МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**Н.Д. Федоренко, О.І. Баліна, І.С. Безклубенко,
В.В. Демченко, А.О. Білощицький, С.В. Білощицька,
А.І. Родіна, В.Ю. Буценко**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ 2003

УДК 517(07)
ББК 74.3
Ф33

Рецензенти: *В.М.Михайленко*, доктор технічних наук, завідувач кафедри математичних дисциплін Європейського університету фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу
Ю.П. Буценко, КНУ “КПІ”, кафедра вищої математики

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для вищих навчальних закладів (лист Міністерства освіти і науки України №1/11-4732 від 11.11.2003).

Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С. та ін.

Ф33 Вища математика: Навч. посібник. – К.: Віпол, 2003 – 164 с.

У посібнику викладено основи вищої математики відповідно до програми першого курсу. Розглянуто приклади розв’язання стандартних задач та наведено завдання до контрольних робіт.

Для студентів заочних відділень технічних вузів. Може бути використаний студентами денних відділень вищих навчальних закладів.

УДК 517(07)
ББК 74.3

ЗМІСТ

Вступ

Даний посібник призначений як методичне керівництво для вивчення загального курсу “Вища математика” студентами-заочниками інженерно-технічних спеціальностей.

Математика є фундаментальною дисципліною. Її викладання розвиває логічне та алгоритмічне мислення, дає змогу засвоїти основні методи досліджень чисельними методами математики, сприяє вмінню самостійно розширювати математичні знання, проводити математичний аналіз інженерних задач. Загальний курс математики є фундаментом математичної освіти інженера.

Основою навчання студента-заочника є самостійна робота над підручником, навчальним матеріалом, яка складається з елементів вивчення теоретичного матеріалу, розв’язування задач та виконання контрольних робіт. Посібник побудований за схемою: елементи теорії, приклади розв’язання задач, завдання для контрольних робіт за варіантами по семестрах.

Контрольні роботи

В процесі вивчення курсу “Вища математика” студент повинен виконати ряд контрольних робіт, головна мета яких – допомогти студенту поглибити знання з математики.

Варіанти завдання вибираються за останньою цифрою номера студентського білета. Під час виконання контрольної роботи необхідно повністю переписувати умову задачі, саме розв’язання записувати чітко й охайно. На титульному аркуші треба зазначити прізвище та ініціали, шифр (номер залікової) та домашню адресу, дату виконання контрольної роботи.

Кожна контрольна робота виконується в окремому зошиті чорнилом довільного кольору, крім червоного. В роботу включаються всі завдання строго за варіантом. Розв’язання задач розміщуються в порядку зростання номерів. Контрольні роботи, які не вміщують розв’язання всіх задач не зараховуються.

Програма курсу “Вища математика” для інженерно-технічних спеціальностей включає такі обов’язкові блоки з курсу вищої математики:

1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія – 66 год.
2. Диференціальне числення – 66 год.
3. Інтегральне числення – 66 год.
4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних – 38 год.
5. Диференціальні рівняння – 50 год.
6. Ряди – 52 год.
7. Кратні та криволінійні інтеграли – 40 год.
8. Функції комплексної змінної – 48 год.
9. Теорія ймовірностей – 56 год.
10. Математична статистика – 40 год.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею розміром $m\times n$ називається множина з mn елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right), \text{ де } i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

Якщо $m=n$, то матриця квадратна.

Квадратну матрицю (a_{ij}) порядку n називають:

- *верхньою трикутною матрицею*, якщо $a_{ik}=0$, для всіх $i>k$;
- *нижньою трикутною матрицею,* якщо $a_{ik}=0$, для всіх $i<k$;
- *діагональною матрицею*, якщо $a_{ik}=0$, для всіх $i\neq k$;
- *одиничною матрицею* $E=(a_{ij})$, якщо

$$a_{ik}=\begin{cases} 0, \text{ при } & i\neq j; \\ 1, \text{ при } & i=j \end{cases}.$$

Матрицю ($a_{1,j}$), $j=\overline{1,n}$, називають *матрицею-рядком*:

$$A=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}).$$

Матрицю ($a_{1,j}$), $j=\overline{1,n}$, називають *матрицею-стовпцем*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, її називають нуль-матрицею та позначають O.

Рівність матриць. Дві матриці $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ рівні (A=B), якщо вони мають однаковий розмір $m\times n$ та всі відповідні елементи рівні між собою.

Сумою $A+B$ розміру $m\times n$ матриць $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ називають матрицю $C=(c_{ij})$ того самого порядку, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює $c_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Добутком αA матриці $A=(a_{ij})$ на число α називають матрицю $B=(b_{ij})$, елементи якої $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$.

Добутком AB розміру $m\times n$ матриці $A=(a_{ij})$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміром ($n\times k$) називають ($m\times k$) C – матрицю $C=(c_{ij})$, елемент якої c_{ij}, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпці дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B:

$$c_{ij}=\sum_{v=1}^{n} a_{iv}b_{vi}, \quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}.$$

Операції додавання і множення матриці на число називають *лінійними операціями*. Вони мають такі властивості:

1. $A+B=B+A$ – комутативність додавання.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність додавання.

3. Існує протилежна до A матриця $-A$ така, що $A+(-A)=O$.

4. Якщо $\alpha\in R$, та $\mu\in R$, то $(\alpha\mu)A=\alpha(\mu A)$.

$1\cdot A=A$; $0\cdot A=O$; $O\cdot\alpha=O$; $(-1)\cdot A=-A$.

Властивості операцій множення двох матриць.

1. $AB\neq BA$, тобто добуток матриць некомутативний у загальному випадку.

Якщо $AB=BA$, матриці називають комутативними або переставними.

2. $A(BC)=(AB)C$ – асоціативність множення.

3. Існує матриця E, така що $AE=EA=A$.

4. $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ – дистрибутивність відносно додавання.

Приклад 1. Дано матриці *A, B*:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

Обчислити: $2A+3B$; $A\cdot B$.

Розв'язання.

$$2A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 10 & -8\end{pmatrix};\qquad 3B=\begin{pmatrix}9 & 12\\ 6 & 15\end{pmatrix}.$$

$$2A+3B=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 16 & 7\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5\\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Операція транспонування. Нехай $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$. Матриця $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji}),\ j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}$, отримана з матриці *A* заміною рядків стовпцями, а стовпців рядками, називається *транспонованою* до матриці *A*. Очевидно, що $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

1.2. Визначники

Визначником квадратної матриці A порядку n (або просто визначником) *називається число*

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots\dots & \dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Визначник 2-го порядку – це число Δ *таке, що*

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Визначником третього порядку називається число Δ *таке, що*

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначник 3-го порядку обчислюють за правилом трикутника (рис 1) та Саррюса (рис. 2).

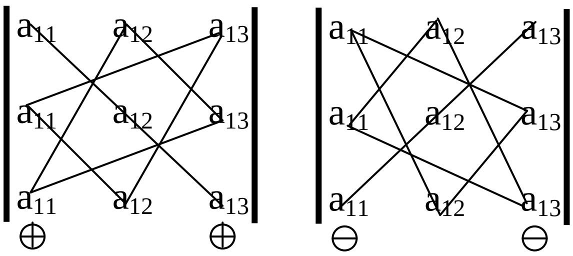

Рис. 1. Правило трикутника

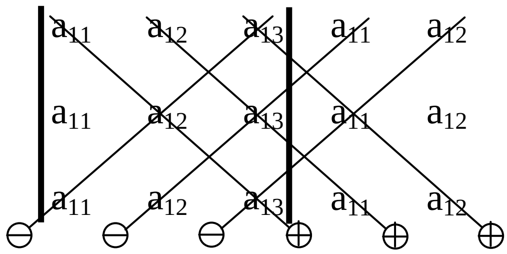

Рис. 2. Правило Саррюса

Приклад 2. Обчислити:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot 0\cdot 3 =$

$= 9 + 2 - 4 = 7.$

Якщо у визначнику порядку n закреслити j-й стовпець та і-й рядок, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}, то одержаний визначник (n–1)-порядку називають *мінором* елемента a_{ij} (M_{ij}), а число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – його *алгебраїчним доповненням*.

Визначник порядку $n \geq 4$ обчислюється за методом зниження порядку визначника за формулою

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \text{ , або } \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \text{ .}$$

Відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ називають розкладом визначника по i-му рядку, а відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ – розкладом по j-му стовпцю.

Обернена матриця. Квадратна матриця A називається особливою, якщо det$A$=0, та неособливою, якщо det$A$≠0.

Якщо A – неособлива матриця, то існує єдина матриця A^{-1} така, що $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де E – одинична матриця. A^{-1} – називають оберненою матрицею до A.

Одним з основних методів обчислення оберненої матриці є метод перетворення. Справедлива рівність:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці.

Приклад 3. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot 5+3\cdot(-2)(-1)+2\cdot 2\cdot 4-4\cdot 0\cdot(-1)-$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 5=-4\neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8;\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & 9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

1.3. Матричні рівняння

Існує три типи матричних рівнянь

$AX=B$; $XA=B$; $AXB=C$,

де X – невідома матриця; A, C, B – відомі матриці.

Розв'яжемо ці рівняння.

1. $AX=B$; $A^{-1}AX=A^{-1}B$; $X=A^{-1}B$.
2. $XA=B$; $XAA^{-1}=BA^{-1}$; $X=BA^{-1}$.
3. $AXB=C$; $A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$; $X=A^{-1}CB^{-1}$.

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь складають, коли йдеться про взаємодію кількох процесів, кожен з яких можна описати лінійним рівнянням. Розв'язати систему – означає знайти таку взаємодію. Система n-лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

або в матричному вигляді

$AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матриця системи;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця невідомих;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – матриця вільних членів.

1.5. Правило Крамера

Якщо в системі $\det A \neq 0$, тобто матриця має обернену, то система має єдиний розв'язок $X=A^{-1}B$ або $X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \quad i = \overline{i,n}$.

Визначник Δ_i отриманий з визначника Δ заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&7&0\end{pmatrix};\quad \det A=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&7&0\end{vmatrix}=-4.$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}2&1&0\\4&1&1\\10&7&0\end{vmatrix}=-4;\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&1\\3&10&0\end{vmatrix}=-4;\quad \Delta x_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&4\\3&7&10\end{vmatrix}=-4.$$

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=1;\qquad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=1;\qquad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=1.$$

1.6. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння.

$AX=B$, тоді $X=A^{-1}B$.

Приклад 5. Розв'язати матричним методом систему рівнянь:

$$\begin{cases}X_1+X_2=2;\\2X_1+X_2+X_3=4;\\3X_1+7X_2=10.\end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю *A* та обчислимо det*A*.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&7&0\end{pmatrix};\quad \det A=-4;\quad X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння системи має вигляд:

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B.$

Знайдемо обернену матрицю. Для цього визначимо алгебраїчні доповнення.

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -7;$ $\qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix};$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 11;$ $\qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ $\qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$ $\qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Тоді $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Звідси

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14+0+10 \\ 6+0-10 \\ 22-16-10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

1.7. Метод Гаусса

Суть методу Гаусса полягає в тому, що послідовним виключенням невідомих дана система перетворюється в еквівалентну їй *трикутну систему*. Метод Гаусса можна використовувати при розмірах системи $m \times n$ та $n \times n$.

Спочатку нормують перше рівняння, поділивши його коефіцієнти на a_{11}. Утворене рівняння множать на перші коефіцієнти усіх інших рівнянь і послідовно віднімають від решти рівнянь. У результаті першу змінну буде виключено з усіх рівнянь, крім першого. На наступному етапі розв'язання така процедура застосовується до решти n-1 рівнянь, з яких виключається друга зміна. Процедура повторюється доти, поки після n кроків система не буде зведена до трикутного вигляду.

Математично цю процедуру можна описати так: на k-му кроці процесу виключення нормовані коефіцієнти k-го рівня мають вигляд

$$b_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}},$$

а нові коефіцієнти в наступних рівняннях записуються так:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{ik} b_{ki}, \qquad i = k.$$

Головні коефіцієнти рівнянь $(a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)})$ не дорівнюють нулю. Цієї умови можна дотримуватись, виконавши відповідні перетворення.

Схема зведення системи рівнянь до трикутного вигляду називається *схемою єдиного ділення*. Процес визначення коефіцієнтів b_{ij} трикутної системи називається прямим ходом. З останнього рівняння трикутної системи, яке містить одну змінну, знаходимо її значення, а далі зворотним ходом обчислюємо значення решти змінних.

Отже, алгоритм Гаусса складається з двох етапів:

1) побудова допоміжної матриці (прямий хід);
2) знаходження розв’язків побудованої системи (зворотний хід).

Розглянутий метод дає змогу розв’язувати і так звані погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауважимо, що оскільки йдеться про матриці твердості, то метою при виборі основної системи є отримання на головній діагоналі таких елементів, які були б значно більшими за решту. При цьому, якщо найбільший елемент у кожному рядку матриці взяти за головний, то можна відразу зменшити можливість поганої обумовленості.

Розробка алгоритмів розв’язання задач і створення відповідних програм обчислень є насамперед справою спеціалістів з числових методів. При розв’язуванні прикладних задач значна частина машинного часу витрачається на відшукання розв'язків систем алгебраїчних рівнянь і обернення матриць. Бажано, щоб студент мав уявлення про те, за якими схемами реалізуються відповідні програми.

Приклад 6. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Вільні члени	
Прямий хід	1	1	1	-1	2	A(4×4)
	1	-1	-1	1	0	
	2	+1	-1	2	9	
	3	1	2	-1	7	
	1	1	1	-1	2	
	0	+2	2	-2	2	B(3×3)
	0	1	3	-4	-5	
	0	2	1	-2	2	
		1	1	-1	1	
			-2	3	6	C(2×2)
			1	0	3	
			1	-3/2	-3	
Зворотний хід				-3/2	-6	
				1	4	Корені системи рівнянь
			1		3	
		1			2	
	1				1	

$x_3 \cdot 1 - 3/2 \cdot 4 = -3;$ $\qquad x_3 = -3 + 6 = 3;$

$x_2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 1;$ $\qquad x_2 = 1 + 4 - 3 = 2;$

$x_1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2;$ $\qquad x_1 = 2 + 4 - 3 - 2 = 1.$

Виконавши прямий хід, дістанемо матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Зворотним ходом знаходимо корені:

$$x_1=1; \quad x_2=2; \quad x_3=3; \quad x_4=4.$$

***Приклад** 7*. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \qquad \text{Розмір } 5\times 4.$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутної:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \to$$

Четвертий рядок пропорційний другому і тому його відкидаємо, а другий скорочуємо на –2.

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Запишемо систему:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$

$$-6x_3 + 5x_4 = -1$$

З третього рівняння маємо

$$x_3 = \frac{5x_4 + 1}{6};$$

з другого –

$$x_2 = \frac{1 - 7x_4}{2};$$

з першого –

$$x_1 = \frac{-1 + 5x_4}{6}.$$

1.8. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Ітераційні схеми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються до систем, зведених до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1); \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn}x_{n-1} + b_n). \end{cases}$$

(перше рівняння розв'язане відносно x_1, друге – відносно x_2 і т.д.). Праві частини рівнянь системи можна розглядати як функції від n аргументів x_1, x_2, … , x_n. Позначимо праву частину i-го рівняння через $L_i(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ (зберігаючи єдиний підхід, не зважаємо на те, що у правій частині i-го рівняння x_i відсутнє).

Тоді система матиме вигляд:

$$x_1 = L_1(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$x_2 = L_2(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$x_n = L_n(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Задамо початкові (нульові) наближення коренів цієї системи: $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Тоді перші наближення дістаємо, підставивши у праві частини початкові наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = L_1(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ x_2^{(1)} = L_2(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_n^{(1)} = L_n(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}). \end{cases}$$

Одержані перші наближення можна використати для знаходження других і т.д. Ітераційний процес продовжується доти, доки $x^{(k)}$ не стануть достатньо близькі до $x^{(k\text{-}1)}$, тобто почне виконуватись нерівність

$$M^k = \max(x_i^k - x_i^{k-1}) \leq \varepsilon,$$

де i=1, 2, …, n; ε – задана точність.

Краще порівнювати з ε не абсолютні, а відносні різниці сусідніх величин, розглядаючи нерівність

$$\max\left|\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \varepsilon.$$

Щоб систему лінійних рівнянь можна було обчислити методом ітерацій, треба перевірити достатні умови збіжності ітераційного процесу.

Достатньо використати такі умови:

1) $$A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

максимальна сума модулів відношень коефіцієнтів будь-якого рядка до діагонального коефіцієнта менша одиниці.

Нерівність буде виконуватися, якщо діагональні елементи системи задовольняють умову

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq 1 \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|;$$

2) $$A = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

– максимальна із сум модулів коефіцієнтів при невідомих у правій частині системи, взятих по стовпцях, повинна бути меншою одиниці;

3) $$A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} < 1$$

– сума квадратів усіх коефіцієнтів при невідомих у правій частині системи повинна бути меншою одиниці.

Приклад 8. Дано систему лінійних рівнянь:

$$5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7;$$
$$3x_1 - 6x_2 + x_3 = 8;$$
$$8x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 9.$$

Звести систему до виду зручному для ітерації.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов збіжності:

$$|5| > |2| + |-2| = 4;$$
$$|-6| > |3| + |1| = 4;$$
$$|11| > |8| + |-2| = 10.$$

Отже, ця умова виконується.

Зведемо дану систему до вигляду:

$$x_1 = 1/5(7 - 2x_2 + 2x_3);$$
$$x_2 = 1/6(-8 + 3x_1 + x_3);$$
$$x_3 = 1/11(9 - 8x_1 + 2x_2).$$

Припустимо, що

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z.$$

Тоді систему запишемо так:

$$\begin{cases} x = 1{,}4 - 0{,}4y + 0{,}4z; \\ y = -1{,}33 + 0{,}5x + 0{,}167z; \\ z = 0{,}818 - 0{,}727x + 0{,}182y. \end{cases}$$

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори

Геометричним вектором називають напрямлений відрізок $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, який отримано прикладанням вектора до точки A. Довжина вектора називається модулем вектора і позначається $|\vec{a}|$; $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор нульової довжини називається *нуль-вектором* і позначається символом $\vec{0}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні (паралельні), однаково направлені і модулі їх рівні.

Одиничним вектором, або ортом $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$, називають вектор, довжина якого дорівнює 1, а напрям співпадає з напрямом $\vec{a}$. Якщо вектор можна переносити паралельно самому собі, його називають *вільним*. Якщо вектор можна переміщувати вздовж однієї прямої, його називають *ковзним*. Якщо вектор жорстко зв’язаний з точкою прикладення, то він називається *зв’язаним*.

Додавання векторів здійснюється за правилами трикутника чи паралелограма (рис. 3, 4) при *n*>2 за правилом многокутника (рис. 5).

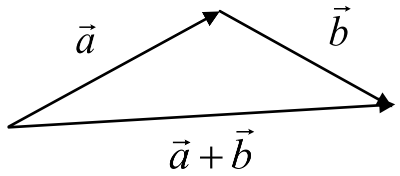

Рис.3

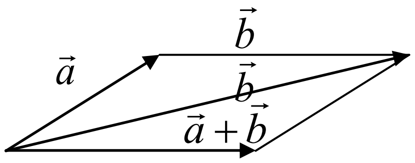

Рис.4

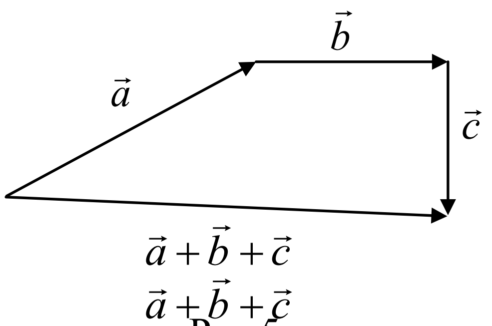

Рис.5

Різницею $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, такий, що $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на $\lambda \in R$ називається вектор $\lambda\vec{a}$ такий, що $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$ і напрям його збігається з напрямом $\vec{a}$, якщо λ>0, або протилежний $\vec{a}$, якщо λ<0.

2.2. Базис

Довільний геометричний вектор має єдине зображення у вигляді $\vec{a} = \alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + \alpha_3\vec{l}_3$, де $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – три впорядковані некомпланарні вектори в просторі R_3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати вектора в даному базисі, а $\vec{a} = \alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + \alpha_3\vec{l}_3$ – розклад вектора $\vec{a}$ по базису $<\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3>$.

Базис $<\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3>$ називають *прямокутним*, якщо вектори $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ попарно перпендикулярні і довжина їх дорівнює одиниці. В такому випадку їх позначають $\vec{l}_1 = \vec{i}$, $\vec{l}_2 = \vec{j}$, $\vec{l}_3 = \vec{k}$.

Проекцією вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{l}$ називають число $\text{ПР}_{\vec{l}}\,\vec{a} = |a|\cdot\cos\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{l}})$ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{l}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

В прямокутному базисі $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; числа $\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \dfrac{x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \dfrac{y}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = \dfrac{z}{|\vec{a}|}$ називають *напрямними* косинусами вектора $\vec{a}$.

Якщо точки $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ та $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ – довільні точки простору R_3, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ записуються так:

$$\overrightarrow{AB} = ((x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1)).$$

2.3. Скалярний добуток

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *називають число, що дорівнює добутку цих векторів на косинус кута між ними*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha.$$

Фізичне тлумачення скалярного добутку двох векторів полягає в тому, що такий добуток означає роботу, виконану переміщенням матеріальної точки під дією одного вектора вздовж другого.

Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
4. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}, \quad \lambda \in R$.
5. $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2$.

Якщо вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ задані координатами в прямокутному базисі, то скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

2.4. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

3. Вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника (рис.6).

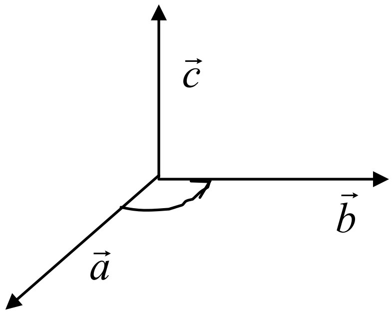

Рис. 6

Геометричний зміст векторного добутку. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори.

Властивості векторного добутку.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. $\lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \ \ \lambda \in R$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Для векторів прямокутної системи координат

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

2.5. Мішаний добуток

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається сукупність операцій $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометричний зміст. Модуль мішаного добутку – це об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Якщо $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку.

1. Якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні, то $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.

Об'єм піраміди, побудованої на векторах, можна записати у вигляді

$$V=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити $(\vec{a}+\vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3;\ \widehat{\vec{a}\vec{b}}=60^\circ$.

Розв'язання.

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ+|\vec{b}|^2=4+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9=19.$$

Приклад 2. Знайти координати вектора $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2;1;-1)$ та задовольняє умову $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то координати їх пропорціональні. Нехай $\vec{x}(x,y,z)$, тоді

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}=t;\Rightarrow\ x=2t;\ y=t;\ z=-t.$$

Вектор $\vec{b}(2;-1;1);\ \vec{x}\cdot\vec{b}=-6\ \Rightarrow 4t-t-t=-6;\ t=3$, звідси $\vec{x}(-6;-3;3)$.

Приклад 3. Чи належать точки A(2; -3; 5), B(0; 2; 1), C(-2; -2; 3) та D(3; 2; 4) одній площині?

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ (рис.7), якщо вони колінеарні, то $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}=0$, і всі точки належать одній площині.

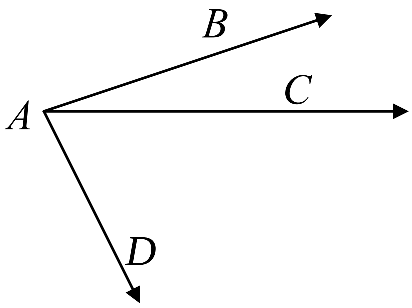

Рис. 7

$$\overrightarrow{AB} = (0-2;2+3;1-5) = (-2;5;-4);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-2;-2+3;3-5) = (-4;1;-2);$$

$$\overrightarrow{AD} = (3-2;2+3;4-5) = (1;5;-1).$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Тобто точки не належать одній площині.

Приклад 4. Дано вектори: $\vec{x}(-2;\,4;\,7)$; $\vec{a}(0;\,1;\,2)$; $\vec{b}(1;\,0;\,1)$; $\vec{c}(-1;\,2;\,4)$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язання. В базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} -2 = 0\cdot\alpha + \beta - \gamma; \\ 4 = \alpha + 0\cdot\beta + 2\gamma; \\ 7 = 2\alpha + \beta + 4\gamma. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\alpha = 10$; $\beta = -1$; $\gamma = -3$. В даному базисі $\vec{x} = 10\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$.

Приклад 5. Обчислити площу трикутника *ABC* (рис. 8).

Розв'язання. Нехай задано трикутник ABC з вершинами $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$.

Розглянемо два вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

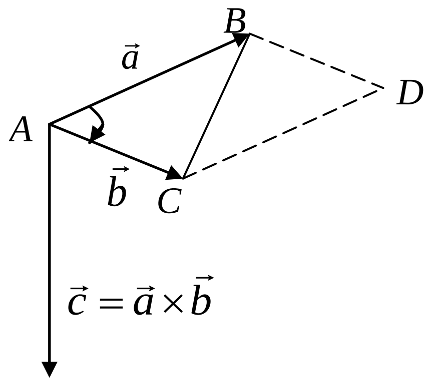

Рис. 8

Тоді $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{ABCD}$ – площа паралелограма побудованого на векторах як на основі.

Таким чином, площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Знайдемо добуток

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}.$$

Отже, $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Приклад 6. Обчислити площу трикутника ABC, якщо $A(1,0,2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,1,2)$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ =(0,2,-2) та $\overrightarrow{AC}$=(-1,1,0). Тоді

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = 0\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+4} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{2}{2}\sqrt{3}.$$

Отже, $S_{ABC} = \sqrt{3}$.

