Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Опорний конспект лекцій з дисципліни

Методи та засоби комп'ютерних обчислень

(назва навчальної дисципліни)

підготовки __бакалавра________________________

(назва освітньо-кваліфікаційного рівня)

галузь знань __12 – Інформаційні технології

(шифр і галузі знань)

спеціальності 124 "Системний аналіз"_______________

(шифр і назва спеціальності)

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри САКМІГ
Протокол № __ від ___________
Завідувач кафедри
_____________В. Б. Мокін
(підпис, ініціали та прізвище)

Тема №1 – " Огляд основних математичних обчислювальних пакетів."

Найпоширенішими математичними обчислювальними пакетами є такі:

- Matlab,
- Mathcad,
- Maple,
- Mathematica,
- Statistica,
- Scilab,
- MS Excel.

Система MATLAB (від MATrix LABoratory – матрична лабораторія)-була створена спеціалістами фірми MathWorks, Inc. як мова програмування високого рівня для технічних обчислень і розвивається вже більше двох десятків років. В результаті сьогодні MATLAB являє собою вдале поєднання можливостей математики з останніми досягненнями в області обчислювальної техніки – комп'ютерною реалізацією чисельних методів та високоефективними алгоритмами, що дозволяють найбільш повно використати можливості комп'ютера при моделюванні.

Система MATLAB має відкриту архітектуру, що дає можливість її модифікації з метою вирішення нових науково-технічних задач. MATLAB – це велика бібліотека функцій (більше 800), найбільш загальні з яких входять до ***ядра*** системи, а решта міститься у пакетах розширення ***Toolboxes*** (інструменти), орієнтованих на специфіку області моделювання. На даний час існує понад 30 пакетів розширення: символьна математика, статистика, ідентифікація систем, нечітка логіка, нейронні мережі, оптимізація, ідентифікація систем, обробка зображень, розробка систем керування, моделювання взаємопов'язаних подій, обчислення у реальному часі з введенням даних з давачів у комп'ютер, фінансовий аналіз, моделювання систем зв'язку, моделювання електротехнічних та електромеханічних систем тощо. Також є можливість створення додаткових функцій безпосередньо мовою MATLAB чи C/C++, або модифікації бібліотечних (їх вихідний код мовою MATLAB відкритий для користувача), однак це потребує значно вищого рівня підготовки ніж при роботі з компонентами та блоками, вибраними з відповідних Toolboxes.

Особливе місце серед інструментальних додатків займає пакет роз ширення ***Simulink***. У ньому реалізовано принципи візуально-орієнтованого програмування, що дозволяє легко набирати необхідні блоки та з'єднувати їх з метою створення моделі аналізованої системи. Пакет Simulink значно полегшує моделювання і робить його прозорим та інтуїтивно зрозумілим, що дозволяє значно зменшити час для початкового освоєння системи MATLAB користувачем. У порівнянні з іншими програмами для візуального моделювання Simulink має значно більшу універсальність та відкритість, а також надійність і достовірність, оскільки система відповідає лише за математичні обчислення, а модель створює користувач.

MATLAB має широкі можливості з візуалізації результатів моделювання та подання їх у зручному вигляді:

– дво- та тривимірні графіки;

– анімація;

– озвучування результатів та ходу процесу моделювання;

– інтеграція з MS Word та Excel;

– обмін даними у мережі Інтернет.

MathCAD – це універсальна математична система, призначена для науково-технічних обчислень. На відміну від MATLAB у MathCAD початкові дані, формули та результати обчислень подаються у вигляді, найбільш наближеному до звичайного математичного представлення. Це дозволяє досягти прозорості та легкості обчислень. Порівнюючи MathCAD та MATLAB важко сказати, яка система має потужнішу математику чи засоби візуалізації. Обидві системи мають велику бібліотеку функцій, можливість виведення різноманітних графіків та анімації, інтеграції з іншими програмами тощо. MathCAD дозволяє зробити значно прозорішою математику – тобто основу моделей. Інтерфейс користувача у MathCAD зовні схожий на інтерфейс текстового редактора MS Word. У документі MathCAD можуть розміщуватись математичні вирази, текст та графіки. Математичні вирази та графіки можуть бути взаємопов’язані та автоматично розраховуватись системою MathCAD, тому важливе їх розміщення, оскільки математичні вирази виконуються зліва направо та зверху вниз. Змінні у MathCAD можуть бути числовими, рядковими, символьними і т.д. Імена змінних (ідентифікатори) у MathCAD являють собою набір латинських чи грецьких букв і цифр. Тип змінної визначається автоматично її значенням при першому присвоюванні, на відміну від більшості мов програмування, що вимагають попереднього вказання типу.

Maple є лідером у області символьної математики і увійшов складовою частиною в ряд сучасних пакетів. Розглянемо основи роботи у пакеті Maple для версії Maple 6 від Waterloo Maple Inc. Maple має досить великі можливості у проведенні обчислень та візуалізації результатів, що дозволяє використання його для:

– проведення математичних досліджень, які вимагають обчислень і аналітичних виведень;

– розробки й аналізу алгоритмів;

– математичного моделювання і комп’ютерного експерименту;

– аналізу і обробки даних;

– візуалізації, наукової та інженерної графіки.

До переваг Maple можна віднести вищу швидкість обчислень та менші вимоги до комп’ютера (як до продуктивності процесора, так і до необхідного об’єму вільного простору вінчестера), можливість виведення інформації в форматі LaTeX, найкраща символьна математика, більш стабільна робота у порівнянні з MathCAD, більш лаконічний запис вхідних даних у порівнянні з MATLAB. Спеціалізовані функції Maple, що орієнтовані на конкретні області застосування, містяться у окремих бібліотеках. Усе це робить Maple найбільш привабливим для професійних застосувань прикладної математики із значною часткою аналітичних виведень.

Система Maple створювалась як пакет комп'ютерної алгебри, тобто основним об'єктом тут є формули й операції з ними. Без додаткових вказівок символ, наприклад x, вважається фактично математичною змінною, як x у формулі $f(x)$. Така специфіка систем комп'ютерної алгебри дозволяє проводити точні обчислення.

Робота з Maple полягає в тому, що користувач вводить математичні вирази та команди, а система намагається їх виконати і дати відповідь. Отримавши (чи не отримавши) відповідь, користувач вводить нові інструкції і так далі – взаємодія з пакетом відбувається в діалоговому режимі. Завдяки власній мові програмування високого рівня введені вирази й інструкції, а також результати виконання команд – формули, графіки, таблиці та числа – запам'ятовуються в єдиному документі.

Графічний інтерфейс Maple аналогічний наявному в системах редагування і підготовки тексту і використовує звичайні засоби роботи з файлами і редагування (миша і клавіатура). У верхній частині вікна розташовано меню (пункти File, Edit і т.д.), нижче – рядок піктограм Toolbar для ряду часто виконуваних операцій, ще нижче – рядок піктограм Context Bar, що організують подання даних у сеансі. Потім йде одне чи кілька вікон з документами, у яких розміщаються формули, рисунки, що супроводжують текст і т.д. У нижній частині вікна знаходиться смуга Status line, що містить інформацію про систему.

Програми MathCAD, MATLAB та Maple є найбільш поширеними та охоплюють практично більше 90% користувачів, що застосовують комп'ютер у математичних розрахунках. Окрім цих програм є досить велика кількість інших математичних програм. Це як універсальні математичні пакети, так і невеликі програми, що автоматизують часто виконувані розрахунки, різноманітні калькулятори та засоби створення графіків. Особливу увагу привертає ряд некомерційних математичних програм, що створювались під Linux. Найбільші можливості у цьому напрямку має пакет *Scilab*, що розроблявся французькими інститутами INRIA та ENPC, а також Scilab Consortium. Пакет Scilab можна вільно закачувати з сайту виробника як у вигляді виконуваних файлів, так і разом з вихідними кодами. Існують версії цієї програми для Linux та Windows. Початковий інсталяційний пакет має розмір біля 13 Мб. Бібліотеки, що орієнтовані на конкретні області застосування, поставляються додатково. Можливості Scilab наближаються до MATLAB у режимі командного рядка. Бібліотеки пакетів розширення (toolboxes) значно менші. Існує можливість імпорту документів з MATLAB, Maple, Tk-Tcl, а також математичних виразів з редакторів формату TeX. Можливе створення додаткових функцій мовами C та Fortran.

Пакет підтримує основні елементарні та значну кількість спеціальних функцій, що застосовуються у математиці, у тому числі різні види згладжування та апроксимації, еліптичні інтеграли, функції Бесселя тощо. Як і MATLAB, Scilab має розвинуті інструменти для створення та обробки масивів (векторів, матриць і т.д.), підтримуються й інші складні структури (списки), що об'єднують послідовності даних довільного типу.

Scilab може виводити графіки функцій у двовимірному та тривимірному просторі, будувати гістограми тощо. Передбачено різноманітне настроювання властивостей графіків: кольори, метод побудови, відтворення сітки і керування десятками інших характеристик. Графіки можна виводити на екран чи зберігати у зовнішніх файлах.

Scilab має власну потужну мову програмування з широким набором конструкцій для організації циклів, умовних переходів, операцій введення/виведення. З допомогою цієї мови можна отримати доступ до всіх можливостей пакета. Підпрограми (функції), як правило, створюються у вигляді окремих файлів, що формуються у бібліотеки та підключаються у випадку необхідності спеціальною командою.

Загалом, можна зробити висновок, що Scilab дещо складніший у початковому освоєнні і роботі, ніж описані нами програми, однак краще підходить для створення недорогих, але конкурентоспроможних рішень у області обробки даних, чисельної реалізації алгоритмів та візуалізації результатів. Особлива перевага відчувається, коли сформована прикладна програма мовою Scilab з відкритим до модифікацій кодом застосовується великою кількістю користувачів у державних установах чи закладах освіти, що обмежені у фінансуванні, однак прагнуть використовувати виключно ліцензійне програмне забезпечення.

Електронні таблиці (або інакше табличні процесори) є зручним засобом автоматизації рутинних розрахунків на більшості настільних комп'ютерів. За їх допомогою можна здійснювати широкий спектр математичних, економічних, статистичних, технічних розрахунків. Різноманіття функцій електронних таблиць робить їх зручним інструментом насамперед для розрахунків з багатьма вхідними даними, які можуть часто змінюватись. В таких задачах створивши один раз робочу книгу електронної таблиці для зміни даних достатньо їх ввести в певні місця (комірки) і отримати дані розрахунків.

Найбільше поширення отримали табличні процесори MS Excel та OpenOffice.org Calc які входять відповідно до складу офісних пакетів Microsoft Office та OpenOffice.org. Перший програмний продукт набув великої популярності завдяки широкому розповсюдженню операційної системи Windows. Ціна повної версії офісного пакету Microsoft Office складає приблизно 500$. На відміну від MS Excel, OpenOffice.org Calc набув популярності перш за все завдяки безкоштовному розповсюдженню [1, 9].

По функціональним можливостям обидва лідери відрізняються не суттєво. Головним чинником використання MS Excel є велика кількість літератури, додаткового програмного забезпечення сторонніх виробників та консерватизм користувачів.

Серед лідерів варто виділити інші табличні процесори:

- StarCalc (пакет StarOffice) – комерційна версія OpenOffice.org (виробник – компанія Sun);
- Word Perfect Gnumeric – ліцензія GPL (для операційних систем UNIX, Linux, FreeBSD).

Електронні таблиці зручні у таких випадках:

1. Багатократне виконання однотипних розрахунків (наприклад аналіз даних, що отримані в декількох циклах одного експерименту);
2. Використання табличних даних (наприклад, якщо із довідникової таблиці для токсичності хімічних сполук ввести в електронну таблицю ГДК, то її не потрібно буде шукати кожен раз у довідниковій літературі);
3. Створення графіків. Електронні таблиці – це зручний спосіб представлення даних у виді графіків;
4. Аналіз залежностей від параметра.
5. Представлення результатів у зручному вигляді.

Excel має наступні переваги:

- розрахунки здійснюються у вигляді таблиць ;
- доступні графічні засоби;
- можливість програмування на мові BASIC (VBA)
- можливість доступу до БД.

Для аналізу даних MS Excel можна використовувати такі інструменти:

- стандартні функції MS Excel (*Вставка*►*Функция…*);
- надбудову «Пакет аналізу» (*Сервис*►*Анализ данных…*);
- VBA (програмування своїх функцій).

Пакет аналізу – це набір засобів Excel, який містить 19 програм, призначений для розв'язку складних статистичних та інженерних задач. Для аналізу даних за допомогою цих інструментів потрібно вказати вхідні дані і вибрати параметри. Аналіз буде виконаний за допомогою підходящої статистичної або інженерної макрофункції, а результат буде поміщений у вихідний діапазон. Інші засоби дозволяють представити результати аналізу в графічному виді [9].

До складу пакету аналізу входять наступні інструменти:

- дисперсійний аналіз;
- кореляційний аналіз;
- коваріаційний аналіз;
- описова статистика;
- експонеційне згладжування;
- ранг і персентиль;
- регресія;
- Т-тест;

— Z-тест.

Тема №2 – " Побудова і аналіз графіків в ППП Mathcad та MS Excel."

Крім математичних конструкцій та текстових зон у будь-яке місце документа MathCAD можна помістити графічну зону. Після активізації іконки `X-Y Plot` у робочому полі документа генерується макет графічної області у вигляді прямокутної рамки з двома показниками, розташованими так, як показано на рис. 1.

Графічна зона ***активізована***, якщо курсор розташований в її межах. Активізована графічна зона доступна для редагування та форматування. Щоб створити двовимірний графік, необхідно і достатньо замість показників увести ті упорядковані змінні, значення яких застосовуються для побудови графіка.

