^1 \sin x^2 dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = 0,2x + y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 7-3x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = 1+x$, $-1 < x < 1$, $l = 1$;

в) $f(x) = ch \ 4x$.

ВАРІАНТ 21

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 \sqrt{n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4) \ln^2(9n-4)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x_0 = 1$.

Завдання 6. $\lg 7$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x \sin x - y^2$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 0,5$, $k = 4$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = 2x + 2$, $-1 < x < 3$, $l = 2$;

в) $f(x) = e^{-3x}$.

ВАРІАНТ 22

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9+n^2-2n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Завдання 5. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$.

Завдання 6. а) \sqrt{e} , $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = 2x^2 - xy$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y' = x^2 + xy + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 6x-2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ -1/2, & x = 0, \quad l = 2; \\ x/2, & 0 < x < 2, \end{cases}$ в) $f(x) = x^2 + 1$.

ВАРІАНТ 23

Завдання 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8) \ln^3(5n+8)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \ln(5x+3)$, $x_0 = \frac{2}{5}$.

Завдання 6. а) $\cos 10^\circ$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x - 2y^2$, $y(0) = 0,5$.

Завдання 8. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$, $k = 5$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4-9x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0, \\ 3/2, & x = 0, \\ -x, & 0 < x < 3, \end{cases} \quad l = 3;$

в) $f(x) = 7^{-x/7}$.

ВАРІАНТ 24

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{2n+2}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Завдання 5. $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $x_0 = 1$.

Завдання 6. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases};$

б) $f(x) = 1 - |x|, -3 < x < 3, l = 3;$

в) $f(x) = sh \frac{x}{5}.$

ВАРИАНТ 25

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \ln(n+4) \ln(\ln(n+4))};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}.$

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(n+4)}.$

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}.$

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0 = -3.$

Завдання 6. а) $\sqrt[10]{1080}, \alpha = 0,001;$

б) $\int_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx, \alpha = 0,001.$

Завдання 7. $y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1.$

Завдання 8. $y'' = y \cos y' + x, y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{3}, k = 3.$

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases};$

б) $f(x) = \begin{cases} -2, & -4 < x < 0, \\ -1/2, & x = 0, \\ 1+x, & 0 < x < 4, \end{cases} l = 4;$

в) $f(x) = e^{-2x/3}.$

ВАРІАНТ 26

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \dots (5n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n) \ln^3(3+8n)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{9^n}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{6n}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$.

Завдання 5. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Завдання 6. а) $\frac{1}{e}$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = xy + e^x$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $y' = \cos x + x^2$, $y(0) = 0$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 1 - x/4, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = 4x - 3$, $-5 < x < 5$, $l = 5$; в) $f(x) = (x - \pi)^2$.

ВАРІАНТ 27

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3n^4 + 5n - 2}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0 = 2$.

Завдання 6. а) $\sin \frac{\pi}{100}$, $\alpha = 0,0001$; б) $\int_0^1 \arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = ye^x$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = 4y + 2xy^2 - e^{3x}$, $y(0) = 2$, $k = 4$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \quad l=2; \\ 2-x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ в) $f(x) = 10^{-x}$.

ВАРІАНТ 28

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n+2)^{2n}}$.

Завдання 5. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $x_0 = -2$.

Завдання 6. а) $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{x - \arctg x}{x^2} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = 2\sin x + xy$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $(1-x)y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = \begin{cases} -1/2, & -6 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 6, \end{cases} l = 6;$ в) $f(x) = ch \frac{x}{\pi}$.

ВАРІАНТ 29

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$..

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$.

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} \sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Завдання 5. $f(x) = \sin x$, $x_0 = a$.

Завдання 6. а) $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,4} \sqrt{1-x^3} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.

Завдання 8. $4x^2 y'' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-8x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} -2, & -2 < x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ 4, & 0 < x < 2, \end{cases} l = 2;$

в) $f(x) = e^{4x/3}$.

ВАРІАНТ 30

Завдання 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 2^n}{18^n}$.

Завдання 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln(n+5) \ln(\ln(n+5))}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}$;

Завдання 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4n}{5n+1}\right)^n$

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

Завдання 5. $f(x) = \ln(5x+3)$, $x_0=1$.

Завдання 6. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$, $\alpha = 0,001$.

Завдання 7. $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$.

Завдання 8. $y' = 2x^2 + 3y^3$, $y(1) = 1$, $k = 3$.

Завдання 9. а) $f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

б) $f(x) = |x| - 3$, $-4 < x < 4$, $l = 4$;

в) $f(x) = (x-5)^2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Овчинников Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика. Ч. 1 – К.: Техніка, 2000. – 590 с.
2. *Овчинников Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика. Ч. 2 – К.: Техніка, 2000. – 790 с.
3. *Журавель О.О.* Вища математика. Збірник завдань для курсових і самостійних робіт. – К.: КНУБА, 1997. – 268 с.
4. *Шестопал А.Ф.* Конспект лекцій з криволінійних, поверхневих, кратних інтегралів та теорії рядів. – К.: КІБІ, 1993. – 128 с.
5. *Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С.* та ін. Вища математика: навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 246 с.
6. *Федоренко Н.Д., Білощицька С.В., Доля О.В.* Вища математика: Методичні вказівки. – К.: КНУБА, 2005. – 92 с.
7. *Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие.* В 3 ч. Ч.3/ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск.: Выш. шк., 1991. – 288 с.

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

до виконання індивідуальних завдань з **МОДУЛЯ 5 «Ряди»**
для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні,
будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання", 7.010104
"Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт
підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх
і меліоративних машин і обладнання"

Укладачі: **ФЕДОРЕНКО** Наталія Дмитрівна
БАЛІНА Олена Іванівна
БЕЗКЛУБЕНКО Ірина Сергіївна
БІЛОЩИЦЬКА Світлана Василівна
ДОЛЯ Олена Вікторівна

Комп'ютерна верстка І. С. Аршинкіної

Підписано до друку

Формат 60x84^{1/16}.

Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.

Ум. друк. арк. 2,09

Обл.-вид. арк. 2,25

Ум. фарбовідб. 19

Тираж

прим. Вид. № 24/III-08 Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdatt@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі

Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи

ДК № 808 від 13.02.2002 р.