Окремим є випадок, коли трикутник ABC лежить в одній з координатних площин, наприклад xOy. Тоді $z_1=z_2=z_3$, а добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, де $\alpha=\beta=0$, а $\gamma = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Площа трикутника $\quad S = \frac{1}{2}\cdot|\gamma|$.

Визначник другого порядку можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ виражається формулою

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад *7*. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,2)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$.

Розв'язання. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 6 - 3 - 2 - 0 = 2.$$

Тоді $\qquad S = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1; \qquad S_{ABC} = 1.$

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Пряма на площині

Пряма на площині в декартовій прямокутній системі координат xOy може бути задана рівнянням одного з таких видів:

1. $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої.

2. $y = kx + b$ – рівняння з кутовим коефіцієнтом.

3. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A,B)$.

4. $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно до вектора $\vec{s}(l,m)$.

5. $x = x_0 + lt; \quad y = y_0 + mt; \quad t \in (-\infty;+\infty)$ – параметричні рівняння прямої, які у векторній формі мають вигляд $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{\rho}_0(x_0;y_0)$ радіус-вектор точки $M_0(x_0,y_0)$, $\vec{s}(l,m)$ – напрямний вектор прямої.

6. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках, де a, b – величини напрямних відрізків , що відтинає пряма від координатних осей.

7. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$.

8. $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta - \rho = 0$ – нормальне рівняння прямої, $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}\,(A,B)$ прямої, а $\rho > 0$ – віддаль від початку координат до прямої. Загальне рівняння приводиться до нормального виду шляхом множення на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ (знак береться протилежний знаку C).

Віддаль від точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямої l обчислюється за формулою

$$d = |x_1 \cdot \cos\alpha + y_1 \cdot \cos\beta - \rho| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Приклад 1. Загальне рівняння прямої $11x - 4y - 44=0$.

Записати рівняння прямої у вигляді рівнянь:

1) з кутовим коефіцієнтом;
2) у відрізках;
3) у нормальному виді;
4) у параметричному виді.

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння відносно y.

$$y = \frac{11}{4}x - 4; \;\; k = \frac{11}{4}; \;\; b = -4.$$

Перенесемо вільний член вправо і поділимо на нього рівняння $\frac{11x}{44} - \frac{4y}{44} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-11} = 1.$ $|\vec{a}| = 4;$ $|\vec{b}| = 11.$ Пряма проходить через точки $A(4;0)$ та $B(0;-11)$, що зображено на рисунку 9.

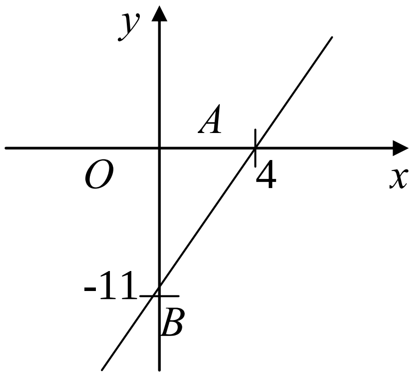

Рис. 9

Далі знайдемо $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{137}}.$ Тоді

$\frac{11}{\sqrt{137}}x - \frac{4}{\sqrt{137}}y - \frac{44}{\sqrt{137}} = 0,$ де $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{137}},$ $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{137}};$ $\rho = \frac{44}{\sqrt{137}}.$

Нехай $x = t$, тоді $y = \frac{11}{4}t - 4,$

$$\begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{11}{4}t - 4 \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої.

3.2. Криві на площині

Кажуть, що крива L в системі координат xOy має рівняння $F(x,y)=0$, якщо виконується умова: точка $M(x,y)$ належить кривій L тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють відношення $F(x,y)=0$.

Приклад 2. Написати рівняння кривої, кожна точка якої знаходиться на однаковій віддалі від точок $M_1(3;2)$ та $M_2(2;3)$.

Розв'язання. Нехай L – шукана крива. $M(x,y)\in L$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\overrightarrow{M_2M}\right|. \ \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1) = (x-3, y-2); \ \overrightarrow{M_2M} = (x-2; y-3),$$

тоді

$$\overrightarrow{M_1M}^{\,2} = \overrightarrow{M_2M}^{\,2} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9;$$

$2x = 2y$ або $x = y$.

Як бачимо, шукана крива є прямою лінією.

3.3. Алгебраїчні криві другого порядку

Алгебраїчною кривою другого порядку називають криву L, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *де не всі A, B, C одночасно дорівнюють нулю.*

У загальному випадку може статися, що рівняння визначає вироджену криву (порожню множину, точку, пряму, пару прямих). Якщо крива невироджена, то для неї знайдеться така система координат, що рівняння матиме один із видів:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \ - \textit{еліпс};$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0;\ b>0 - \textit{гіпербола};$$

$$y^2=2px,\ p>0\ - \textit{парабола}.$$

Еліпс з канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad a>b>0$ має форму, зображену на рис. 10. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ – *вершини* еліпса, осі симетрії Ox та Oy – *головні* осі еліпса, $O(0;0)$ – *центр* еліпса.

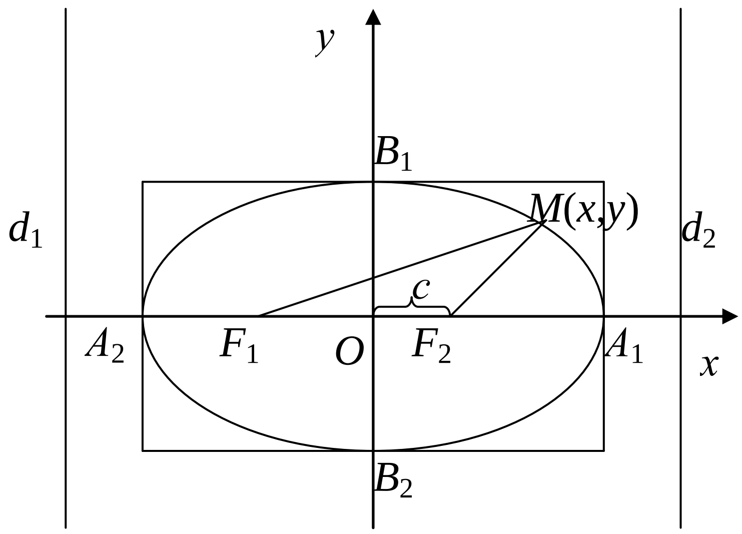

Рис. 10

Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$ називають *фокусами* еліпса, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ та $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальними радіусами* точки M, якщо $r_1=r_2$, фокуси співпадають з центром, $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола радіуса a з центром в точці $O(0;0)$.

Число $e=\frac{c}{a}$ $(0\le e<1)$ називається ексцентриситетом еліпса.

Прямі d_1 та d_2 : $x=-\frac{a}{e}$; $x=\frac{a}{e}$ називаються *директрисами* еліпса.

Гіпербола з канонічним рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > 0;\ b > 0$ має форму, зображену на рис.11.

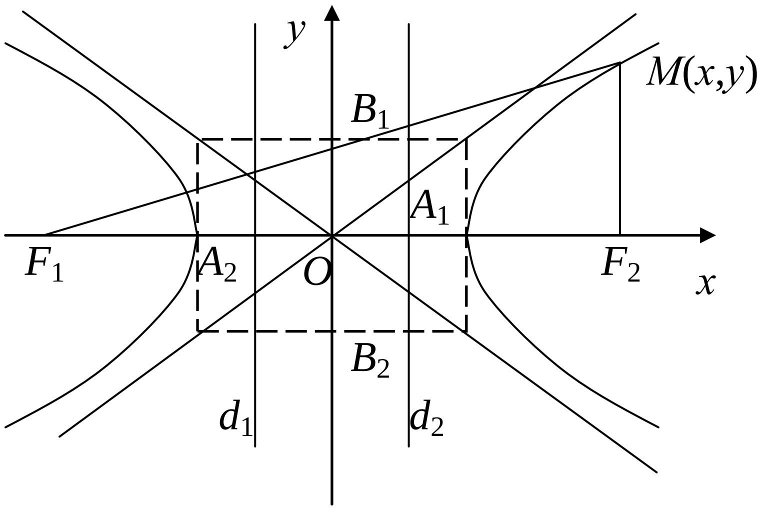

Рис. 11

Параметри a та b називають *півосями* гіперболи, точки $A_1(a;0)$ та $A_2(a;0)$ – її *вершинами*, осі симетрії Ox та Oy – *дійсними* та *уявними* осями, а центр симетрії O – *центром* гіперболи.

Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – *асимптоти* гіперболи, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ називають фокусами гіперболи, $r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ та $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальними радіусами* точки M, що належить гіперболі.

Число $e = \dfrac{c}{a}$ $(1 < e < +\infty)$ – ексцентриситет гіперболи. Якщо a=b, гіперболу називають *рівносторонньою*.

Прямі d_1 та d_2: $x = -\dfrac{a}{e}$; $x = \dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами* гіперболи.

Парабола з канонічним рівнянням $y^2 = 2px;\ p > 0$ зображена на рис.12.

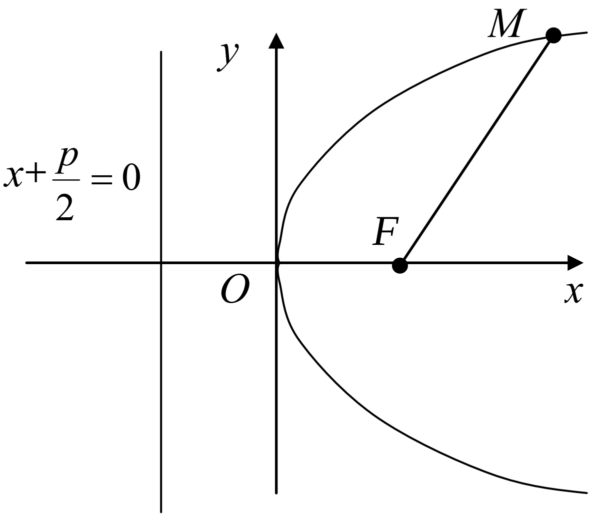

Рис. 12

Пряма $x=-\frac{p}{2}$ називається директрисою параболи. p – параметр параболи, $O(0,0)$ – її *вершина*, Ox – вісь параболи. Точка $F=\left(\frac{p}{2};0\right)$ – *фокус* параболи, а $r=\left|\overrightarrow{FM}\right|$ – *фокальний радіус* точки M параболи.

Приклад 3. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо $e=\frac{1}{2}$, а віддаль між директрисами становить 32.

Розв'язання. Рівняння директрис $x=-\frac{a}{e}$ та $x=\frac{a}{e}$, тоді $32=\frac{2a}{e}$; $2a=32e$; $a=8$; $e=\frac{c}{a}$, тобто c=4,
$b=\sqrt{a^2-c^2}=4\sqrt{3}$.

Рівняння еліпса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

Приклад 4. Написати канонічне рівняння гіперболи у якої c=10, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання. З рівняння випливає, що $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, тобто $b=\frac{4}{3}a$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}$; $10=\frac{5}{3}a$; $a=6$, $b=8$.

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1 \text{ – рівняння гіперболи.}$$

Приклад 5. Знайти фокальний радіус точки M параболи $y^2=12x$, якщо $y(M)=6$.

Розв'язання. Фокус параболи $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, $P=6$, тобто $F(3;0)$.
Координати точки $M(x;6)$, що лежить на параболі. З рівняння параболи знайдемо x.

$$36 = 12x,\ x = 3,\ M(3;6).$$

Тоді $r=\sqrt{(3-3)^2+(6-0)^2}=6$.

3.4. Площина в просторі

Площина в декартовій прямокутній системі координат може бути задана одним із таких рівнянь:

1. $Ax+By+Cz+D=0$ – загальне рівняння площини,
2. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}(A,B,C)$.
3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$ – рівняння площини у відрізках, що відтинає площина по осях *Ox*, *Oy*, *Oz*, відповідно.
4. $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0$ – нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{p}$, направленого з початку координат в сторону площини, p – віддаль від початку координат до площини.

Віддаль від точки до площини обчислюється за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_1+by_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$

Розв'язання. Нехай три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ належать площині α і не лежать на одній прямій (рис. 13).

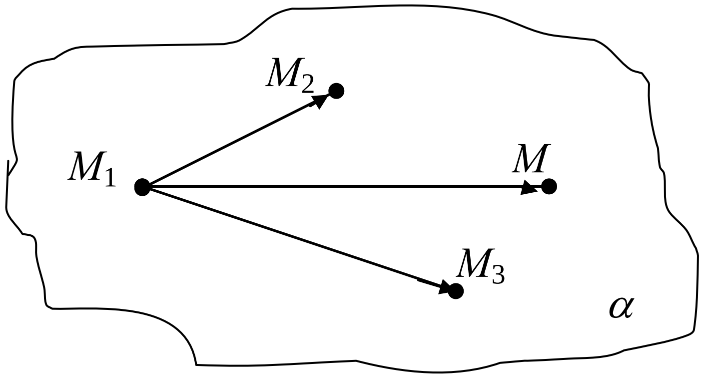

Рис. 13

Візьмемо довільну точку цієї площини $M(x,y,z)$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1,M_3}$, що належать площині α. Тоді їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2}\right)\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

– векторне рівняння площини, що проходить через три точки.

Розкриваючи добуток, одержуємо

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 7. Знайти кут між двома площинами.

Розв'язання. Нехай дві площини задані своїми рівняннями:

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;$$

$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Нормальні вектори площин $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ та $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Кут φ між площинами – це кут між нормальними векторами цих площин. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Якщо $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda$.

Якщо $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, тобто $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Приклад 8. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(0;1;0)$ паралельно до векторів $\vec{a}(0;1;2)$; $\vec{b}(1;1;0)$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x,y,z)$ належить шуканій площині α в тому випадку, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ компланарні, тобто $\left(\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right)\vec{b} = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x - 2y + z + 2 = 0;$$

$2x - 2y + z + 2 = 0$ – рівняння шуканої площини.

3.5. Пряма в просторі

Пряма в просторі може бути задана так:

- *загальним рівнянням*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

як лінія перетину двох площин, A_1, B_1, C_1 – не пропорційні A_2, B_2, C_2;

- *канонічним рівнянням*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \; M_0(x_0, y_0, z_0) \in L; \; \vec{S}(l, m, n) \quad –$$

напрямний вектор прямої;

- *параметричним рівнянням* $\begin{aligned} x &= x_0 + lt; \\ y &= y_0 + mt; \; t \in R \\ z &= z_0 + nt, \end{aligned}$

$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{S}t$ *у векторній формі* $z=z_0+nt$.

Приклад 9. Пряма L задана загальним рівнянням

$$\begin{cases}3x-y+2z-7=0;\\ x+3y-2z-3=0.\end{cases}$$

Написати канонічне рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що належать цій прямій.

Нехай $x_0=0$, тоді $\begin{cases}-y+2z=7;\\ 3y-2z=3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=5;\\ z=6;\end{cases}$ $M_0(0\,;5\,;6)$.

Аналогічно можна вважати, що y_0 або z_0 дорівнюють нулю.

За напрямний вектор прямої $\vec{S}(l,m,n)$ візьмемо вектор $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=(3;-1;2)$, $\vec{n}_2(1;3;-2)$;

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}.$$

Канонічне рівняння прямої таке:

$$L:\ \frac{x}{-4}=\frac{y-5}{8}=\frac{z-6}{10}.$$

Приклад 10. Скласти рівняння площини, що проходить через прямі

$$L_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4};\quad L_2:\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Розв'язання. Впевнимося, що прямі належать одній площині. Розглянемо вектори $\vec{S}_1(2;-3;4)$; $\vec{S}_2(3;2;-2)$; $M_1\in L_1,\ M_2\in L_2$. $\overrightarrow{M_1M_2}=(7-1;2+2;-3-5)=(6;\,4;\,-8)$.

Доведемо, що вектори компланарні, тобто $(\overline{S}_1\times\vec{S}_2)\overrightarrow{M_1M_2}=0$.

$$\begin{vmatrix}6 & 4 & -8\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=36\neq 0.$$

Прямі не належать одній площині, тобто являються мимобіжними.

Приклад 11. Написати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(1;-2;1)$ та $M_2(3;1;-1)$.

Розв'язання. Нехай шукана пряма $M(x,y,z)\in L$. Тоді $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}\in L$, тобто $\overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$. $\overrightarrow{M_1M}(x-1;y+2;z-1)$. $\overrightarrow{M_1M_2}(2;3;-2)$.

Канонічне рівняння прямої

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}=t\,,$$

або в параметричному виді

$$\begin{cases} x=2t+1; \\ y=3t-2; \qquad t\in(-\infty;+\infty). \\ z=-2t+1; \end{cases}$$

Приклад 12. Знайти точку перетину прямої L з площиною α та кут між ними, якщо $\alpha: x+y-z+1=0$ $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Розв'язання. Кут між прямою та площиною $\varphi=90^\circ-\alpha$, де α кут між нормальним вектором площини $\vec{n}(A,B,C)$ та напрямним вектором прямої $\vec{S}(l,m,n)$. $\vec{n}(1;1;-1)$; $\vec{S}(0;2;1)$

$$\sin\alpha=\frac{2-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}};\quad \alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Щоб знайти точки $M_0(x_0;y_0,z_0)$ перетину α та L, треба розв'язати систему рівнянь, записавши рівняння L в параметричному виді:

$$\begin{cases} x=1+0t; \\ y=0+2t; \\ z=-1+t; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1; \\ y=2t; \\ z=t-1; \end{cases}\Rightarrow 1+2t-t+1+1=0.$$

$t=-3;$ $x_0=1;$ $y_0=-6;$ $z_0=-4;$ $M_0(1;-6;-4)$.

Розділ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Функції

Змінні величини. Поняття функції

В різних областях знань, при вивченні тих чи інших явищ ми зустрічаємося з постійними величинами, що не змінюють свого числового значення (число місяців у році), і зі змінними, які можуть набувати тих чи інших значеннь (ціна товару, величина закупок, попит, прибуток від реалізації товару, національний прибуток).

Деякі постійні не змінюють свого значення в довільній задачі. Їх називають абсолютними постійними (сума кутів трикутника дорівнює 180°).

Параметрами називають ті постійні, які зберігають своє числове значення в умовах деякої задачі. Наприклад, курс долара на деякий період часу.

Одна й та сама величина в кожному конкретному випадку може бути як змінною, так і постійною.

Національний прибуток, наприклад, для кількох років є змінною величиною, для даного року – постійною.

Інколи постійну розглядають, як окремий випадок змінної величини, що набуває одного того самого значення.

Множина всіх значень змінної утворює деяку числову множину значень змінної.

Розглянемо функцію однієї змінної.

Нехай задано дві непорожніх підмножини D та E множини R, причому $x \in D$, $y \in E$. Якщо кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність лише один елемент множини $y \in E$, то y називають функцією f (відображенням) аргументу x, і записують:

$y = f(x)$; $\forall\ x \in D$, або $y = f(x)$; $x \in D$.

Іншими словами, за допомогою функції $y = f(x)$ підмножина D відображається на підмножину E, або $x \to f(x)$, $x \in D$.

$D(f)$ називають областю визначення функції, $E(f)$ – множиною її значень, x - незалежною змінною або аргументом, y – залежною змінною або функцією.

Способи задання функції.

1) *Аналітичний*. В загальному випадку $y = f(x)$.

Наприклад, *п*рибуток від продажу товару x по ціні a можна задати аналітично або формулою $y = ax$.

2) *Графічний.* Можна задати функцію однієї змінної її графіком (рис.14).

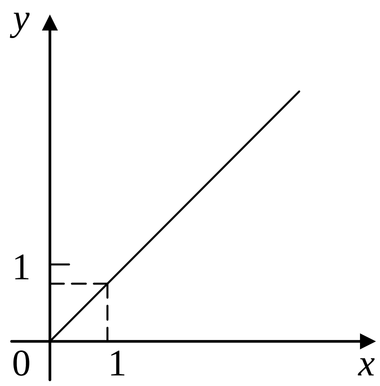

Рис. 14. Графічний спосіб задання функції

Проте не всяку функцію можна задати графічно. Так, графічно не можна задати функцію Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

3) *Табличний.*

Наприклад: x_i – затрати часу деякого робітника на одиницю продукції; y_i – оплата праці даного робітника;

x	x_1	x_2	…
y	y_1	y_2	…

4) *Алгоритмічний.* Так задають функцію для роботи на ЕОМ.

Означення 1. Основними *елементарними функціями* називають: степенева x^a, $a \in K$, показникова a^x $(a > 0;\ a \neq 1)$, логарифмічна $\log_a x$, $(a > 0;\ a \neq 1;\ x > 0)$, тригонометричні $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$, обернені тригонометричні: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$.

Означення 2. Основні елементарні функції, або ті, які утворено з них за допомогою скінченного числа арифметичних дій, називають елементарними функціями.

Наприклад: $f(x) = F_n(x) = a_n x^n + a_1 x^1 + \ldots + a_0$ –алгебраїчна функція (її називають поліномом).

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – елементарна функція (алгебраїчний дріб).

$f(x) = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots$ – *неелементарна* функція.

Елементи поведінки функцій

1. Функцію називають *парною*, якщо $f(-x)= f(x)$, і *непарною,* якщо $f(-x)= -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY, непарної – відносно початку координат.

2. Функцію називають *зростаючою* (спадною) на інтервалі, якщо з $x_1>x_2$, випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Застосовують позначення – $\uparrow$ $(\downarrow)$.

3. Функцію називають *обмеженою* на множині A, якщо $\exists M>0$ $\forall x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| <M$; обмеженою зверху (знизу), якщо $\exists M$ $(\exists m)$ так, $|f(x)|<M$ $|f(x)| > m$.

4. Функція називається *періодичною* з періодом T, якщо $f(x+T) =f(x)$.

Приклад 1. Дослідити функцію на періодичність, парність та непарність. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{3}{4 - x^2} + \lg(x^3 - x).$$

Розв'язання. Для того щоб x належало області визначення, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі співвідношення:

$4 - x^2 \neq 0$, знаменник дробу не повинен дорівнювати 0;

$x^3 - x > 0$, логарифм існує лише для додатних чисел.

Розв'язуючи рівняння і нерівність, знаходимо:

$$x \neq 2;\ x \neq -2,\ x(x-1)(x+1) > 0.$$

Одержимо $D[f] = (-1;0) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Дана функція являє собою суму парної функції $y_1 = \dfrac{3}{4 - x^2}$ (y_1 не змінює знака при зміні x на $-x$) і функції загального вигляду $y_2 = \lg(x^3 - x)$ (при зміні x на $-x$ вираз під знаком логарифма змінює знак на протилежний і логарифм втрачає зміст). Отже, функція $y = y_1 + y_2$ є функцією загального вигляду.

Функція неперіодична, бо в неї не входять тригонометричні функції, а з елементарних функцій є лише вони періодичними.

Приклад 2. Дано $\lg(\sin x)$. Знайти область визначення функції та дослідити на періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із співвідношення $\sin x > 0$. Звідси $D[f]$ є об'єднанням всіх проміжків вигляду $]2\pi k,\ \pi + 2\pi k[$, де k – ціле число. Ця функція загального вигляду, бо при зміні x на $-x$ логарифм втрачає зміст. Функція періодична, бо $\sin x$ є періодичною з періодом 2π.

$$\lg(\sin(x + 2\pi k)) = \lg(\sin x), \text{ при умові, що } x \in D[y].$$

Приклад 3. $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(\lg x)}$ Знайти область визначення та дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із системи

$$\begin{cases} x > 0; \\ \operatorname{arctg}(\lg x) \geq 0, \end{cases}$$

але $\operatorname{arctg}(\lg x)$ невід'ємний при невід'ємних $\lg x$, тому $D[y] = [1;+\infty]$. Функція неперіодична, загального вигляду.

4.2. Границя послідовності. Границя функції

Означення 3. Стала a називається *границею послідовності* $\{a_n\}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geq N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Якщо a границя послідовності $\{a_n\}$, то це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Означення 4. Стала A називається границею функції *f(x)* при $x \to a$, якщо для довільного додатного числа ε>0 існує таке число $\delta(\varepsilon)$, що як тільки $0 < |x - a| < \delta$, то виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це записується так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Означення 5. Число A називається границею *f(x)* при $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке число M(ε) що для всіх x>M(ε) виконується рівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

4.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 6. Функція називається нескінченно малою при $x \to x_0$, або $x \to \infty$, $x \to -\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Означення 7. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо для будь-якого M>0, що може бути як завгодно велике, в околі точки x_0 $|f(x_0)| > M$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Теорема про зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями.

Якщо $f(x)$ нескінченно мала при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно велика при $x \to x_0$, і навпаки.

Теорема. **Властивості границь**.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (C_1 f(x) + C_2 g(x)) = C_1 \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + C_2 \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

C_1, C_2 – сталі.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n,\ n\in N.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$ якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$

Розглянемо границю відношення $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Очевидно, що A=2, якщо $f(x)=2x$, а $g(x)=x$. Якщо $f(x)=x^3$, а $g(x)=x^2$, то A=0. Якщо $f(x)=x^2$, а $g(x)=x^3$, то $A=\infty$. Підставляючи замість x нуль у відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ми отримували $\dfrac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеною, або невизначеністю, оскільки після певних перетворень можна мати в результаті як конкретне число, так і нескінченність. Є ще й інші види невизначеностей $\dfrac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 1^{\infty};\ 0\cdot\infty;\ 0^0$, та ін.