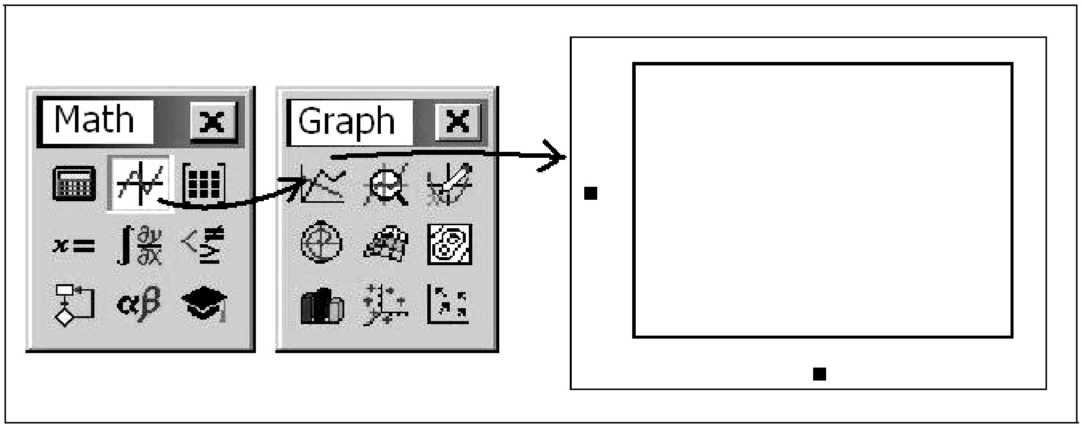


Рис. 1. Порядок створення графічної зони `X-Y Plot`

Найпростіший спосіб створення графічної інформації – це побудова графіка функції. При цьому замість показника, що відповідає осі абсцис, потрібно вказати ім’я незалежної змінної. Відповідно замість показника на осі ординат треба вказати вираз для функціональної залежності. Можна будувати графіки функцій, заданих в явному вигляді або параметрично, використовуючи декартові або полярні координати.

Окремо слід зупинитися на виборі оптимального масштабу для координатних осей. Якщо при побудові графіка не вказаний діапазон змінення значень аргументу, то автоматично розраховуються значення функції для значень аргументу, розташованих на інтервалі [-10, 10]. При упорядкованих значеннях аргументу система MathCAD намагається встановити масштаб таким чином, щоб виведений графік займав якомога більшу частину корисної площини графічної зони. Якщо встановлений масштаб не задовольняє користувача, той має змогу змінити масштаб самостійно, вказавши мінімальні та максимальні значення аргументу і функції замість показників, розташованих у кутах графічної зони. Нарешті, вибір масштабу можна провести в режимі `X-Y Zoom` (рис. 2). Якщо в активізованій графічній зоні виділити мишею частину графіка у вигляді прямокутної рамки, то після закриття діалогового вікна `X-Y Zoom` виділена частина графічної зони буде займати всю площину графічного вікна.

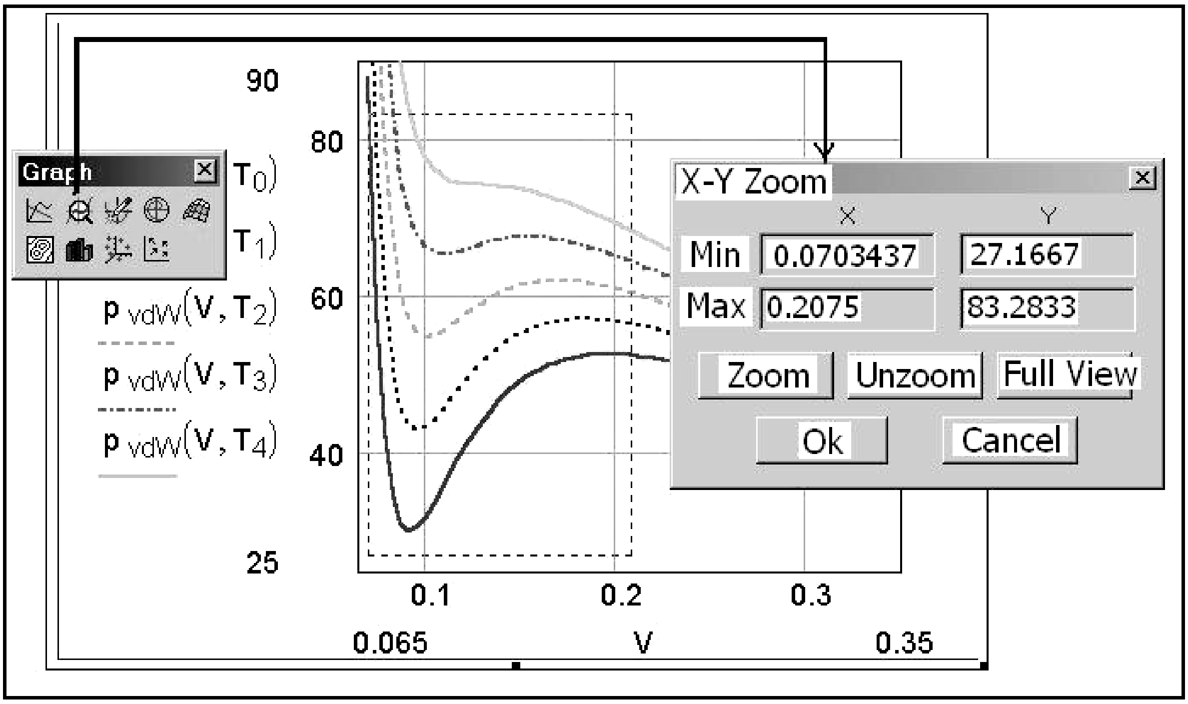


Рис. 30. Робота в режимі `X-Y Zoom`

Дуже часто в практичній роботі виникає потреба нанесення на координатну площину експериментальних даних. Найбільш доцільним для цього є попереднє розміщення їх у відповідних векторах. Далі достатньо замість показників графічної зони вказати імена цих векторів. До речі, за умовчанням система MathCAD з'єднає всі сусідні точки прямими лініями, отже, у більшості випадків ми отримаємо в підсумку деяку ламану лінію, адже завжди всі експериментальні дані містять певні похибки. У науковій графіці практично ніколи не подають результати експериментів у вигляді ламаних ліній, хіба що за винятком окремих ситуацій, коли проведений експеримент принципово не може ніколи бути відтвореним (наприклад, до таких експериментів належать натурні корозійні дослідження). Тому необхідно вміти коректно зображати графічні об'єкти, створені на підставі результатів експериментів. Для цього в системі MathCAD передбачені дуже потужні та різноманітні засоби форматування графіки. ***Меню графічних форматів*** стає доступним для інтерактивної роботи після подвійного натиснення лівої кнопки миші. Показник миші при цьому повинен бути розташованим в активізованій графічній зоні. Робота з меню графічних форматів дуже проста та зрозуміла. Вже після перших сеансів роботи з системою користувач здатен створювати цілком професійні графічні об'єкти.

Меню графічних форматів двовимірної графіки складається в цілому з 4 розділів, у кожному з яких можна встановити потрібні характеристики форматів.

Розділ X-Y Axes дозволяє встановити зовнішній вигляд та характеристики координатних осей: лінійна або логарифмічна шкала (Log Scale), наявність допоміжної сітки на координатній площині (Grid Lines), чисельні значення аргументу та функції (Numbered), автоматичне встановлення масштабу (Auto Scale), наявність допоміжних маркерів (Show Markers), стиль подання осей координат (Boxed, Crossed, None). У розділі Traces задаються параметри для виведення графічних даних. Характеристика Symbol встановлює тип символів для точок, що виводяться на графік (none, ×'s, +'s ,◊'s, box, o's), тип з'єднувальної лінії (solid, dash, dot, dadot), загальний спосіб подання даних на площині графічної зони (lines, points, error, bar, step, draw, stem, solidbar), їх колір (Color) та товщину лінії для вибраної серії даних (Weight). У розділі Legend Label можна вказати назву створюваного графічного об'єкта (Title) та назви координатних осей (X-Axis, Y-Axis). Весь комплекс вибраних характеристик форматів можна встановити доступним за умовчанням (розділ Defaults).

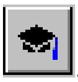
Окрім графіків у декартових координатах, система MathCAD дозволяє створювати двовимірні графічні об'єкти і в полярній системі координат, для чого за допомогою іконки `Polar Plot` генерується відповідний макет графічної зони. Подальші дії аналогічні до вже розглянутих.

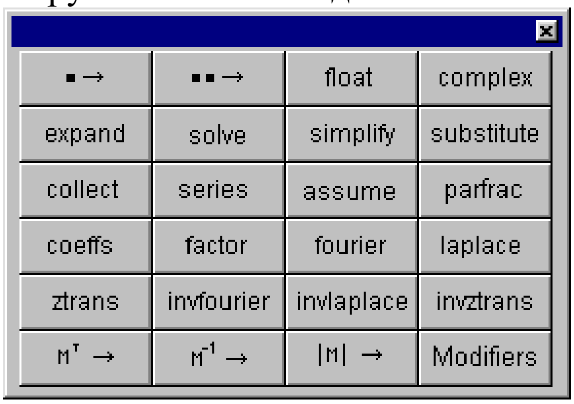
Високим ступенем наочності поданої інформації характеризуються об'єкти тривимірної графіки. Обидві системи дають можливості створення таких об'єктів, а відповідні засоби форматування забезпечують високий рівень реалістичності отриманих зображень.

Графічна панель інструментів системи MathCAD містить іконки для створення макетів графічних зон 3D-графіки: Surface Plot, Contour Plot, 3D Bar Plot, 3D Scatter Plot, Vector Field Plot. На відміну від двовимірної графіки, генеровані макети графічних зон мають лише один показник, замість якого слід увести змінну для побудови проекції тривимірного об’єкта на екранну площину. Таким чином можна подати, наприклад, функції двох аргументів, графіком яких, як відомо, є поверхня.

Основний спосіб зображення поверхні в системі MathCAD – це формування ***матриці аплікат точок***. Якщо необхідно зобразити поверхню, утворену функцією *f(x,y),* слід визначити інтервали значень аргументів *x* (абциси) та у (ординати). Нехай маємо *i* значень *x* та *j* значень *y*. Якщо функція задається аналітичним виразом, то можна розрахувати *i*×*j* значень цієї функції і занести всі ці значення до єдиної матриці, яка має назву матриці аплікат. Засоби роботи з матрицями будуть розглянуті пізніше, зараз тільки відзначимо, що кожний елемент прямокутної матриці має подвійний індекс, що вказує його місцерозташування в конкретному рядку та стовпчику матриці. Ще один зручний засіб подання проекцій тривимірної графіки – це побудова контурних діаграм або мапи ліній однакового рівня (Contour Plot), подібно до того, як це робиться на географічних мапах.

Тема №3 – " Символьні обчислення математичних виразів в системі Mathcad. Визначення границь функцій "

Аналітичні ("символьні") обчислювальні засоби ППП MathCAD знаходяться в меню "Symbolics". Але простіше натиснути на іконку символьної палітри інструментів . Тоді з’явиться таке вікно:



Розглянемо елементи цього вікна (позначення "*)" біля функціонального призначення оператора означає, що в разі введення цього оператору з палітри інструментів, його слід задавати з параметрами; як правило, це — змінна, до якої застосовується цей оператор; якщо ж оператор викликається з меню "Symbolics", тоді просто курсор слід поставити на цю змінну):

1. [■→]: запрошення для введення виразу, значення якого слід обчислити в аналітичному вигляді. Ця стрілочка є аналогом знаку "=" в чисельних обчисленнях. З клавіатури: "Ctrl+.". Приклад:

$\operatorname{asin}(1) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi$ $\qquad$ $\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\operatorname{asin}(1.0) \rightarrow 1.5707963267948966192$ $\qquad$ $\exp(i \cdot \pi) \rightarrow -1$

2. [■■→]: запрошення для введення виразу, значення якого слід обчислити в аналітичному вигляді, та аналітичного оператору, який ви хочете застосувати до цього виразу. З клавіатури: "Ctrl+Shift+.".

3. [float]: оператор обчислення значення виразу з заданою кількістю знаків після децимальної коми. Приклад:

$2 \operatorname{acos}(0) \text{ float}, 15 \rightarrow 3.14159265358979$

$e \text{ float}, 40 \rightarrow 2.71828182845904523536028747135266249$

4. [complex]: перетворення комплексних чисел з однієї форми її запису до другої. Приклад:

$e^{1i \cdot n \cdot \pi} \text{ complex} \rightarrow \cos(n \cdot \pi) + 1i \cdot \sin(n \cdot \pi)$

5. [expand]: розкласти по степеням:

$(x+y)^4$ expands to $x^4 + 4x^3 \cdot y + 6x^2 \cdot y^2 + 4x \cdot y^3 - y^4$

$\cos(5 \cdot x)$ expands to $16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 - 5\cos(x)$

6. [solve]: розв’язати рівняння*), наприклад:

$\frac{1}{2} \cdot x^2 + x = 2$ has solution(s) $\begin{bmatrix} -1 + i \cdot \sqrt{3} \\ -1 - i \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2} \cdot x^2 + x = 2.0$ has solution(s) $\begin{bmatrix} -1. + 1.7320508075688772935i \\ -1. - 1.7320508075688772935i \end{bmatrix}$

$e^x = -1$ has solution(s) $\pi \cdot i$

якщо ж курсор поставити на певну змінну в виразі, тоді розв’язок буде відносно цієї змінної:

$\frac{\pi \cdot f + 1}{f - \pi} = e^{-\pi}$ has solution(s) $\frac{-(-1 - \exp(-\pi) \cdot \pi)}{(-\pi + \exp(-\pi))}$

7. [simplify]: спростити вираз, наприклад:

$\mathrm{asin}(1)$ simplifies to $\frac{1}{2}\cdot\pi$

$\mathrm{asin}(1.0)$ simplifies to 1.5707963267948966192

$\frac{3}{19}-\frac{47}{93}$ simplifies to $\frac{1172}{1767}$

$\frac{3}{19.0}-\frac{47}{93}$ simplifies to $.6632710809281267685$

$\frac{x^2-3\cdot x-4}{x-4}+2\cdot x\quad 5$ simplifies to $3\cdot x\quad 4$

$e^{2\cdot\ln(a)}$ simplifies to a^2

$\sin(x)^2-\cos(x)^2$ simplifies to 1

$\sum_{k=0}^{3}\frac{3!}{k!\cdot(3-k)!}\cdot x^k\cdot 2^{3-k}$ simplifies to $8+12\cdot x+6\cdot x^2-x^3$