4.4. Розкриття невизначеностей

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на старший степінь n, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^5}-\dfrac{2}{n^6}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^5}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^6}}=\frac{1}{1}=1,$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n^{\alpha}}=0;\quad \alpha>0.$

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, являє собою невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Для розкриття її помножимо і поділимо різницю радикалів на їхню суму:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\times\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2+1-n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{8}{2}=4.$$

Перша стандартна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1, \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

Друга стандартна границя:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

В усіх випадках маємо невизначеність виду 1^∞, $e \approx 2{,}71828...$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \left[1^\infty\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n-1}{2n+3}-1\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{(-4)}{2n+3}\right]^{\frac{2n+3}{-4}}\right\}^{\frac{-4n}{2n+3}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+3}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{2+3/n}} = e^{-2}.$$

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^x = \dfrac{1}{e}.$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+x+2}{x^2-1}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+x+2}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)^x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}\right\}^{\frac{(x+2)x}{x^2-1}} = e.$$

4.5. Порівняння нескінченно малих

Означення 8. Функції $f(x)$ та $g(x)$ мають один і той самий порядок малості при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

Означення 9. Функції $f(x)$ та $g(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ (позначається $f \sim g$), якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Означення 10. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку ніж $g(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Одне із застосувань еквівалентності нескінченно малих випливає з теореми.

Теорема. Границя відношення нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто, якщо $f\sim f_1$, *а* $g\sim g_1$,то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Приклад 11. Визначити порядок малості $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ відносно $g(x)=x$ при $x\to 0$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

тобто $f(x)$ та $g(x)$ мають один порядок малості.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функції.

При $\alpha(x)\to 0$:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
2. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
3. $\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
4. $\mathrm{arc\,tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
5. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.
6. $e^{\alpha(x)}$-1$\sim\alpha(x)$.
7. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln(a)$.
8. $(1+\alpha(x))^{\beta}-1\sim\beta\cdot\alpha(x)$.
9. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

Приклад 12. Обчислити $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+\sin^2 t)^3-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin t^2 \sim t^2$; $(1+\sin t^2)^3 - 1 \sim 3\sin t^2$,

то $$\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\sin t^2\right)^3-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\left(1+\sin t^2\right)^3-1\right)}{\sin t^2}\cdot\frac{\sin t^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3\sin t^2\cdot t^2}{\sin t^2\cdot t} = \lim_{t\to 0} 3t = 0.$$

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}$

Розв'язання. Оскільки $\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\ln(1+7x) \sim 7x$,

то $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{7\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{7}.$$

4.6. Неперервність функцій. Класифікація точок розриву

Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ називається приростом незалежної змінної x; $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$ – приростом функції $f(x)$ в точці x, що відповідає приросту x.

Означення 11. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0:

- якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
- якщо нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$;

Припустимо, що

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Введемо позначення:

$$x_0+\Delta x = x;\ \Delta x = x - x_0;\ \Rightarrow \Delta x\to 0;\ x\to x_0;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Маємо ще одне означення неперервної функції в точці.

Означення 12. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в точці x_0 і деякому її околі, має границю при $x \to x_0$ і вона співпадає із значенням функції у цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функція, неперервна в кожній точці проміжку, називається неперервною на цьому проміжку.

Якщо в точці x_0 порушується хоча б одна умова неперервності функції, функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву.

При цьому розрізняють такі випадки:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0, або порушена умова $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; x_0 називають усувною точкою розриву 1-го роду;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві односторонні границі, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ не рівні між собою, то x_0 називають точкою розриву 1-го роду, а $\delta(f, x) = \left| \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right|$ – стрибком функції у точці x_0;
3) в інших випадках x_0 називають точкою розриву 2-го роду.

Приклад 14. Задана функція $y = 2^{1/(x-3)}$. Дослідити її на неперервність в точці $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ та побудувати схематичний графік функції.

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. В точці x=4 вона визначена. Тому в точці x=4 вона неперервна. В точці x=3 функція має розрив, вона не існує в цій точці. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа в точці x=3.

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 0.$$

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = +\infty.$$

Таким чином, точка x=3 є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x-3}} = 1.$$

Побудуємо схематичний графік (рис. 15).

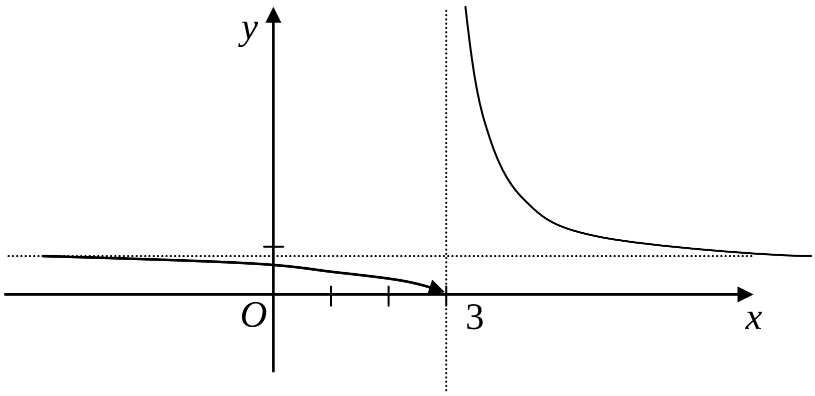

Рис. 15

Приклад 15. Знайти точки розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \ \ x \le 0; \\ \sin x, \ \ 0 < x < \dfrac{3}{2}\pi; \\ 2, \quad x \ge \dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі і неперервна на проміжках $\left]-\infty,0\right[;\ \left]0;\frac{3}{2}\pi\right[\ ;\ \left]\frac{3}{2}\pi;+\infty\right[$, тому що на кожному з них задана елементарна функція. Досліджуватимемо її на неперервність в точках $x = 0;\ x = \frac{3}{2}\pi$.

1. В точці x=0 матимемо:

$f(0) = 0;$

$f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} x^3 = 0;$

$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \sin x = 0.$

Отже, в точці $x = 0$ функція $y = f(x)$ неперервна.

2. В точці $x = \frac{3}{2}\pi$ матимемо:

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi - 0\right) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} \sin x = -1;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi + 0\right) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi + 0} 2 = 2.$$

Очевидно, границі не рівні між собою, але не дорівнюють $\pm\infty$. Тому в точці $x = \frac{3}{2}\pi$ $\delta(f, x) = 3$ функція має розрив 1-го роду.

Побудуємо схематичний графік функції (рис. 16).

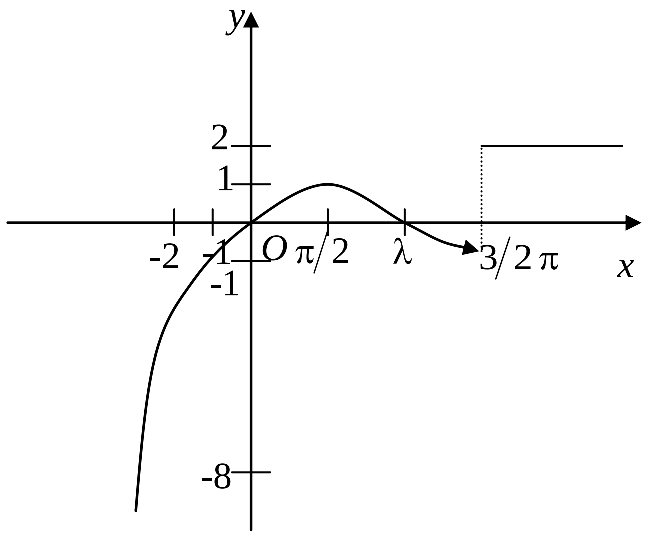

Рис. 16

Приклад 16. Дослідити характер точок розриву функції

$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}.$$

Якщо вони усувні, то довизначити функцію до “неперервності”.

Розв'язання.

x=0 точка розриву функції.

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left(1-\alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right)=1;$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left(1-\alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right)=1.$$

$x_0=0$ – усувна точка розриву. Довизначена функція $f(0)=1$.

Розділ 5. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Число виду $z=x+iy$, де $i^2=-1$ називається *комплексним* (i – уявна одиниця).

x=ReZ *дійсна* частина комплексного числа.

y=ImZ *уявна* частина комплексного числа.

z=x+yi називається *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Число $z_1=x_1-y_1 i$ називають *комплексно спряженим* до числа $z_1=x_1+y_1 i$, вісь Ox – називають *дійсною віссю*, вісь Oy – *уявною віссю*.

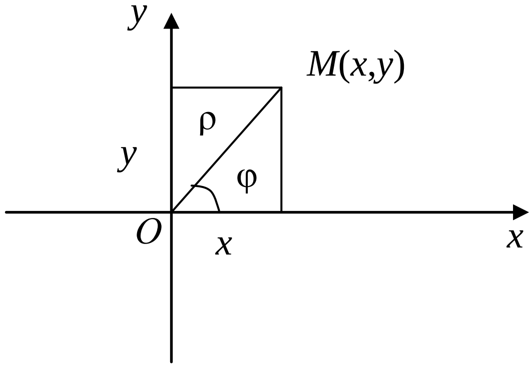

Рис. 17

Комплексне число $z=x+yi$ в декартовій системі координат зображається точкою M (рис. 17) з координатами (x,y).

Із геометричного змісту комплексного числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де OM=$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ – модуль комплексного числа; $\varphi=\operatorname{Arg} z$ – аргумент, де $\arg z=\arg z+2\pi k$, 0<φ<2π, або –π≤φ≤π, $\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}$; $\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}$. $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – *тригонометрична форма* комплексного числа. Комплексне число можна записати в *експоненціальному виді* або у *формі Ейлера* $z=\rho e^{i\varphi}$.

5.1. Дії над комплексними числами

1. В алгебраїчній формі:

$z_1=x_1+iy_1;\quad z_2=x_2+iy_2;$

$z_1+z_1=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$

$z_1\cdot z_1=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$

2. В тригонометричній формі:

$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);\quad z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2);$

$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2);$

$z_1:z_2=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2);$

$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ – перша формула Муавра;

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$ – друга формула Муавра.

3. У показниковій формі:

$z_1=\rho_1 e^{i\varphi};\ \ z_2=\rho_2 e^{i\varphi};$

$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$

$z_1/z_2=\rho_1/\rho_2 e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$

$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right);\ k=\overline{0,..n-1}.$

$z_1=z_2$, якщо $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, або $\rho_1=\rho_2$; $\varphi_1=\varphi_2+2\pi n$, $n\in Z$.

Приклад 1. Записати число $z=-2+2\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. Маємо $|z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4;$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2};\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \Rightarrow\ \arg z=\frac{2}{3}\pi.$$

Тоді $z=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

Приклад 2. Числа $z_1=2\sqrt{3}-2i$ і $z_2=3-\sqrt{3}i$ записати в експоненціальній формі, виконати дії $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2.

Розв'язання. Представимо z_1 в експоненціальній формі:

$$|z_1|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=4;\quad \mathrm{tg}\,\varphi=-\sqrt{3}.$$

Тому $z_1=4e^{\frac{-i\pi}{3}}$. Для z_2 маємо $|z_2|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3};$

$\mathrm{tg}\,\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Тому $z_2=2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}$. Знайдемо

$$z_1\cdot z_2=4e^{\frac{-i\pi}{3}}\cdot 2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}=8\sqrt{3}\cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}=8\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))=-8\sqrt{3}i.$$

Визначимо

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4e^{\frac{-i\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-i\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Приклад 3. Знайти $\sqrt[3]{z}$, де $z=-2+2\sqrt{3}i$.

Розв'язання. Запишемо число у тригонометричній формі $\rho=\sqrt{4+12}=4$; $\mathrm{tg}\,\varphi=-\sqrt{3}$; $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. $z=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, тоді

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ \text{де } k=0,1,2.$$

Тоді

$$k=0,\ \ z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$k=1,\ \ z_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$k=2,\ \ z_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

5.2. Многочлени

Як відомо, многочлен степеня n має вигляд

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \quad (a_n\neq 0).$$

Основна теорема алгебри. Будь-яке рівняння $P_n(x)=0$ має рівно n коренів (дійсних або комплексних).

Нехай многочлен $P_n(x)$ має корені $z_1, z_2,..., z_m$ (m$\leq n$) кратностей, відповідно, $k_1, k_2,..,k_m$ $\left(k_1+k_2+...+k_m=n\right)$.

Тоді його можна розкласти в добуток

$$P_n(x)=a_n(x-z_1)^{k_1}\cdot(x-z_2)^{k_2}\cdot...\cdot(x-z_m)^{k_m}.$$

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен z^6-2z^3+1.

Розв'язання. $z^6-2z^3+1=(z^3-1)^2$. Знайдемо корені:

$z^3=1;\quad z=\sqrt[3]{1}$; $1=\cos 0+i\sin 0$;

$$z=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3};\ k=0,1,2.$$

$$k=0,\ \ z_1=1;$$

$$k=1,\ \ z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2,\ \ z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z^6-2z^3+1=(z-1)^2\cdot\left(z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\cdot\left(z+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2=$$

$$=(z-1)^2\cdot\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Розділ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Означення похідної та її практичний зміст

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля будь-яким чином, тобто

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x};$$

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - \textit{лівостороння похідна};$$

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - \textit{правостороння похідна}.$$

Для існування похідної $f'(x_0)$ функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$.

Похідна функції $f(x)$ розглядається на множині тих точок, де вона існує, сама будучи функцією. Процес знаходження похідної називається також *диференціюванням*.

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'; \quad \alpha \neq 0.$
2. $\left(a^{u}\right)' = \alpha^{u} \ln a \cdot u'; \ \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'.$
3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} u'; \ \left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}.$
4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'.$
5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'.$
6. $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$
7. $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$
8. $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

9. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

6.2. Правила диференціювання функцій

Нехай C – константа, а $f(x)$ та $g(x)$ – диференційовні функції, тоді:

1) $(C)' = 0$;
2) $(Cf)' = Cf'$;
3) $(f+g)' = f' + g'$;
4) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$;
5) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}, \quad g \neq 0$.

Приклад 1. Знайти похідну функції

$$y = \frac{1}{3} tg^3 x + \ln \sin x.$$

Розв'язання. Використовуючи формули диференціювання, отримаємо

$$y' = \frac{3}{3} tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = tg^2 x \cdot \sec^2 x + \operatorname{ctg} x.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = e^{x^2 + \operatorname{arctg} x}$.

Розв'язання

$$y' = e^{x^2 + \operatorname{arctg} x}(x^2 + \operatorname{arctg} x)' = \left(2x + \frac{1}{1+x^2}\right) \cdot e^{x^2 + \operatorname{arctg} x} = \frac{2x + x^3 + 1}{1+x^2} \cdot e^{x^2 + \operatorname{arctg} x}$$

Логарифмічне диференціювання.

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=(\sin x)^{\cos x}$.

Розв'язання. $\ln y=\cos x\cdot\ln\sin x$, тоді

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x}{\sin x}.$$

Звідки $y'=(\ln y)'\cdot y=(\sin x)^{\cos x}\cdot\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\ln\sin x}{\sin x}=$

$=(\sin x)^{\cos x-1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\ln\sin x\right).$

6.3. Диференціювання функцій, заданих неявно або параметрично

Вважають, що функція $y=f(x);\ x\in(a;b)$ задана неявно рівнянням $F(x;f(x))=0$.

Для обчислення похідної функції $y=f(x)$ треба тотожність $F(x;f(x))=0$ продиференціювати по x (розглядаючи ліву частину як складну функцію), а потім розв'язати отриману рівність відносно $f'(x)$.

Приклад 4. Знайти y'_x функції $x^4+y^4=x^2y^2$.

Розв'язання. Диференціюємо $x^4+y^4=x^2y^2$ по x, отримаємо $4x^3+4y^3\cdot y'=2x\cdot y^2+2y\cdot y'\cdot x^2$ Звідси

$$y'\left(2y^3-y\cdot x^2\right)=x\cdot y^2-2x^3,$$

тобто

$$y'=\frac{x\cdot y^2-2x^3}{2y^3-yx^2}.$$

Нехай задані функції $x=x(t)$ та $y=y(t),\ t\in(\alpha;\beta)$. Тоді $y'_x=y'_t\cdot t'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, за умови, що функція $x=x(t)$ на $t\in(\alpha;\beta)$ має обернену функцію.

Приклад 5. Знайти y'_x, якщо

$x=\ln(1+t^2);\ y=t-\operatorname{arctg} t;\ t\in(0;+\infty)$.

Розв'язання. $y_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$; $x_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t$, тоді $y'_x = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$.

Наведемо деякі геометричні застосування похідної.

Рівняння дотичної та перпендикуляра нормалі до дотичної в точці дотику $(x_0; f(x_0))$, мають вигляд, відповідно,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ та } y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Піддотична AM_1 та піднормаль M_1B (рис.18)

$$S_N = M_1B = |y \cdot \operatorname{tg}\alpha| = |f(x) \cdot f'(x)|,\ S_T = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|.$$

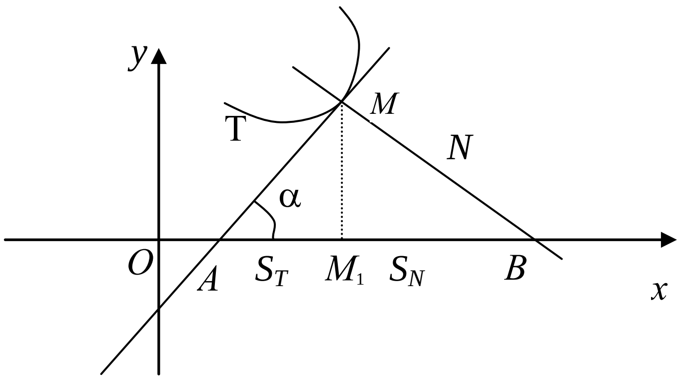

Рис. 18

Під кутом γ між двома лініями $y = f(x)$ та $y = g(x)$ розуміють кут між дотичними до них в точці їх перетину $tg\gamma = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}$, де x_0 – абсциса точки перетину кривих.

Приклад 6. Написати рівняння дотичної та нормалі, знайти піддотичну та піднормаль функції $y = e^{1-x^2}$ в точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної та нормалі мають вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ x_0 = -1;$$

$y_0 = e^{1-1} = e^0 = 1$; $y' = -2x \cdot e^{1-x^2}$; $y'_0 = 2$.

$y - 1 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + 3$ – рівняння дотичної.

$y-1=-\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y-2=-x-1;\ 2y+x-1=0$ – рівняння нормалі.

$$S_T=\left|f(x_0)/f'(x_0)\right|=|1:2|=\frac{1}{2};$$
$$S_N=\left|f(x_0)\cdot f'(x_0)\right|=|1\cdot 2|=2.$$

6.4. Застосування похідної

Теореми про середнє.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована при $x\in(a;b)$ та $f(a)=f(b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована при $x\in(a;b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ – формула Лагранжа.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані при $x\in(a;b)$ та $g(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a,b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ – формула Коші.

Правило Лопіталя–Бернуллі. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Нехай в деякому околі точки $x=a$ функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані всюди, крім, можливо, точки $x=a$, та $g'(x)\neq 0$ в околі цієї точки. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$являються одночасно нескінченно малими або нескінченно великими при $x\to a$ і при цьому існує границя відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$, то існує границя відношення $f(x)/g(x)$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження. В деяких випадках невизначеності $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ можуть потребувати неоднократного повторення правила Лопіталя.

Приклад 7. Знайти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Розв'язання. Застосуємо формулу Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{3x^2-10x+7}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{6x-8}{6x-10}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$ та $\infty-\infty$.

Для обчислення $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, де $f(x)$ – нескінченно мала, а $g(x)$ – нескінченно велика при $x\to a$, треба перетворити добуток в $\frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, або $\frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$,тобто в невизначеність $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{a}{x}$ $\quad(\infty\cdot 0)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{x^{-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\cdot\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a.$$

Розкриття невизначеностей 0^0, ∞^0та 1^∞. У всіх випадках обчислюється границя функції $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$. Прологарифмуємо функцію $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$. Отримаємо $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$ і знайдемо границю $\ln y$. Після чого знайдемо границю y.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ $\quad\left(0^0\right)$.

Розв'язання. $y=x^{\sin x}$, тоді $\ln y=\sin x\cdot\ln x$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\sin x=0;$$

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}x^{\sin x}=e^0=1.$$

6.5. Дослідження функцій та побудова графіків функцій

1. Монотонність функцій. Екстремуми функцій.

Функція $y=f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) на інтервалі $[a;b]$ області визначення, якщо з нерівності $x_1<x_2,\ x_1,x_2\in[a;b]$ випливає, що $f(x_1)<f(x_2)$. Аналогічно $f(x_1)>f(x_2)$.

Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$, а $f'(x)>0$ для всіх $x\in(a;b)$, то $f(x)$ зростає на $(a;b)$. Якщо $f'(x)<0$ для всіх $x\in(a;b)$, то $f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Область визначення функції $f(x)$ можна розбити на скінченне число інтервалів монотонності, кожний з яких обмежений критичними точками, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує.

Якщо існує деякий окіл точки x_0, що для довільного $x\neq x_0$ виконується нерівність $f(x)>f(x_0)(f(x)<f(x_0))$, то точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму). Точки максимуму та мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ або $f'(x)$ не існує, x_0 називається критичною або стаціонарною точкою функції $f(x)$; $x_0\in D(x)$.

Достатня умова існування екстремуму функції. Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ критичної точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки. Якщо при цьому в інтервалах $(x_0-\varepsilon;\varepsilon)$ та $(x_0;x_0+\varepsilon)$ похідна має різні знаки, то x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$ і якщо $f'(x_0)>0$ $(f'(x_0)<0)$ при $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ та $f'(x)<0$ $(f'(x_0)>0)$ $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$, то x_0 – точка максимуму (мінімуму). Якщо $f'(x)$ на $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ не змінює знака, то x_0 не буде точкою екстремуму функції.

2. Напрямність опуклості. Точки перегину.

Графік диференційованої функції $y=f(x)$ називають *опуклим* (угнутим) *униз* на інтервалі $(a;b)$, якщо дуга кривої на цьому проміжку розташована вище дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ в довільній точці $x\in(a;b)$.

Якщо на інтервалі $(a;b)$ дотична до довільної точки знаходиться вище дуги кривої, то графік диференційованої функції на цьому інтервалі називають *опуклим вгору*.

Користуються позначенням $\cup\cap$, відповідно, для вгнутості та опуклості.

Теорема 1. Нехай функція $y=f(x)$ двічі диференційована на $(a;b)$. Тоді $f(x)$ опукла (вгнута), якщо $f''(x)>0;\ (f''(x)<0),\ x\in(a;b)$.

Точка, в якій функція змінює опуклість на вгнутість називається *точкою перегину* функції.

Теорема 2. (Достатня умова перегину). Якщо $f''(x_0)=0$ або не існує і $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, то x_0 є точкою перегину.

3. Асимптоти функції.

Цей пункт не пов’язаний з диференціальним численням, але доповнює попередню інформацію про елементи поведінки функції.

Асимптота даної кривої – це така пряма, відстань до якої від змінної точки кривої прямує до нуля в міру віддалення точки кривої у нескінченність.

Для довільних функцій розрізняють *вертикальні, похилі, горизонтальні* асимптоти.

У разі *вертикальних* асимптот $x = a$ маємо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

або хоча б при $x \to a - 0$ чи $x \to a + 0$.

Похилі асимптоти $y = kx + b$ функції $y = f(x)$. За означенням асимптоти матимемо:

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx - b \right) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

Звідси $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}; \quad b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx).$

Горизонтальні асимптоти

$$y = b, \text{ де } b = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

4. *Загальна схема дослідження функції. Побудова графіка функції.*

Диференціальне числення дає змогу об’єктивно відтворити графік функції із зображенням його характерних особливостей.

Схема дослідження функції.

1. Знаходимо область визначення $D(x)$ функції.
2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність, непарність.

У разі необхідності, знаходимо характерні точки графіка, точки перетину з осями координат.

3. Знаходимо $f'(x)$ і критичні точки $f'(x) = 0$ або не існує.
4. Знаходимо $f''(x)$ і критичні точки $f''(x) = 0$ або не існує.
5. Знайдені дані заносимо в таблицю, з якої дістаємо інтервали монотонності, опуклості чи вгнутості, точки екстремуму, перегину (заповнивши клітинки знаками похідних).
6. Знаходимо асимптоти функції.
7. Будуємо графік функції.

Приклад 10. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. $D(x): \; x \neq \pm 2; \; x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

2. $f(x)$ – неперіодична. Оскільки $f(-x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$; $f(-x) = -f(x)$ – функція непарна.

Перетин з віссю *OX*: $x = 0; y = 0$; з віссю *OY*: $y = 0$; $x = 0$; точка $O(0;0)$.

3. $f'(x) = \dfrac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = -\dfrac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}$; $\quad f'(x) < 0$.

Критичних точок немає. Функція всюди спадає.

4. $f''(x) = -\dfrac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4} =$

$$= -\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = \frac{x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3},$$

$x(2x^2+24) = 0$; $x = 0$ – критична точка.

5. Складаємо таблицю.

Таблиця 6.1

x	$(-\infty;-2)$	-2	(-2;0)	0	(0;2)	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	–	∞	–	–	–	∞	–
$f''(x)$	–	∞	+	0	–	∞	+
$f(x)$	↘ $\cap$	∞	↘ $\cup$	0 перегин	↘ $\cap$	∞	↘ $\cup$

6. Знайдемо асимптоти.

Вертикальні асимптоти: $x = -2$ та $x = 2$.

Похила асимптота $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x^2-4)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

7. Будуємо графік функції (рис. 19).