Finite geometric series:

$\sum_{i=0}^{n} a^i$ simplifies to $\frac{\left[a^{(n+1)}-1\right]}{(a-1)}$

Infinite geometric series ($|a|<1$):

$\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ simplifies to $\frac{-1}{(a-1)}$

Maclaurin series for exponential function and sine function:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n!}$ simplifies to $\exp\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2\cdot k+1}}{7^{2\cdot k+1}\cdot(2\cdot k+1)!}$ simplifies to $\sin\left(\frac{1}{7}\cdot x\right)$

8. substitute: зробити заміну (підстановку) змінної*). Для цього треба спочатку набрати на екрані вираз відносно змінної, яку ви хочете замінити, а потім помістити в буфер змінну, на яку ви хочете зробити заміну. І лише тоді визвати цей оператор. Приклади:

$x + 3\cdot a$

$z^2-\frac{2}{z}$ by substitution, yields $(x+3\cdot a)^2-\frac{2}{(x+3\cdot a)}$

$f(\sin(x))$

$\cos(y)-\sqrt{1+y^2}$ by substitution, yields $\cos(f(\sin(x)))-\sqrt{1+f(\sin(x))^2}$

$\bar{x}\quad 1$

$x-1-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3-\frac{1}{4}\cdot(x-1)^4+\frac{1}{5}\cdot(x-1)^5-O\left[(x-1)^6\right]$

9. collect: привести подібні*), наприклад:

$x^2 - a\cdot y\cdot x^2 + 2\cdot y^2\cdot x \quad x$ by collecting terms, yields $(1 - a\cdot y)\cdot x^2 - \left(2\cdot y^2 - 1\right)\cdot x$

10. series: розкласти в ряд*), наприклад:

$\sin(x)$ converts to the series $x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - O\left(x^6\right)$

$\ln(x+1)$ converts to the series $x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^4 + \frac{1}{5}\cdot x^5 - O\left(x^6\right)$

Якщо цей оператор набрати не "series, x", а "series, x, N", де замість N вказати якесь число, тоді оператор розкладе заданий вираз в ряд з N членами.

11. assume: ігнорування чисельного значення змінних, наприклад:

$$\int_a^b \cos(x)\,dx \rightarrow \sin(b) - \sin(a)$$

12. parfrac: розкладення на елементарні дроби*), наприклад:

$$\frac{2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1}{x^3 + 2\cdot x^2 - 9\cdot x - 18} \quad - \quad \frac{1}{(3\cdot(x-3))} + \frac{14}{(3\cdot(x+3))} \quad \frac{3}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^4 - 1} \qquad \frac{1}{(4\cdot(x-1))} - \frac{1}{(4\cdot(x+1))} \quad \frac{1}{\left[2\cdot\left(x^2+1\right)\right]}$$

13. coeffs: знаходження коефіцієнтів поліному*), наприклад (в першому випадку обчислюються звичайні коефіцієнти поліному, а в другому — коефіцієнти поліному Чебишева):

$$3\cdot b\cdot x^4 - \mathrm{ı}\cdot x^2 + \frac{2}{3}\cdot x \quad .3\cdot a\cdot b \qquad \begin{bmatrix} -.3\cdot a\cdot b \\ \frac{2}{3} \\ -\mathrm{ı} \\ 0 \\ 3\cdot b \end{bmatrix} \qquad \cos(5\cdot \mathrm{acos}(x)) \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

14. factor: представлення виразу в вигляді добутку простих множників. Якщо це багаточлен, то він представляється добутком одно- чи двочленів, а якщо це число, то воно представляється добутком простих чисел, наприклад:

$-5\cdot x\cdot z\cdot y + 2\cdot x\cdot z^2 - x^2\cdot y - 2\cdot x^2\cdot z + 3\cdot y^2\cdot z + 6\cdot y\cdot z^2 \quad 3\cdot x\cdot y^2$

by factoring, yields

$(x + 3\cdot y)\cdot(z - x)\cdot(2\cdot z + y)$

8238913765711 by factoring, yields $(73)\cdot(112861832407)$

15. fourier: застосування прямого перетворення Фур’є*), наприклад:

$\mathrm{Dirac}(t)$ has Fourier transform 1

$-\Phi(-t-c)-\Phi(-t+c)$ $\Phi(t)$ is the Heaviside step functio

has Fourier transform

$\frac{-i}{\omega}\cdot\exp(i\cdot\omega\cdot c)-\frac{i}{\omega}\cdot\exp(-i\cdot\omega\cdot c)$

16. laplace: застосування прямого перетворення Лапласа*), наприклад:

$\exp(-a\cdot t)$ has Laplace transform $\frac{1}{s+a}$

$\sin(b\cdot t)$ has Laplace transform $\frac{b}{\left(s^2+b^2\right)}$

17. ztrans: застосування прямого z-перетворення*), наприклад:

n has z transform $\frac{z}{(z-1)^2}$

$\sin(a\cdot n)$ has z transform $\sin(a)\cdot\frac{z}{\left(1-2\cdot z\cdot\cos(a)+z^2\right)}$

18. invfourier: застосування оберненого (зворотного) перетворення Фур’є*), наприклад:

$\sqrt{2\cdot\pi}\cdot e^{-2\cdot\omega^2}$ has inverse Fourier transform $\frac{1}{2}\cdot\exp\left(\frac{-1}{8}\cdot t^2\right)$

19. invlaplace: застосування оберненого (зворотного) перетворення Лапласа*), наприклад:

$\frac{s}{s+a}$ has inverse Laplace transform $-a\cdot\exp(-a\cdot t)+\mathrm{Dirac}(t)$

$\frac{s}{s^2+b^2}$ has inverse Laplace transform $\cos(b\cdot t)$

20. invztrans: застосування оберненого (зворотного) z-перетворення*), наприклад:

$\frac{z}{z-1}$ has inverse z transform 1

$\frac{z}{z-e}$ has inverse z transform e^n

21. $M^T \rightarrow$: обчислення транспонованої матриці, наприклад:

$\begin{bmatrix} x & 1 & a \\ -b & x^2 & -a \\ 1 & b & x^3 \end{bmatrix}$ by matrix transposition, yields $\begin{bmatrix} x & -b & 1 \\ 1 & x^2 & b \\ a & -a & x^3 \end{bmatrix}$

22. $M^{-1} \rightarrow$: обчислення оберненої матриці, наприклад:

$$\begin{bmatrix} | & 2 & 1-| \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -| \end{bmatrix} \text{ by matrix inversion, yields } \frac{-1}{|^{2}} \cdot \begin{bmatrix} -| & 2\cdot| & -5+| \\ 0 & -|^{2} & 2\cdot| \\ 0 & 0 & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{d}{(a\cdot d - c\cdot b)} & \dfrac{-c}{(a\cdot d - c\cdot b)} \\ \dfrac{-b}{(a\cdot d - c\cdot b)} & \dfrac{a}{(a\cdot d - c\cdot b)} \end{bmatrix}$$

23. |M| →: обчислення визначника (детермінанту) матриці, наприклад:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ -b & x^{2} & -a \\ 1 & b & x^{3} \end{vmatrix} \text{ has determinant } x^{6} + x\cdot a\cdot b + b\cdot x^{3} - a\cdot b^{2} - a \quad a\cdot x^{2}$$

24. Оператор **Symbolics\Evalute** (Shift-F9) — дозволяє обчислювати значення виразу в аналітичному вигляді. Приклади:

$$\lim_{x \to 7^{+}} \frac{3\cdot x + 1}{(x-7)^{5}} \qquad |$$

$$\int_{1}^{c} x^{3}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{1}{4}\cdot c^{4} \quad \frac{1}{4} \qquad \text{Press \& for definite integr}$$

$$\int_{0}^{|} e^{(-x)^{2}}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{|}$$

$$\begin{bmatrix} | & 2 & 1-| \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -| \end{bmatrix}^{2} \quad \text{yields} \quad \begin{bmatrix} |^{2} & 2\cdot| + 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2+2\cdot| \\ 0 & 0 & |^{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & 2 & 1-| \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -| \end{bmatrix}^{3} \quad \text{yields} \quad \begin{bmatrix} |^{3} & 2\cdot|^{2} + 2\cdot| + 2 & |^{2} - |^{3} - 4 \\ 0 & 1 & -2 + 2\cdot| - 2\cdot|^{2} \\ 0 & 0 & -|^{3} \end{bmatrix}$$

25. Додатково в меню "Symbolics" є ще дві опції: "Variable\Differentiate"*) та "Variable\Integrate"*), які дозволяють знаходити аналітичне значення похідної та невизначного інтегралу, набираючи тільки вираз, до якого ці операції застосовуються (знак похідної чи інтегралу не набирається). Після цього курсор слід встановити на змінну, до якої застосовується одна з вищевказаних операцій і вибрати в меню одну з цих функцій. Наприклад:

$2\cdot x^2 - y$ by differentiation, yields $4\cdot x$

$x^2\cdot e^x$ by integration, yields $x^2\cdot \exp(x) - 2\cdot x\cdot \exp(x) - 2\cdot \exp(x)$

Взагалі, деякі з символьних операторів іноді краще та зручніше не вибирати з панелі інструментів, а вибирати їх в меню (цей спосіб також слід використовувати, якщо перший — не спрацьовує).

Тема №4 – " Обчислення елементарних і спеціальних функцій в ППП Mathcad та MS Excel "

Оператори, що позначають основні арифметичні дії, вводяться з панелі в ППП Mathcad Calculator (Калькулятор)показаною на рис. 1:

- складання і віднімання: + / —;
- множення і ділення: • / * ;
- факторіал: !;
- модуль числа: |x|;
- квадратний корінь;
- корінь n-й ступеня:,
- піднесення х до ступеня у: ху ;
- зміна пріоритету: дужки;
- чисельний вивід: = (всі лістинги).

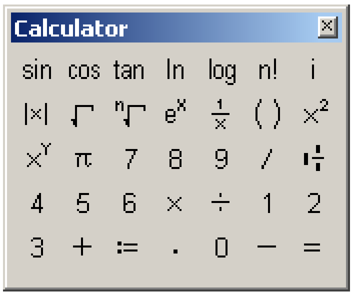


Рис.1. Панель Calculator

Обчислювальні оператори

Обчислювальні оператори вставляються в документи за допомогою панелі**Calculus.** Після натискання будь-якої кнопки панелі в документі з'являється символ відповідної математичної дії з декількома місцезаповнювачами. Кількість та розташування місцезаповнювачів визначається типом оператора і повністю відповідає їх загальноприйнятому математичному запису. Наприклад, при вставці оператора суми необхідно задати чотири величини: змінну, по якій потрібно провести сумування, нижню та верхню межі сумування, а також сам вираз, який буде розміщений під знаком суми.

Після введення будь-якого обчислювального оператора є можливість обчислити його значення чисельно натисканням клавіші<=>, або аналітично за допомогою оператора символьного виведення.

Логічні оператори

Результатом дії логічних операторів є тільки числа 1 (якщо логічний вираз істина) та 0 (якщо логічний вираз хибний). Логічні оператори:

1. більше x>y;
2. менше x<y;
3. більше аба дорівнює;
4. менше або дорівнює;
5. дорівнює;
6. не дорівнює;
7. і (and);
8. або (or);
9. заперечення (not).

Матричні оператори

Матричні оператори призначені для виконання дій над матрицями та векторами. Для того, щоб вставити матрицю в документ MathCad, необхідно:

1. Натиснути кнопку **Matrix or Vector (Матрица или вектор)** на панелі **Matrix(Матрица) ,** або клавіші **<Ctrl>+<M>,** або виберіть пункт меню **Insert/Matrix (Вставка/Матрица).**
2. У вікні діалогу **Insert Matrix (Вставка матрицы)** задайте ціле число стовпців та рядків матриці, яку хочете створити.
3. Натисніть кнопку **ОК** або **Insert (Вставить)** – в результаті в документ буде вставлена заготовка матриці з визначеним числом рядків та стовпців.
4. Введіть значення в місцезаповнювачі елементів матриці. Переходити від одного елемента матриці до іншого можна за допомогою вказівника миші або клавіш із стрілками.

Оператори виразу

Обчислювальні оператори згруповані на панелі **Evaluation (Вычисления).**Це:

1. чисельне виведення (=);
2. символьне виведення ();

3. присвоєння (:=);
4. глобальне присвоєння ().

Mathcad містить велику кількість вбудованих функцій. Ми не будемо детально розглядати всі функції , а лише перерахуємо їх основні типи.

Елементарні функції

Сюди відносяться добре відомі групи стандартних функцій:

1. **Exponential and logarithmic function** (Логарифми та експонента);
2. **Complex** (Комплексні);
3. **Trigonometric** (Тригонометричні);
4. **Invers trig** (Обернені тригонометричні);
5. **Hyperbolic** (Гіперболічні);
6. **Invers hyperbolic** (Обернені гіперболічні).

Допоміжні функції

MathCad має ряд допоміжних функцій, які в багатьох ситуаціях полегшують обчислення. Це такі:

1. **Discontinuous** (Розривні функції);
2. **Round-off-and truncation** (Скорочення та заокруглення);
3. **Sorting** (Сортування);
4. **Strings** (Рядкові;
5. **Finance functions** (Фінансові);
6. **Coordinate transform** (Перетворення координат);
7. **Conditional** (Умови);
8. **Expression type** (Типу виразу).

Спеціальні функції

В **Mathcad** вбудовано множину різних математичних функцій, які поповнюються від версії до версії. Спеціальні функції в **Mathcad** розбиті на декілька груп:

1. **Bessel** (Функції Бесселя);
2. **Error function and complementary error function** (Інтеграли помилок);
3. **Special function** (Решта спеціальні функції).