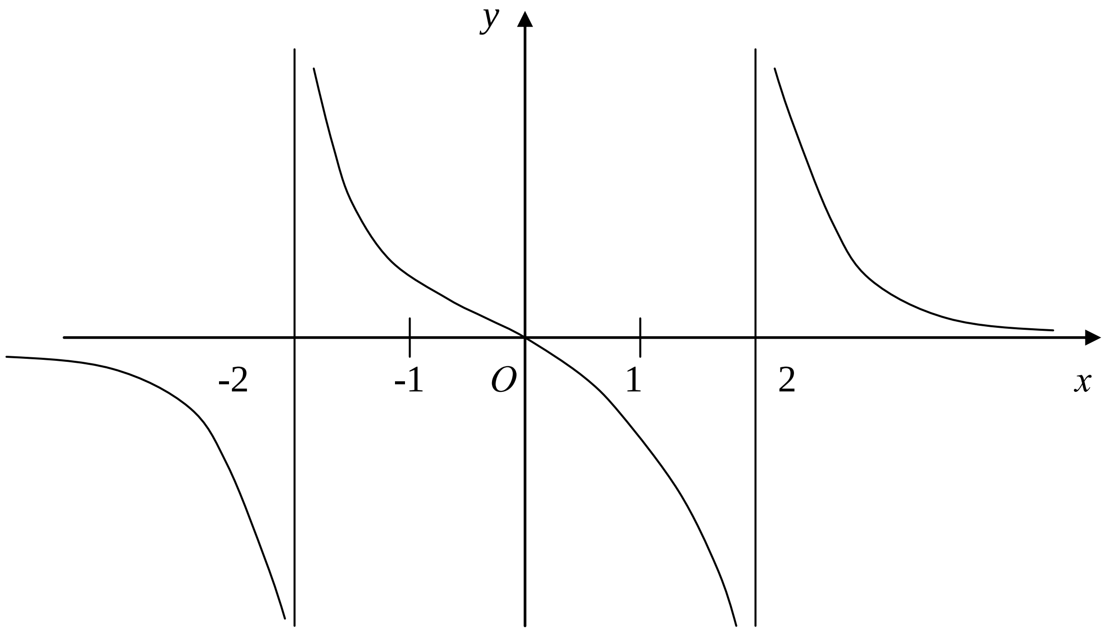

Рис. 19

Приклад 11. Дослідити функцію $y=\dfrac{\ln x}{x}$ та побудувати графік.

Розв'язання.

1. $D(x):\ x>0$.

2. Функція неперіодична, не парна, не непарна. Точок перетину з віссю OY не має. З віссю $OX: y=0 \Rightarrow \ln x=0.\ x=1; M_0(1;0)$.

3. $y'=\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2};\quad y'=0 \Rightarrow \ln x=1;\ x=e,$

$x=e$ – критична точка.

4. $y''=\dfrac{(1-\ln x)'\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot(x^2)'}{x^4}=\dfrac{-x-2x+2x\cdot\ln x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3};$

$y''=0 \Rightarrow \ln x=\dfrac{3}{2};\ \ x=e,\ \ x=e^{\frac{3}{2}}$ – критична точка.

5. Складемо таблицю.

Таблиця 6.2

x	$(0;e)$	e	$\left(e;e^{\frac{3}{2}}\right)$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\left(e^{\frac{3}{2}};+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	–	–	–
$f''(x)$	–	–	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$ $\cap$	$\frac{1}{e}$ max	$\searrow$ $\cap$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ перегин	$\searrow$ $\cup$

6. Знайдемо асимптоти.

Вертикальна $x=0$.

Похила $y=kx+b$;

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x}=0. \qquad y=0.$$

7. Будуємо графік функції (рис. 20).

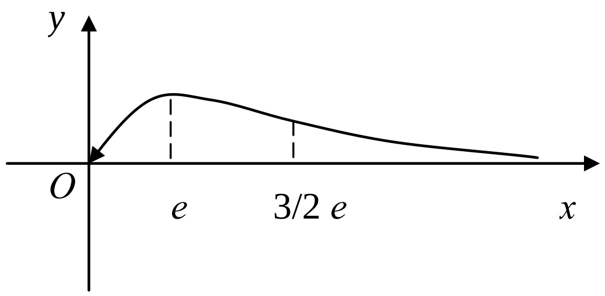

Рис. 20

6.6. Задача про найбільше та найменше значення функції на відрізку

Найбільше та найменше значення неперервної функції $y=f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ досягається або в критичних точках, що належать заданому відрізку, або в кінцях цього відрізка.

Приклад 12. Знайти найбільше M та найменше m значення функції

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in [-4;4].$$

Розв'язання. Визначимо критичні точки:

$$y' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ \in [-4;4].$$

Обчислимо значення функції, відповідно,

$$f(-4) = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}; \qquad f(0) = -1. \qquad f(4) = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}.$$

$$M = \frac{15}{17}; \quad m = -1.$$

6.7. Наближене розв'язування скінченних рівнянь

Скінченним рівнянням називають рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$– довільна функція.

Коренем (нулем) рівняння $f(x) = 0$ називають число $x = x_0$, таке, що $f(x_0) = 0$.

В інженерній практиці часто постає питання про наближений розв'язок рівнянь. Усі методи наближеного розв'язання поділяються на дві групи. До першої належать ті, що дають змогу відділити корінь, до другої – ті, які дають змогу уточнити його, тобто знайти з деякою точністю.

Метод проб (метод відноситься до першої групи).

Розглянемо рівняння $f(x) = 0$. Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, та $f(a) \cdot f(b) < 0$, тобто на $[a;b]$ існує $x = x_0$ таке, що $f(x_0) = 0$. Розіб'ємо $[a;b]$ на $[a;c]$ та $[c;b]$ і вважатимемо, що $f(a) \cdot f(c) < 0$, тому $x_0 [a;c]$ і т.д. Процес проходить доти, поки це можливо. Ізолювавши корінь на інтервалі, перейдемо до інших методів.

Метод хорд.

Ідея методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка з віссю *Ox* (точки x_0) беруть точку перетину з цією віссю хорди, яка стягує крайні точки графіка функції на інтервалі ізоляції кореня (рис 21).

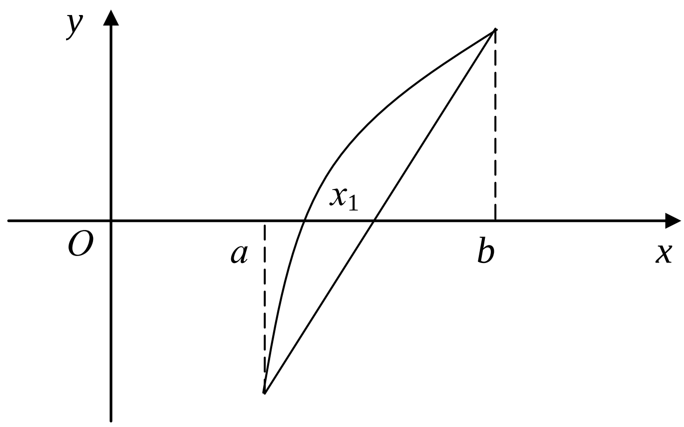

Рис. 21

Складемо рівняння *AB*.

$$y = f(a_0) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Оскільки точка $(x_1;0)$ належить хорді, то

$$x_1 = a - \frac{f(a_0) \cdot (c_0 - a_0)}{f(b) - f(a)}.$$

Далі замість a беремо x_1 і т.д.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) \cdot f(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}.$$

Це формула методу хорд.

Алгоритм методу хорд.

Нехай на $[a;b]$ $f(x_0) = 0$, при цьому

а) функції $f(x)$; $f'(x)$; $f''(x)$ неперервні;

б) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

в) $f'(x)$ та $f''(x)$ не змінюють знака.

Тоді x_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ визначимо рівностями

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1} - a)\cdot f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}; & x_0 = b, \text{ якщо } f(a)\cdot f(x_1) < 0; \\ x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}; & x_0 = a, \text{ якщо } f(a)\cdot f(x_1) > 0. \end{cases}$$

Тоді послідовність $\{x_n\}$ $n \in N$ збігається до кореня χ при $n \to \infty$, причому

$$|x_n - \chi| \le \frac{|f(x_n)|}{m};$$

$$|x_n - \chi| \le \frac{M - m}{m}|x_n - x_{n-1}|,$$

де $m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$; $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Приклад 13. Знайти додатні корені рівняння $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$ методом проб з точністю $\delta = 0{,}0001$.

Розв'язання. Методом проб виділимо відрізок $[a;b]$, на якому знаходиться корінь рівняння,

$$f(0) = -1 < 0; \quad f(1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0; \quad f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\frac{\pi}{4} - 1 > 0,$$

тобто $x \in [1; \sqrt{3}]$.

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{(1 + x^2)^2}.$$

$$f(1)\cdot f(\sqrt{3}) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right) = 0{,}2146 \cdot 0{,}8138 < 0.$$

Умови а) і б) виконуються, якщо $f''(x) > 0$, то $\chi \in [1; \sqrt{3}]$; $m \le f'(x) \le M$,

де $m = f'(1) = 1{,}2853981$, $M = f'(\sqrt{3}) = 1{,}4802102$,

$$\frac{M - m}{m} = 0{,}1515547.$$

Визначимо:

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3} - 1)\cdot f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608;$$

$$f(1)\cdot f(1{,}1527608)>0,\quad f(\sqrt{3})\cdot f(1{,}1527608)<0,$$
$$x_2\in[x_1;\sqrt{3}).$$

Зведемо обчислення в таблицю.

Таблиця 6.3

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n,x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n-x_{n-1})$
1	1	-0,2146019	-0,1527608	1,1527068	0,023152
2	1,527608	-0,0129601	0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,618415	-0,0006758	-0,000473	1,1623145	0,0000716

Остання графа таблиці характеризує граничну абсолютну похибку, тому

$$x=1{,}1623\pm 0{,}0001.$$

Метод дотичних.

Ідея методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю Ox знаходиться точка перетину з цією віссю дотичної до графіка в одній із точок ізоляції кореня. Якщо виконується умова (для методу хорд), то

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ \text{при чому}$$

$$x_0=\begin{cases}a, & \text{якщо } f(a)\cdot f(c)<0;\\ b, & \text{якщо } f(a)\cdot f(c)>0;\\ c, & \text{якщо } f(c)=0,\end{cases}$$

де $c=a-\dfrac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$.

Послідовність $x_n,\ n\in N\to\chi$, якщо $|x_n-\chi|\le\dfrac{|f(x_n)|}{m}$ та

$$|x_n-\chi|\le\frac{M_1}{2m}(x_n-x_{n-1})^2,\ \text{де } m=\min_{a\le x\le b}|f'(x)|,\ M_1=\min_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Приклад 14. Знайти методом дотичних додатний корінь рівняння $x\cdot\operatorname{arctg}x-1=0$ з точністю до $\delta=0{,}0001$.

Розв'язання. Відрізок ізоляції $\left[1;\sqrt{3}\right]$ (див. приклад 13).

$$c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1)f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}15227608 > 0,$$

то $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $x_0 = \sqrt{3}$;

$f'(x)$ та $f''(x)$, $m = 1{,}283981$ знайдені (див. приклад 13);

$M_1 = f''(1) = 0{,}25$, $\dfrac{M_1}{2m} = 0{,}0972461$.

Обчислення заносимо в таблицю.

Таблиця 6.4

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,73210508	0,8137992	1,4802102	-0,5497862	1,822646	0,0534645
1	1,822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Тобто $x = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$.

Метод ітерації.

Запишемо рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x = \varphi(x)$. За наближене число візьмемо довільне $x = x_0$.

Дістанемо $x_1 = \varphi(x_0)$, … , $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

Якщо $|\varphi'(x)| < 1$, то отримаємо послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$. Метод побудови такої послідовності називається методом ітерації.

Приклад 15. Знайти корінь рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Запишемо рівняння $x = \sqrt[3]{3x-1}$.

Візьмемо

$x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}71$; $x_3 = 1{,}60$; $x_4 = 1{,}56$; $x_5 = 1{,}54$; $x_6 = 1{,}95$.

Оскільки $|x_6 - x_5| \le 0{,}01$, то $x = 1{,}54$.

Якщо рівняння записати у вигляді $x = \dfrac{1}{3}(1 + x^3)$, то процес розбіжний.

Розділ 7. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основна задача диференціального числення полягає в тому, що за деякою функцією треба знайти її похідну, якщо вона існує. Основною задачею інтегрального числення є обернена задача: за похідною функції знайти саму функцію. Практичні задачі, де застосовують цей математичний апарат, входять в те саме коло питань, які пов'язані з практичним застосуванням похідної.

7.1. Первісна функція і невизначений інтеграл

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому інтервалі $[a;b]$, якщо $F'(x) = f(x), \forall x \in [a;b]$.

Наприклад, якщо $f(x) = 3x^2$, то $F(x) = x^3$, бо $F'(x) = 3x^2$, також $F(x) = x^3 + 2$, бо $F'(x) = 3x^2$ і, взагалі, $F(x) = x^3 + C$, $\forall C \in \mathbf{R}$. Це є загальний вигляд первісної для $f(x) = 3x^2$.

Теорема про загальний вигляд усіх первісних.

1. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то $F(x) + C \ \forall C \in R$ є також первісною для $f(x)$.

2. Довільна первісна $\Phi(x)$ для всіх $f(x)$ має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C \ \forall C \in \mathbf{R}$, де $F(x)$ – одна із первісних для $f(x)$, тобто множина первісних $f(x)$ вичерпується формулою $F(x) + C$.

Доведення.

1. Якщо $F'(x) = f(x)$, то $(F(x) + C)' = f(x)$.

2. Якщо $\Phi(x)$ та $F(x)$ – первісні для $f(x)$, то $\Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, обернене твердження $\Phi(x) - F(x) = C$, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Означення 2. Невизначеним інтегралом від деякої функції називається множина всіх первісних функцій, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1}$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, C – стала інтегрування

З геометричної точки зору первісна – це лінія $y = F(x)$, невизначений інтеграл – це сім’я ліній $F(x)+C$ (рис.22).

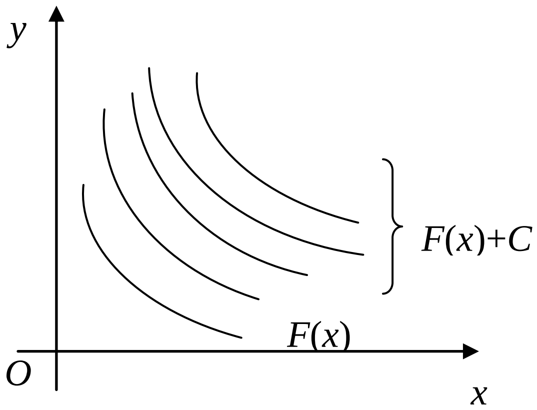

Рис. 22

Операція знаходження невизначеного інтеграла від деякої функції називається інтегруванням цієї функції.

7.2. Властивості невизначеного інтеграла

Доведення базується на означенні інтеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $\int d(f(x)) = f(x) + C$.
3. $d\left(\int f(x)\right) = f(x)dx$.
4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx \, \forall C \in \mathbf{R}$ (однорідність).
5. $\int (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$ (адитивність).
6. Заміна змінної. Якщо $f(x)$ неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

7.3. Таблиця невизначених інтегралів. Табличне інтегрування

Подамо основні інтеграли. Результати перевіряються диференціюванням обох частин рівностей. $u = u(x)$ – неперервна функція.

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u du = \sin u + C.$

6. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$

7. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C.$

12. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$ – формула високого логарифма.

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$ – формула довгого логарифма.

14. $\int \frac{udu}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2 \pm a^2\right| + C$.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^5}$; б) $\int \sqrt[5]{x}dx$; *c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. В усіх трьох випадках скористаємося формулою 1

$$\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

а). Оскільки $\alpha = -5$, то $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = C - \frac{1}{4x^4}$;

б) враховуючи, що $\alpha = \frac{1}{5}$, маємо:

$$\int \sqrt[5]{x}dx = \int x^{\frac{1}{5}}dx = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + C;$$

c) виходячи з того, що $\alpha = -\frac{1}{2}$, маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{5^x}$; б) $\int 4^{x-1}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2-4}$; г) $\int \frac{dx}{9x^2+16}$.

Розв'язання.

а) використавши формулу 3, дістанемо:

$$\int \frac{dx}{5^x} = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + C = \frac{1}{-5^x \ln 5} + C;$$

б) за формулою 3 та 7-ю властивістю інтеграла дістанемо:

$$\int 4^{x-1}dx = \frac{4^{x-1}}{\ln 4} + C;$$

в) за формулою 12 та з урахуванням, що a^2=4, a=2, одержимо: $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C;$

г) враховуючи, що $(3x)^2 + 4^2 = 9x^2 + 16$, за формулою 10 і за 7-ю властивістю інтеграла дістанемо:

$$\int \frac{dx}{9x^2+16} = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + C = \frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}x + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{x^2-25}{x+5}dx;$ в) $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx.$

Розв'язання.

а)

$$\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx +$$

$$+ 4\int dx + 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 4x + 4\cdot 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 4x + 8\sqrt{x} + C;$$

б)

$$\int \frac{x^2-25}{x+5}dx = \int \frac{(x+5)(x-5)}{x+5}dx = \int (x-5)dx = \int xdx - 5\int dx = \frac{x^2}{2} - 5x + C;$$

в)

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4}{x^2-4}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4} = \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4} =$$

$$= x - 4\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C = x - \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int \cos(5x+4)dx;$ б) $\int \frac{dx}{2x-3};$ в) $\int e^{2x}dx.$

Розв'язання.

а) за формулою 5 та 7-ю властивістю інтеграла одержимо: $\int \cos(5x+4)dx = \frac{1}{5}\sin(5x+4)+C;$

б) за формулою 2 та 7-ю властивістю інтеграла маємо: $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3|+C;$

в) за формулою 3 та 7-ю властивістю інтеграла дістанемо: $\int e^{2x}dx \ \ | = \frac{1}{2}e^{2x}+C.$

7.4. Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані для відповідних x. Тоді

$$d(uv)=udv+vdu;$$
$$udv=d(uv)-vdu.$$

Проінтегруємо останню рівність:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Це формула інтегрування частинами. Вона застосовується тоді, коли $\int vdu$ менш складний ніж $\int udv$.

Приклад **5**. Знайти інтеграли:

а) $\int xe^x dx;$ б) $\int x^2 \cos 2xdx;$

Розв'язання.

а) Покладемо $u=x, \ \ du=dx$, тоді $dv=e^x dx, \ v=e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C;$$

б) покладемо $u=x^2, du=2xdx,$ тоді $dv=\cos 2xdx,$ $v=\frac{1}{2}\sin 2x.$

$$\int x^2\cos 2xdx = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2xdx = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \int x\sin 2xdx;$$

скористаємося ще раз формулою інтегрування по частинах $u = x,\ du = dx,\ dv = \sin 2x dx,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Тоді

$$\frac{x^2}{2}\sin 2x - \int x\sin 2x dx = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

***Приклад* 6.** Знайти інтеграли:

а) $\int x\ln x dx$; б) $\int \ln^2 x dx$.

Розв'язання.

а) Покладемо $u = \ln x; du = \frac{1}{x}dx$, тоді $dv = xdx;\ v = \frac{x^2}{2}dx$.

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C;$$

б) покладемо $u = \ln^2 x;\ du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$, тоді $dv = dx; v = x$.

$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot xdx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx.$ Покладемо $u = \ln x;\ du = \frac{1}{x}dx$, тоді $dv = dx;\ v = x$. Отже, маємо:

$$x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

Аналізуючи розглянуті приклади, можна виділити такі типи інтегралів, для знаходження яких використовується інтегрування частинами:

1) $\int x^n e^{\alpha x}dx$; $\int x^n \sin mx dx$; $\int x^n \cos mx dx$;

2) $\int x^k \ln^n x dx$; $\int x^k \arcsin x dx$; $\int x^k \arccos x dx$; $\int x^k \operatorname{arctg} x dx$; $\int x^k \operatorname{arcctg} x dx$ (α, k, m – дійсні числа, *n*- ціле додатне число).

7.5. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен ax^2+bx+c

Розглянемо такі інтеграли:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};\qquad I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\qquad I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Щоб проінтегрувати дані інтеграли, необхідно виділити у квадратному тричлені повний квадрат, а саме:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)==a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

За шостою властивістю інтегралів введемо заміну:

$$t=x+\frac{b}{2a};x=t-\frac{b}{2a},\ \text{тоді}\ dx=dt.$$

Розглянемо інтеграл, наприклад, I_2. Зробивши заміну $x=t-\frac{b}{2a};\ dx=dt$, дістанемо:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{At-\frac{Ab}{2a}+B}{at^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dt=$$

$$=A\int\frac{t}{at^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dt+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dt}{at^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Отримані інтеграли – табличні.

***Приклад* 7**. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2-4x+13}$;

Розв'язання.

а) 1) Виділимо повний квадрат $x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$.

2) Введемо таку заміну: $x+2=t; x=t-2; dx=dt$.

3) Дістанемо:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

б) Виділимо повний квадрат $x^2-4x+4+9=(x-2)^2+9$. Ведемо заміну $x-2=t; x=t+2; dx=dt$. Тоді

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^2-4x+13}=\int\frac{t+2+1}{t^2+9}dt=\int\frac{t+3}{t^2+9}dt=\int\frac{tdt}{t^2+9}+\int\frac{3dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+9)+3\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13)+\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$$

7.6. Інтегрування раціональних дробів

Нагадаємо, що многочлен степеня n має вигляд:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \quad (a\neq 0).$$

Наприклад: $2x+1$ – многочлен 1-го степеня,

$3x^3-4x$ – многчлен 3-го степеня.

Раціональним дробом називають вираз

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

де Q та P – многочлени відповідних степенів, причому, якщо $m<n$, то дріб називається правильним.

Наприклад:

$\frac{2x+1}{x^2+4x+1}$ – правильний раціональний дріб;

$\frac{x+1}{x+4}$ – неправильний дріб.

Елементарними раціональними дробами називають дроби:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n},(n>1);\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},(D<0);\ \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},(D<0,\ n>1).$$

Основна теорема алгебри. Будь-яке рівняння типу $P_n(x)=0$ має рівно *n* коренів (дійсних або комплексних), тобто

$$P_n(x)=a_n(x-a)...(x-b)^k...(x^2+px+q)...(x^2+p_1x+q_1)^s \qquad (1)$$

(для всіх квадратних тричленів $D<0$)

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна подати як суму елементарних дробів, причому множнику $x-a$ в (1) відповідає дріб $\dfrac{A}{x-a}$; множнику $(x-b)^k$ в (1) ($k>1$) відповідає сума дробів

$$\frac{M_1}{x-b}+\frac{M_2}{(x-b)^2}+...+\frac{M_k}{(x-b)^k},$$

множнику x^2+px+q в (1) – дріб $\dfrac{Nx+M}{x^2+px+q}$,

множнику $(x^2+p_1x+q_1)^s$, ($s>0$) – сума:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s}.$$

В чисельниках дробів маємо невизначені коефіцієнти.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів скористуємося такими твердженнями:

1) якщо многочлени рівні, то їхні коефіцієнти при однакових степенях аргументу рівні;

2) якщо многочлени рівні, то вони рівні при всіх значеннях аргументу *x*.

Приклад 8. Розкласти на елементарні дроби:

а) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$; б) $\dfrac{x+1}{(x^2+1)x}$.

Розв'язання.

а) Маємо $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$.

Зведемо праву частину до спільного знаменника, тоді

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

або $x+1=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$.

Нехай $x = 1$; $2 = 3B$; $B = 2/3$;

$x = -2$; $-2 + 1 = 9C$; $C=-\frac{1}{9}$.

Прирівняємо коефіцієнти при x^2:

$0 = A+C$; $-C = A$; $A=\frac{1}{9}$.

Остаточно

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1/9}{x-1}+\frac{2/3}{(x-1)^2}+\frac{-1/9}{x+2};$$

б) Маємо

$$\frac{x+1}{(x^2+1)x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

або

$$x+1=A(x^2+1)+x(Bx+C)$$

$$0x^2+x+1=A(x^2+1)+x(Bx+C).$$

Нехай $x = 0$; $1 = A$. Прирівняємо коефіцієнти при x^2 та x^1.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0=A+B; B=-1, \\ x & 1=C; C=1. \end{array}$$

Отже, $$\frac{x+1}{(x^2+1)x}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Ми розглянули лише правильні раціональні дроби. Якщо дріб неправильний, то діленням кутом ми можемо записати неправильний дріб як суму многочлена та правильного дробу.

Приклад 9. Виділити цілу частину дробу $\frac{x^3+1}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник на знаменник. Маємо

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^2+1 & x^2-4x+5 \\ \cline{3-3}
 & x^3-4x^2+5x & x+4 \\ \cline{2-2}
- & 4x^2-5x+1 & \\
 & 4x^2-16x+20 & \\ \cline{2-2}
 & 11x-19 &
\end{array}
$$

Отже, $\dfrac{x^3+1}{x^2-4x+5}=x+4+\dfrac{11x-19}{x^2-4x+5}$.

Оскільки правильний раціональний дріб можна звести до скінченної суми елементарних дробів, розглянемо інтегрування останніх:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{B}{(x-a)^n}dx=B\int(x-a)^{-n}dx=B\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C \quad (n\neq 1);$$

$\displaystyle\int\frac{Nx+M}{x^2+px+q}dx$ розглянутий в п. 4.

Як бачимо, раціональний дріб можна проінтегрувати завжди.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+2}{x^3-5x^2+6x}dx.$

Розв'язання. Дріб $\dfrac{x^2-2x+2}{x^3-5x^2+6x}$ – правильний.

$$x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3),$$

корені рівняння: $x_1=2$; $x_2=3$, виходячи з того, що

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1 та x_2 – корені відповідного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Тоді $\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$,

або $x^2-2x+2=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$

Візьмемо $x=2$, тоді $4-4+2=A\cdot 0+2B(-1)+C\cdot 0$.

$2 = -2B; \quad B = -1.$

Візьмемо $x = 3$, тоді $9 - 6 + 2 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 3C \cdot 1$.

$5 = 3C; \quad C = 5/3$.

Візьмемо $x = 0$, тоді $2 = A(-2)(-3) + B \cdot 0 + C \cdot 0$.

$6A = 2; \quad A = 1/3;$

Звідси

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \frac{1/3}{x} dx + \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{5/3}{x-3} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x| - \ln|x-2| + \frac{5}{3} \ln|x-3| + C.$$

7.7. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції

1. Для інтегрування виразів $\sin \alpha x \cos \beta x$, $\sin \alpha x \sin \beta x$, $\cos \alpha x \cos \beta x$ *необхідно скористатись формулами:*

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x);$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x);$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x);$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \sin 6x \cos 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin 6x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 4x dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

2. Інтегрування виразів $\sin^p x \cos^k x$.

Розглянемо два випадки.

а) Нехай p і k – парні числа.

Застосуємо формули зниження степеня:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

та $$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

б) Якщо серед чисел p та k є хоча б одне непарне, зокрема, нехай k – непарне, а p – парне. Застосуємо підстановку $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

Тоді

$$\int \sin^p x \cos^{k-1} x \cos x dx = \int \sin^p x (\cos^2 x)^{\frac{k-1}{2}} \cos x dx =$$

$$= \int \sin^p x (1-\sin^2 x)^{\frac{k-1}{2}} \cos x dx = \int t^p (1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} dt.$$

Приклад 12. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; б) $\int \sin^4 x dx$.

Розв'язання.

а)

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx.$$

Введемо таку заміну: $\cos x = t$; $-\sin x dx = dt$. Дістанемо:

$$-\int (1-t^2)t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt = -\int t^2 dt + \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{(\cos x)^5}{5} - \frac{(\cos x)^3}{3} + C;$$

б) Оскільки $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, то

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx.$$

Скориставшись, що $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, дістанемо:

$$\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int(2-4\cos 2x+1+\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x dx=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

3. *Універсальна тригонометрична підстановка.*

Ця підстановка має вигляд $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, застосовується для інтегралів виду $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ де $R(\sin x,\cos x)$ і означає, що над функціями $\sin x$ та $\cos x$ здійснюються операції в межах чотирьох арифметичних дій.

$$\sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\,\mathrm{arctg}\,t;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Дані підстановки приводять підінтегральну функцію до раціонального дробу.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x}.$

Розв'язання.

Покладемо $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; $x=2\,\mathrm{arctg}\,t$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2(1+t^2)dt}{2t(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

7.8. Інтегрування деяких типів ірраціональностей

Розглянемо випадки, коли заміна змінної дозволяє інтеграли від ірраціональних функцій звести до інтегралів від раціональних функцій, іншими словами – раціоналізувати інтеграл.

Розглянемо інтеграл $\int R(x,\sqrt[n]{x})dx.$

Такі інтеграли раціоналізуються підстановкою $t=\sqrt[n]{x}.$

***Приклад* 14.** Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

Розв'язання. Підінтегральна функція шуканого інтеграла є функцією від радикалів степеня 2 і 3. Даний інтеграл можна раціоналізувати заміною $t=\sqrt[6]{x},$ бо 6 – найменше спільне кратне чисел 2 та 3.

$$x=t^6;dx=6t^5dt;\sqrt[3]{x}=t^2;\sqrt{x}=t^3.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^3}{1+t}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1}{t+1}dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-6\ln|t+1|=6\int\left(t^2-t+1\right)dt-6\ln|t+1|=$$

$$=6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$$=2\cdot(\sqrt[6]{x})^3-3\cdot(\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Тригонометричні підстановки $x=a\sin t, x=a\cos t,$ $x=a\operatorname{tg}t, x=a\operatorname{ctg}t,$ $x=a/\cos t, x=a/\sin t$ застосовують для знаходження інтегралів виду:

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx, \quad \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx.$$

***Приклад* 15.** Знайти інтеграл: $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Розв'язання.

$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_1 + I_2$. Зробимо заміну $x = \sin t,\ dx = \cos t dt,\ t = \arcsin x$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = \int \frac{\sin t \cos t}{\cos t}dt =$$

$$= \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos \arcsin x + C = -\sqrt{1-x^2} + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Отже, $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

7.9. Інтегрування за допомогою таблиць

Існують спеціальні довідники, які містять велику кількість інтегралів від досить широкого класу функцій.

Наприклад,

$$I(a) = \int \frac{\cos ax dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a \sin ax} + C.$$

Для знаходження інтеграла даного класу $I(4) = \int \frac{\cos 4x dx}{\sin^2 4x}$ у відповідь треба тільки підставити значення параметра

$$\int \frac{\cos 4x dx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4 \sin 4x} + C.$$

Розділ 8. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

8.1. Поняття визначеного інтеграла. Його геометричний та економічний зміст

1. Задача про площу криволінійної трапеції.

Означення 1. Криволінійною трапецією називають фігуру обмежену графіком функції $y = f(x)$; прямими $x = a$, $x = b$, та $y = 0$.

Знайдемо площу криволінійної трапеції за умови неперервності та невід'ємності функції $f(x)$ (рис.23). Розіб'ємо основу трапеції на n частин точками $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ довільним способом. Так само довільно виберемо $x_i \in [x_{i-1}; x_{i+1}]$..

Вважатимемо, що $\forall x^*{}_i \in [x_{i-1}; x_{i+1}] = \text{const} = f(x_i^*)$.

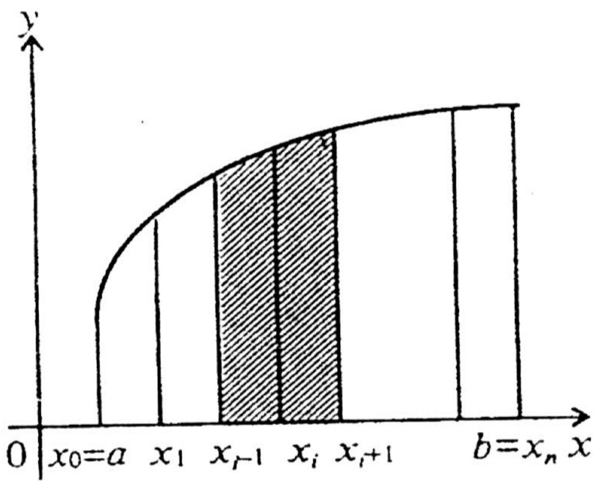

Рис. 23

Тоді кожна з n елементарних трапецій, на які розбита початкова трапеція, буде замінена прямокутником площею $S_i = f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x$. Отже, площа всієї трапеції

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i .$$

Причому ця формула тим точніша, чим більше n та менше Δx_i. Остаточно

$$S = \lim_{\substack{h\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i .$$

Цей вираз має сенс тоді, коли границя існує і не залежить від способу розбиття $[a;b]$ на n частин.

Суму виду

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

називатимемо *інтегральною сумою*.

Означення 2. Границя інтегральних сум для даної функції $f(x)$ при $n\to\infty$ і $\max\Delta x_i \to 0$ за умови, що границя не залежить від способу розбиття відповідного інтервалу на частини та способу вибору довільних точок x_i^* в середині кожної частини, називається визначеним інтегралом від даної функції на даному інтервалі і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i .$$

2. Економічний зміст визначеного інтеграла.

Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну продуктивності праці деякого підприємства за певний час. Знайдемо об’єм продукції V, що випущена за проміжок часу $[0;T]$.

Якщо продуктивність праці за деякий час – стала, то об’єм продукції за проміжок часу $[t;t+\Delta t]$ задається формулою $\Delta V = f(t^*)\Delta t$, де $t^* \in [t;t+\Delta t]$, яка тим точніша, чим менше Δt.

Розіб’ємо відрізок $[0;T]$ на n частин, тобто

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = T.$$

Для величини об’єму продукції ΔV_i, яка випущена за час $[t_{i-1};t_i]$ маємо

$$\Delta V_i = f(t_i^*)\Delta t_i ; t_i^* \in [t_{i-1};t_i].$$

Тоді $$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*) \Delta t_i .$$

Якщо $\max \Delta x_i \to 0$, то кожна з використаних рівностей $V = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta t_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t_i$ стає більш точною. Тому, за означенням інтеграла, $V = \int\limits_0^T f_T(t)dt$. Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, тоді $\int\limits_0^T f(t)dt$ – об'єм продукції, яка випущена за проміжок часу від 0 до T.

Достатня умова існування визначеного інтеграла

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, тоді вона інтегрована на $[a;b]$.

8.2. Властивості визначеного інтеграла

Деякі з цих властивостей випливають із означення інтеграла.

1. Однорідність: $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx; \forall c \in \mathrm{R}.$
2. Адитивність за функцією: $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$.
3. Лінійність: $\int\limits_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx + c_2\int\limits_a^b f_2(x)dx.$
4. Адитивність за проміжком: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, c \in [a;b].$
5. Якщо $f_1(x) \le f_2(x); x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)dx \le \int\limits_a^b f_2(x)dx.$
6. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$
7. Теорема про середнє значення.

Якщо $c \in [a;b]$, тоді $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

Геометричне тлумачення теореми: *при* $f(x) \geq 0$ *криволінійна трапеція рівновелика з відповідним прямокутником, що має з трапецією однакову основу*.

Доведення. З неперервності $f(x)$ випливає її обмеженість на $[a;b]$, тобто $m \leq M$, таке, що $m \leq f(x) \leq M$ на $[a;b]$. Проінтегруємо нерівність: $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$, або $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$; $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

Нехай $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$ Тоді існує хоча б одна точка $c \in [a;b]$ така, що $f(c) = \mu$. Тобто виконується рівність $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

8.3. Обчислення визначеного інтеграла

1. Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то для $\forall x \in [a;b]$ похідна функція $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ по змінній верхній межі дорівнює підінтегральній функції $f(x)$, тобто

$$\varphi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Доведення. Знайдемо похідну $\varphi(x)$, тобто

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_a^{\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

за теоремою про середнє значення,

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,\quad c\in(x,x+\Delta x].$$

Отже, якщо $f(x)$ – неперервна, то

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$$

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то для цієї функції існує первісна на $[a;b]$.

2. Формула Ньютона–Лейбніца.

Теорема 3. Якщо функція $F(x)$ є первісною для неперервної функції $f(x)$, тоді має місце *формула Ньютона–Лейбніца:*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Доведення. Для неперервної функції $y = f(x)$ функція $F(x)$ за умови, а $\varphi(x)$ за наслідком теореми 1 є первісними. Проте $\varphi(x)=F(x)+C,$ тобто

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)+C.$$

Нехай $x=a$, то $\int_a^b f(x)dx=F(a)+C$.

Нехай $x=b$, то $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Наслідок. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

Знаходження визначених інтегралів за формулою Ньютона–Лейбніца виконується за два кроки: спочатку знаходять $F(x)$, а потім знаходиться приріст первісної, що дорівнює визначеному інтегралу.

Приклад 1. Обчислити:

$$\text{а) } \int_0^1 x^3 dx; \qquad \text{б) } \int_0^1 e^{2x} dx.$$

Розв'язання.

а) Довільна первісна для функції $f(x) = x^3$ має вигляд

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + C.$$

Тоді

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

б) $\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$

8.4. Методи обчислення визначеного інтеграла

1. *Заміна змінної.*

Нехай функція $x = \varphi(\psi)$ відображає $[\alpha;\beta]$ на $[a;b]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $\varphi'(\psi)$ – неперервна на $[\alpha;\beta]$ функція. Тоді:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\psi))\varphi'(\psi))d\psi .$$

На відміну від невизначеного інтеграла тут не треба повертатися до старої змінної, але треба поміняти межі інтегрування.

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx;$ б $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx..$

Розв'язання.

а) Застосуємо заміну $x = a \sin t;$ $x = 0;$ $\sin t = 0;$ $t = 0$; $\sin t = 1;$ $t = \frac{\pi}{2};$ $dx = a\cos t dt;$ $x = a$.

Дістанемо $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a\cos t dt =$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

б) Застосуємо заміну $\sin x = t;\ x = 0;\ t = 0;\ x = \frac{\pi}{2};\ t = 1;$

$$\cos x dx = dt.$$

Дістанемо $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx = \int_0^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$

2. *Інтегрування частинами.*

Для u=u(x) та v=v(x), маємо:

$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$ якщо інтеграли існують.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int_1^e x \ln x dx;$ б) $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx.$

Розв'язання.

а) Покладемо $u = \ln x;\ du = \frac{1}{x} dx;\ dv = x dx; v = \frac{x^2}{2}.$

Дістанемо $\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^3}{2} \ln x \Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{2} \ln e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx =$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1);$$

б) Покладемо $u = x, du = dx,\ dv = \cos 2x dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x.$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

8.5. Невласні інтеграли

Існування визначеного інтеграла передбачає, щоб відповідна функція була обмеженою на скінченному інтервалі. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то будують нові інтеграли, які називають *невласними першого роду*, якщо інтервал нескінчений, та *другого роду*, якщо функція необмежена.

Користуючись геометричним змістом інтеграла, можна говорити про площу трапеції або з *нескінченною основою*, або з *нескінченою висотою*.

Означення 3. Невласними інтегралами першого роду інтегрованої функції $f(x)$ називають інтеграли:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ (рис.24;)}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

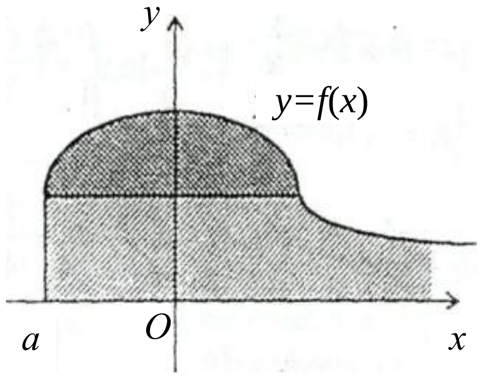

Рис. 24

Означення 4. Невласний інтеграл називають збіжним, якщо границя в його означенні існує і скінченна, і розбіжним у противному разі.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\infty} x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{+x} dx$.

Розв'язання. За означенням:

а) $\int\limits_0^{\infty} x dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} x dx = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{b^2}{2} - 0\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{b^2}{2} = \infty$ – інтеграл розбіжний;

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = 1 - \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 1 - 0 = 1$ – інтеграл збіжний.

Означення 5. Невласним інтегралом другого роду від функції $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$ за умови, що функція $f(x)$ має розрив другого роду при $x=a$, $x=b$, чи $x = c \in [a,b]$, називаються, відповідно, інтеграли:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$; (рис. 25); $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$;

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) \text{ (рис. 26).}$$

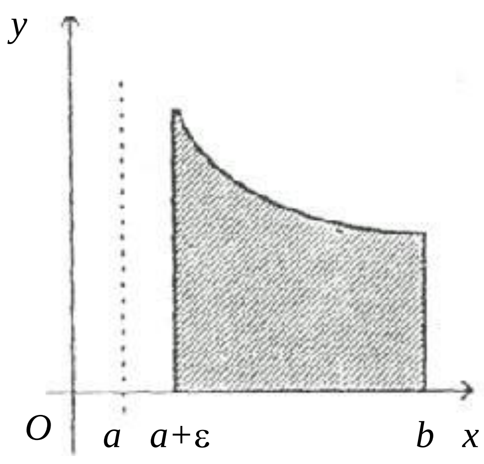

Рис.25

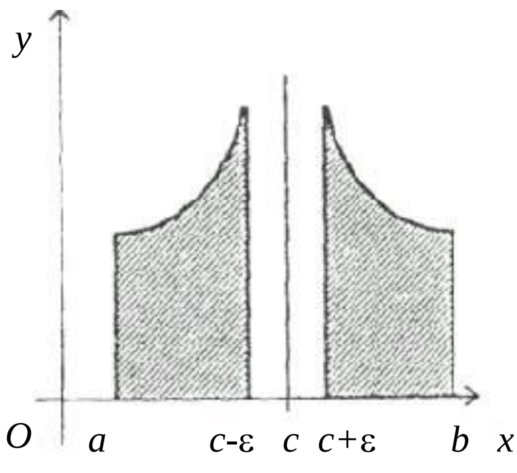

Рис. 26

Приклад 5. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. За означенням:

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$ – інтеграл збіжний.

Приклад 6. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$;   б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв'язання.

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ – невласний інтеграл 1-го роду.

За його означенням маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{o}^{+\infty} e^x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b =$$

$= e^0 + \lim\limits_{a\to-\infty} e^a + \lim\limits_{b\to+\infty} e^b - e^0 = 1+0+\infty-1=\infty$ – інтеграл розбіжний.

б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ – невласний інтеграл 2-го роду.

Функція має розрив 2-го роду в точці $1\in[0;3]$. Тоді, за означенням,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2}dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{3}(x-1)^{-2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\varepsilon-1} - 1 - \frac{1}{3-1} +$$

$+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+\varepsilon-1} = -\frac{3}{2} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{3}{2}+\infty=\infty$ – інтеграл розбіжний.

У курсі теорії ймовірності зустрічається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi},$$

який називають інтегралом *Ейлера–Пуассона.*

8.6. Геометричне застосування визначеного інтеграла

1. *Обчислення площі плоских фігур.*

Для площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x) \geq 0,\ x = a,\ x = b,\ y = 0$, безпосередньо з геометричного тлумачення інтеграла маємо

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x) \leq 0,$то, аналогічно, $S = -\int_a^b f(x)dx.$

Якщо $f(x)$ змінює свій знак на $[a;b]$, то $S = \int_a^b |f(x)|dx.$

Якщо фігура обмежена на $[a;b]$ неперервними функціями $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ такими, що $f_2(x) \geq f_1(x),$ то

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Приклад 7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x},\ x = 1;\ x = 4;\ y = 0.$

Розв'язання. Побудуємо фігуру. Маємо криволінійну трапецію (рис.27)

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_1^4 = \frac{2}{3}(2^3 - 1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 8. Знайти площу фігури обмеженої лініями $y = x^2 - 5x + 6,\ x = 2,\ x = 3,\ y = 0.$

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис.28) за формулою:

$$S = -\int_a^b f(x)dx = -\int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx = \int_3^2 (x^2 - 5x + 6)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\right|_3^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 - 9 + \frac{45}{2} - 18 = \frac{1}{6} \text{ (кв. од.).}$$

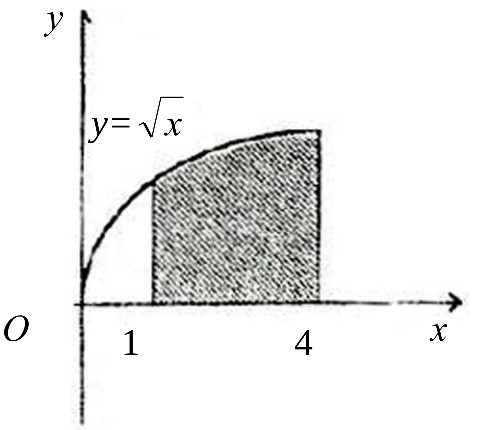

Рис.27

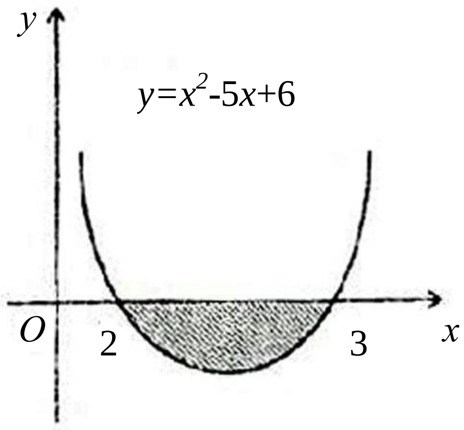

Рис.28

Приклад 9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину парабол:

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = \sqrt{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x^2; \\ y = x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0; x_2 = 1; \\ y_1 = 0; y_2 = 1. \end{matrix}$$

Побудуємо фігуру (рис.29).

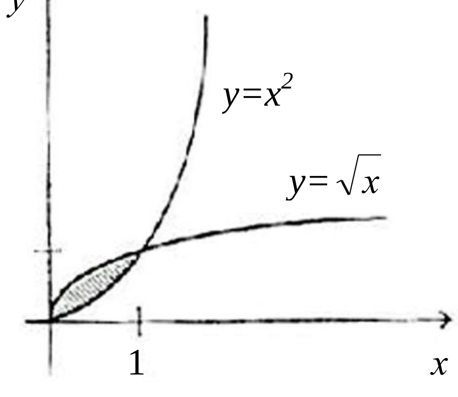

Рис. 29

На відрізку $[0;1]$ $\sqrt{x} \geq x^2$, тому, за формулою $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$, маємо

$$S=\int\limits_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

2. *Обчислення об'ємів тіл обертання.*

Нехай криволінійна трапеція, обмежена лініями $y=f(x)$; $x=a$; $x=b$; та $y=0$ обертається навколо осі Ox (рис.30). Об'єм тіла, утвореного обертанням, дорівнюватиме:

$$V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Формально замінивши змінну x на y , отримаємо формулу для обчислення об'єму V_y, який отримано від обертання криволінійної трапеції навколо осі Oy:

$$V_y=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy.$$

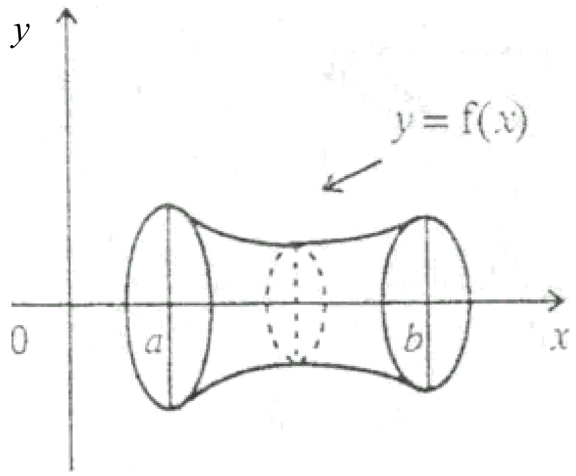

Рис. 30

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного від обертання фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+1;\ x=1; x=0; y=0$ навколо осі *Ох*.

Розв'язання. За формулою:

$$V_x=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx=\pi\int (1-2x^2+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8\pi}{15}\ \text{(куб. од.)}.$$

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, утвореного від обертання фігури, обмеженої лініями $y=x; y^2=5x-4$, навколо осі *Оу*.

Розв'язання. Побудуємо фігуру. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y=x; \\ y^2=5x-4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0; \\ y^2=5x-4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1; x_2=4; \\ y^2=1; y^2=16 \end{cases} \quad y=x.$$

Тоді $x=y=1;\ x=y=4$ (рис.31).

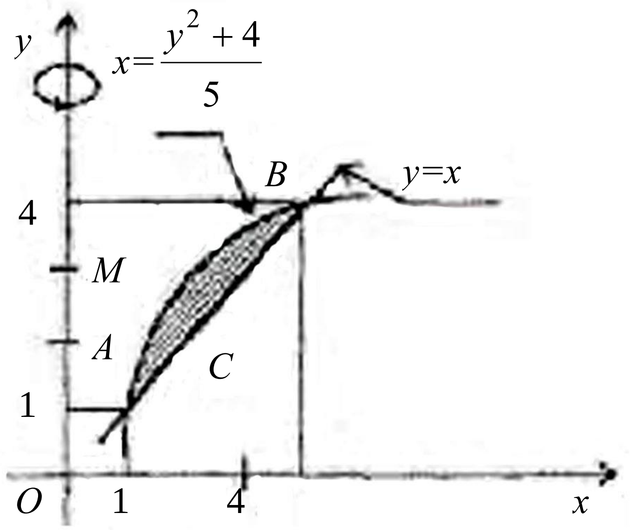

Рис. 31

З рисунка видно, що шуканий об'єм V_y дорівнює різниці двох об'ємів $V_y=V_{ABC}-V_{ABM}$, тому:

$$V_y = \pi\int_1^4 y^2 dy - \pi\int_1^4 \left(\frac{y^2+4}{5}\right)^2 dy = \pi\frac{y^3}{3}\Bigg|_1^4 - \frac{\pi}{25}\int(y^4+8y^2+16)dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{25}\left(\frac{y^5}{5}+\frac{8}{3}y^3+16y\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$\frac{63\cdot\pi}{3} - \frac{\pi}{25}\left(\frac{1024}{5}+\frac{512}{3}+64-\frac{1}{5}-\frac{8}{3}-16\right) \approx 3{,}475\pi \text{ (куб. од.)}$$

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ *N*-ЗМІННИХ

9.1. Основні поняття

Визначимо функцію n–змінних ($n \geq 2$) як відображення множини $X \subset R^n$ на множину $Y \subset \mathbf{R}$ $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Зупинимося на функції двох змінних, властивості якої можна розширити на функцію n–змінних.

Кожній парі $(x; y)$ значень двох незалежних однієї від одної величин x і y з деякої області **D** відповідає значення z, позначається $z = f(x, y)$.

Сукупність пар (x, y) значень x і y, при яких визначається функція $z = f(x, y)$, називається *областю визначення*.

Приклад 1. Знайти і зобразити графічно область визначення функції $z = (\ln(1 - x^2 - y^2)) / \sqrt{x - y}$.

Розв'язання. Область визначення **D** складається з усіх тих точок площини, для яких заданий аналітичний вираз набуває дійсних значень. Для цього необхідно, щоб виконувались такі умови:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > 0; \\ x - y > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 1; \\ y < x. \end{cases}$$

Геометричним місцем точок для першої умови будуть внутрішні точки круга, радіус якого 1, з центром у точці з координатами O(0;0).

Рівнянням границі області для другої умови буде бісектриса $y = x$.

Таким чином, область визначення **D** (рис. 32) складається з усіх точок, які одночасно належать і кругу $x^2 + y^2 < 1$, і частині площини $y < x$ (під бісектрисою $y = x$).