В системі **Mathcad** алгебраїчні обчислення виконуються, головним чином, аналітично. Як не дивно, але більшість користувачів **Mathcad** не дуже добре проінформовані про ці можливості, тоді як вони могли би суттєво зекономити свій час і сили, затрачені на виконання всіляких перетворень математичних виразів.

Тема №5 – "Використання матричних операцій. Розв'язок системи лінійних рівнянь методом Крамера"

Операція **Matrices…** (Матриці) опції **Insert** забезпечує завдання векторів або матриць. Як правило, матриця задається своїм ім’ям-об’єктом у вигляді масиву даних. MathCAD використовує одночасно масиви – вектори і двовимірні – власне матриці.

Матриця характеризується числом рядків *Rows* та числом стовпців *Columns*. Таким чином, число елементів матриці дорівнює *Rows ´Columns*. Елементами матриць можуть бути числа, константи, змінні та навіть математичні вирази. Відповідно матриці можуть бути числовими та символьними.

Якщо активізувати операцію *Matrices…,* то в поточному вікні з’явиться невелике вікно, дозволяючи задавати число рядків і стовпців матриці. Натиснувши клавішу *Enter* або вказавши курсором миші на зображення клавіші *Insert* (Вставити) у вікні, також можна вивести шаблон матриці або вектора. Вектор – це матриця з одним стовпцем або одним рядком.
Шаблон містить обрамовуванні дужки та темні маленькі прямокутники, визначаючи місця вводу значення (числові або символьні) для елементів вектора або матриць. Один з прямокутників можна зробити активним (відмітивши його курсором мишки). При цьому він заключається у кут. Це вказує на те, що в нього буде введене значення відповідного елементу. За допомогою клавіш переміщення курсору можна, переміщуючись по всім прямокутникам, ввести всі елементи вектора або матриці.

Поки відбувається введення елементів вектора або матриці, пусті шаблони відображаються без будь-яких коментарів. Однак, якщо закінчити введення до повного заповнення шаблонів, система виведе повідомлення про помилку – незаповнений шаблон набуває червоного кольору. Відповідно вивід неіснуючих матриць або помилковий запис її індексів відображається виводом червоним кольором.

Якщо використовувати операцію *Insert* (Вставить) при вже виведеному шаблоні матриці, то матриця розширяється і її розмір збільшується. Кнопка *Delete* (Стирання) дозволяє зняти розширення матриці, викреслити з неї стовпець або рядок.

Кожний елемент матриці можна розглядати як значення індексованої змінної, цілочисельні значення індексів яких визначає положення елемента у матриці, а саме: перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця. Для набору індексованої змінної попередньо необхідно ввести її ім’я, а потім перейти до набору індексів натиском клавіші, що вводить символ [. Попередньо вказати індекс рядків, а потім через кому індекс стовпця.

Вироджена в один рядок або в один стовпець матриця є вектором. Нижня границя індексів задається значенням системної змінної **ORIGIN.** Як правило її значення задається рівним 0 або 1.

Векторні та матричні оператори

Для роботи з векторами і матрицями MathCAD має ряд операторів і функцій. Спочатку розглянемо оператори, ввівши такі позначення: для векторів **V,** для матриць **M,** для скалярних величин Z.

Вираз	Введення	Призначення оператора
V1+V2	V1+V2	Додавання двох векторів
V1-V2	V1-V2	Віднімання двох векторів
-V	-V	Зміна знаку у елементів вектора
-M	- M	Зміна знаку у елементів матриці
M1*M2	M1*M2	Множення двох матриць
V/Z	V/Z	Ділення вектора на скаляр
$\mathbf{M}^{-1}$	M^-1	Обернення матриці
$\mathbf{M}^{\mathbf{n}}$	M^n	Зведення матриці в степінь
$\mathbf{M}^{<n>}$	MCtrl^n	Виділення n-го елемента матриці
$\mathbf{M}_{\mathbf{m,n}}$	M[m,n]	Виділення елемента (m,n) матриці

Деякі влаштовані векторні і матричні функції системи MathCAD

Влаштовані векторні і матричні функції значно полегшують розв'язання задач лінійної алгебри, до яких зводяться математичні моделі цілого кола задач лазерної та оптоелектронної техніки. Розглянемо деякі найпоширеніші влаштовані векторні і матричні функції системи MathCAD.

- **length(V)** - повертає число елементів вектора;
- **last(V)** — повертає індекс останнього елемента;
- **max(V)** - повертає максимальний за значенням елемент;
- **min(V)** — повертає мінімальний за значенням елемент;
- **augment(M1,M2)** — об'єднує в одну матриці **M1** і **M2**, що мають рівне число рядків (об'єднання бік о бік);
- **identity(n)** — створює одиничну квадратну матрицю розміром n*n
- **stack(M1,M2)** — об'єднує дві матриці **M1** і **M2**, що мають рівне число стовпців (**M1** поміщається над**M2**);
- **diag(V)** - створює діагональну квадратну матрицю, елементи головної діагоналі якої співпадають з елементамивектора **V.**

Тема №6 – " Одно- і двомірна лінійна і сплайнова апроксимація даних."

Для побудови інтерполяції-екстраполяції в Mathcad є декілька вбудованих функцій, що дозволяють "з'єднати" точки вибірки даних (x_i,y_i) кривому різному ступеню гладкості. За визначенням інтерполяція означає побудову функції A, що апроксимує залежність y(x) в проміжних крапках (між x_i). Тому інтерполяцію ще по-іншому називають апроксимацією. У крапках x_i значення інтерполяційної функції повинні збігатися з початковими даними, тобто $A(x_i)=y\ (x_i)$.

Лінійна інтерполяція

Найпростіший вид інтерполяції — лінійна, яка представляє шукану залежність A(X) у вигляді ламаної лінії. Інтерполююча функція A(x) складається з відрізань прямих, що сполучають крапки (рис. 1).

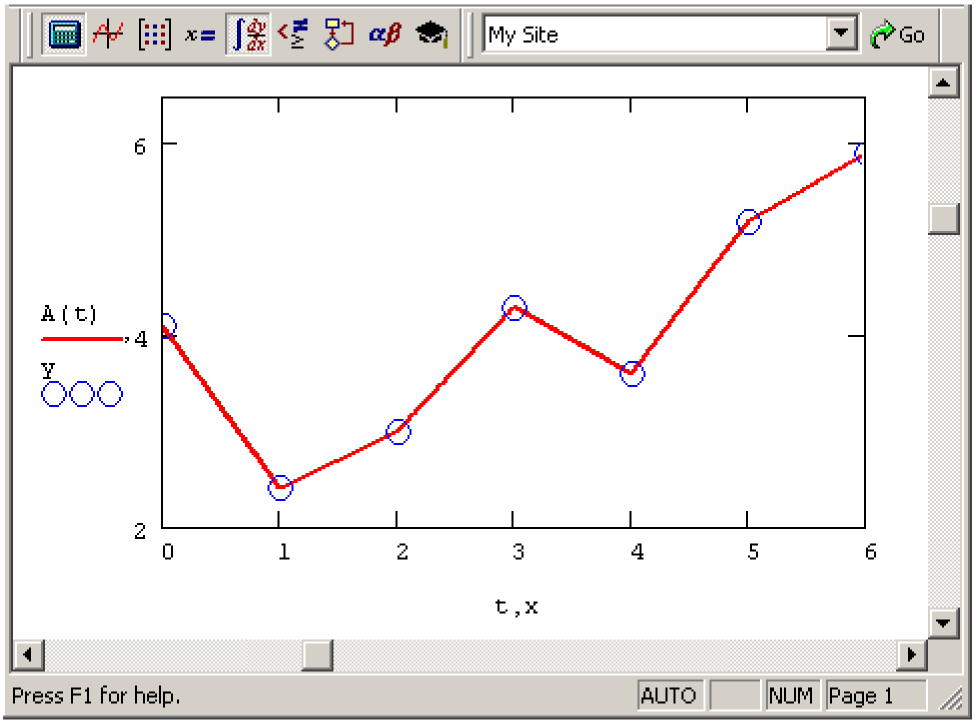


Рис. 1. Лінійна інтерполяція

Для побудови лінійної інтерполяції служить вбудована функція linterp:

- linterp(x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і y кусочно-лінійною залежністю:
  - x — вектор дійсних даних аргументу;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

$$x := (0.0\ \ 1.0\ \ 2.0\ \ 3.0\ \ 4.0\ \ 5.0\ \ 6.0)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3.0\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$A(t) := \mathrm{linterp}(x, y, t)$$

Як видно з лістингу, щоб здійснити лінійну інтерполяцію, треба виконати наступні дії:
1. Ввести вектори даних x і y (перші два рядки лістингу).
2. Визначити функцію linterp (x, y, t).
3. Обчислити значення цієї функції в необхідних крапках,
наприклад linterp(x,y,2.4)=3.52 або linterp(x,y,6)=5.9 або побудуйте її графік.

Кубічна сплайн-інтерполяція

У більшості практичних застосувань бажано з'єднати експериментальні крапки не ламаною лінією, а гладкою кривою. Краще всього для цих цілей підходить інтерполяція кубічними сплайнами, тобто відрізками кубічних парабол:

- interp(s,x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і y кубічними сплайнами:
  - s — вектор других похідних, створений одній з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
  - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Сплайн-інтерполяція в Mathcad реалізована трохи складніше лінійною. Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів — векторну змінну s. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (x, y):

- ispline (x, y) — вектор значень коефіцієнтів лінійного сплайна;
- pspiine(x,y) — вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайна;
- cspline (x, y) — вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайна:
- x, y — вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу.

$$x := (0.0 \;\; 1.0 \;\; 2.0 \;\; 3.0 \;\; 4.0 \;\; 5.0 \;\; 6.0)^T$$

$$y := (4.1 \;\; 2.4 \;\; 3.0 \;\; 4.3 \;\; 3.6 \;\; 5.2 \;\; 5.9)^T$$

```
s := cspline(x, y)

A(t) := interp(s, x, y, t)
```

Сенс сплайн-интерполяции полягає в тому, що в проміжках між крапками здійснюється апроксимація у вигляді залежності $A(t)=at^3+bt^2+ct+d$.

Коефіцієнти a, b з, d розраховуються незалежно для кожного проміжку, виходячи із значеньу* у сусідніх крапках. Цей процес прихований від користувача, оскільки сенс завдання інтерполяції полягає у видачі значення A(t) у будь-якій точці t (рис. 2).

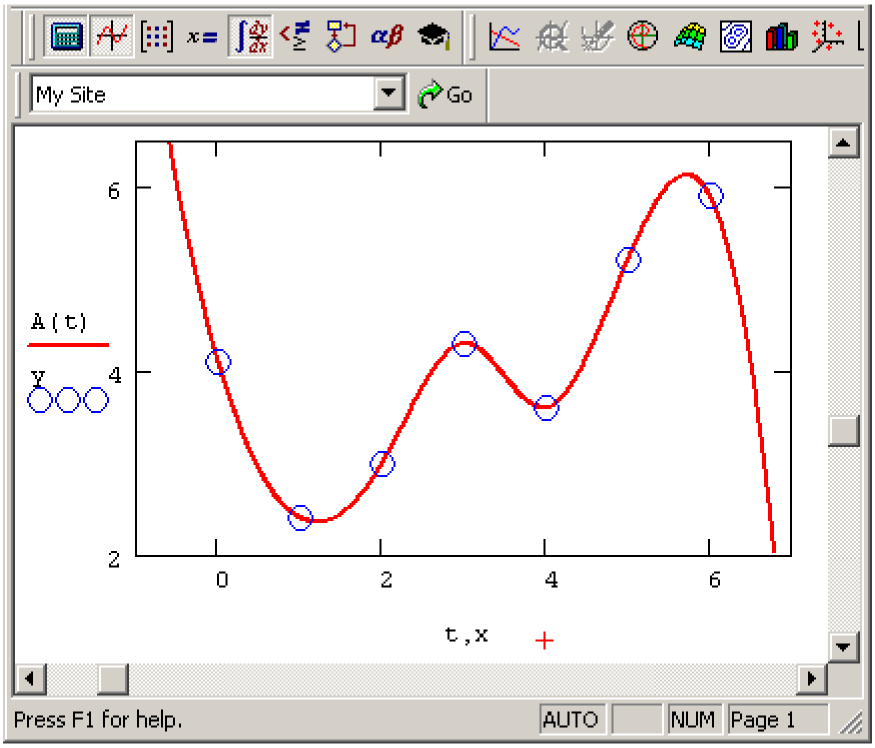


Рис. 2. Сплайн-інтерполяція

Поліноміальна сплайн-інтерполяція

Складніший тип інтерполяції — так звана інтерполяція B-сплайнамі. На відміну від звичайної сплайн-интерполяции, зшивання елементарних B-сплайнов проводиться не в крапках x_i а в інших крапках u_i координати яких пропонується ввести користувачеві. Сплайни можуть бути поліномами 1, 2 або 3 ступені (лінійні, квадратичні або кубічні). Застосовується інтерполяція B-сплайнамі точно так, як і звичайна сплайн-інтерполяція, відмінність полягає тільки у визначенні допоміжної функції коефіцієнтів сплайна.

- interp(s,x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і y за допомогою B-сплайнов.
- bspiine (x,y,u,n) — вектор значень коефіцієнтів B-сплайна:
  - s — вектор других похідних, створений функцією bspline;
  - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція;
  - u — вектор значень аргументу, в яких проводиться зшивання B-сплайнов;

- n — порядок поліномів онлайнової інтерполяції (1, 2 або з).

Інтерполяція В-сплайнамі ілюструється наступним лістингом:

```
x := (0.0  1.0  2.0  3.0  4.0  5.0  6.0)^T

y := (4.1  2.4  3.0  4.3  3.6  5.2  5.9)^T

u := (-0.5  2.2  3.3  4.1  5.5  7)^T

s := bspline(x, y, u, 2)

A(t) := interp(s, x, y, t)
```

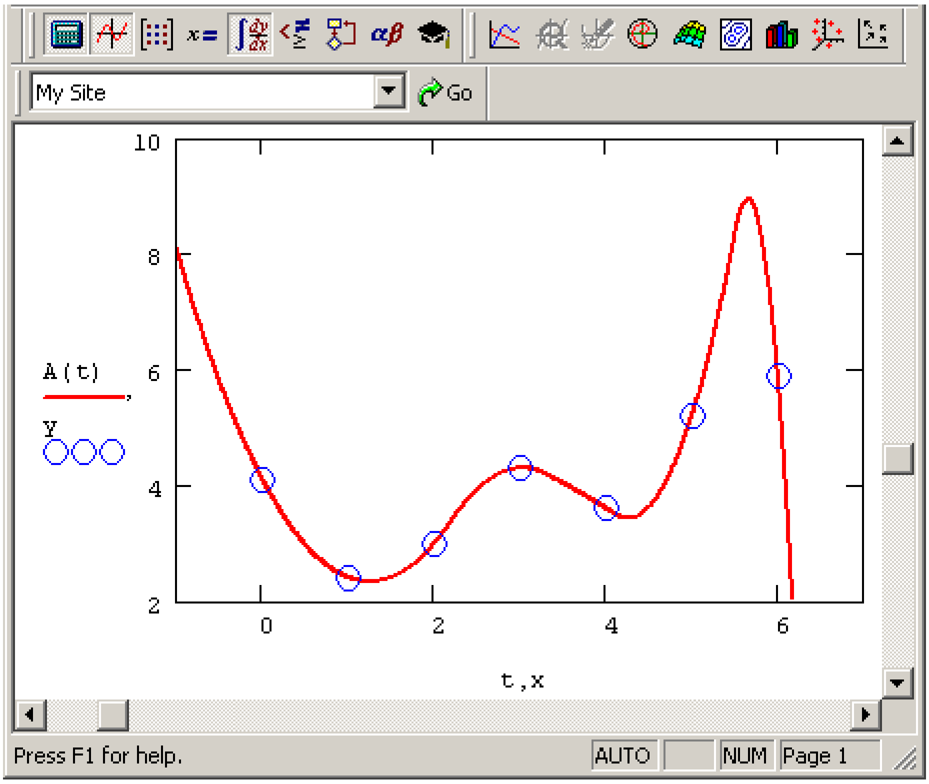


Рис. 3 В-сплайн-інтерполяція (продовження лістингу 13.3)

Багатовимірна інтерполяція

Двовимірна сплайн-інтерполяція приводить до побудови поверхні z (x,y) що проходить через масив крапок, що описує сітку на координатній плоскості (x,y). Поверхня створюється ділянками двовимірних кубічних сплайнів, що є функціями(x,y) і що мають безперервні перші і другі похідні по обох координатах.

Багатовимірна інтерполяція будується за допомогою тих же вбудованих функцій, що і одновимірна (див. разд. 13.1.2), але має як аргументи не вектори, а відповідні матриці. Існує одне важливе обмеження, пов'язане з можливістю інтерполяції тільки квадратних NxN масивів даних:

- interp(s,x,z,v) — скалярна функція, що апроксимує дані вибірки двовимірного поля по координатах x і y кубічними сплайнами:

  - s — вектор других похідних, створений одній з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
  - x — матриця розмірності Nx2що визначає діагональ сітки значень аргументу (елементи обох стовпців відповідають міткам x і y і розташовані в порядку зростання);
  - z — матриця дійсних даних розмірності NxN;
  - v — вектор з двох елементів, що містить значення аргументів x і y для яких обчислюється інтерполяція.

Лістинг двовимірної інтерполяції:

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ 2 & 20 \\ 3 & 30 \\ 4 & 40 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 2 & 3 & 2.1 & 1.5 \\ 1.3 & 3.3 & 5 & 1.7 & 2 \\ 1.3 & 3 & 3.7 & 2.1 & 2.9 \\ 1.5 & 2 & 2.5 & 2.8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

$$V := \begin{pmatrix} 3.7 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{interp}(S, X, Y, V) = 1.636$$

$$A_{i,j} := \mathrm{interp}\left[S, X, Y, \begin{pmatrix} \frac{i}{k} \cdot 4 \\ \frac{j}{k} \cdot 40 \end{pmatrix}\right]$$

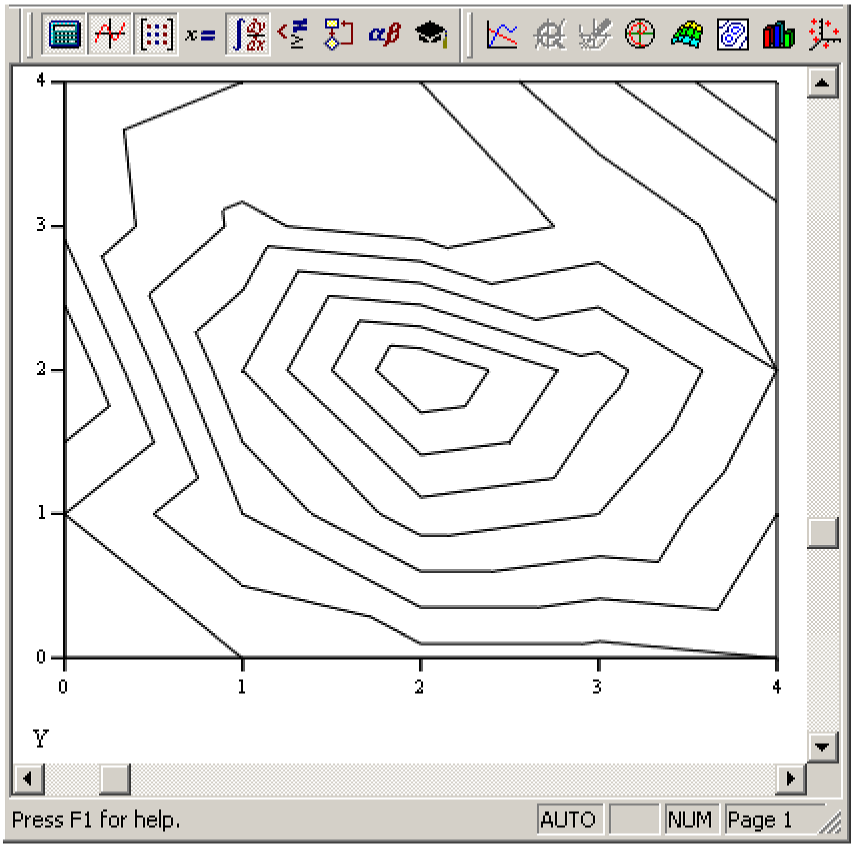


Рис. 4. Початкове двовимірне поле даних

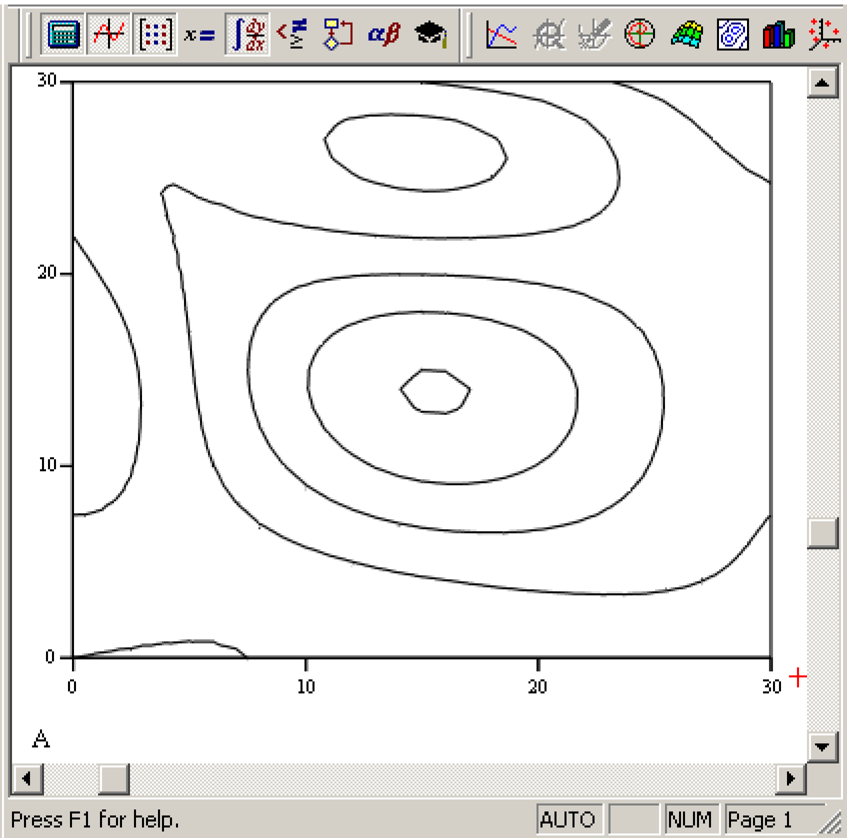


Рис. 5. Результат двовимірної інтерполяції

Тема №7 – " Моделювання випадкових даних і первинна статистична обробка "

Mathcad має розвинений апарат роботи із завданнями математичної статистики і обробки експерименту. По-перше є велика кількість вбудованих спеціальних функцій, що дозволяють розраховувати щільність вірогідності і інші основні характеристики основних законів розподілу випадкових величин. Разом з цим, в Mathcad запрограмована відповідна кількість генераторів псевдовипадкових чисел для шкіряного закону розподілу, що дозволяє ефективно проводити моделювання методами Монте-Карло. По-друге, передбачена можливість побудови гістограм і розрахунку статистичних характеристик вибірок випадкових чисел і випадкових процесів, таких як середні, дисперсії, кореляції і тому подібне. При цьому випадкові послідовності можуть як створюватися генераторами випадкових чисел, так і вводитися користувачем з файлів. По-третє є цілий арсенал засобів, направлених на інтерполяцію-екстраполяцію даних, побудову регресії по методу найменших квадратів, фільтрацію сигналів. Нарешті, реалізований ряд чисельних алгоритмів, що здійснюють розрахунок різних інтегральних перетворень, що дозволяє організувати спектральний аналіз різного типу.

Статистичні функції

У Mathcad закладена інформація про велику кількість різноманітних статистичних розподілів, що включає, з одного боку, табульовані функції вірогідності і, з іншою, можливість генерації послідовності випадкових чисел з відповідним законом розподілу. Для реалізації цих можливостей є чотири основні категорії вбудованих функцій. Їх назви є складеними і влаштовані однаковим чином: деручи літера ідентифікує певний закон розподілу, а частина (нижче в списку функцій вона умовно позначена зірочкою), що залишилася, задає смислову частину вбудованої функції:

- d* (x,par) — щільність вірогідності;
- p*(x,par) — функція розподілу;
- q*(P,par) — квантиль розподілу;
- r* (M,par) — вектор м незалежних випадкових чисел, кожне з яких має відповідний розподіл:
    - x — значення випадкової величини (аргумент функції);
    - P — значення вірогідності;
    - par — список параметрів розподілу.

Щоб отримати функції, що відносяться, наприклад, до рівномірного розподілу, замість * треба поставити unif і ввести відповідний список параметрів par . Він складатиметься в даному випадку з двох чисел: a,b — між інтервалу розподілу випадкової величини.

Перерахуємо всі типи розподіли, реалізовані в Mathcad, разом з їх параметрами, цього разу позначивши зірочкою * бракуючу деру букву вбудованих функцій. Деякі з щільності вірогідності показані на рис. 1.

- *beta (x, s1, s2) — бета-розподіл (s1, s2>0 — параметри, 0<x<1).
- *binom(к,n,p) — біноміальний розподіл (n — цілий параметр, 0<k<n і 0<p<1 — параметр, рівний вірогідності успіху одиничного випробування).

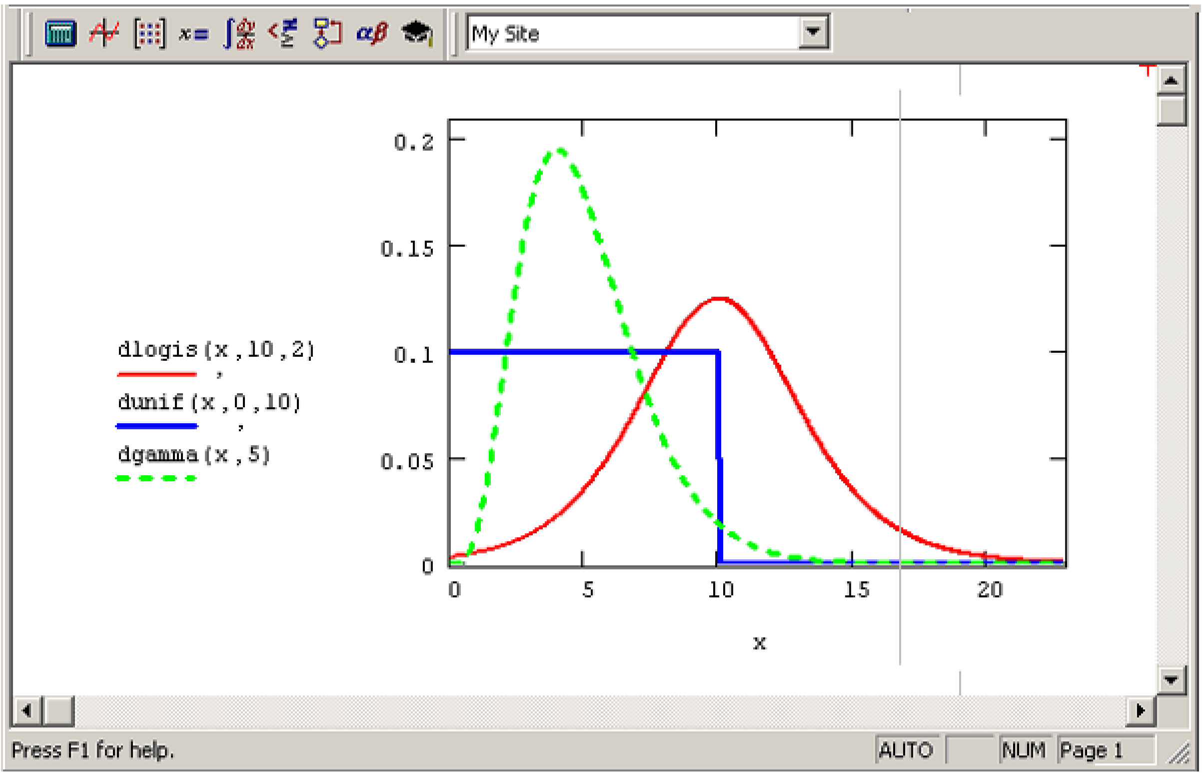


Рис.1. Щільність вірогідності деяких розподілів

- *cauchy(x,l,s) — розподіл Коші (l — параметр розкладання, s>0 — параметр масштабу).
- *chisq(x,d) — ?^{2} ("хі-квадрат") розподіл (d>0 — число мір свободи).
- *exp(x,r) — експоненціальний розподіл (r>0 — показник експоненти).
- *F(x,d1,d2) — розподіл Фішера (d1,d2>0 — числа мір свободи).
- *gamma(x,s) — гамма-розподіл (s>0 — параметр форми).
- *geom(к,p) — геометричний розподіл (0<p<1 — параметр, рівний вірогідності успіху одиничного випробування).
- *hypergeom(к,a,b,n) — гіпергеометричний розподіл (a,b,n — цілі параметри).
- *lnorm(x,μ ?) — логарифмічно нормальний розподіл (μ— натуральний логарифм математичного очікування ?>0 — натуральний логарифм середньоквадратичного відхилення).
- *logis (x,l,s) — логістичний розподіл (l — математичне очікування, s>0 — параметр масштабу).
- *nbinom(к,n,p) — негативний біноміальний розподіл (n>0 — цілий параметр, 0<p<1).