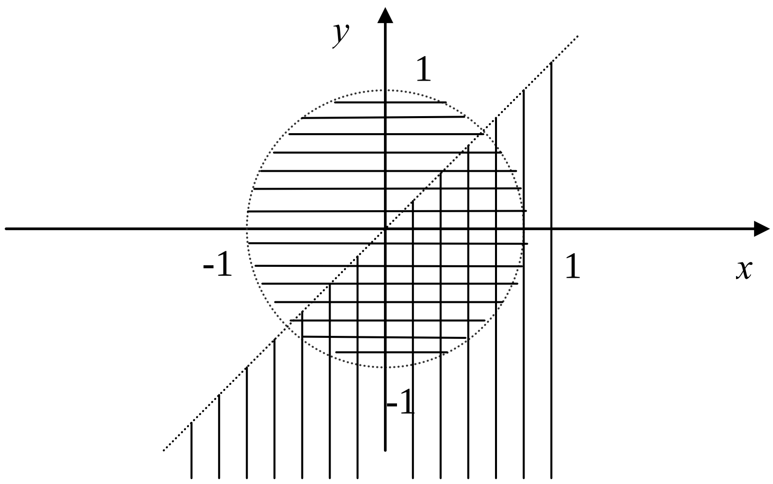

Рис. 32

У подальшому розглядатимемо, як правило, функції двох змінних.

Означення 1. *Околом точки* називається довільна відкрита область без своєї межі, яка містить дану точку.

У двовимірному випадку під околом розуміють круг, квадрат та ін.

Означення 2. Стала A називається *подвійною границею* функції $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл точки (x_0, y_0), що для всіх (x, y), що належать околу виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Вказаний факт коротко записується так: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Означення 3. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці (x_0, y_0), якщо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Основні властивості границь справедливі і в кратному вигляді.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin \frac{1}{y}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y}$ не існує, тому функція границі не має.

Приклад 3. Знайти точки розриву функції

$$U = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

Розв'язання. Функція не визначена в точках, в яких знаменник перетворюється на нуль. Тому вона має поверхню розриву – площину $2x + 3y - z + 4 = 0$.

9.2. Приріст функції, частинні похідні

Для функцій двох змінних $z = f(x, y)$ частинні та повний приріст визначаються так:

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y.$$

Частинні похідні $z = f(x, y)$ визначаються як і похідні для функції однієї змінної:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}; \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y},$$

тобто *частинною похідною* по x від функції $z = f(x, y)$ називається похідна по x і обчислюється в разі припущення, що y – стала, а частинною похідною по y від функції $z = f(x, y)$

називається похідна по *y,* обчислюється в разі припущення, що *x* – стала.

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції

$$z=\ln(x^2+y^2).$$

Розв'язання. Вважаючи *y* постійною, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Вважаючи *x* постійною, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Оскільки для $z=f(x;y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x;y)$, а $\frac{\partial z}{\partial y}=\psi(x;y)$, то їх можна теж диференціювати по *x* та по *y*. Тоді дістанемо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогічно визначаються та позначаються частинні похідні вищого від другого порядку, причому $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Результат многократного диференціювання по різних змінних не залежить від черговості диференціювання за умови, що при цьому "змішані" частинні похідні є неперервними.

Приклад 4. Для функції $z=\ln(x^2+y^2)$ знайти частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Маємо (приклад 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

Продиференціюємо повторно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=2\frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=2\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(Впевнились, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

9.3. Диференціал функції та його застосування

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, що відповідає відповідним приростам аргументів Δx та Δy, називають різницю

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x, y).$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо всюди в деякому околі цієї точки повний приріст може бути представлений у вигляді

$$\Delta z = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \theta(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, A_1 та A_2 – числа, що не залежать від Δx та Δy.

Диференціалом ∂z 1-*го порядку* функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту функції в точці, лінійна відносно Δx та Δy,

$$dz = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y;\ \Delta x = dx;\ \Delta y = dy.$$

Справедлива формула:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 5. Знайти диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Розв'язання. Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$ (див. прикл. 3).

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} dx + \frac{2y}{x^2+y^2} dy = \frac{2(xdx + ydy)}{x^2+y^2}.$$

При досить малому $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ має місце наближена формула

$$\Delta z \approx dz.$$

Формула для наближеного обчислення функції $z = f(x, y)$ в точці $x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y$ за відомими значеннями функції

$z = f(x, y)$ та її частинними похідними $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}\Delta y\,.$$

Приклад 6. Обчислити наближено $(0{,}98)^{2{,}01}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = x^y$. Значення функції в точці (1;2) дорівнює $z(1;2) = 1$.

В нашому випадку $\Delta x = -0{,}02;\ \Delta y = 0{,}01$. Частинні похідні в точці (1;2) будуть дорівнювати:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = \left.\left(y \cdot x^{y-1}\right)\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 2\,;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = \left.\left(x^y \ln x\right)\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 0.$$

Отже,

$$(0{,}98)^{2{,}01} \cong z(1;2) + \frac{\partial z(1;2)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(1;2)}{\partial y}\Delta y = 1 + 2 \cdot (-0{,}02) + 0 \cdot 0{,}01 = 0{,}96.$$

Диференціалом другого порядку $d^2 z$ функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її диференціала 1-го порядку при фіксованих значеннях $dx,\ dy$, $d(dz) = d^2 z$, аналогічно $d^3 z = d(d^2 z)$ і т.д. Взагалі, $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Надамо повному диференціалу операторного виду, де оператор

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy, \quad dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right).$$

Тоді $d^2 y = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Взагалі, $d^n y = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} z$.

Приклад 7. Знайти d^2z функції $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=\frac{2(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx^2-\frac{8xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy+\frac{2(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy^2$$ (див. прикл. 4).

9.4. Диференціювання складних функцій

Якщо $z=f(x,y)$ – диференційовна функція, а $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, то похідна складної функції

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Приклад 8. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=x^2+y^2$, де $x=\sin t$, $y=\cos t$.

Розв'язання. $\frac{dz}{dt}=2x\cos t-2y\sin t$.

Нехай $z=f(x,y)$, $x=\varphi(u,v)$; $y=\psi(u,v)$.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 9. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функції $z=x^2+y^2$, де $x=u^2+v^3$; $y=u^3-v^2$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot 2u+2y\cdot 3u^2=4xu+6yu^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \cdot 3v^2 - 2y \cdot 2v = 6xv^2 - 4yv.$$

9.5. Екстремум функції двох змінних

Означення екстремуму функції двох змінних аналогічне означенню екстремуму функції однієї змінної.

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$ і має в ній екстремум. Перетнемо поверхню $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ і тоді функція $z = f(x, y)$ матимеме екстремум в точці x_0. Враховуючи необхідну умову екстремуму функції однієї змінної, дістанемо:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \text{ аналогічно } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0.$$

Отже, необхідні умови екстремуму функції двох змінних $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Ці умови є не достатніми.

Достатня умова. Нехай

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Якщо в деякій точці $M_0(x_0; y_0)$ виконується необхідна умова екстремуму, то в цій точці функція $z = f(x, y)$:

1) має екстремум, якщо $AC - B^2 > 0$, причому максимум, якщо $A < 0$, та мінімум, якщо $A > 0$;

2) не має екстремуму, якщо $AC - B^2 < 0$;

3) за умови $AC - B^2 = 0$ ознака не є чинною, можливі випадки, коли в даній точці на деяких лініях функція набуває максимуму, мінімуму.

Приклад 10. Знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 18.$$

Визначимо точки в яких виконуються необхідні умови:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0; \\ 6xy - 18 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 16; \\ xy = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4; \\ xy = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -4; \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3; \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3; \\ y_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1; \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Тобто маємо чотири критичні точки $M_1(1;3)$; $M_2(3;1)$; $M_3(-3;-1)$; $M_4(-1;-3)$. Для перевірки достатньої умови існування екстремуму обчислимо вираз $\Delta = AC - B^2$ в кожній отриманій точці, де $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$, $\Delta = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$.

Тоді в точці M_1 $\Delta=36(1-9)<0$, екстремум функції в даній точці відсутній.

В точці M_2 $\Delta=36(9-1)>0$, $A=18>0$, M_2 – точка мінімуму функції.

В точці M_3 $\Delta=36(9-1)>0$ точка є точкою екстремуму. $A=-18<0$, тобто $M_3(-3;-1)$ точка максимуму.

В точці M_4 $\Delta=36(1-9)<0$ екстремум відсутній.

$f_n(M_3)_{\max} = 72$; $f(M_2)_{\min} = -72$.

Для знаходження найбільшого M та найменшого m значень функції, неперервної в обмеженій замкнутій області, необхідно:

1) знати критичні точки, що лежать як в середині області, так і на її границі. Обчислити значення функції у цих точках;
2) вибрати серед одержаних значень найменше і найбільше. Якщо це необхідно, то дослідити на екстремум за значеннями інших похідних.

Приклад 11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в області $x^2 + y^2 \le 4$.

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Прирівнюємо їх до нуля: $\begin{cases} 2x = 0; \\ -2y = 0. \end{cases}$ Одержали критичну точку $z(0;0)=0$. Далі знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області $x^2 + y^2 = 4$.

Функція $z = x^2 - y^2$ на границі матиме вигляд $z = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$, де $x \in [-2;2]$.

Знаходимо критичні точки функції $z = 2x^2 - 4$; $z' = 4x$; $4x=0$; $x=0$. Потім знаходимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу: $z|_{x=0} = -4$; $z|_{x=-2} = 4$; $z|_{x=2} = 4$. Отже найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ в області $x^2 + y^2 \le 4$ буде в точці $M_1(-2;0)$; $M_2(2;0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$; а найменше – в точках $M_3(0;2)$ і $M_4(0;-2)$ того самого кола.

9.6. Умовний екстремум

Функція $z = f(x, y)$ має *умовний екстремум* в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо існує окіл точки M_0 для всіх точок $M(x,y)$ ($M \neq M_0$), що задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

Задача знаходження умовного екстимуму зводиться до дослідження на екстремум функції Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

λ – множник Лагранжа.

Необхідні умови існування умовного екстремуму виражаються системою рівнянь

$$\frac{\partial L(M)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L(M)}{\partial y} = 0; \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай точка $M_0(x_0,y_0)$, λ_0 – довільний розв'язок систем і

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0, \lambda_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) & L''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 умовний максимум, при $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 12. Знайти умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа $L(x, y, \lambda) = z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3)$.

Маємо $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + 1 + \lambda;$ $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + \lambda$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda = -1; \\ -x + 2y + \lambda = -1; \\ x + y = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0; \\ x + y = -3; \end{cases} \quad x = y = -\frac{3}{2};$$

$$\varphi'_x = 1; \quad \varphi'_y = 1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 2 - 2 = -6 < 0,$$

Тобто при $x = -\dfrac{3}{2};$ $y = -\dfrac{3}{2}$ функція має умовний екстремум $z_{\min} = -\dfrac{19}{4}$.

9.7. Інші застосування функцій багатьох змінних Метод найменших квадратів

При математичній обробці кількісних експериментальних результатів часто користуються методом найменших квадратів. Найпростіша задача такого типу зустрічається при вимірюванні деякої величини x в однакових умовах n разів. Через похибки, яких неможливо уникнути, щоразу дістають різні величини $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо істинне значення цієї величини вважати за x, то величина $(x - x_1)$ називається похибкою при i – му вимірюванні. Метод найменших квадратів ґрунтується на тому, що за істинне значення величини x вважають таке значення, для якого сума квадратів похибок $f(x)$ мінімальна:

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2.$$

Тут важливо, що береться не сама сума похибок, бо тоді окремі (навіть великі) похибки з різними знаками будуть взаємно компенсуватися.

З умов екстремуму функції $f(x)$ знаходимо

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + ... + 2(x - x_n) = 0,$$

звідси $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$

У цій точці досягається мінімум, бо $f'(x) = 2x > 0.$

Розглянемо тепер складнішу задачу, коли треба встановити емпіричну формулу $y = f(x)$ за результатами вимірювання, яка б давала значення при $x = x_1$, $x = x_2,...., x = x_n$ по можливості мало відмінні від експериментальних даних y_1, $y_2,..., y_n$. Задача полягає у побудові такої кривої, яка б найближче проходила біля точок з координатами $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_n; y_n)$. Припустимо, наприклад, що точки з такими координатами лежать майже на прямій, рівняння якої запишемо у вигляді: $y = ax + b_0$.

Позначимо далі $E_i = ax_i + b - y_i$ і називатимемо їх *нев'язками*. Метод найменших квадратів полягає в тому, щоб за експериментальними даними знайти коефіцієнти a та b, щоб сума квадратів нев'язок була мінімальною,

$$u(a, b) = (ax_1 + b - y_i)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ... + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Сума квадратів нев'язок є функція від двох змінних a та b і необхідна умова екстремуму:

$\dfrac{\partial u}{\partial a} = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial b} = 0,$ або в розгорнутому вигляді:

$$2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + ... + (ax_n + b - y_n) = 0;$$

$$2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + ... + (ax_n + b - y_n) = 0.$$

У скороченому вигляді цю систему рівнянь відносно a та b можна записати так:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Аналогічно, якщо точки (x_i, y_i) лежать майже на параболі, рівняння якої запишемо у вигляді $y = ax^2 + bx + c$, то після перетворень отримаємо систему рівнянь відносно a, b, c:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = a\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i.$$

Таблиця 1

Схема методу найменших квадратів

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	$x^2 y$
1	x_p	$x_0{}^2$	$x_0{}^3$	$x_0{}^4$	y_0	$x_0 y_0$	$x_0{}^2 y_0$
1	x_1	$x_1{}^2$	$x_1{}^3$	$x_1{}^4$	y_1	$x_1 y_1$	$x_1{}^2 y_1$
1	x_2	$x_2{}^2$	$x_2{}^3$	$x_2{}^4$	y_2	$x_2 y_2$	$x_2{}^2 y_2$
1	x_3	$x_3{}^2$	$x_3{}^3$	$x_3{}^4$	y_3	$x_3 y_3$	$x_3{}^2 y_3$
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t^2

Приклад 13. Підібрати пряму $y = ax + b$ та $y = ax^2 + bx + c$ за даними точками (x_i, y_i).

Розв’язання наведено в табл. 2.

Таблиця2

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Обчислити похибки для параболи $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Складемо таблицю 3.

Таблиця 3

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0,78	0,608	0,475	0,370	2,50	1,950	1,520
1	1,56	2,434	3,796	5,922	1,20	1,872	2,921
1	2,34	5,476	12,813	29,982	1,12	2,621	6,133
1	3,12	9,734	30,371	94,759	2,25	7,020	21,902
1	3,81	14,516	55,306	210,717	4,28	16,307	62,128
5	11,61	32,768	102,761	341,750	11,35	29,770	94,604

1) $y = ax + b$.

$$\begin{cases} 32{,}768a + 11{,}61 = 29{,}770; \\ 11{,}61a + 5b = 11{,}35. \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, отримаємо

$a = 0{,}592;\quad b = 0{,}896,$

тобто

$$y = 0{,}592x + 0{,}896.$$

2) $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 23{,}768a + 11{,}6b + 5c = 11{,}350; \\ 102{,}761a + 32{,}768b + 11{,}61c = 29{,}770; \\ 341{,}750a + 102{,}761b + 32{,}768c = 94{,}604. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо:

$a = 1{,}009;\quad b = -4{,}043;\quad c = 5{,}045.$

Тобто

$$y = 1{,}009x^2 - 4{,}043x + 5{,}045.$$

Порівняємо вихідні значення y з відповідними значеннями

$$\bar{y} = ax^2 + bx + c.$$

Дані занесемо в таблицю 4.

Таблиця 4

x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$
0,78	2,50	2,505	0,005
1,56	1,20	1,194	-0,006
2,34	1,12	1,110	-0,010
3,12	2,25	2,252	0,002
3,81	4,28	4,288	0,008

Розділ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

10.1. Основні поняття

Диференціальні рівняння – потужний засіб дослідження навколишніх процесів. Диференціальними їх називають тому, що вони зв'язують похідні тих величин, які вони досліджують.

У загальному випадку диференціальне рівняння можна записати у вигляді $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, де F – деяка функція від n+2 змінних, n≥1. При цьому порядок старшої похідної, що входить до рівняння, називають *порядком диференціального рівняння*.

Наприклад, $y' - y + x = 0$ – рівняння 1-го порядку, $y^{\text{v}} = \sin x$ – п'ятого і т.д.

Розв'язком рівняння називають функцію $y = f(x)$, таку, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність.

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння називають задачею інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' = x^3$.

Розв'язання. Оскільки $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то рівняння рівносильне рівності $dy' = x^3 dx$, інтегруючи яку, маємо $y' = \dfrac{x^4}{4} + C_1$, де C_1 –

довільна постійна, $y' = \frac{dy}{dx}$, або $dy = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right)dx$, тобто $y = \frac{x^5}{20} + C_1 x + C_2$, C_2 – довільна стала.

Як видно з прикладу, розв’язок рівняння неоднозначний, тобто диференціальне рівняння задає сім’ю деяких кривих.

Щоб однозначно знайти розв’язок, задають певні початкові умови (на площині вимагають, щоб крива пройшла через задану точку).

Загальним розв’язком диференціального рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка є функцією змінної x та сталих C_i, $i = \overline{1, n}$.

Частинним розв’язком є розв’язок, який отримано із загального при деяких конкретних значеннях сталих $C_{10}, \dots, C_{n0}$.

10.2. Диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними

Означення 1. *Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними* називається рівняння:

$$M(x) \cdot N(y)dx + P(x) \cdot Q(y)dy = 0.$$

Для знаходження розв’язку цього рівняння треба розділити обидві частини рівняння на $N(y)$ та $P(x)$, а потім проінтегрувати.

Приклад 2. Знайти розв’язки рівняння $xydx + (x+1)dy = 0$.

Розв’язання. Розділимо обидві частина рівняння на $-y(x+1)$. Дістанемо $-\frac{x}{x+1}dx = \frac{dy}{y}$, звідси

$$-\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C;\ y = C(x+1)e^{-x}.$$

При $x = -1$ – маємо особливий розв’язок.

10.3. Однорідні диференціальні рівняння

Означення 2. Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо $f(x, y)$ – однорідна функція, тобто для довільного k $f(kx, ky) = f(x, y)$.

У цьому випадку $f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. За допомогою заміни $y = u \cdot z$ однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$ за умови, що $y(1) = \pi / 2$.

Розв'язання. Це рівняння – однорідне. Скориставшись заміною $z = \frac{y}{x}$; $y' = z'x + z$, дістанемо $z'x + z = z + \mathrm{tg}\,z$, $z'x = \mathrm{tg}\,z$; $\frac{dz}{\mathrm{tg}\,z} = \frac{dx}{x}$; $\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln C$; $\sin\frac{y}{x} = Cx$ – загальний розв'язок.

Підставимо початкові умови $x = 1$; $y = \pi / 2$, одержимо C=1. Тоді $y = x \arcsin x$ – частинний розв'язок.

10.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі

Означення 3. Рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називається *лінійним*, де $P(x)$ та $Q(x)$ – неперервні функції для всіх x із області визначення.

Для розв'язання рівняння скористаємось *методом Бернуллі*. Нехай $y = u \cdot v$, де $u(x)$ та $v(x)$ – нові невідомі функції.

Тоді $y' = u'v + v'u$ та $y = u \cdot v$

підставимо у рівняння:

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \text{ або } u'v + u(v' + vPu) = Q(x).$$

У виразі $y = u \cdot v$ один із множників можна вибрати довільно. Нехай $v' + P(x)v = 0$ – рівняння з відокремленими змінними. Тоді

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx; \quad \ln v = -\int P(x)dx; \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Загальним розв’язком лінійного рівняння буде

$$u'v = Q(x) \Rightarrow u = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} + C.$$

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$y' - y \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Розв’язання. За методом Бернуллі,

$y = u \cdot v; \;\; y' = u'v + v'u;$

$u'v + v'u - uv \operatorname{tg} x = \sin x;$

$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \sin x;$

$v' - v \operatorname{tg} x = 0; \;\; \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx; \;\; \ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = \frac{1}{\cos x}; \;\; u'v = \sin x \Rightarrow u' = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$

$u = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Остаточно $y = uv = \frac{4C - \cos 2x}{4\cos x}$.

Існує ще один метод розв’язання лінійного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$.

Спочатку знаходять розв’язок однорідного рівняння $y' + P(x)y = 0$, у загальному розв’язку однорідного рівняння константу С замінюють на невідому функцію $C(x)$, підставляють в неоднорідне рівняння і знаходять $C(x)$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок однорідного рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку розв’язок однорідного рівняння:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0; \;\; \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}; \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C; \quad y = Cx^2.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)\cdot x^2$; $y' = C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x$. Підставимо y, y' у рівняння:

$x(C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x) - 2C(x)\cdot x^4 = 2x$; $C'(x) = 2x$; $C(x) = x^2 + C$.

Отже, $y = C(x)x^2 = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$.

Означення 4. Рівняння виду $y' + P(x)y = Q(x)y$ називається *рівнянням Бернуллі*, де $P(x)$ та $Q(x)$ – неперервні функції для всіх x і з області визначення.

Рівняння можна розв'язувати безпосередньо за описаними раніше методами, а можна звести до лінійного, поділивши обидві частини рівняння на y^λ і використати заміну $y^{1-\lambda} = z$.

Приклад 6. Зайти розв'язок рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0$.

Розв'язання. $Q(x) = -\cos x$; $\lambda = 2$. Поділивши рівняння на y^2, дістанемо $\frac{y'}{y^2} - \frac{\mathrm{tg}\,x}{y} = -\cos x$. Замінимо $y^{-1} = z$, $z' = -\frac{1}{y^2}y'$; $z' - z\cdot\mathrm{tg}\,x = -\cos x$. Маємо лінійне рівняння.

Знайдемо розв'язок однорідного рівняння $\frac{dz}{z} = \mathrm{tg}\,x dx$; $\ln|z| = -\ln|\cos x| + \ln C$; $z = \frac{C}{\cos x}$. Вважаючи, що C=$C(x)$, одержимо

$$z = \frac{C(x)}{\cos x};\quad z' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Підставивши z, z' в рівняння, дістанемо

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\cdot\mathrm{tg}\,x = -\frac{C^2(x)}{\cos^2 x}\cdot\cos x;$$

$$C'(x)\cos x + C(x)\sin x - C(x)\sin x = C^2(x)\cos x;\ C'(x) = -C^2(x);$$

$$-\frac{d(C(x))}{C^2(x)} = dx;\ C(x) = \frac{1}{x+C};\quad z = \frac{1}{(x+C)\cos x}.$$

$$y = z^{-1} = (x+C)\cos x.$$

10.5 Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння в повних диференціалах має вигляд:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

де ліва частина – повний диференціал деякої функції $u(x,y) = C$,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du\,,$$

тому повинна виконуватись умова $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, бо $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Загальний розв'язок має вигляд $u(x,y) = C$.

Приклад *7*. Знайти загальний розв'язок рівняння $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$.

Розв'язання. Впевнимося, що це рівняння в повних диференціалах,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Отже, існує функція $u(x,y)$, для якої $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2 y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2$.

Проінтегруємо першу рівність по x, тоді $u(x,y) = x^2 + x^3 y + \varphi(y)$. Функцію $\varphi(y)$ знайдемо, підставивши $u(x,y)$ у другу рівність:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2;\ \varphi'(y) = -3y^2;\ \varphi(y) = -y^3 + C\,.$$

Отже, $u(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3 = C$.

10.6. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку

У деяких випадках диференціальне рівняння *n*-го порядку може бути зведене до рівняння нижчого порядку. Такі рівняння називають *рівняннями, що допускають зниження порядку*.

1. Рівняння вигляду $y^{(n)}=f(x)$. Загальний розв'язок одержимо, якщо проінтегруємо рівняння n разів.

$$y=\int\int\ldots\int f(x)dx\ldots dx.$$

Приклад 8. Знайти розв'язок рівняння $y'''=\sin\frac{x}{2}-x.$

Розв'язання. $y''=\int(\sin\frac{x}{2}-x)dx=-2\cos\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+C_1;$

$$y'=\int(-\cos\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+C_1)dx=-4\sin\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2;$$

$$y=\int(-4\sin\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2)dx=8\cos\frac{x}{2}-\frac{x^4}{24}+C_1\cdot\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2. Якщо в рівняння не входить y та похідні до (k-1) порядку включно, тобто $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0,$ для розв'язання використовується заміна $z=y^{(k)}$.

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''(x^2+1)=2xy';y(0)=1;y'(0)=3$.

Розв'язання. Зробимо заміну $y'(x)=z(x),$ тоді $y''(x)=z'(x).$

$$z'(x^2+1)=2xz;\quad \frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{x^2+1};\quad \ln|z|=\ln\left|x^2+1\right|+\ln C_1;$$

$$z=C_1(x^2+1)\Rightarrow\ y'=C_1(x^2+1);dy=C_1(x^2+1)dx;$$

$$y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2.$$

Підставивши початкові умови, одержимо $C_1=3;C_2=1.$

Отже, $y=x^3+3x+1.$

3. Рівняння вигляду $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0,$ яке не містить x, допускає зниження порядку за допомогою підстановки $y'(x)=z(x),\ y''(x)=z\frac{dz}{dy}$ і т.д.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'^2+2yy''=0.$

Розв'язання. У рівнянні відсутня змінна x, тому використовуємо підстановку $y'(x)=z(y),\ y''(x)=z\dfrac{dz}{dy}$. Одержимо

$$z^2+2yz\frac{dz}{dy}=0;\ z\left(z+2y\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Маємо $z=0$ і $z+2y\dfrac{dz}{dy}=0$.