- *norm(x,μ ?) — нормальний розподіл (μ— середнє значення ?>0 — середньоквадратичне відхилення).
- *pois (до?) — розподіл Пуассона (?>0 — параметр).
- *t (x,d) — розподіл Стьюдента (d>0 — число мір свободи).
- *unif (x,a,b) — рівномірний розподіл (a<b — фаницы інтервалу).
- *weibuii (x, s) — розподіл Вейбулла (s>0 — параметр).

Побудова гістограм

Гістограмою називається графік, що апроксимує за випадковими даними щільність їх розподілу. При побудові гістограми область значень випадкової величини (a,b) розбивається на деяку кількість bi_n сегментів, а потім підраховується відсоток попадання даних в кожен сегмент. Для побудови гістограм в Mathcad є декілька вбудованих функцій. Розглянемо їх, починаючи з найскладнішої по застосуванню, щоб краще знатися на можливостях кожній з функцій.

Гістограмі з довільними інтервалами

- hist (intvls,x) — вектор частоти попадання даних в інтервали гістограми:

  - intvls — вектор, елементи якого задають сегменти побудови гістограми в порядку зростання$a<intvls_i<b$;
  - x — вектор випадкових даних.

Якщо вектор intvls має bin елементів, то і результат hist має стільки ж елементів. Побудова гістограми ілюструється наступним лістингом та рис.:

$N := 1000 \qquad bin := 30$

$x := rnorm(N, 0, 1)$

$lower := floor(min(x))$

$upper := ceil(max(x))$

$h := \dfrac{upper - lower}{bin}$

$j := 0 .. bin$

$int_j := lower + h \cdot (j + 0.5)$

$f := \dfrac{1}{N \cdot h} \cdot hist(int, x)$

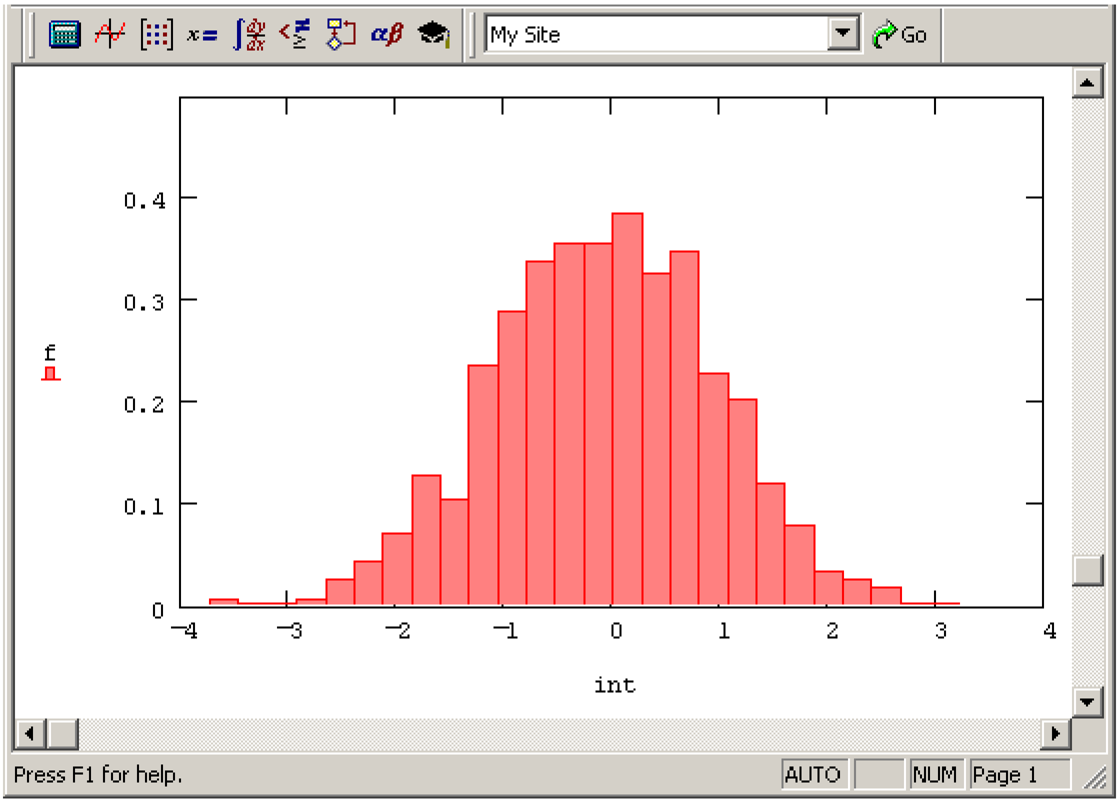


Рис. 2. Побудова гістограми (продовження лістингу 12.8)

Гістограма з рівними інтервалами

Якщо немає необхідності задавати сегменти гістограми різної ширини, то зручніше скористатися спрощеним варіантом функції hist:

- hist (bin, x) — вектор частоти попадання даних в інтервали гістограми:
  - bin — кількість сегментів побудови гістограми;
  - x — вектор випадкових даних.

Для того, щоб використовувати цей варіант функції hist замість попереднього, досить замінити перший з її аргументів в попередньому лістингу таким чином:

$$f := \frac{1}{N \cdot h} \cdot hist(int, x)$$

Недолік спрощеної форми функції hist у тому, що як і раніше необхідно додатково визначати вектор сегментів побудови гістограми.
Вільна функція histogram:

- histogram (bin, x) — матриця гістограми розміру binx2, що складається із стовпця сегментів розбиття і стовпця частоти попадання в них даних:
  - bin — кількість сегментів побудови гістограми;
  - x — вектор випадкових даних.

Приклади використання функції histogram приведені в лістингу та на рис.:

```
N := 1000     bin := 10

x := rnorm(N, 0, 1)

f := histogram(bin, x)
```

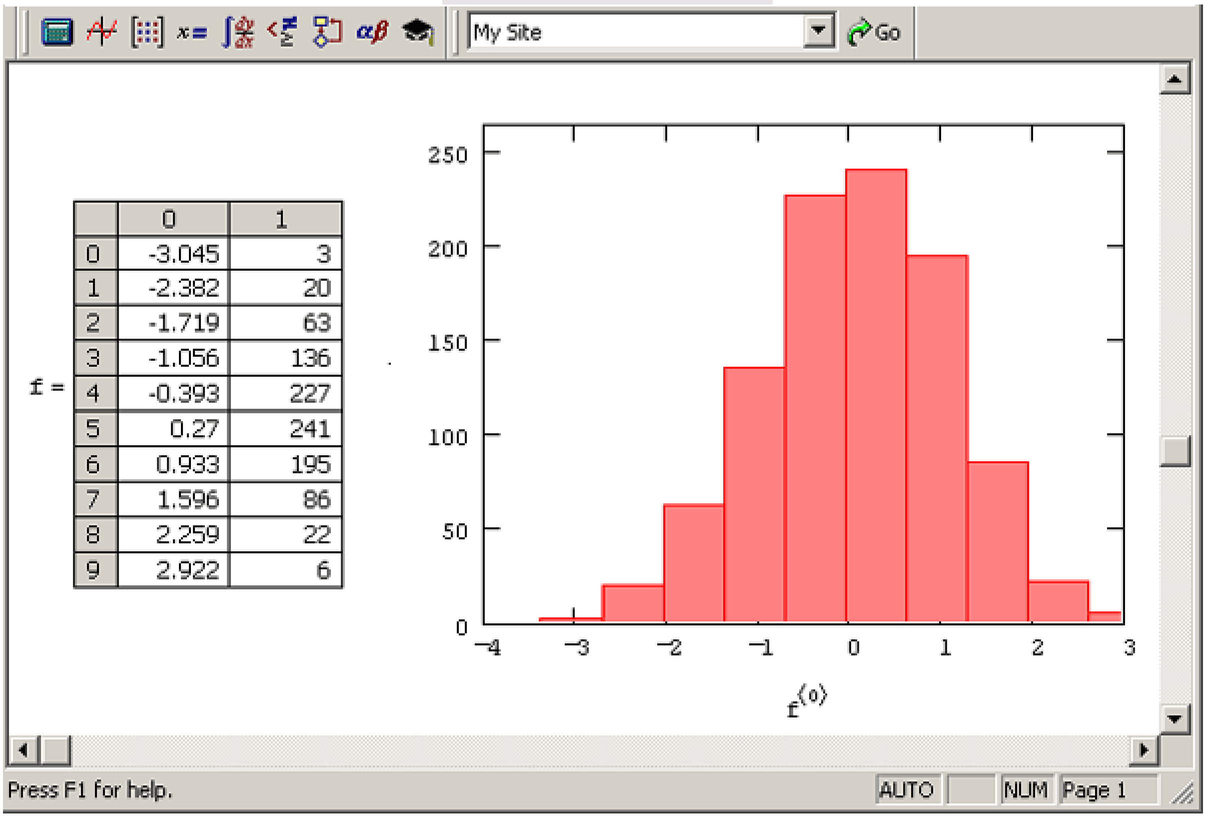


Рис. 3. Графік і матриця гістограми

Середнє і дисперсія

У Mathcad є ряд вбудованих функцій для розрахунків числових статистичних характеристик рядів випадкових даних:

- mean(x) — вибіркове середнє значення;
- median (x) — вибіркова медіана (median) — значення аргументу, яку ділить гістограму щільності вірогідності на дві рівні частини;
- var (x) — вибіркова дисперсія (variance);
- stdev(x) — середньоквадратичне (або стандартне) відхилення (standard deviation);
- max(x),min(x) — максимальне і мінімальне значення вибірки;
- mode(x) — найбільш значення вибірки, що часто зустрічається;
- var(x),stdev(x) — вибіркова дисперсія і середньоквадратичне відхилення в іншому нормуванні:
    - x — вектор (або матриця) з вибіркою випадкових даних.

Приклад використання перших чотирьох функцій приведень в лістингу:

$N := 1 \times 10^3$

$x := \mathrm{runif}(N, 0, 1)$

$m := \mathrm{mean}(x)$

$\mathrm{median}(x) = 0.478$

$\mathrm{var}(x) = 0.085$

$\mathrm{stdev}(x) = 0.291 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = 0.291$

Кореляція

Функції, що встановлюють зв'язок між парами двох випадкових векторів, називаються коваріацією і кореляцією (або, по-іншому, коефіцієнтом кореляції). Сморід розрізняються нормуванням, як випливає з їх визначення:

- corr(x) — коефіцієнт кореляції двох вибірок;
- cvar(x) — коваріація двох вибірок:

  - x1,x2— вектори (або матриці) однакового розміру з вибірками випадкових даних.

$N := 100 \qquad \sigma := 1$

$x1 := \mathrm{rnorm}(N, 0, \sigma) \qquad m2 := \mathrm{mean}(x2)$

$x2 := \mathrm{rnorm}(N, 0, \sigma) \qquad \sigma2 := \mathrm{stdev}(x2)$

$m1 := \mathrm{mean}(x1)$

$\sigma1 := \mathrm{stdev}(x1)$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left[\left(x1_i - m1 \right) \cdot \left(x2_i - m2 \right) \right] = -0.197$$

$\mathrm{cvar}(x1, x2) = -0.197$

$$\frac{\mathrm{cvar}(x1, x2)}{\sigma1 \cdot \sigma2} = -0.203$$

$\mathrm{corr}(x1, x2) = -0.203$

Тема №8 – " Регресія даних і прогнозування поведінки функціональної залежності "

Завдання математичної регресії мають сенс наближення вибірки даних (xi,yi) деякою функцією f(x), що певним чином мінімізує сукупність помилок |f(xi)-yil. Регресія зводиться до підбору невідомих коефіцієнтів, що визначають аналітичну залежність f (x). Через вироблювану дію більшість завдань регресії є окремим випадком більш загальної проблеми згладжування даних. Як правило, регресія дуже ефективна, коли заздалегідь відомий (або, принаймні, добре вгадується) закон розподілу даних(x_i,y_i).

Лінійна регресія

Найпростіший і найбільш часто використовуваний вид регресії — лінійна. Наближення даних (xi,yi) здійснюється лінійною функцією y(x) = =b+ax. На координатній площкості (x,y) лінійна функція, як відомо, представляється прямою лінією. Ще лінійну регресію часто називають методом найменших квадратів, оскільки коефіцієнти a і b обчислюються з умови мінімізації суми квадратів помилок |b+axi-yi|.

Для розрахунку лінійної регресії в Mathcad є два дублюючий один один способу. Правила їх застосування представлені в лістингах. Результат обох лістингів виходить однаковим:

- line (x, y) — вектор з двох елементів (b,a) коефіцієнтів лінійної регресії b+ax;
- intercept (x, y) — коефіцієнт ь лінійної регресії;
- slope (x,y) — коефіцієнт a лінійній регресії:
  - x — вектор дійсних даних аргументу;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру.

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.829 \\ 0.414 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$$

$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$

$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$

$\text{intercept}(x,y) = 2.829$

$\text{slope}(x,y) = 0.414$

$f(t) := \text{intercept}(x,y) + \text{slope}(x,y) \cdot t$

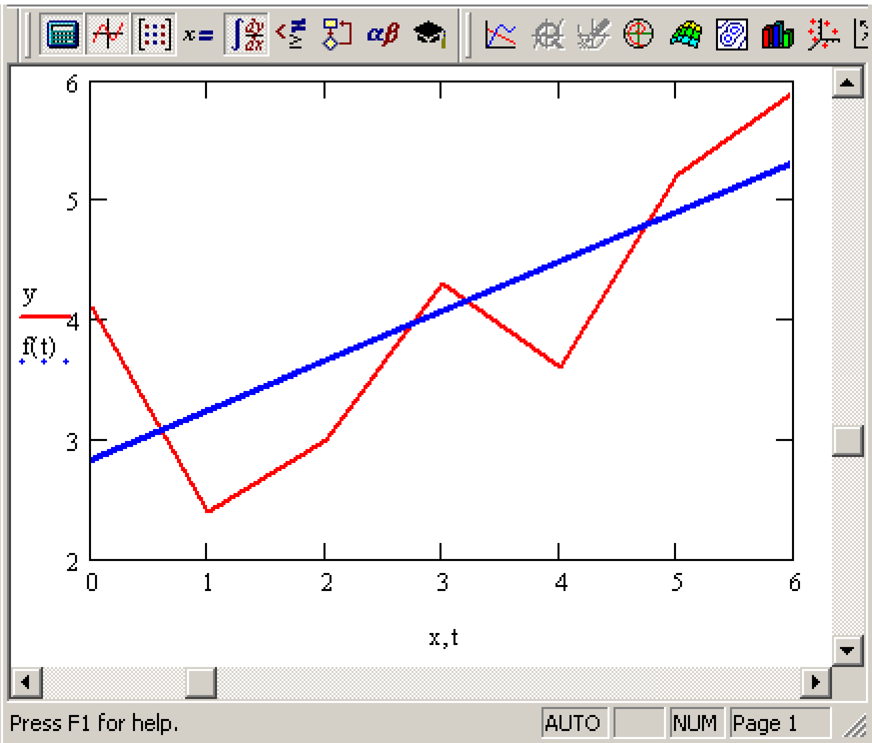


Рис.1. Лінійна регресія

У Mathcad є альтернативний алгоритм, що реалізовує не мінімізацію суми квадратів помилок, а медиан-медианную лінійну регресію для розрахунку коефіцієнтів a і b :

- medfit(x,y) — вектор з двох елементів (b,a) коефіцієнтів лінійної медиан-медианной регресії b-ax:
  - x, y — вектори дійсних даних однакового розміру.

Лістинг побудови лінійної регресії двома різними методами:

$$\text{medfit}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.517 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

$$g(t) := \text{medfit}(x,y)_0 + \text{medfit}(x,y)_1 \cdot t$$

Відмінність результатів середньоквадратичної і медиан-медианной регресії ілюструється на рис. 2.

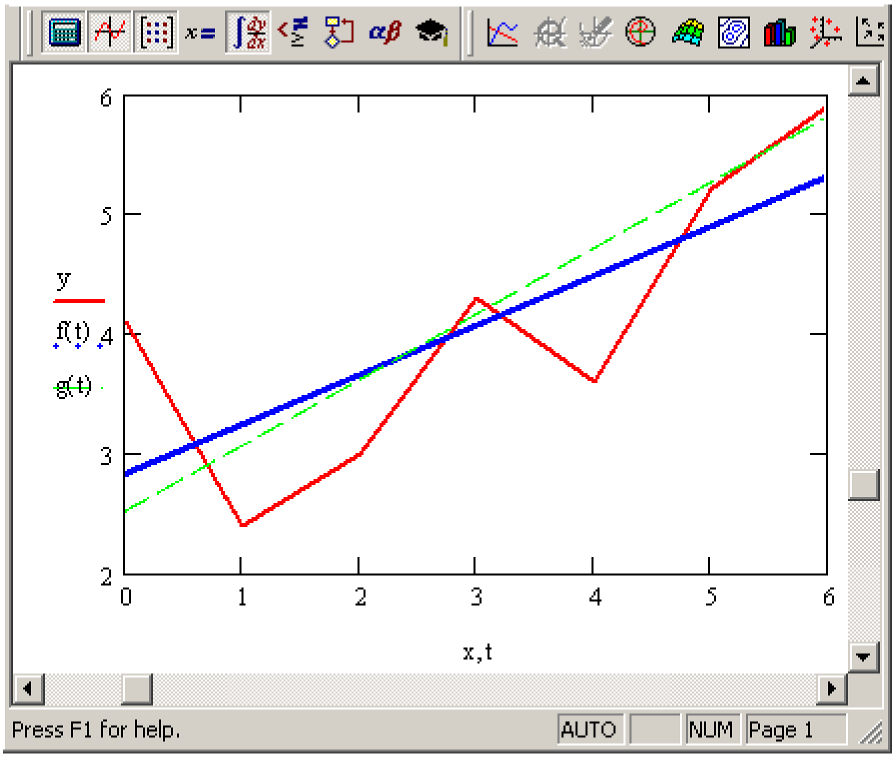


Рис. 2. Лінійна регресія по методу найменших квадратів і методу медіан

Поліноміальна регресія

У Mathcad реалізована регресія одним поліномом, відрізками декількох поліномів, а також двовимірна регресія масиву даних. Поліноміальна регресія означає наближення даних (x_i,y_i) поліномом до-й ступені $A(x)=a+bx+cx^2+dx^3+...+hx^{до}$. При k=i поліном є прямою лінією, при k=2 — параболою, при k=3 — кубічною параболою і так далі Як правило, на практиці застосовуються k<5.

У Mathcad поліноміальна регресія здійснюється комбінацією вбудованої функції regress і поліноміальній інтерполяції:

- regress (x, y, до) — вектор коефіцієнтів для побудови поліноміальної регресії даних;
- interp(s,x,y, t) — результат поліноміальної регресії:
  - s=regress(x,y,k);
  - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - до — ступінь полінома регресії (ціле позитивне число);
  - t — значення аргументу полінома регресії;

Для побудови поліноміальної регресії після функції regress ви зобов'язані використовувати функцію interp.

.

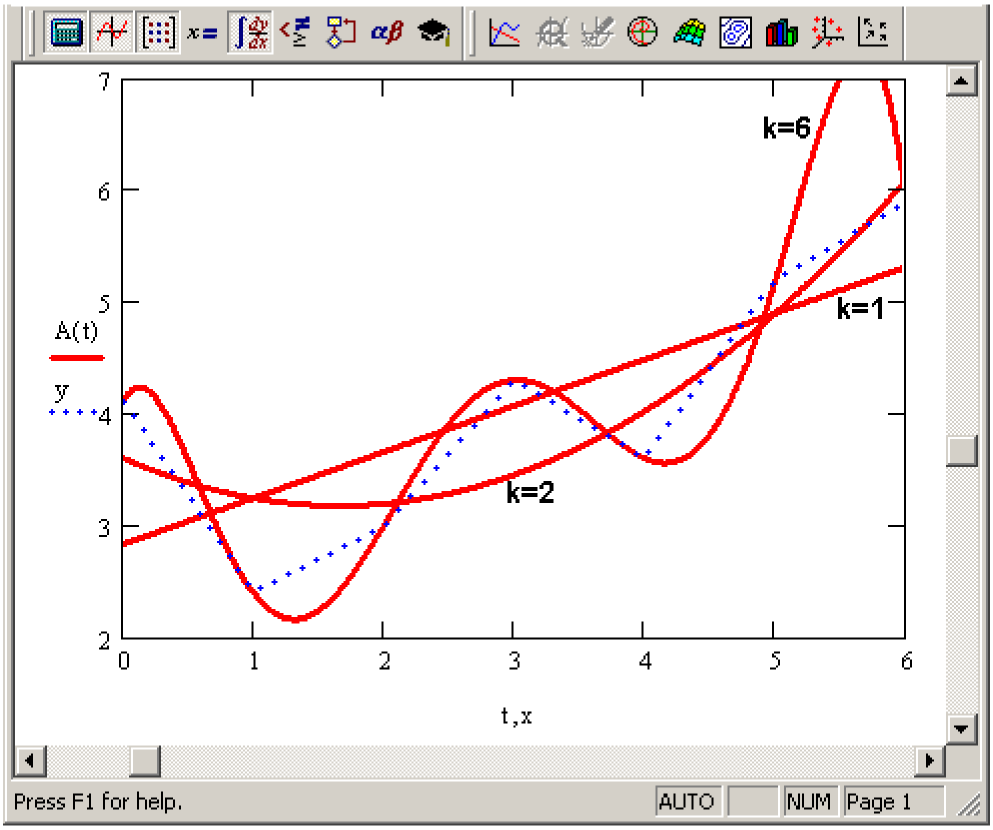


Рис. 3. Регресія поліномами різного ступеня

Регресія відрізками поліномів

Окрім наближення масиву даних одним поліномом є можливість здійснити регресію зшиванням відрізань (точніше кажучи, ділянок, оскільки вони мають криволінійну форму) декількох поліномів. Для цього є вбудована функція loessзастосування якої аналогічно функції regress:

- loess (x, y, span) — вектор коефіцієнтів для побудови регресії даних відрізками поліномів;
- interp(s,x,y,t) — результат поліноміальної регресії:
  - s=loess(x,y,span);
  - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - span — параметр, що визначає розмір відрізань поліномів (позитивне число, добрі результати дає значення порядку span=0.75).

Параметр span задає ступінь згладженої даних. При великих значеннях span регресія практично не відрізняється від регресії одним поліномом (наприклад span=2 дає майже той же результат, що і наближення крапок параболою).

Лістинг регресії відрізками поліномів:

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$s := loess(x,y,0.9)$$

$$A(t) := interp(s,x,y,t)$$

Інші типи регресії

Окрім розглянутих, в Mathcad вбудовано ще декілька видів трьохпараметричної регресії. Їх реалізація декілька відрізняється від приведених вище варіантів регресії тим, що для них, окрім масиву даних, потрібно задати деякі початкові значення коефіцієнтів a, b, c. Використовуйте відповідний вид регресії, якщо добре уявляєте собі, якою залежністю описується ваш масив даних. Коли тип регресії погано відображає послідовність даних, то її результат часто буває незадовільним і таким, що навіть сильно розрізняється залежно від вибору початкових значень. Кожна з функцій видає вектор уточнених параметрів a, b, c.

- expfit (x, y, g) — регресія експонентою f (x) =ae^{bx}+c.
- igsfit (x,y,g) — регресія логістичною функцією f (x)=a/ (1+be^{-cx}).
- sinfit (x,y,g) — регресія синусоїдою f (x) =a-sin (x+b) +c.
- pwfit(x,y,g) — регресія статечною функцією f (x)=a-xb+c.
- logfit (x, y, g) — регресія логарифмічною функцією f (x)=aln(x+b) +c.
- infit (x,y) — регресія двохпараметричною логарифмічною функцією f (x)=aln(x)+b.

  - x — вектор дійсних даних аргументу.
  - y — вектор дійсних значень того ж розміру.
  - g — вектор з трьох елементів, задаючий початкові значення a, b, c.

Тема №9 – " Методи розв’язку нелінійних рівнянь і систем в системі Mathcad "

1. Для знаходження одного кореню алгебраїчного рівняння f(x) = 0 використовується функція "root" із наперед заданим наближенням

   x:=1 root(f(x),x) = x

2. Для розв’язання системи лінійних рівнянь типу

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1,$$
$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2,$$
$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3,$$

використовується:

I спосіб) блок операторів "Given—Find" з наперед заданими початковими наближеннями (див. приклад нижче);

II спосіб) функція "lsolve" (перша літера функції – англійська "ель"):

z:=lsolve(M,v)

де z — вектор коренів системи рівнянь;

M — квадратна матриця її коефіцієнтів;

v — вектор правих частин системи.