При $z=0 \quad y'=0; y=C$.

Для другого рівняння

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{2y};\ \ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|y|+\ln C_1;\ z=\frac{C_1}{\sqrt{y}};\ y'=\frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\sqrt{y}dy=C_1dx;\ \frac{2}{3}y^{3/2}=C_1x+C_2;\ y=\left(\frac{2}{3}C_1x+\frac{2}{3}C_2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

10.7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Загальний вигляд лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_n=0.$$

Для знаходження загального розв'язку записуємо характеристичне рівняння: $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=0$.

Окремі розв'язки залежать від коренів цього рівняння.

Характеристика коренів	Окремі розв'язки рівняння
$\lambda-$ простий дійсний корінь	$e^{\lambda x}$
$\lambda-$ дійсний корінь кратності k	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x},..., x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\alpha\pm\beta i$ – прості комплексні спряжені корені	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$
$\alpha\pm\beta i$ – комплексні спряжені корені кратності ke	$e^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$. У випадку рівняння другого порядку $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, розв'язуємо характеристичне рівняння $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$.

При розв'язуванні квадратного рівняння можливі три випадки:

1) Корені рівняння дійсні й різні: λ_1, λ_2. Тоді окремі розв'язки мають вигляд $y_1 = e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2) Корені рівняння дійсні й однакові: $\lambda_1 = \lambda_2$. Тоді

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$.

Загальний розв'язок: $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$.

3) Корені комплексно спряжені $\alpha \pm \beta i$. Тоді $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$;

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Загальний розв'язок: $y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$.

Приклад 11. Знайти розв'язок рівняння $2y'' + 5y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Отже, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$.

Приклад 12. Знайти розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Отже, $y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}$.

Приклад 13. Знайти розв'язок рівняння $y^{IV} + 2y''' - 3y'' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1; \lambda_4 = -3$.

Отже, $y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = x e^{0x} = x$; $y_3 = e^x$; $y_4 = e^{-3x}$.

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-3x}.$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + 4y'' + 13y' = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 - 3i, \lambda_3 = -2 + 3i$.

Отже $y = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x$.

10.8 Лінійні неоднорідні рівняння

Рівняння вигляду $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$ де $f(x)$ – неперервна функція, називаються *неоднорідними.*

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння і якогось окремого розв'язку неоднорідного рівняння $y_{\text{З.Р.}} = y_{\text{З.О.}} + y_{\text{Ч.Н.}}$.

Метод невизначних коефіцієнтів

Для правих частин спеціального вигляду окремий розв'язок знаходиться методом невизначених коефіцієнтів. Нехай $f(x) = e^{\alpha x}(P_n \cos \beta x + Q_m \sin \beta x)$, де $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлени степенів n та m, відповідно. В цьому випадку окремий розв'язок $y_{\text{0.Н.}}$ шукаємо у вигляді $y_{\text{0.Н.}} = x^r e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x)$; $k = \max(m, n)$, $\widetilde{P}_k(x), \widetilde{Q}_k(x)$ – многочлени від x k-го степеня загального вигляду з невизначеними коефіцієнтами, а r – кратність кореня $\lambda = \alpha \pm \beta i$ характеристичного рівняння (якщо $\alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то r =0).

Таблиця

Частинні розв'язки для різних видів правих частин неоднорідного рівняння

Права частина	Корені характеристичного рівняння	Види частинних розв'язків
1. $P_m(x)$	1. Число 0 не є коренем х.р.	$\widetilde{P}_m(x)$
	2.Число 0 є коренем х.р. кратності r	$x^r \widetilde{P}_m(x)$
2. $P_m(x)e^{\alpha x}$	1. Число α - корінь х.р. кратності r	$x^r \widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	2. Число α -не є коренем х.р.	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
3. $P_n(x)\cos\beta x + {}$ $+ Q_m(x)\sin\beta x$	1.Числа $\pm\beta i$ не є коренями х.р.	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
	2. Числа $\pm\beta i$ є коренями х.р. кратності r	$x^r(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
4. $e^{\alpha x}(P_n\cos\beta x + {}$ $+ Q_m\sin\beta x)$	1. Числа $\alpha\pm\beta i$ не є коренями х.р	$e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + {}$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
	2. Числа $\alpha\pm\beta i$ є коренями х.р. кратності r	$e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + {}$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)x^r$

Приклад 15. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - y = 4e^x$ за умов $y(0) = 0;\quad y'(0) = 1$.

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння: $y'' - y = 0; \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0;\quad \lambda_1 = 1;\quad \lambda_2 = -1;$

$$y_{\text{З.О.}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Шукаємо окремий розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$y_{\text{З.Н}} = A\cdot e^x\cdot x;$ (випадок 1.2 таблиці) $y'_{\text{З.Н}} = A\cdot e^x(x+1);$

$y''_{\text{З.Н.}} = A\cdot e^x(x+2);$

$A\cdot e^x(x+2) - Ae^x\cdot x = 4e^x;\ 2A\cdot e^x = 4e^x; \Rightarrow A = 2;$

$y_{\text{З.Н.}} = 2e^x \cdot x.$

Тоді $y_{\text{З.Р.}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2xe^x.$

Треба знайти C_1 та C_2, виходячи з початкових умов.

З умови $y(0) = 0$ маємо $C_1 + C_2 = 0.$

$$y'_{\text{З.Р.}} = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2e^x + 2x \cdot e^x.$$

Виходячи з другої умови, $y'(0) = 1 \Rightarrow -C_1 + C_2 = -1.$

Отже, $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ -C_1 + C_2 = -1, \end{cases}$ звідси, $C_1 = \frac{1}{2}$; $C_2 = -\frac{1}{2}$.

Частинний розв'язок рівняння

$$y_{\text{Ч.Р.}} = \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} e^x + 2xe^x.$$

Метод Лагранжа

Метод невизначених коефіцієнтів може бути застосований, коли права частина має спеціальний вигляд. Метод Лагранжа може бути застосованим для будь-якого неоднорідного лінійного рівняння і дозволяє знайти загальний розв'язок такого рівняння, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y_{\text{З.О.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Метод полягає в тому, що загальний розв'язок шукають у вигляді: $y_{\text{З.Н.}} = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$. $C_i(x)$ при $i = \overline{1, n}$ – невідомі функції.

Для диференціального рівняння другого порядку $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ записують систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases}$$

знаходять її розв'язки $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, а далі $C_1(x) = \int C_1'(x) dx + C_1$; $C_2(x) = \int C_2'(x) dx + C_2$, тут C_1 та C_2 – сталі, які підставляють у загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x.$

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2+1=0$ дорівнюють $\lambda_{1,2}=\pm i$, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{\text{з.о.}}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Використовуючи метод Лагранжа, загальний розв'язок нашого рівняння запишемо у вигляді

$$y_{\text{з.н.}}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0; \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на $\sin x$, а друге на $\cos x$ та додамо їх. Тоді

$$C_2'(x)=\operatorname{tg}^2 x\cos x=\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Аналогічно, перше рівняння домножимо на $\cos x$, а друге на $-\sin x$ та додамо їх. Тоді

$$C_1'(x)=-\operatorname{tg}^2 x\sin x=-\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

Проінтегруємо отримані результати:

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=-\frac{1}{\cos x}-\cos x+C_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x+C_2.$$

І нарешті,

$$y_{\text{з.р.}}=\left(-\frac{1}{\cos x}-\cos x+C_1\right)\cos x+\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x+C_2\right)\sin x \;-$$

шуканий загальний розв'язок.

10.9. Диференціальні рівняння в прикладах

Приклад 17. Матеріальна точка рухається по прямій зі сталим прискоренням. Знайти закон руху точки.

Розв'язання. Прискорення a є похідною від швидкості: $\dfrac{dv}{dt}=a$, звідси

$$V=\int dv=\int adt=at+C_1\ .\ V=C_1+at\ .$$

Для знаходження C_1 вважатимемо, що початкова швидкість дорівнює V_0, тобто при $t=0$ $V=V_0$. Тоді $V_0=0+C_1$, таким чином, $V=V_0+at$.

Швидкість – це похідна шляху s по часу t: $V=\dfrac{ds}{dt}$, а звідки $\dfrac{ds}{dt}=at+V_0$, проінтегрувавши цю рівність, маємо $s=\dfrac{1}{2}at^2+V_0t+C_2$.

Для знаходження C_2 вважатимемо, що початкове положення точки на прямій при $t=0$ буде s_0. При цих значеннях маємо $s_0=0+0+C_2\Rightarrow C_2=s_0$, звідси $s=\dfrac{1}{2}dt^2+V_0t+s_0$.

Приклад 18. Знайти криву, яка проходить через точку $M(0,1)$ і має всюди нормаль, яка дорівнює p.

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ належить шуканій кривій $y=f(x)$ (рис. 33).

Тоді піднормаль $KN=y\,\mathrm{tg}\,\alpha=y\cdot\dfrac{dy}{dx}$ з умови $KN=p$, маємо $y\cdot\dfrac{dy}{dx}=p$. Проінтегрувавши це диференціальне рівняння, маємо $y^2=2px+C$. Знайдемо ту криву, яка проходить через точку $M(0,1)$, $y^2=2px+C$: $1=2p\cdot 0+C\Rightarrow C=1$, $y^2=2px+1-$ шукана крива.

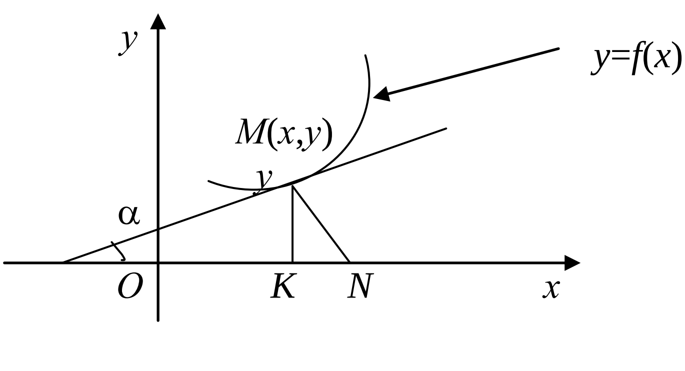

Рис. 33

Приклад 19. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість s_0. Яка буде вартість обладнання після його використання впродовж *t* років?

Розв’язання. Нехай s_1 – вартість обладнання в момент часу *t*. Знецінювання виражається різницею $s_0 - s_1$. Швидкість знецінювання $\frac{d(s_0 - s_t)}{dt}$ пропорційна фактичній вартості в момент t, s_t, тобто $\frac{d(s_0 - s_t)}{dt} = ks_t$ з початковою умовою $t = 0$, $s_t = s_0$.

$$-\frac{ds_t}{dt} = ks_t, \text{ або } \frac{ds_t}{s_t} = -kdt;$$

$$\ln|s_t| = -kt + \ln|C|, \ \ln\left|\frac{s_t}{C}\right| = -kt;$$

$$s_t = Ce^{-kt}$$

З початкових умов виберемо сталу *C*.

$$s_0 = Ce^0; \ C = s_0.$$

$s_t = s_0 e^{-kt}$ – вартість обладнання в момент часу *t*.

10.10. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

1. Однорідні системи диференціальних рівнянь

Загальний вигляд системи звичайних однорідних диференціальних рівнянь такий:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь являє собою сукупність n рівностей, які виражають залежність між аргументом t, функціями цього аргументу та їхніми похідними.

Систему називають *нормальною*, якщо в лівих частинах фігурують похідні тільки першого порядку, а праві частини зовсім не містять похідних. Будь-яку систему можна завжди перетворити у нормальну. Для цього досить кожну похідну невідомих функцій, за винятком найвищих, замінити новою невідомою функцією.

Розв'язати систему – означає відшукати такі функції $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, які перетворюють систему рівнянь у сукупність тотожностей. Система n лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами шляхом послідовного виключення $(n-1)$-ї невідомої функції, зводиться до одного лінійного диференціального рівняння n-го порядку відносно однієї функції.

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння системи по *t*. Дістанемо

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2\frac{dx_1}{dt} + 2\frac{dx_2}{dt}.$$

Із першого рівняння $x_2 = \dfrac{\dfrac{dx_1}{dt} - 2x_1}{2}$ підставимо у праву частину другого рівняння

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{3}{2}\left(\frac{dx_1}{dt} - 2x_1\right) = \frac{3}{2}\frac{dx_1}{dt} - 2x_1$$

Отриманий результат підставимо у продиференційоване перше рівняння, тоді

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=2\frac{dx_1}{dt}+3\frac{dx_1}{dt}-4x_1, \text{ або}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-5\frac{dx_1}{dt}+4x_1=0.$$

$$x_2=\frac{\frac{dx_1}{dt}-2x_1}{2}=\frac{C_1e^t+4C_2e^{4t}-2C_1e^t-2C_2e^{4t}}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

Отже, розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1=C_1e^t+C_2e^{4t}; \\ x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}. \end{cases}$$

2. Неоднорідні системи

Загальний вигляд системи звичайних неоднорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами такий:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+\varphi_1(t); \\ .... \qquad . \\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n+\varphi_n(t). \end{cases}$$

Послідовним виключенням невідомих функцій система зводиться до одного диференціального неоднорідного рівняння n-го порядку.

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок системи неоднорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=-5x_1+2x_2+e^t; \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1-6x_2+e^{-2t}. \end{cases}$$

Розв'язання. Виключимо невідому функцію x_1 з системи. Для цього визначимо її з другого рівняння:

$$x_1 = \frac{dx_2}{dt} + 6x_2 - e^{-2t}.$$

Підставивши x_1 в перше рівняння, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 11\frac{dx_2}{dt} + 28x_2 = 3e^{-2t} + e^t.$$

Розв'яжемо отримане рівняння.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$ має корені $\lambda_1 = -7$; $\lambda_2 = -4$.

$$x_{2_{\text{З.Р.}}} = C_1e^{-7t} + C_2e^{-4t}. \quad x_{2_{\text{О.Н.}}} = Ae^{-2t} + Be^t.$$

$4Ae^{-2t} - 22Ae^{-2t} + 28Ae^{-2t} + Be^t + 11Be^t + 28Be^t = 3e^{-2t} + e^t$;

$10Ae^{-2t} + 40Be^t = 3e^{-2t} + e^t$.

Звідси $A = \frac{3}{10}$; $B = \frac{1}{40}$.

$$x_2 = C_1e^{-7t} + C_2e^{-4t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t.$$

$$x_1 = \frac{dx_2}{dt} + 6x_2 - e^{-2t} = -7C_1e^{-7t} - 4C_2e^{-4t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t +$$

$$+ 6C_1e^{-7t} + 6C_2e^{-4t} + \frac{9}{5}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^t - e^{-2t} =$$

$$= -C_1e^{-7t} + 2C_2e^{-4t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t.$$

Отже, розв'язок системи

$$x_1 = -C_1e^{-7t} + 2C_2e^{-4t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t;$$

$$x_2 = C_1e^{-7t} + C_2e^{-4t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

І. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

1–10. Дано матриці A,B,C:

1) знайти $A+B$; AC; $2A+4B$;

2) обчислити $\det A$, $\det B$;

3) розв'язати матричне рівняння $A\times B=C$.

1. $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&0\\2&-5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8&-4&-4\\18&5&10\\17&-3&-1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-6&4\\3&-4&0\\2&-5&5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&0\\2&-5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&0\\2&-5&3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&2&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&0\\2&-5&3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8&-4&-4\\18&5&10\\17&-3&-1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&2\\2&1&4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&2\\2&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

11–20. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_{44}. \end{cases}$$

Довести її сумісність та розв'язати трьома способами:

1) методом Гаусса;
2) методом Крамера;
3) матричним методом.

11. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 10; \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11; \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40; \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8; \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_4 = -5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -8; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -6; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6; \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 8; \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

21. $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 4;\ \widehat{\vec{a},\vec{b}} = 60^0$ Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b},\ (\vec{a} - 2\vec{b})^2$.

22. $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 5$. При якому α вектори $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ та $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ будуть перпендикулярними?

23. Відомо, що $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 1;\ |\vec{c}| = 4;$ та $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знайти $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

24. $\vec{a}(\alpha;3;4);\ \vec{b}(1;5;6)$. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b},\ \vec{a} \cdot \vec{b}$.

25. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(-3;5;6);\ B(1;-5;7);\ C(8;-3;-1);\ D(4;7;-2)$ – квадрат.

26. Знайти вектор $\vec{x}$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a}(1;2);$ та $\vec{b}(2;1)$.

27. Знайти кут між векторами l_1 та l_2 $\left(|\vec{l}_1| = |\vec{l}_2| = 1\right)$, якщо відомо, що вектори $\vec{a} = \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2$ та $\vec{b} = 5\vec{l}_1 - 4\vec{l}_2$ перпендикулярні.

28. $|\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 8;\ |\vec{a} - \vec{b}| = 6$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

29. $|\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 4;\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 60^0$. Знати $|\vec{a} - \vec{b}|$.

30. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо $\vec{x} \perp \vec{a}(2;3;4);\ |\vec{x}| = 25;\ \vec{x} \perp \vec{b}(1;0;2)$.

31. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;1;1);\ B(2;3;4);\ C(4;3;2)$.

32. Знайти об'єм тетраедра $ABCD$ з вершинами в точках $A(2;-3;5);\ B(-2;-2;3);\ C(0;2;1);\ D(3;2;4)$.

33. $|\vec{a}| = 4;\ |\vec{a}_2| = 2;\ |\vec{a}_3| = 6$. Знайти $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\vec{a}_3$.

34. Дано тетраедр з вершинами $A(1;1;1)$; $B(2;0;2)$; $C(2;2;2)$; $D(3;4;-3)$. Обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.
35. $\vec{a}_1(1;0;3)$; $\vec{a}_2(2;46)$; $\vec{a}_3(-1;0;-3)$. Знайти $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\vec{a}_3$.
36. $\vec{a}(3;-1;2)$; $\vec{b}(1;2;-1)$. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$.
37. $\vec{a}(4;2;1)$; $\vec{b}(0;2;3)$. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$.
38. Чи належать точки $A_1(0;0;1)$; $A_2(1;0;1)$; $A_3(4;1;0)$; $A_4(0;0;0)$ одній площині?
39. Чи належать точки $A_1(1;2;1)$; $A_2(1;0;5)$; $A_3(0;1;4)$; $A_4(0;0;0)$ одній площині?
40. $\vec{a}(3;4;5)$; $\vec{b}(2;3;8)$. Знайти $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

41–50. Дано вектори $\vec{x}(x,y,z)$, $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати $\vec{x}$ в цьому базисі.

41. $\vec{x}(6;12;-1)$; $\vec{a}(1;3;0)$; $\vec{b}(2;-1;1)$; $\vec{c}(0;-1;2)$.
42. $\vec{x}(1;-4;4)$; $\vec{a}(2;1;3)$; $\vec{b}(0;3;2)$; $\vec{c}(1;1;4)$.
43. $\vec{x}(-9;5;5)$; $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(1;0;2)$; $\vec{c}(1;2;3)$.
44. $\vec{x}(-5;-5;3)$; $\vec{a}(5;1;6)$; $\vec{b}(1;2;4)$; $\vec{c}(1;8;11)$.
45. $\vec{x}(13;2;1)$; $\vec{a}(1;3;8)$; $\vec{b}(11;0;7)$; $\vec{c}(2;3;4)$.
46. $\vec{x}(-8;4;2)$; $\vec{a}(1;1;4)$; $\vec{b}(4;3;0)$; $\vec{c}(11;12;13)$.
47. $\vec{x}(0;2;3;)$; $\vec{a}(5;2;9)$; $\vec{b}(1;7)$; $\vec{c}(0;13;1)$.
48. $\vec{x}(3;2;1)$; $\vec{a}(3;4;7)$; $\vec{b}(1;0;1)$; $\vec{c}(2;3;1)$.
49. $\vec{x}(5;8;9)$; $\vec{a}(0;2;3)$; $\vec{b}(1;2;3)$; $\vec{c}(11;3;7)$.
50. $\vec{x}(1;7;0)$; $\vec{a}(0;1;0)$; $\vec{b}(4)$; $\vec{c}(13;19;1)$.

51–60. Дано загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$. Записати для прямої рівняння:

а) з кутовим коефіцієнтом;

б) у відрізках на осях;

в) у нормальному виді;

д) у параметричному виді.

51. A=9; B=0; C= –1.
52. A=7; B= –5; C=1.
53. A=2; B=0; C=5.
54. A=5; B=2; C=3.
55. A=0; B=1; C=0.
56. A=4; B=3; C=4.
57. A=3; B=5; C=6.
58. A=5; B=7; C=1.
59. A=2; B=3; C=5.
60. A=0; B=6; C=7.

61-70. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(x_1;x_2)$ та $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Скласти рівняння висоти та медіани цього трикутника, проведені з вершини В.

61. $x_1 = 5;\ y_1 = 6;\ x_2 = -1;\ y_2 = 12;\ x_3 = 1;\ y_3 = 0.$
62. $x_1 = 2;\ y_1 = 3;\ x_2 = 3;\ y_2 = 5;\ x_3 = 4;\ y_3 = 5.$
63. $x_1 = 1;\ y_1 = 16;\ x_2 = 7;\ y_2 = 9;\ x_3 = 3;\ y_3 = 7.$
64. $x_1 = 2;\ y_1 = 15;\ x_2 = 6;\ y_2 = 8;\ x_3 = 4;\ y_3 = 1.$
65. $x_1 = 3;\ y_1 = 14;\ x_2 = 4;\ y_2 = 7;\ x_3 = 1;\ y_3 = 4.$
66. $x_1 = 4;\ y_1 = 13;\ x_2 = 3;\ y_2 = 6;\ x_3 = 2;\ y_3 = 4.$
67. $x_1 = 5;\ y_1 = 12;\ x_2 = 2;\ y_2 = 5;\ x_3 = 5;\ y_3 = 6.$
68. $x_1 = 6;\ y_1 = 11;\ x_2 = 1;\ y_2 = 4;\ x_3 = 11;\ y_3 = 0.$
69. $x_1 = 7;\ y_1 = 10;\ x_2 = 0;\ y_2 = 3;\ x_3 = 12;\ y_3 = 7.$
70. $x_1 = 8;\ y_1 = 9;\ x_2 = 1;\ y_2 = 2;\ x_3 = 7;\ y_3 = 9.$
71. Написати рівняння кривої, сума квадратів віддалей від кожної точки якої до точок $M_1(-3;0)$ та $M_2(3;0)$ дорівнює 50.
72. Написати рівняння параболи, фокус якої знаходиться в точці $F(0;3)$.
73. Написати рівняння кривої, у якої віддаль від кожної точки до точки $M_1(-1;1)$ вдвоє менша від віддалі до точки $M_2(-4;4)$.
74. Написати рівняння кривої, кожна точка якої знаходиться на однаковій віддалі від точки $F(2;2)$та осі Ох.
75. Написати рівняння еліпса, у якого с=2, а віддалі між директрисами дорівнюють 6.

76. Написати рівняння гіперболи, у якої $\varepsilon = 1{,}5$, а віддаль між директрисами дорівнює 8/3.
77. Написати рівняння кривої, віддаль від кожної точки якої до точки $M_1(1{,}1)$ вдвоє більша за віддаль до точки $M_2(-4;0)$.
78. Написати рівняння кривої, сума квадратів віддалей від кожної точки до точок $A(-4;0)$, $B(0;4)$ дорівнює 48.
79. Написати рівняння кривої, віддаль від кожної точки якої до точки $F(3;0)$ дорівнює віддалі до прямої x+3=0.
80. Написати рівняння кривої, сума віддалей від кожної точки якої до точок $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$ є величина стала і дорівнює 10.

81-90. Дано координати вершин піраміди *ABCD*. Знайти:

1) довжину ребра *AB*;
2) кут між ребрами *AB* та *AC*;
3) рівняння ребер піраміди;
4) рівняння грані *ABC*;
5) рівняння висоти, опущеної з вершини *D* на грань *ABC*, довжину висоти;
6) площу грані *ABC*;
7) рівняння площини, що проходить через точку *D* паралельно до грані *ABC*;
8) кут між ребром *AD* та гранню *ABC*;
9) об'єм піраміди;
10) зробити рисунок.

81. $A(-4;2;6)$; $B(2;-3;0)$; $C(-10;5;8)$; $D(-5;2;-4)$.
82. $A(7;2;4)$; $B(7;-1;-2)$; $C(3;3;1)$; $D(-4;2;1)$.
83. $A(2;1;4)$; $B(-1;5;-2)$; $C(-7;-3;2)$; $D(-6;-3;6)$.
84. $A(-1;-5;2)$; $B(-6;0;-3)$; $C(3;5;-3)$; $D(-10;6;7)$.
85. $A(0;-1;-1)$; $B(-2;3;5)$; $C(1;-5;9)$; $D(-1;-6;3)$.
86. $A(5;2;0)$; $B(2;5;0)$; $C(1;2;4)$; $D(-1;1;1)$.
87. $A(2;-1;-2)$; $B(1;2;1)$; $C(5;0;-6)$; $D(-10;9;7)$.
88. $A(-2;0;-4)$; $B(-1;7;1)$; $C(4;-8;-4)$; $D(1;-4;6)$.
89. $A(14;4;5)$; $B(-6;-3;2)$; $C(-2;-6;-3)$; $D(-2;2;1)$.
90. $A(1;2;0)$; $B(3;0;-3)$; $C(5;2;6)$; $D(8;4;-9)$.

91–100. Знайти власні значення та власні вектори лінійного перетворення, заданого в деякому базисі матрицею A.

91. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.   92. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

93. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   94. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

95. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 4 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.   96. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

97. $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.   98. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

99. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.   100. $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Вступ до математичного аналізу.

101–110. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність даних функцій.

101. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2}}$;
б) $y=\lg(1-\sin x)$;
в) $y=\arccos(1-x^2)$.