3. Для знаходження коренів поліному

$$an \cdot x^n + \ldots a1 \cdot x + a0 = 0$$

використовується функція "polyroots(a)", де параметр a – це вектор коефіцієнтів поліному

$$a = \begin{bmatrix} a0 \\ a1 \\ \ldots \\ an \end{bmatrix}, \qquad polyroots(a) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

4. Для розв'язання нелінійної системи рівнянь використовується блок операторів "Given—Find" з наперед заданими початковими наближеннями, наприклад:

```
x := 1          y := 1          z := 0

Given

2·x + y = 5 − 2·z^2
y^3 + 4·z = 4
x·y + z = e^z

vec := Find(x, y, z)
```

$$vec = \begin{bmatrix} 1.422 \\ 0.975 \\ 0.768 \end{bmatrix}$$

Тема №10 – " Розв'язок системи диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта з фіксованим та адаптивним кроком"

Для розв'язання звичайного диференціального рівняння в загальному випадку використовують функцію

rkfixed(x0, t0, tk, N, D),

яка обчислює N точок диференціального рівняння з початковими умовами x0 в часовому інтервалі [t0, tk] з правою частиною D(t, x) методом Рунге — Кутта четвертого порядку з фіксованим кроком інтегрування. Права частина у вигляді D(t, x) утворюється, коли рівняння перетворюється до форми векторно-матричної форми. Покажемо як будь-яке диференціальне рівняння трансформується до цієї форми Коши. Нехай задано наступне рівняння:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + T_1\frac{d^2x}{dt^2} + T_2\frac{dx}{dt} + T_3x = U, \qquad (1)$$
$$x(0) = x0, \quad \dot{x}(0) = x1, \quad \ddot{x}(0) = x2, \; t = [0, T].$$

Введемо заміну змінних (кількість замін дорівнює порядку рівняння – 3):

$$x_0 = x, \quad x_1 = \dot{x}, \quad x_2 = \ddot{x}. \qquad (2)$$

Тоді рівняння (1) можна переписати в вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ U - T_3 \cdot x_0 - T_2 \cdot x_1 - T_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}, \quad X0 = \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \end{bmatrix}, \quad t = [0, T], \qquad (3)$$

де похідні перших двох змінних записуються через інші змінні, а остання — знаходиться з рівняння (1). Якщо праву частину диференціального рівняння в вигляді (3) представити як добуток матриці коефіцієнтів та вектору невідомих x-змінних, тоді вигляд (3) і перетвориться на *векторно-матричну форму*, але останнє перетворення не вимагається форматом функцій Mathcad.

Диференціальне рівняння, представлене у вигляді (3), розв'язується в Mathcad наступним чином:

$U := 10 \quad T1 := 10 \quad T2 := 0.5 \quad T3 := 2 \qquad x0 := 2 \quad x1 := 4 \quad x2 := 3$

$T := 10 \quad N := 50$

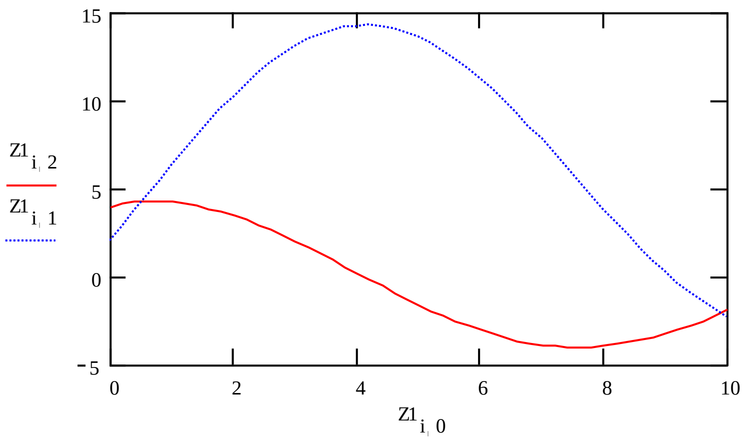
$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ U - T3 \cdot x_0 - T2 \cdot x_1 - T1 \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad X0 := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad tk := T \quad i := 0..N$$

Якщо рівняння розв'язується (відсутні повідомлення червоного кольору), тоді матриця Z1 містить такі стовпці:

$$Z1 = \left[t \mid x(t) \mid \dot{x}(t) \mid \ddot{x}(t) \right],$$

де перший (нульовий) стовпець містить значення незалежної змінної, а інші — значення самої змінної та її похідних (значення *фазових змінних*). Наприклад, для побудови графіків x(t) та $\dot{x}(t)$ треба ввести наступне:

$$i := 0..N$$



1. Для розв'язання диференціальних рівнянь, про які відомо, що вони можливо мають гладкий розв'язок, використовується функція

Bulstoer(x0, t0, tk, N, D)

(перша літера назви функції — обов'язково велика!!) з такими ж параметрами, як і функція "rkfixed". Якщо відомо, що розв'язок буде гладким (не буде мати розривів першого та другого роду), тоді функція "**Bulstoer**" дасть більш точний розв'язок, ніж функція "rkfixed".

2. Для розв'язання диференціальних рівнянь, які не вдається розв'язати за допомогою функцій "Bulstoer" та "rkfixed", можна застосувати функцію

Rkadapt(x0, t0, tk, N, D)

(перша літера назви функції — обов'язково велика!!) з такими ж параметрами, як і функція "rkfixed". Функція "**Rkadapt**", як і функція "rkfixed", розв'язує диференціальне рівняння методом Рунге — Кутта 4-го порядку, але на відміну від неї — зі змінним (таким, який адаптується) кроком інтегрування.

Набагато простіше розв'язується диференціальне рівняння в Mathcad, починаючи з версії 2000, за допомогою операторного блоку Given–Odesolve. Для цього достатньо записати задане диференціальне рівняння чи їх систему між цими операторами. При цьому, слід дотримуватись таких правил:

1) похідні слід записувати або у вигляді x′(t) (символ "′" набирається натисненням комбінації клавіш Ctrl-F7);

2) функція, відносно якої записується дифрівняння, записується обов'язково зі своїм аргументом у дужках: x(t);
3) у блоці Given–Odesolve набирається і само рівняння, і його початкові чи граничні умови;
4) синтаксис запису функції Odesolve краще вивчити на прикладі, який є у довідковій системі Mathcad: Resource Center/Differential Equations/усі теми, де згадується абревіатура "ODE".

Тема №11 – " Прогнозування даних "

Прогноз здійснюється по одному діапазону точок на інший. Наприклад, по перших 100 точках деякого показника X якості чи стану довкілля можна з певною точністю спрогнозувати наступні 20 чи 30. Прогноз робиться таким чином. Спочатку задана крива (в нашому прикладі 100 точок) апроксимується регресійним поліномом n-го порядку, а потім в цю функцію (поліном) підставляються значення абсцис, в яких треба знайти наступні ординати (в нашому прикладі — абсциси 101, 102, … 120 чи 130). Для цього використовується функція **predict(F,n,L)**, де **F** — вектор-стовпець з набором точок (ординат) показника, що випадково змінюється; **n** — порядок інтерполюючого регресійного поліному; **L** — кількість наступних значень показника, які слід спрогнозувати. Для неваденого прикладу — це могла б бути функція **predict(X,5,20)** чи **predict(X,5,30)**.

На рис.1 наведено приклад надзвичайно вдалого прогнозування (відносна похибка дорівнює 1,2%), на рис. 2 — відносна похибка склала вже 14,2 %, що свідчить про невдало вибрану інтерполюючу функцію чи порядок поліному.

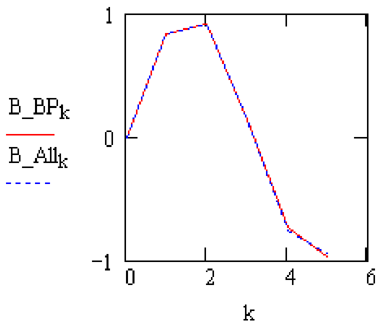
$F(x) := \sin(x)$ $\quad nb := 3$ $\quad np := 2$

$j := 0..nb$ $\quad B_j := F(j)$ $\quad h := nb + 1..np + nb$

$BP := \text{predict}(B, 2, np)$ $\quad B\_BP := \text{stack}(B, BP)$

$k := 0..nb + np$ $\quad B\_All_k := F(k)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ 0.909 \\ 0.141 \end{pmatrix}$$



$$BP = \begin{pmatrix} -0.735 \\ -0.984 \end{pmatrix}$$

$$B\_All_h = \begin{array}{|c|}\hline -0.757 \\ \hline -0.959 \\ \hline \end{array}$$

$$B\_BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ 0.909 \\ 0.141 \\ -0.735 \\ -0.984 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Приклад надзвичайно вдалого прогнозування
(відносна похибка дорівнює 1,2%)

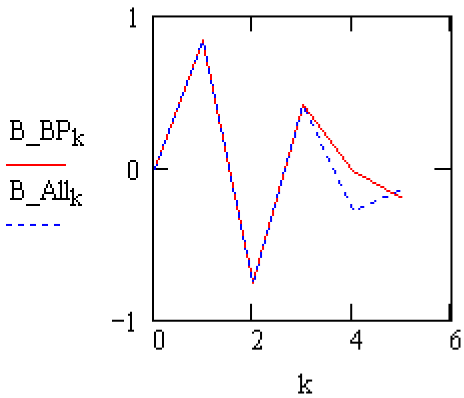
$F(x) := \sin(x^2) \qquad nb := 3 \qquad np := 2$

$j := 0..nb \qquad B_j := F(j) \qquad h := nb + 1..np + nb$

$BP := \mathrm{predict}(B, 2, np) \qquad B\_BP := \mathrm{stack}(B, BP)$

$k := 0..nb + np \qquad B\_All_k := F(k)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ -0.757 \\ 0.412 \end{pmatrix}$$



$$BP = \begin{pmatrix} -0.021 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

$$B\_All_h = \begin{array}{|c|} \hline -0.288 \\ \hline -0.132 \\ \hline \end{array}$$

$$B\_BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ -0.757 \\ 0.412 \\ -0.021 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

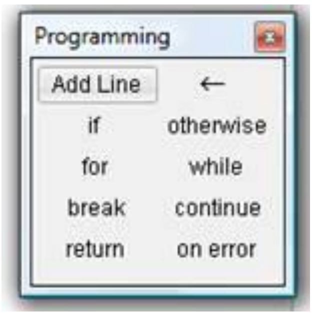
Рис. 2. Приклад не дуже вдалого прогнозування
(відносна похибка дорівнює 14,2%)

Тема №12 – " Програмування в середовищі Mathcad. Програмні оператори. Використання програмних блоків і системних директив."

Традиційне програмування, спрощений варіант якого застосований в Mathcad і здійснюється за допомогою панелі інструментів Programming має ряд істотних переваг:

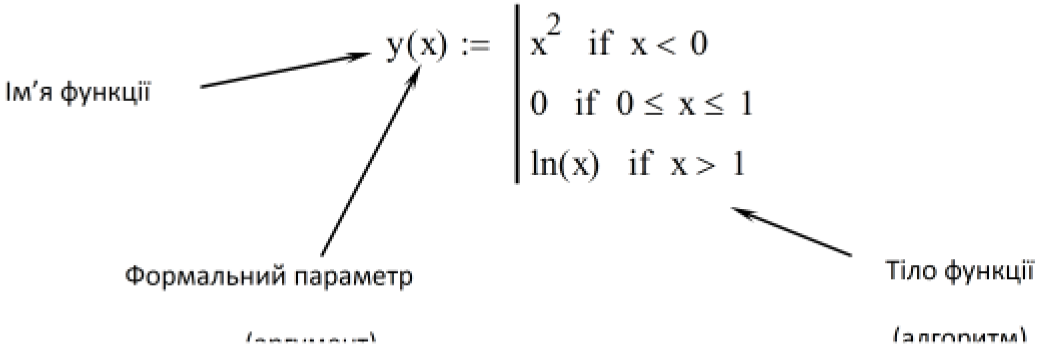
- можливість застосування циклів і умовних операторів;
- простота створення функцій і змінних, що вимагають декількох простих кроків;
- можливість створення функцій, що містять закритий для решти документа код, включаючи переваги використання локальних змінних і обробку виняткових ситуацій.

Щоб почати створення програмного модуля, слід натиснути на панелі **Programming** кнопку **Add Line**. Потім, якщо приблизно відомо, скільки рядків коди міститиме програма, можна створити потрібну кількість ліній повторними натисненнями кнопки **Add Line**.



Програмний модуль є функцією, описаною із застосуванням як сугубо алгоритмічних засобів (операторів), так і засобів вхідної мови Mathcad. Як і в традиційному програмуванні, при визначенні функції вказується її ім'я, список формальних параметрів (аргументів) і алгоритм обчислення значення - тіло функції. Всі змінні, які вводяться усередині модуля, включаючи формальні параметри, є локальними по відношенню до всього документа.

Нижче наведено приклад програми функції:



Огляд програмних операторів Mathcad:

Команда	**Функція**	**Приклад**
Add Line	Додати новий програмний рядок	
←	Присвоювання значення локальної змінної.	$y \leftarrow 0$
if	Умовний оператор (оператор розгалуження) if; умова повинна стояти після if, а оператор, що виконується, якщо виконано задану умову – перед if.	$f(x) := \begin{vmatrix} -x \text{ if } x < 0 \\ x \text{ otherwise} \end{vmatrix}$ $f(-3) = 3 \quad f(4) = 4$
otherwise	Оператор, що задає альтернативну гілку умовного оператора. Позначає оператор, що повинен бути виконаний, якщо умова оператора if не виконується.	$f(x) := \begin{vmatrix} -x \text{ if } x < 0 \\ x \text{ otherwise} \end{vmatrix}$ $f(-3) = 3 \quad f(4) = 4$
for	Оператор цикла з параметром. За ключовим словом for слідує змінна-лічильник, а після символа приналежності вводиться проміжок зміни цієї змінної.	$Sum(n) := \begin{vmatrix} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s + i \end{vmatrix}$ $Sum(4) = 10$

Команда	**Функція**	**Приклад**
while	Оператор цикла с передумовою. Внутрішні оператори циклу будуть виконуватися доти, доки буде істинною умова, що слідує за ключовим словом while. Приклад показує застосування циклу для знаходження нулів функції методом дотичних Ньютона.	$N(x,f,f_x) := \text{while } \lvert f(x)\rvert > 10^{-6}$ $x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f_x(x)}$ $N(2,\sin,\cos) = 3.142$
break	Опертор дострокового припинення циклу або програми. Служить для передчасного завершення циклу, щоб, наприклад, уникнути зациклення або занадто тривалих обчислень.	$\text{break if } i \ge 10$
continue	Оператор переходу до наступної ітерації. Служить для передчасного завершення поточної ітерації циклу; сам цикл при цьому триває.	$\text{continue if } x \ge 10$
retutn	Передчасне завершення програми; зазначене в комірці значення буде повернуто.	return y
on error	Оператор, що визначає значення, яке повертається у випадку виникнення помилки. Якщо при обчисленні виразу expr2 виникла помилка, обчислюється вираз expr1.	expr1 on error expr2