102. *а*) $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$;
б) $y=\operatorname{arctg}(\lg x)$;
в) $y=\arccos(2\sin)$.

103. *а*) $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$;
б) $y=\operatorname{arctg}(\lg(\cos x))$;

104. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}$;
б) $y=\sqrt{\sin x}$;

в) $y=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{2}\right).$

в) $y=\arcsin(\lg(\operatorname{tg} x)).$

105. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-6x+8}{x^4}};$

б) $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$

в) $y=\operatorname{arctg}(\ln x).$

106. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5x+8}{3x-4}};$

б) $y=\lg(1-2\cos x);$

в) $y=\sqrt{1-0{,}2^{\cos x}}.$

107. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}};$

б) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} x};$

в) $y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right).$

108. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}};$

б) $y=\lg(\sin(\lg x));$

в) $y=\arcsin 2^x.$

109. *а*) $y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{8}\right);$

б) $y=\sqrt[4]{5-x-\dfrac{4}{x}};$

в) $y=\sqrt{\cos x-\sin 2x}.$

110. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}};$

б) $y=\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}};$

в) $y=\sin(\lg x).$

111–120. Задана функція *y*=*f*(*x*) та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

1) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
2) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
3) зробити схематичний рисунок.

111. $y=5^{\frac{1}{x-2}};\quad x_1=3;\quad x_2=2.$

112. $y=3^{\frac{1}{x+3}};\quad x_1=-1;\quad x_2=-2.$

113. $y=4^{\frac{1}{2-x}};\quad x_1=1;\quad x_2=2.$

114. $y=6^{\frac{1}{x+3}};\quad x_1=-1;\quad x_2=-3.$

115. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3.$

116. $y = 7^{\frac{1}{4-x}}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 4.$

117. $y = 8^{\frac{1}{x-3}}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 3.$

118. $y = 9^{\frac{1}{x-4}}; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 4.$

119. $y = 10^{\frac{1}{x-5}}; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 5.$

120. $y = 11^{\frac{1}{5+x}}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = -5.$

121–130. Задано функцію $y=f(x)$. Знайти точки розриву, якщо вони існують зробити рисунок.

121. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } 0 \le x \le 4; \\ 5, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$ 122. $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 < x < 2; \\ 4, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$

123. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^3 + 1, \text{ якщо } 0 < x < 2; \\ 5, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$ 124. $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x < 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 \le x \le 3; \\ 4, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

125. $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ якщо } x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 3, \text{ якщо } x > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ 126. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sin x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}; \\ 3, \text{ якщо } x > \dfrac{3\pi}{2}; \end{cases}$

127. $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ якщо } x < 0; \\ \cos x, \text{ якщо } 0 \le x \le 2\pi; \\ 1, \text{ якщо } x > 2\pi. \end{cases}$ 128. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sin x, \text{ якщо } 0 < x \le \pi; \\ 3, \text{ якщо } x > \pi. \end{cases}$

129. $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x < 0; \\ 2x, \text{ якщо } 0 \le x \le 2; \\ 1, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$ 130. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x + 1, \text{ якщо } 0 \le x \le 4; \\ 2, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

131–140. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

131. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n}{\sqrt{n^6+5n^3+1}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\mathrm{tg}\,\pi\frac{x}{2}}$.

132. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2-2n+3}-n}{5n+3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$; *г*) $\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

133. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^2}}$.

134. *а*) $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$; *б*) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{ctg}\,2x\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

135. *а*) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)}$.

136. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x}{x^2-3x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

137. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$ *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}.$

138. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x};$ *г*) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$

139. *а*) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2};\ \alpha\neq\beta$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}.$

140. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{5(n+2)!};$ *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-5x+2};$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}};$ *г*) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}.$

141–150.

1. Дано комплексне число z. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. (1-ша колонка таблиці).
2. Дано комплексні числа z_1 та z_2. Виконати дії:
   $z_1\cdot z_2;\ z_1 : z_2;\ z_1^3;\ z_2^4$ (2-га колонка таблиці).
3. Виконати дію (3-тя колонка таблиці).

Номер завдання	Дані для варіанта		
	1	2	3
141	$-i$	$z_1=1-\sqrt{3}i;\ z_2=-1+i$	$\sqrt{i}$
142	$1-i\sqrt{3}$	$z_1=5+5\sqrt{3}i;\ z_2=1-\sqrt{3}i$	$\sqrt[4]{-1}$
143	$-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$z_1=1+\sqrt{3}i;\ z_2=-i$	$\sqrt[8]{-9}$
144	$\dfrac{1-i}{1+i}$	$z_1=2i;\ z_2=-1-i$	$\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$
145	$\sqrt{3i}$	$z_1=-3\sqrt{3}i;\ z_2=\sqrt{3}-i$	$\sqrt[5]{-1-i}$
146	$\sqrt{3}-3i$	$z_1=1-i\sqrt{3};\ z_2=\sqrt{3}+i$	$\sqrt[5]{(2-2i)^4}$

Номер завдання	Дані для варіанта		
	1	2	3
147	$\sqrt{3}-i$	$z_1=-\sqrt{3}-i;\ \ z_2=3-i$	$(1+i)^{10}$
148	$3-i$	$z_1=\sqrt{3}i;\quad z_2=\sqrt{3}+3i$	$\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^2}$
149	$-\sqrt{3}+i$	$z_1=-\sqrt{3}-3i;\ \ z_2=1+i$	$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
150	$2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}i;$	$z_1=-2+\sqrt{2}i;\ \ z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$	$(1+i)^5\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$

III. Похідна та її застосування

151–160. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

151. а) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x^2}};$ б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}};$

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\log_5(x^2-3x);$ г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x};$

д) $\sin(x+y)-x^3y^2=0;$ е) $y=x^5\ln x;$

ж) $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

152. а) $y=5\cdot\sqrt[5]{x^3+3x^2-\dfrac{2}{x}};$

б) $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x);$

в) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}};$ г) $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};$

д) $x\operatorname{tg} y-y\sin x+x^3=0;$ е) $y=e^{-x}\cos x;$

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\sqrt{t}; \\ y=\ln(1+t). \end{cases}$

153. а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

в) $y = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} - \log_1(x^3 - 5x)$; г) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} x}$;

д) $e^{xy} + 2x^2 + y^3 = 0$; е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

154. а) $y = x + \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{2}$;

в) $y = x \arcsin \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{1+x^2}$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $\operatorname{tg}(x-y) - x^2 y^3 = 0$; е) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t; \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

155. а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

в) $y = \operatorname{arctg}(\sin x) - 5^{\ln x}$; г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x}$;

д) $x^2 y^2 = \arcsin \dfrac{x}{y}$; е) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases} x = 3 \sin^2 t; \\ y = 2 \cos^3 t. \end{cases}$

156. а) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$; б) $y - 3^{\operatorname{tg}^2 5x} - \log_3(x^2 - 7x)$;

в) $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$; г) $y = (x-2)^{\sin^2 x}$;

д) $x^2 - y^3 + e^y \operatorname{arctg} x = 0$; е) $y = \sqrt{1 + x^2 \cdot \arcsin x}$;

ж) $\begin{cases} x = \cos \dfrac{t}{2}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

157. а) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^5 + 3x^4 - \dfrac{2}{x}}$; б) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$;

в) $y=5^{\arcsin 2x}-\log_5(x^2-7x)$; г) $y=(x^2-x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln(x+y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; е) $y=x^2\operatorname{arctg}x$;

ж) $\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

158. а) $y=\log_3\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; б) $y=3^{\operatorname{ctg}x}-\arcsin\sqrt{x}$;

в) $y=e^{a\operatorname{rctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; г) $y=(\operatorname{tg}3x)^{\sin x}$;

д) $y\sin x+\cos(x-y)=x^2$; е) $y=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$;

ж) $\begin{cases} x=2t^3+t; \\ y=\ln t. \end{cases}$

159. а) $y=x\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1+x^2}{5x-3}}$; б) $y=e^{\sin x}\cdot\operatorname{tg}^3 2x$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{x}-\cos^3 5x$; г) $y=(x^2+3x)^{\operatorname{arctg}x}$;

д) $2^{x-y}=x^2y^2$; е) $y=x\cdot e^{-x^2}$;

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t; \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

160. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=3^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos\sqrt[8]{x}$;

в) $y=\ln\arccos 2x+\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^3}$; г) $y=(x^2+1)^{\arcsin x}$;

д) $x\sin y-y\operatorname{tg}x+y^2=0$; е) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$;

ж) $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\ln(1-t^2). \end{cases}$

161–170. Використовуючи правило Лопіталя, знайти слідуючі границі.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; 162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\sin x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x.$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$

163. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2)\operatorname{ctg} x;$ 164. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x};$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}.$ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$

165. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1);$ 166. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$

$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$

167. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x);$ 168. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^6 2x};$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}.$ $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$

169. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x};$ 170. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2};$

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{2}{x^2}}.$ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{\ln(e^x - 1)}}.$

171–180. Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати їх графіки.

171. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1};$ 172. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4};$

$y = \ln(1+x^2).$ $y = \ln(1-x^2);$

173. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$ 174. $y = \frac{x^3}{x^3 + 1};$

$y = xe^{-x}.$ $y = \frac{x}{\ln x}.$

175. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$ 176. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1};$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$ $y = \frac{\ln x}{x^2}.$

177. $y = \dfrac{x}{9 - x^2}$;

$y = \dfrac{1}{x \ln x}$.

178. $y = \dfrac{x - 1}{(x + 1)^2}$;

$y = e^{2x - x^2}$.

179. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$;

$y = xe^{\frac{4}{x}}$.

180. $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x - 1}$;

$y = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$.

181–190. 1) Методом хорд та дотичних розв’язати рівняння (виділення кореня провести за методом проб) з точністю до 0,00001.

2) Роз’язати рівняння методом ітерації з точністю до 0,01.

181. $x^3 + 2x - 8 = 0$.

182. $x^3 + x + 1 = 0$.

183. $x^3 + 4x - 1 = 0$.

184. $x^3 + 2x - 3 = 0$.

185. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

186. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

187. $(x + 1)^3 - x = 0$.

188. $x^3 + 60x - 80 = 0$.

189. $x^5 + x + 1 = 0$.

190. $x^5 - 5x + 2 = 0$.

191–200. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

191. $f(x) = x^3 - 18x + 7$; $[0;4]$.

192. $f(x) = x^5 - 6x^4$; $[-1;1]$.

193. $f(x) = x^3 - 3x^2$; $[-2;2]$.

194. $f(x) = x^4 - 81x$; $[-4;1]$.

195. $f(x) = x^5 - 4x^4$; $[-2;2]$.

196. $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2;2]$.

197. $f(x) = x^4 + 12x$; $[-3;1]$.

198. $f(x) = x^5 + 12x$; $[-2;2]$.

199. $f(x) = x^6 + x^7$; $[-3;3]$.

200. $f(x) = x^4 + 20x$; $[-4;1]$.

IV. Диференціальні числення функцій багатьох змінних

201–210. Знайти область визначення функції $z = f(x; y)$. Зобразити дану область графічно.

201. $z = \ln(x^2 + y)$.
202. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
203. $z = \sqrt{1 + x - y^2} + \sqrt{1 - x - y^2}$.
204. $z = \sqrt{y \sin x}$.
205. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}$.
206. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.
207. $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.
208. $z = \arcsin x \cdot \dfrac{y-1}{x}$.
209. $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.
210. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

211–220. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = f(x; y)$ в точці M_0 при заданих Δx і Δy.

211. $z = x^2 + xy^2 - 17$; $M_0(1;1)$; $\Delta x = -0{,}03$; $\Delta y = 0{,}02$.
212. $z = x^2 + xy + y^2 - 9$; $M_0(1;2)$; $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = -0{,}04$.
213. $z = x^2 + 2xy - 2$; $M_0(2;3)$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}02$.
214. $z = 3x^2 - xy + y + x + 1$; $M_0(1;3)$; $\Delta x = 0{,}06$; $\Delta y = 0{,}02$.
215. $z = 2xy - y^2 + 2x$; $M_0(3;1)$; $\Delta x = 0{,}04$; $\Delta y = 0{,}06$.
216. $z = xy^2 + 2x^2 - 4$; $M_0(-3;2)$; $\Delta x = -0{,}07$; $\Delta y = -0{,}01$.
217. $z = 3x^2 + xy^3 - 4x$; $M_0(3;4)$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}03$.
218. $z = xy + 2y^2 - 2$; $M_0(-1;-1)$; $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = -0{,}04$.

219. $z = x^3 - 2xy + 2y^2 + 1; \quad M_0(1;-1); \quad \Delta x = 0{,}01; \quad \Delta y = -0{,}01.$

220. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{3}y^3; \quad M_0(-1;1); \quad \Delta x = -0{,}02; \quad \Delta y = 0{,}01.$

221–230. Обчислити наближено.

221. $(2(\sqrt{0{,}97}))^{3{,}02}.$

222. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right).$

223. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}.$

224. $\sin 44° \cdot \operatorname{tg} 59°.$

225. $(4{,}03)^{0{,}98}.$

226. $\ln(\sqrt{4{,}02} - \sqrt[3]{0{,}97}).$

227. $\sqrt{(8{,}04)^3 + (6{,}03)^2}.$

228. $\operatorname{arctg}\frac{(1{,}04)^2}{0{,}98}.$

229. $\sqrt{(6{,}02)^3 + (7{,}97)^2}.$

230. $(2 - \sqrt{1{,}03})^{2{,}98}.$

231–240. Дослідити функцію $z = f(x; y)$ на екстремум.

231. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

232. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

233. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

234. $z = x^3y^2(6 - x - y).$

235. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \; x > 0; \; y > 0.$

236. $z = e^{-x^2 - y}(2x^2 + y^2).$

237. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; \; x > 0; \; y > 0.$

238. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y; \; x > 0; \; y > 0.$

239. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

240. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

241–250. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x; y)$ у замкнутій області D заданою системою нерівностей.

241. $z = x - 2y + 5;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1.$

242. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3.$

243. $z = x^2 y(2 - x - y);\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6.$

244. $z = x + y;\ x^2 + y^2 \le 1.$

245. $z = x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 \le 1.$

246. $z = xy^2;\ x^2 + y^2 \le 1.$

247. $z = xy;\ x^2 + y^2 \le 4.$

248. $z = x^3 + y^3 - 3xy;\ 0 \le x \le 3;\ -1 \le y \le 2.$

249. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3.$

250. $z = x^2 + 2xy - 4x - 8y;\ \ 0 \le x \le 1;\ \ 0 \le y \le 2.$

251–260. Експериментально отримати шість значень функції $y = f(x)$ при шести значеннях аргументу, які записано в таблицю. Методом найменших квадратів знайти функції виду $y = ax + b$ та $y = ax^2 + bx + c$. Зробити рисунок в декартовій системі координат.

251.

x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75
y	1,636	1,732	1,877	2,034	2,292	2,340

252.

x	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30
y	1,023	1,096	1,1472	1,301	1,409	1,501

253.

x	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
y	2,2739	2,0301	1,9686	1,788	1,595	1,343

254.

x	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,72
y	2,574	2,325	2,094	1,862	1,749	1,621

255.

x	0,68	0,73	0,80	0,88	0,93	0,99
y	0,809	0,895	1,027	1,341	1,524	1,642

256.

x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40
y	9,05	6,616	4,692	3,351	2,739	2,365

257.

x	1,375	1,380	1,385	1,4	1,6	1,72
y	5,04	5,121	4,321	0,412	3,111	4,001

258.

x	1,2	1,21	1,41	1,45	1,6	2
y	4,842	6,399	5,656	5,823	6,001	6,197

259.

x	0,21	0,215	0,41	0,51	0,6	1
y	4,83	4,722	4,619	4,512	4,42	4,333

260.

x	0,05	0,101	0,106	0,111	0,121	0,126
y	1,262	1,276	1,291	1,301	1,321	1,326

V. Інтегральне числення

261–270. Знайти інтеграли: I

I 261. $\int\frac{dx}{4x+3}$; $\int e^{-2x+4}dx$; $\int\cos 5x dx$; $\int x\sin 2x dx$; $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$.

262. $\int\frac{dx}{2x+1}$; $\int 2^{x-1}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-4}$; $\int x\cos 3x dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

263. $\int\frac{dx}{x-3}$; $\int \mathrm{tg}\, 4x dx$; $\int\frac{dx}{x^2+4}$; $\int x\ln x dx$; $\int\frac{x dx}{x^2-4x+5}$.

264. $\int\frac{dx}{2x-4}$; $\int\sin 8x dx$; $\int\frac{dx}{x^2-9}$; $\int\ln^2 x dx$; $\int\frac{x-1}{x^2-4x+5}dx$.

265. $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$; $\int \mathrm{tg}\, 2x dx$; $\int \frac{dx}{3x-1}$; $\int e^{5x} dx$; $\int xe^x dx$.

266. $\int \frac{dx}{x-11}$; $\int \cos 8x dx$; $\int e^{2x-1} dx$; $\int x\cos x dx$; $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx$.

267. $\int \frac{dx}{x+2}$; $\int e^{x+2} dx$; $\int \sin(x+2) dx$; $\int x\sin x dx$; $\int \frac{x dx}{x^2-4x+8}$.

268. $\int \frac{dx}{x-5}$; $\int e^{x-5} dx$; $\int \sin 4x dx$; $\int x \arcsin x dx$; $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

269. $\int \frac{dx}{x-6}$; $\int 2^{x-6} dx$; $\int \sin(x-6) dx$; $\int (x-6)e^x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

270. $\int \frac{dx}{x-7}$; $\int e^{x-7} dx$; $\int \cos(2x-7) dx$; $\int (x-7)\sin x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}$.

271–290. Знайти інтеграли II

II 271. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}$.

272. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

273. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

274. $\int \cos^7 x dx$.

275. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

276. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$.

277. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$.

278. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.

279. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}} dx$.

280. $\int \sin^5 2x dx$.

281. $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$.

282. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$.

283. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

284. $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin x} dx$.

285. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

286. $\int \sin^2 x\cos^5 xdx$.

287. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}(1+\sqrt[3]{x-2})}$.

288. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

289. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}dx$.

290. $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$.

291–300. Знайти інтеграли III

III 291. $\int \sin^5 \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}dx$.

292. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$.

293. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

294. $\int \sin^5 x\cos^2 xdx$.

295. $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$.

296. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$.

297 $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$.

298. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

299. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x-3}dx$.

300. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

301–310. Обчислити визначений інтеграл.

301 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$.

302 $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 xdx$.

303 $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$.

304 $\int\limits_0^1 xe^x xdx$.

305 $\int\limits_0^{\pi} x\sin xdx$.

306 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

307 $\int\limits_1^2 \ln xdx$.

308 $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$.

309 $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

310 $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

311–320. 1. Знайти площу фігури, обмежену даними лініями.

2. Знайти об’єм тіла обертання фігури (п.1.) навколо осі *Ox* та *Oy*.

311. $y = x^2 - 2; y = 0.$ 312. $y = x^2 - 6x + 5; y = 0.$

313. $y = x^3; y = x^2.$ 314. $y = x; y = -x + 2; y = 0.$

315. $y = -x^2 + 4; y = 0.$ 316. $y = -x^2 + 6x - 5; y = 0.$

317. $y = \sqrt{x}; y = 2 - x, y = 0.$ 318. $y = 4 - x^2; y = 0, x = 0, x \geq 0.$

319. $y = e^x; y = 0, x = 0, x = 1.$ 320. $y = x^2 + 1; y = 0, x = 1, x = 2.$

321–330. Знайти розв’язок рівняння.

321. а) $x\sqrt{1+y^2} + y \cdot y'\sqrt{1+x^2} = 0;$ б) $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2};$

в) $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$ г) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}; y(1) = 1.$

322. а) $\sqrt{3+y^2} + y \cdot y'\sqrt{1-x^2} = 0;$ б) $xy' - y + xy^2 = 0;$

в) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2};$ г) $x^2y' + (1-2x)y = x^2; y(1) = 1.$

323. а) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2};$ б) $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2; y(0) = 1$

в) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0;$ г) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

324. а) $(1+x^2)dy + ydx = 0;$ б) $xy' + y = 2y^2 \ln x; y(1) = \dfrac{1}{2}.$

в) $xy' + y = y^2;$ г) $y' = \dfrac{y - 2x}{y + 2x}.$

325. а) $2xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx;$ б) $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y;$

в) $2(xy' + y) = xy^2; y(1) = 2.$ г) $y' + xy = -x^3; y(0) = 3.$

326. а) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y);$ б) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^3};$

в) $x^2y' + xy + 1 = 0;$ г) $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0.$

327. а) $(2x - 1 - \frac{y}{x^2})dx = (2y - \frac{1}{x)dy};$ б) $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x;$

в) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0;$ г) $xy' + y = xy^2; y(1) = 1.$

328. а) $y' - \frac{1}{3}y \sin x + y^2 \sin x = 0;$

б) $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0;$

в) $ydy = (2y - x)dx;$

г) $y' - ytgx = -\frac{3}{2}y^4 \sin x; y(0) = 1.$

329. а) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0;$

б) $y^2dx + (x + e^{\frac{2}{y}})dy = 0; y(e) = 2.$

в) $2x^2dy = (x^2 + y^2)dx;$

г) $y' + y = xy^3.$

330. а) $(x^2 - y^2)dy = 2xydx.$

б) $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1); y(0) = 1;$

в) $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0;$

г) $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2; y(0) = 2.$

331–340. Знайти загальний розв’язок рівнянь

331. а) $y''' = \frac{\cos x}{\sin^3 x};$ б) $x^3y'' = x^2y';$ в) $y^3y'' + 1 = 0.$

332. а) $y''' = x \sin x;$ б) $xy'' + y' + x = 0;$ в) $4y^3y'' = y^4 - 1.$

333. а) $y''' = (x+1)e^{3x};$ б) $xy'' = (1 + 2x^2)y';$ в) $y'''y' - 3(y'')^2 = 0.$

334. а) $y'' = x \sin x \cos x;$ б) $xy''' + y'' = 1 + x;$

в) $y'' = 2y(y')^2(1 + y^2) = 0.$

335. а) $y''' = x \ln x;$ б) $y''x \ln x = 3y';$

в) $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0.$

336. а) $y''' = x + \cos x;$ б) $xy^{IV} = y''';$

в) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1.$

337. а) $y'' = \operatorname{arctg} x;$ б) $(1 + e^x)y'' + y' = 0;$

в) $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0.$

338. а) $y'' = \operatorname{tg}^2 3x;$ б) $y^{\mathrm{IV}} \operatorname{tg} x = y''' + 1;$ в) $y''' = \sqrt{1 - (y''')^2}.$

339. а) $y''' = xe^{2x};$ б) $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 6;$ в) $y^3 y'' = 4(y^4 - 1).$

340. а) $\sqrt{1 + x^2}\, y'' - 1 = 0;$ б) $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y'';$

в) $3y'' = (1 + (y'')^2)^{3/2}.$

341–350. Знайти розв'язок рівняння

341. а) $y'' + y = 4e^x;$ б) $y'' - y = 2x; y(0) = 0; y'(0) = -1;$

в) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

342. а) $y'' - 2y' = 2e^x;$ б) $y''' - y' = -2x; y(0) = 0; y'(0) = 2; y''(0) = 2;$

в) $y'' - 2y = \frac{2}{x^3}(x^2;-1).$

343. а) $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^x;$ б) $y'' + y = 2(1 - x); y()0 = 2; y'(0) = -2;$

в) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$

344. а) $y'' + y = 4x \cos x;$ б) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x; y(0) = 2; y'(0) = 3;$

в) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}.$

345. а) $y'' - y = -5e^{-x}(\sin x + \cos x);$

б) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2; y(0) = 1; \ y'(0) = 0;$

в) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

346. а) $y'' + 9y = 36e^{3x};$

б) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}; y(0) = y'(0) = 0;$

в) $y'' + y = \sec x.$

347. а) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x;$

б) $y'' + y = 2\cos x; y(0) = 1; y'(0) = 0;$

в) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$

348. а) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3/2\, x};$

б) $y'' - y' = 2()1 - x; y(0) = 1; y'(0) = -1;$

в) $y'' - y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}.$

349. а) $y'' + y' = 2x^2 e^x; y(0) = 5; y'(0) = 0{,}5;$

б) $y'' + y = -\sin x;$

в) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x}.$

350. а) $y''' - 3y' = 3(2 - x^2);$

б) $y'' - 2y' + y = 2xe^x; y(0) = 1; y'(0) = -1;$

в) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x.$

351–360. Розв’язати системи диференціальних рівнянь.

351. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2x + y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 2y = 5e^t \sin t. \end{cases}$

352. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

353. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$

354. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

355. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x + 3y = te^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} - 3x + y = e^{3t}. \end{cases}$

356. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^{t}. \end{cases}$

357. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 4z + 3y = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - z - y = x. \end{cases}$

358. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z + 2y = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 2z - 4y = \cos x. \end{cases}$

359. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + 5e^{t} \sin t. \end{cases}$

360. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y + e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 5y. \end{cases}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

І. *Овчінніков Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика: В 2 ч. – Ч. 1. – К.: Техніка, 2000. – 590с.

2. *Овчінніков Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика: В 2 ч. – Ч. 2. – К.: Техніка, 2000. – 790с.

3. *Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Математичний аналіз для економістів. – К.: Європейський університет, 2002. – 297 с.

4. *Ізварін В. О.* Застосування операційного числення до інженерних задач. – К.: КНУБА. - 1997. – 175 с.

5. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Математика для економістів. Теорія ймовірності та математична статистика. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.

6. *Справочник* по теории вероятности и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. – К.: Наукова думка, 1978. – 582 с.

7. *Журавель О.О.* Вища математика. Збірник завдань для курсових і самостійних робіт. – К.: КДТУБА, 1997. – 267 с.